UNIVERSITETI SHTETËROR I TETOVËS
FAKULTETI I SHKENCAVE MATEMATIKE-NATYRORE

Dr. sc. MINIR EFENDIJA

A N A L I Z A
M A T E M A T I K E
III & IV

Prishtinë, 2008

Recenzentë:

Dr sc Halil Turku, prof. i rregullt i FSHMN në UP

Dr sc Muharrem Berisha, prof. i rregullt i FSHMN në USHT

Kryetar i Këshillit Botues

Prof Dr ?????????

Këshilli Botues i Universitetit të Tetovës lejoi botimin dhe përdorimin e këtij teksti me Vendimin nr. ???????? të datës ????????.

Parathënie

Teksti Analiza matematike II është hartuar sipas plan-programit të lëndës po me këtë emër e që ligjërohet në vitin e dytë të studimeve në Degën e Matematikës të FSHMN. Mirëpo, shpresojmë se ky do të jetë i mirëseardhur edhe edhe për studentë të tjerë të Universitetit tonë të cilët kanë si lëndë analizën matematike ose pjesë të saj. Është përpiluar e hartuar asisoj që për lexuesin në një mënyrë të jetë njëfarë takimi i dytë me analizën matematike, d.m.th. në mënyrë korrekte i ka të përvehtësuara njohuritë nga Analiza matematike I.

Meqenëse në kohën e fundit disiplinat e reja matematike si Topologjia, Analiza funksionale etj., janë duke u zhvilluar shumë dhe kanë si bazë analizën matematike, autori gjatë shtjellimit të lëndës është përpjekur që t'i shmanget trajtimit klasik të kësaj lënde dhe të ndjekë një "rrugë të mesme" që lexuesi në mënyrë më të lehtë të përvetësoj këtë lëndë.

Dëshira që paraqitja e kuptimeve dhe rezultateve nga Analiza matematike II të jetë sistematike dhe në mënyrë sa më bashkëkohore ka ndikuar në masë të vogël, që vëllimi i tekstit të tejkalojë mundësitë e mësimdhënësit për ligjërimin e tij, për fondin e caktuar të orëve. Mirëpo, nuk do të ndihet mangësi në kompaktësinë e lëndës, në qoftë se nuk merren pikat që janë shënuar me yll. Ato mund t'u shërbejnë studentëve që me punë të pavarur t'i thellojnë edhe më njohuritë nga analiza matematike. Në fund të tekstit është dhënë literatura e cila studentëve me interesim të posaçëm për analizën matematike mund t'u shërbejë si orientim i mirë për të plotësuar e thelluar studimin e kësaj lënde.

Teksti Analiza matematike II është ndarë në 6 kapituj ku, na merr mendja, konceptet e paraqitura studiohen në mënyrë të plotë dhe shihen nga aspekte të ndryshme, vazhdimisht duke pasur parasysh trajtimin bashkëkohor e didaktiko-shkencor të tyre. Në çdo kapitull nocionet ilustrohen me shembuj të zgjidhur si dhe në çdo paragraf epet një numër i konsiderueshëm detyrash të cilat, me qëllim përvetësimi sa më të plotë të lëndës, duhet t'i zgjidhë vetë lexuesi.

Në çdo paragraf të çdo kapitulli me radhë janë numëruar përkufizimet, teoremat, lemat e rrjedhimet. Formulat janë të numëruara në çdo pikë të paragrafit në mënyrë të veçantë. Nëse p.sh. thirremi në ndonjë teoremë, atëherë shënohet numri i kapitullit, i paragrafit dhe ai i teoremës. P.sh. teorema III 2.1. *është teorema 1. në paragrafin 2. të kapitullit* III. *Kur bëhet fjalë për kapitullin* *e njëjtë, numri përkatës nuk shkruhet. P.sh.* teorema 2.5. *është teorema* 5 *e paragrafit* 2.

Në fund në mënyrë të veçantë i falenderoj recenzentët Prof. Dr. Halil Turkun e Prof. Dr. Muharrem Berishën të cilët më kanë dhënë vërejtje e sugjerime të vlefshme që kontribuan në përmirësimin e disa pjesëve dhe evitimin e disa lëshimeve në dorëshkrim. Po ashtu kanë lexuar pjesë të dorëshkrimit dhe kanë dhënë vërejtje e sugjerime edhe Prof. dr. Qamil Haxhibeqiri si dhe, në atë kohë, studentët Ramadan Limani, Dukagjin Pupovci e Erzen Berisha. Të gjithëve u shprehi falenderimet e mia të mëdha.

Prishtinë, prill 1986 Minir Efendija

Për botimin e dytë

Teksti Analiza matematike III & IV është ribotim i tekstit të mëparshëm Analiza matematike II i hartuar sipas plan-programit të lëndëve që ligjërohen në të gjitha degët e vitit të dytë të studimeve në Departamentin e Matematikës të FSHMN. Kapitujt I dhe II përfshijnë lëndën e Analizës matematike III, ndërsa ata III, IV dhe V atë të Analizës matematike IV. Kapitulli VI mbulon pjesërisht përmbajtjen e lëndës (zgjedhore) Analiza vektoriale e cila poashtu është e përfshirë në studimet themelore të Departamentit të Matematikës. Mirëpo, shpresojmë se ky do të jetë i mirëseardhur edhe për studentë të tjerë të cilët kanë si lëndë analizën matematike ose pjesë të saj, në të gjitha fakultetet teknike si dhe në atë të Edukimit.

Në botimin e dytë janë evituar disa gabime të vërejtura nga autori e disa lexues, të cilët i falenderoj. Po ashtu, disa pjesë janë plotësuar ose ndryshuar. Kapitulli III në tërësi është ripunuar, duke konsideruar se në këtë mënyrë është dhënë një qasje më bashkëkohore e materialit që aty trajtohet.

Falenderoj Fitim I. Halilin për kontributin e madh në përgatitjen teknike të tekstit dhe në dhënien e sugjerimeve të vlefshme që dukshëm ndikuan në përmirësimin e tij.

Prishtinë, korrik 2005 Minir Efendija

Për botimin e tretë

Edhe në botimin e tretë janë evituar disa gabime të vërejtura nga autori e disa lexues, të cilët i falenderoj. Kapitulli III është plotësuar me disa rezultate të rëndësishme lidhur me materialin që aty trajtohet. Po ashtu, është shtuar edhe Indeksi, që paraqet ndihmesë të madhe për lexuesin. Përgatitja kompjuteike, për ndryshim nga botimet e mëhershme, është bërë me versionin e Latehut.Theksojmë se, nëse p.sh. thirremi në ndonjë teoremë (përkufizim, lemë, rrjedhim ose shembull), atëherë shënohet numri i kapitullit, i paragrafit dhe ai i teoremës. P.sh. teorema 3.2.1 është teorema 1. *në paragrafin* 2. *të kapitullit* 3.

Falenderoj në mënyrë të veçantë Rektoratin e USHT që mundësoj botimin e këtij teksti i cili do t'u shërbej studentëve si literaturë bazë për përvehtësimin e *lëndëve Analiza matematike II-A dhe Analiza matematike II-B, të cilat dëgjohen në Vitin e dytë të studimeve të Drejtimit Matematikë në FSHMN. Po ashtu, falenderoj edhe Ass. Krutan Rasimin për angazhimin e tij rreth botimit të këtij teksti.*

Jam i vetëdijshëm për ndonjë lëshim eventual në përmbajtjen e tekstit që është përvjedhur pa dijeninë time. Lexuesve të nderuar u jam shumë mirënjohës në qoftë se vërejtje të tilla dhe sygjerime të tjera u ofrojnë autorit të cilat, në ribotimin eventual, do të merren parasysh.

Tetovë, Tetor 2008 Minir Efendija

Përmbajtja

1

SERITË

1.1 SERITË NUMERIKE

Në këtë paragraf do të jepet kuptimi i shumës së pafundme i cili është zgjëerimi i shumës së fundme dhe do të shqyrtohen vetitë themelore të saj.

1.1.1 Përkufizimi i serisë numerike dhe i konvergjencës së saj

Le të jetë dhënë vargu numerik:

$$a_1, a_2, ..., a_n, ... \tag{1}$$

Përkufizimi 1.1.1 *Shprehjen:*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

ose:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3}$$

e quajmë **seri numerike** *ose thjeshtë* **seri** *(ndonjëherë quhet* **seri e pafundme***).*

Elementet e vargut (1) quhen **kufiza** ose **terma** të serisë (2) dhe a_n quhet **termi i përgjithshëm**. Seria konsiderohet e njohur kur dihet termi i përgjithshëm a_n i vargut (1).

Le të jetë dhënë seria (3). Mbledhim me radhë kufizat e saj dhe formojmë shumat:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$
\begin{array}{l}
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Kufiza S_k e vargut:

$$S_1, S_2, ..., S_n, ...,$$

quhet **kufiza e k-të e pjesshme** e serisë (3).

Përkufizimi 1.1.2 *Në qoftë se vargu $\{S_n\}$ konvergjon tek një numër real S, d.m.th. vlen $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ atëherë thuhet se* **seria** (3) **është konvergjente** *dhe S quhet* **shuma** *e saj.*

Në këtë rast shkruajmë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Në qoftë se $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nuk ekziston ose është i pafundëm atëherë thuhet se seria (3)është **divergjente**.

Marrim tash disa shembuj për të treguar se asnjëra prej klasave të serive konvergjente e divergjente nuk është boshe.

Shembulli 1.1.1 Të shqyrtohet natyra e serisë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n-2)}.$$

Zgjidhje: Shuma e $n-$të e pjesshme është:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n+1)(3n-1)}.$$

Kur dihet se $\frac{1}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1})$ gjejmë$S_n = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{(3n-1)})$ dhe shohim se $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$. Pra seria e dhënë konvergjon dhe shuma e saj është $\frac{1}{3}$.

Shembulli 1.1.2 Të shqyrtohet natyra e serisë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\cdot q^{n-1}$.

Zgjidhje: Shihet se termat e serisë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\cdot q^{n-1}$ janë kufiza të një progresioni gjeometrik, prandaj atë e quajmë **seri gjeometrike.** Në këtë rast kemi:

$$S_n = a + a\cdot q + ... + a\cdot q^{n-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Për $|q| < 1$ kemi $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, prandaj në këtë rast seria konvergjon dhe:

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Për $|q| > 1$ seria divergjon. Me të vërtetë, për $q > 1$ kemi $q^n \to +\infty, n \to \infty$, dhe $S = (\operatorname{sgn} a) \cdot \infty$, që tregon se seria ka shumë të pafundme. Mëtutje, në rastin kur $q < -1$, meqenëse vargu $\{q^n\}$ është oscilues, konstatojmë se nuk ekziston $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$.

Për $q = 1$ kemi $S_n = n \cdot a$. Meqenëse $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ shohim se seria divergjon. Më në fund, edhe për $q = -1$ seria divergjon sepse në këtë rast:

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{për } n- \text{ parë} \\ a, & \text{për } n- \text{ tek,} \end{cases}$$

prej nga shihet se vargu $\{S_n\}$ është oscilues.

Vërejtja 1. Derisa për një numër të fundmë kufizash mbledhja është gjithmonë e realizueshme dhe ajo çon në një numër të fundmë, mbledhja e një bashkësie të pafundme numrash (p.sh. si shihet në shembullin 2, për $|q| > 1$) shpesh nuk është e thënë të jetë numër i fundmë.

Vërejtja 2. Nga përkufizimi 1.2. shihet se problemi i konvergjencës së serisë reduktohet në problemin e konvergjencës së vargut të shumave të pjesshme të saj. Anasjelltas, le të jetë dhënë vargu $\{x_n\}$. Shënojmë:

$$a_1 = x_1,\ a_2 = x_2 - x_1,\ \dots\ ,\ a_n = x_n - x_{n-1}, \dots,$$

dhe formojmë serinë (2).

Atëherë:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = x_n,$$

që don të thot se $\{x_n\}$ është varg i shumave të pjesshme të serisë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Në qoftë se vargu $\{x_n\}$ konvergjon, atëherë do të konvergjojë edhe seria (2). Kështu shohim se studimi i serive dhe i shumave të tyre është ekuivalente me studimin e vargjeve dhe limiteve të tyre.

1.1.2 Vetitë e serive konvergjente

Teorema 1.1.1 *Le të jetë c konstante. Në qoftë se seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergjon atëherë edhe seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ konvergjon dhe vlen barazimi:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Vërtetimi. Në qoftë se shënojmë:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ dhe } S'_n = \sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k,$$

atëherë shohim se:

$$S'_n = c \cdot S_n. \tag{2}$$

Me qenë se ekziston $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ atëherë sipas (2), ekziston edhe $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n$ dhe vlen:

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Me këtë teorema u vërtetua sepse barazimi i fundit në të vërtetë është barazimi (1).

Teorema 1.1.2 *Në qoftë se seritë:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{dhe} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

konvergjojnë atëherë edhe seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n),$$

e cila quhet **shumë** *e serive të dhëna, po ashtu konvergjon dhe vlen barazimi:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{3}$$

Vërtetimi. Shënojmë:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \;\; S'_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \;\; S^*_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k).$$

Atëherë, meqenëse shumat e mësipërme janë të fundme, marrim $S^*_n = S_n + S'_n$. Këndej shohim se nga ekzistenca e $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ dhe ekzistenca e $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n$ rrjedh ekzistenca e $\lim\limits_{n\to\infty} S^*_n$ dhe fitojmë:

$$\lim_{n\to\infty} S^*_n = \lim_{n\to\infty} (S_n + S'_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} S'_n,$$

që në të vërtetë paraqet barazimin (3).

Vërejtja 3. Shembulli në vijim tregon se kur seritë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ janë divergjente atëherë seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ në rastin e përgjithshëm nuk është divergjente.

Marrim seritë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

dhe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + ...,$$

të cilat janë divergjente. Mirëpo seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n-1}] = 0$$

është konvergjente.

Përkufizimi 1.1.3 Mbetje të $m-$**të** *të serisë* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *quajmë shprehjen:*

$$a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{m+k} + ...$$

të cilën e shënojmë me:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k}. \tag{4}$$

Në qoftë se mbetja (4) e serisë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergjon, atëherë shumën e mbetjes të saj e shënojmë me R_n.

Teorema 1.1.3 *Seria konvergjon atëherë dhe vetëm atëherë kur mbetja e çfarëdoshme e saj konvergjon.*

Vërtetimi. Me $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, \quad n = 1, 2, 3, ...$, shënojmë shumën e pjesshme të serisë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, ndërsa me $S_k^{(m)} = a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{m+k}$ shumën e pjesshme të mbetjes së $m-$ të saj (d.m.th. të serisë $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{m+k}$). Atëherë:

$$S_n = S_m + S_k^{(m)}, \quad n = m + k.$$

Në qoftë se fiksojmë numrin m shohim se limiti $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ekziston atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston $\lim\limits_{n\to\infty} S_k^{(m)}$. Kjo tregon se seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergjon atëherë dhe vetëm atëherë kur mbetja e saj $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{m+k}$ konvergjon. Duke marrë parasysh edhe faktin se numri m u zgjodh në mënyrë të çfarëdoshme, konstatojmë se teorema 1.1.3 u vërtetua.

Vërejtja 4. Nga teorema 1.1.3 rrjedh se nëse serisë konvergjente i shtojmë ose i heqim një numër të fundmë kufizash ajo prapë mbetet konvergjente.

Rrjedhimi 1.1.1 Në qoftë se seria konvergjon atëherë shuma e mbetjes së çfarëdoshme të saj tenton në zero kur indeksi i mbetjes tenton në infinit.

Vërtetimi. Supozojmë se seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergjon dhe se shuma e saj është S. Atëherë, sipas teoremës 1.1.3, edhe seria $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n$ konvergjon. Shënojmë me R_m shumën e mbetjes dhe fitojmë:

$$S = S_m + R_m.$$

Këndej duke kaluar me limit kur $m \to \infty$ dhe duke vërejtur se $S_m \to S$, del $R_m \to 0$.

1.1.3 Kriteri i Bolcano-Koshit për konvergjencën e serisë

Kriteri i Bolcano-Koshit për konvergjencën e vargut lehtë mund të formulohet edhe për seri.

Teorema 1.1.4 *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *të konvergjoj është që për çdo* $\varepsilon > 0$ *të ekzistoj numri* $N(\varepsilon)$ *ashtu që për çdo numër natyral* p *të plotësohet pabarazimi:*

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon, \tag{1}$$

për çdo $n > N(\varepsilon)$.

Vërtetimi është i qartë kur dihet kriteri i Bolcano-Koshit për konvergjencën e vargjeve. Tash marrim një rast të veçantë të teoremës 1.1.4.

Teorema 1.1.5 *(kushti i nevojshëm për konvergjencën e serisë) Në qoftë se seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergjon atëherë:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{2}$$

Vërtetimi. Meqenëse seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergjon, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $N(\varepsilon)$ ashtu që për çdo $n > N(\varepsilon)$ dhe $p = 1$ vlen (nga (1)):

$$|a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Këndej duket qartë se vlen barazimi (2).

Vërejtja 5. Vërtetimi i teoremës 1.1.5. mund të bëhet edhe në këtë mënyrë:

Meqenëse seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergjon atëherë $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, ku $\{S_n\}$ është varg i shumave të pjesshme, është numër i fundmë, p.sh. S. Këndej dhe nga fakti se $a_n = S_n - S_{n-1}$ shohim se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Vërejtja 6. Në qoftë se kufiza e përgjithshme a_n e një serie nuk tenton në zero, kur $n \to \infty$, atëherë seria divergjon.

Në fund të kësaj pike tregojmë se në teoremën 1.1.1 kushti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nuk është i mjaftueshëm.

Shembulli 1.1.3 Te seria:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...,$$

e cila quhet **seri harmonike,** shohim se termi i përgjithshëm tenton në zero kur $n \to \infty$. Mirëpo, siç do të tregojmë më poshtë, ajo është divergjente. Më të vërtetë, zgjedhim numrin n të tillë që të jetë $n = 2^k$. Atëherë:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k},$$

dhe duke pasur parasysh se në anën e djathtë kemi shumë të fundme, shuma S_n mund të shkruhet kështu:

$$S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + ... + \frac{1}{2^k}\right).$$

Në kllapën e parë është një kufizë, d.m.th. 2^o kufiza, në të dytën janë 2^1 kufiza, në të tretën janë 2^2 dhe në të k-tën janë 2^{k-1} kufiza. Shikojmë shprehjen K_n e cila fitohet kur në secilën kllapë për kufiza marrim kufizën e fundit që figuron në të. Pra:

$$K_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + ... + \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^k} + ... + \frac{1}{2^k}\right).$$

Është e qartë se

$$S_n \geq K_n,$$

ku shenja e barazimit vlen nëse kufizohemi në dy kufizat e para. Duke vërejtur se vlera e çdo kllape është $\frac{1}{2}$ (vlera e kllapës së k-të është $2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$) fitojmë:

$$K_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}$$

Pra $S_n \geq 1 + k \cdot \frac{1}{2}$ dhe meqenëse kur $n \to \infty$ rrjedh se $k \to \infty$, kemi:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

që tregon se seria harmonike divergjon.

Si edhe për vargjet, përdorimi i kriterit Bolcano-Koshi në praktikën e studimit të konvergjencës së serive, paraqet vështirësi. Në vazhdim jepen kritere më praktikë për studimin e natyrës së serive.

1.1.4 Seritë me kufiza pozitive

Në këtë pikë do të shqyrtojmë konvergjencën e një klase të posaçme të serive.

Përkufizimi 1.1.4 *Serinë numerike termat e së cilës janë jonegative e quajmë* **seri me kufiza pozitive** *ose thjesht* **seri pozitive.**

Teorema 1.1.6 *Le të jetë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ seri me terma pozitive. Kushti i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që ajo të konvergjojë është që vargu i shumave të saj të pjesshme të jetë i kufizuar nga sipër. Në qoftë se S është shuma e serisë e $\{S_n\}$ vargu i shumave të pjesshme të saj, atëherë:*

$$\sup_{n=1,2,\dots} \{S_n\} = S.$$

Vërtetimi. Në qoftë se seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergjon atëherë vargu $\{S_n\}$ i shumave të saj të pjesshme është i kufizuar (si varg konvergjent). Në veçanti ai është i kufizuar nga sipër. Mirëpo, siç shihet në shembullin e dhënë në vërejtjen 3, kushti i kufizueshmërisë nuk është i mjaftueshëm për konvergjencën e serisë. Por, meqenëse seria është pozitive, atëherë:

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{a+1} a_k = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

që tregon se vargu $\{S_n\}$ është monotono jozvogëlues. Prandaj ai konvergjon atëherë dhe vetëm atëherë kur është i kufizuar nga sipër. Nëse:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

atëherë, nga teoria e vargjeve monotone, rrjedh se:

$$S = \sup_{n=1,2,\dots} \{S_n\},$$

dhe me këtë teorema u vërtetua.

Nga teorema 1.1.6. rrjedh se kur seria me terma pozitive divergjon atëherë vargu $\{S_n\}$ nuk është i kufizuar nga sipër, prandaj kemi:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

dhe shkruajmë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

Teorema 1.1.7 *(kriteri i krahasimit). Le të jenë dhënë seritë pozitive*

$$a_1 + a_2 + ... \tag{1}$$

$$b_1 + b_2 + ... \tag{2}$$

si dhe duke filluar nga një indeks le të vlej:

$$a_n \leq b_n.$$

Atëherë

(a) *në qoftë se konvergjon seria* (2) *do të konvergjoj edhe seria* (1)*;*

(b) *në qoftë se divergjon seria* (1) *do të divergjoj edhe seria* (2)*.*

Para se të kalojmë në vërtetim, vërejmë se (meqenëse me heqjen e një numri të fundmë kufizash seria nuk e ndryshon natyrën e saj) mund të marrim që $a_n \leq b_n$ për çdo $n \in \mathbf{N}$.

Vërtetimi. Le të jenë $\{S_n\}$ e $\{S'_n\}$ vargjet, përkatësisht të, shumave të pjesshme të serive (1) e (2). Atëherë vlen $S_n \leq S'_n$ për çdo $n \in N$.

(a) Supozojmë se seria (2) konvergjon. Nga teorema 1.1.6, rrjedh se vargu $\{S'_n\}$ është i kufizuar nga sipër. Prandaj ekziston konstantja K e tillë që $S'_n \leq K$, për çdo $n \in \mathbf{N}$. Por atëherë edhe $S_n \leq K$ për çdo $n \in N$ dhe prapë sipas teoremës 1.1.6, shohim se seria (1) konvergjon.

(b) Supozojmë se seria (1) divergjon, d.m.th. vargu $\{S_n\}$ divergjon. Atëherë ai është i pakufizuar nga sipër. Por, meqenëse $S_n \leq S'_n$, për çdo $n \in \mathbf{N}$, i tillë do të jetë edhe vargu $\{S'_n\}$. Kjo tregon se seria (2) divergjon.

Rrjedhimi 1.1.2 Le të jenë $b_n > 0, n \in N$, dhe:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k. \tag{3}$$

Atëherë:

(1) në qoftë se seria (2) konvergjon dhe $0 \leq k < +\infty$, konstatojmë se edhe seria (1) konvergjon;

(2) në qoftë se seria (2) divergjon dhe $0 < k \leq +\infty$, po ashtu edhe seria (1) divergjon.

Në veçanti, në qoftë se:

$$a_n \sim b_n$$

($\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ janë vargje ekuivalente) seritë (1) e (2) njëkohësisht konvergjojnë ose divergjojnë.

Vërtetimi. (1). Nga (3) shohim se për $0 \leq k < +\infty$ rrjedh ekzistenca e numrit N_0 ashtu që për $n > N_0$ vlen:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < 1$$

prej nga, në veçanti:

$$\frac{a_n}{b_n} < k+1,$$

për $n > N_0$, ose:

$$a_n < (k+1) \cdot b_n,$$

për $n > N_0$. Supozojmë se seria (2) konvergjon. Sipas teoremës 1.1.1 edhe seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (k+1)\, b_n$ është konvergjente dhe pohimi (1) i rrjedhimi 1.1.2. rrjedh nga teorema 1.1.7.

(2) Le të jetë $\varepsilon > 0$. Nga (3) rrjedh se ekziston numri $N(\varepsilon)$ ashtu që për $n > N(\varepsilon)$ vlen:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon$$

ose:

$$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon,$$

për $n > N(\varepsilon)$. Shënojmë $k^{'} = k - \varepsilon$. Pa kufizim përgjithësimi mund të marrim që $\varepsilon < k$. Shohim se $0 < k^{'} < k$ dhe:

$$\frac{a_n}{b_n} > k'$$

për $n > N(\varepsilon)$, ose:

$$b_n < \frac{1}{k'} \cdot a_n,$$

për $n > N(\varepsilon)$. Tash pohimi (2) rrjedh nga teorema 1.1.7.

Shembulli 1.1.4 Të tregohet se seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}},$$

divergjon.

Zgjidhje: Së pari vërejmë se vlen pabarazimi:

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}, n = 1, 2, ...$$

Tash mbetet të tregojmë se seria $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergjon. Me të vërtetë, meqenëse:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

atëherë $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Shembulli 1.1.5 *Të shqyrtohet konvergjenca e serisë* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Zgjidhje: Krahasimin e bëjmë me serinë $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ për të cilën dihet se është divergjente. Kemi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

prandaj, sipas rrjedhimit 1.1.2, konstatojmë se divergjon edhe seria në shqyrtim.

Rrjedhimi 1.1.3 Në qoftë se duke filluar nga një indeks i caktuar ka vend pabarazimi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \tag{4}$$

($a_n > 0$, $b_n > 0$), atëherë kur konvergjon seria (2) konvergjon edhe seria (1) si dhe kur divergjon (1) do të divergjojë edhe (2).

Vërtetimi. Si edhe në teoremën 1.1.7. mund të supozohet se pabarazimi (4) ka vend për çdo n. Nga (4) rrjedh

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1},$$

$$\frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2},$$

....

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Duke i shumëzuar anë për anë relacionet e mësipërme fitojmë:

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1}$$

ose:

$$a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n$$

për çdo $n \in N$. Tash pohimi rrjedh nga teorema 1.1.7.

Në mes të konvergjencës së serisë pozitive dhe konvergjencës së integralit jo të vetë të funksionit jonegativ nganjëherë mund të vihet një lidhje e ngushtë. Këtë lidhje do ta shohim në teoremën vijuese.

Teorema 1.1.8 *(kriteri integral i konvergjencës së serive). Në qoftë se funksioni $f(x)$, i përkufizuar për $x \geq 1$, është jonegativ dhe monotono-zvogëlues, seria:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{5}$$

konvergjon atëherë dhe vetëm atëherë kur konvergjon integrali:

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx. \tag{6}$$

Vërtetimi. Meqenëse $f(x)$ është zvogëlues atëherë për $k \leq x \leq k+1$ (fig.1.1) kemi $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k), k = 1, 2, \dots$.

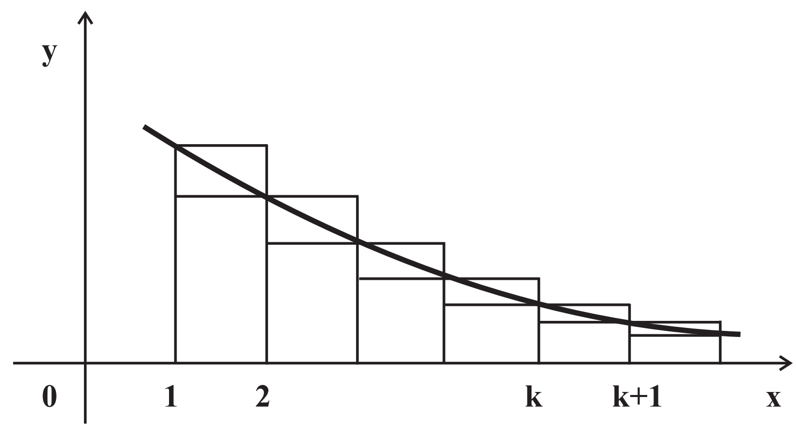


Fig. 1.1.

Pas integrimit në $[k, k+1]$, relacioni i mësipërm merr formën:

$$f(k+1) \leq \int_{k}^{k+1} f(x)dx \leq f(k),\ k = 1, 2, \dots .$$

Pabarazimet e mësipërme i shumojmë për $k = 1$ deri $k = n$ dhe fitojmë:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int_{1}^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

ose pasi të marrim $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$,

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_{1}^{n+1} f(x)dx \leq S_n,\ n = 1, 2, \dots \tag{7}$$

Supozojmë se integrali (6) konvergjon. Atëherë rrjedh (nga teoria e integraleve jo të vetë) se aq më parë bashkësia $A = \{\int_1^{n+1} f(x)dx\}$ është e kufizuar nga sipër si dhe

$$\sup_{n>1} A = \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

Këndej shohim se për çdo $n \in \mathbf{N}$ vlen:

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \le \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

dhe duke patur parasysh relacioni (7) fitojmë:

$$S_{n+1} \le f(1) + \int_1^{+\infty} f(x) \cdot dx.$$

Kështu shohim se vargu i shumave të pjesshme të serisë (5) është i kufizuar nga sipër që tregon se ajo seri konvergjon.

Supozojmë tash se seria (5) konvergjon dhe se shuma e saj është S. Atëherë nga teorema 1.1.6, kemi $S_n \le S$, për çdo $n \in N$, dhe nga (7) gjejmë:

$$\int_i^{n+1} f(x) \cdot dx \le S.$$

Për $\xi \ge 1$, zgjedhim n të tillë që $n \ge \xi$ dhe nga fakti që f është jonegativ gjejmë:

$$\int_i^{\xi} f(x) \cdot dx \le \int_i^{n} f(x)dx \le S$$

që tregon se bashkësia $\left\{\int_1^{\xi} f(x) \cdot dx\right\}$, $\xi \ge 1$, është e kufizuar nga sipër. Kjo tregon se integrali (6) konvergjon.

Shembulli 1.1.6 Të shqyrtohet konvergjenca e serisë hiperharmonike:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Zgjidhje: Vërejmë se funksioni $f(x) = \frac{1}{x^p}, x \ge 1$, plotëson kushtet e teoremës 1.1.8. dhe se:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} +\infty, & 0 \le p < 1 \\ \frac{1}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$$

Atëherë, nga po ajo teoremë, shohim se seria konvergjon $p > 1$ e divergjon për $p < 1$. Për $p = 1$ fitojmë serinë harmonike natyrën e së cilës e kemi shqyrtuar më parë .

Teorema 1.1.9 *Le të jetë* $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq ... \geq 0$. *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergjon atëherë dhe vetëm atëherë kur konvergjon seria:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k} = a_1 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + ... + 2^k a_{2^k} + ... \tag{8}$$

Vërtetimi. Shënojmë:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

$$\sigma_k = a_1 + 2 \cdot a_2 + ... + 2^k \cdot a_{2^k}.$$

Për $n < 2^k$ kemi:

$$S_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + ... + (a_{2^k} + ... + a_{2^{k+1}-1}) \leq$$

$$\leq a_1 + 2 \cdot a_2 + ... + 2^k \cdot a_{2^k} = \sigma_k.$$

Pra për $n < 2^k$ kemi:

$$S_n \leq \sigma_k \tag{9}$$

Në qoftë se $n > 2^k$, atëherë:

$$S_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + ... + (a_{2^{k-1}+1} + ... + a_{2^k}) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2 \cdot a_4 + ... + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} \sigma_k,$$

d.m.th.

$$S_n \geq \frac{1}{2} \sigma_k. \tag{10}$$

Në qoftë se seria (8) konvergjon, atëherë shumat e pjesshme të saj janë të kufizuara dhe nga (9) rrjedh se shumat e pjesshme të serisë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ janë po ashtu të kufizuara. Prandaj seria: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergjon.

E kundërta tregohet në mënyrë analoge.

Në qoftë se seria (8) divergjon, atëherë $\sigma_k \to +\infty$ kur $n \to \infty$, dhe nga (10) rrjedh se $S_n \to +\infty$, kur $n \to \infty$, që do të thotë se seria $\sum\limits_{y=1}^{\infty} a_n$ divergjon.

Shembulli 1.1.7 Duke përdorur teoremën 1.1.9. të shqyrtohet konvergjenca e serisë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$.

Udhëzim: Për $p \leq 0$, $a_n = \frac{1}{n^p} \geq 1$ dhe seria divergjon sepse termi i përgjithshëm i saj nuk tenton kah zero kur $n \to \infty$. Për $p > 0$ të përdoret teorema 1.9, duke vënë më parë në dukje se $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k(p-1)}}$.

Teorema 1.1.10 *(Kriteri i Dalamberit). Le të jetë dhënë seria pozitive:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0, n = 1, 2, \dots . \tag{11}$$

Atëherë:

1) *në qoftë se ekziston numri q i tillë që $0 < q < 1$ dhe numri n_0 i tillë që për çdo $n \geq n_0$ vlen:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

seria e dhënë konvergjon;

2) në qoftë se ekziston numri $n_0 \in N$ i tillë që për çdo $n \geq n_0$ të vlej pabarazimi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

seria e dhënë divergjon.

Vërtetimi. Le të jetë q numër i tillë që $0 < q < 1$ dhe le të ekzistojë numri $n_0 \in N$ që për $n \geq n_0$ të vlejë

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \text{ d.m.th. } \ a_{n+1} \leq q \cdot a_n.$$

Atëherë:

$$a_{n_0+1} \leq a_{n_0} \cdot q,$$

$$a_{n_0+2} \leq a_{n_0+1} \cdot q \leq a_{n_0} \cdot q^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{n_0+p} \leq a_{n_0+p-1} \cdot q \leq \dots \leq a_{n_0} \cdot q^p,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

dhe meqë seria:

$$a_{n_0} \cdot q + a_{n_0} \cdot q^2 + \dots + a_{n_0} \cdot q^p + \dots$$

si seri gjeometrike me herësin q $(0 < q < 1)$ konvergjon shohim se, sipas kriterit të krahasimit, edhe seria:

$$a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots + a_{n_0+p} + \dots$$

konvergjon, që tregon se seria (11) konvergjon.

2) Le të jetë n_0 numër i tillë që për $n \geq n_0$ të vlejë $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Atëherë:

$$a_{n_0+1} \geq a_{n_0},$$

$$a_{n_0+2} \geq a_{n_0+1} \geq a_{n_0},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

Meqë sipas supozimit $a_{n_0} > 0$, kufiza e $n-$ të e serisë kufizohet nga poshtë me konstantë pozitive, prandaj $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Rrjedhimisht, kushti i nevojshëm për konvergjencën e serisë (teorema 1.1.5) nuk plotësohet, prandaj seria divergjon. Teorema u vërtetua.

Rrjedhimi 1.1.4 Le të jetë $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. Për $\ell < 1$ seria (11) konvergjon, ndërsa për $\ell > 1$ ajo seri divergjon.

Vërtetimi rrjedh menjëherë nga teorema 1.1.10.

Shembulli 1.1.8 Të shqyrtohet konvergjenca e serisë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Zgjidhje: Meqenëse:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

konstatojmë se, sipas rrjedhimit të mësipërm, seria konvergjon.

Vërejtja 7. Seria do të divergjojë edhe në rastin kur $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$.

Kjo rrjedh nga fakti se në këtë rast do të ekzistoj numri n_0 ashtu që për $n > n_0$ të vlejë $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Vërejtja 8. Kriteri i Dalamberit zgjidhë problemin e konvergjencës apo divergjencës së serive pozitive vetëm në rastin kur $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ekziston dhe është i ndryshëm nga 1. Nëse ky limit nuk ekziston ose është i barabartë me 1 atëherë ky problem mbetet i hapur.

Vërejtja 9. Nëse $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ por raporti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ gati për çdo n është më i madh se 1, atëherë seria divergjon. Me të vërtetë, le të jetë n_0 numër i tillë që për $n > n_0$ të vlejë $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, d.m.th. $a_{n+1} > a_n$, për çdo $n > n_0$. Kjo tregon se termi i përgjithshëm i serisë nuk konvergjon në zero, prandaj seria divergjon.

Shembulli 1.1.9 Të shqyrtohet konvergjenca e serisë: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

Zgjidhje: Meqenëse:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

dhe meqë:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1,$$

për çdo n, shohim se seria divergjon.

Teorema 1.1.11 *(Kriteri i Koshit). Le të jetë dhënë seria pozitive* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Atëherë:*

1) nëse ekziston numri q i tillë që $0 < q < 1$ dhe numri n_0 i tillë që për $n > n_0$ vlen pabarazimi $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ seria e dhënë konvergjon;

2) nëse ekziston numër i tillë n_0 që për $n > n_0$ të vlejë $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ seria e dhënë divergjon.

Vërtetimi. 1) Në qoftë se për $n > n_0$ vlen $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, d.m.th. $a_n \leq q^n$ atëherë, sipas kriterit të krahasimit, seria e dhënë konvergjon, sepse seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$, për $0 < q < 1$, konvergjon.

2) Në qoftë se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, për $n > n_0$ atëherë $a_n \geq 1$ dhe seria divergjon sepse $a_n \not\to 0$ kur $n \to \infty$.

Rezultati i mëposhtëm rrjedh nga teorema 1.1.11.

Rrjedhimi 1.1.5 Le të ekzistojë

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

Nëse $\ell < 1$ seria pozitive $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergjon, ndërsa për $\ell > 1$ ajo divergjon.

Si edhe në kriterin e Dalamberit në rastin kur $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, nuk mund të thuhet asgjë për natyrën e serisë.

P.sh. seritë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{dhe} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

plotësojnë kushtin $\ell = 1$ por siç dihet e para divergjon, kurse e dyta konvergjon.

Marrim serinë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{4^{n+1}}.$$

Meqenëse:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{4^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left[\frac{3+(-1)^n}{4}\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4},$$

sipas rrjedhimit 1.1.5, konstatojmë se seria e dhënë konvergjon.

Provojmë të shqyrtojmë natyrën e saj me kriterin e Dalamberit. Kemi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+(-1)^{n+1}}{4[3+(-1)^n]},$$

dhe lehtë shihet se kur $n \to \infty$, limiti nuk ekziston.

Fakti që u konstatua nuk është i rastit. Vërtetohet (shih [5], fq. 27) se në përgjithësi kriteri i Koshit është më i fuqishëm se kriteri i Dalamberit. Kjo do të thotë se në të gjitha rastet kur ekziston $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ do te ekzistojë $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ por e anasjellta nuk vlen, siç pamë në shembullin e mësipërm.

Në vërtetimin e teoremave 1.1.10 e 1.1.11 ne u mbështetëm në krahasimin me serinë e progresionit gjeometrik. Në vazhdim japim një kriter i cili bazohet në krahasimin me serinë

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

e cila (shembulli 3) konvergjon për $p > 1$ e divergjon për $p \leq 1$.

Teorema 1.1.12 *(Kriteri i Kummerit). Supozojmë se për serinë* (11) *ekziston vargu* $\{b_n\}$ *i numrave pozitiv që të vlejë:*

1) *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ *divergjon;*

2) *numrat* $K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot b_n - b_{n+1}$ *kanë shenjë të njëjtë.*

Në qoftë se gjendet një $L > 0$ *i tillë që* $K_n > L$, *për n mjaft të mëdhenj, seria* (11) *konvergjon, ndërsa për n të tillë që vlen* $K_n \leq 0$, *seria divergjon.*

Vërtetimi. Le të jetë $K_n > L > 0$ (ta zëmë se ky relacion plotësohet për çdo *n*). Kemi:

$$L \cdot a_{n+1} < a_n \cdot b_n - a_{n+1} b_{n+1},$$

dhe duke vënë me radhë $n = 1, 2, ...$, marrim relacionet:

$$L \cdot a_2 < a_1 b_1 - a_2 b_2,$$

$$L \cdot a_3 < a_2 b_2 - a_3 b_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$L \cdot a_{n+1} < a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1},$$

nga të cilat gjejmë:

$$L(a_2 + a_3 + ... + a_{n+1}) < a_1 b_1 - a_{n+1} b_{n+1} < a_1 b_1.$$

Meqë $L > 0$, nga relacioni i fundit gjejmë:

$$a_2 + a_3 + ... + a_{n+1} < \frac{a_1 b_1}{L}$$

ose:

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + ... + a_{n+1} < \frac{a_1 b_1}{L} + a_1.$$

Rrjedhimisht, vargu i shumave të pjesshme të serisë (1) është i kufizuar nga sipër, prandaj ajo konvergjon. Supozojmë tash se

$$K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \leq 0,$$

Atëherë $a_n b_n \leq a_{n+1} b_{n+1}$ dhe $a_1 b_1 \leq a_2 b_2 \leq ... \leq a_{n+1} b_{n+1}$, prej nga gjejmë:

$$a_{n+1} \geq \frac{a_1 b_1}{b_{n+1}}.$$

Meqenëse seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 b_1}{b_{n+1}} = a_1 b_1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_{n+1}}$ divergjon, seria (11) po ashtu divergjon dhe me këtë teorema u vërtetua.

Rrjedhimi 1.1.6 (Kriteri i Kummerit në formën limite). Nëse për serinë (11) ekziston vargu i numrave pozitiv $\{b_n\}$ ashtu që: 1) seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ divergjon;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot b_n - b_{n+1} \right) = L,$

atëherë për $L > 0$ seria (11) konvergjon, ndërsa për $L < 0$ ajo divergjon.

Vërtetimi. Për $L > 0$ ekziston numri n_0 ashtu që për $n > n_0$

$$K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} > \frac{L}{2} > 0,$$

dhe tash nga kriteri i Kummerit del konvergjenca e serisë (11).

Në qoftë se $L < 0$ ekziston numri n_0 ashtu që për çdo $n > n_0, K_n < \frac{L}{2}$, dhe sipas kriterit të Kummerit konstatojmë se seria (11) divergjon.

Teorema 1.1.13 *(Kriteri i Raabes). Lë të jetë*

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) = R$$

Për $R > 1$ seria (11) konvergjon, kurse për $R < 1$ divergjon.

Vërtetimi. Për të vërtetuar teoremën, përdorim kriterin e Kummerit në formën limite. Meqenëse seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergjon, atëherë për $\{b_n\}$ marrim vargun $\{n\}$. Prandaj kemi:

$$K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} n - (n+1) = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1,$$

si dhe:

$$\lim_{n\to\infty} K_n = R - 1 = L.$$

Për $R > 1$ kemi $L > 0$ dhe seria (11) konvergjon, kurse për $R < 1$ kemi $L < 0$ dhe seria divergjon.

Po theksojmë se për $R = 1$ problemi mbetet i hapur.

Teorema 1.1.14 *(Kriteri i Gaussit). Supozojmë se për serinë* (11) *raporti* $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ *mund të paraqitet në formën:*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

ku α, β, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ *dhe* $\varepsilon > 0$, *kurse* γ_n *madhësi e kufizuar* ($|\gamma_n| \leq M$, *për çdo* $n \in \mathbf{N}$). *Atëherë, për* $\alpha > 1$ *ose* $\alpha = 1$, $\beta > 1$ *seria* (11) *konvergjon, ndërsa për* $\alpha < 1$ *ose* $\alpha = 1$, $\beta \leq 1$ *divergjon.*

Vërtetimi. Meqenëse:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\alpha},$$

seria konvergjon për $\alpha > 1$ dhe divergjon për $\alpha < 1$.Supozojmë tash se $\alpha = 1$. Në këtë rast do të kemi:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

prej nga gjejmë:

$$n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) = \beta + \frac{\gamma_n}{n^{\varepsilon}} \to \beta$$

kur $n \to \infty$. Këndej është e qartë se në rastin $\beta > 1$ dhe $\beta < 1$ problemi zgjidhet me kriterin e Rabbes.

Mbetet të shqyrtohet rasti kur $\alpha = \beta = 1$. Në këto kondita kemi:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Për të treguar divergjencën e serisë (11) përdorim kriterin e Kummerit. Shënojmë $b_n = n \cdot \ln n$ dhe tregojmë se seria:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \tag{13}$$

divergjon. Së pari tregojmë se seria:

$$\sum_{n=2}^{\infty} [\ln\ln(n+1) - \ln\ln n] \tag{14}$$

divergjon. Më të vërtetë, nëse me L_n shënojmë shumën e n-të pjesshme të saj, do të kemi:

$$L_n = (\ln\ln 3 - \ln\ln 2) + (\ln\ln 4 - \ln\ln(n+1) - \ln\ln n) = \ln\ln(n+1) - \ln\ln 2,$$

prej nga shihet se $L_n \to \infty$, kur $n \to \infty$, që tregon se seria (14) divergjon. Krahasojmë serinë (13) me atë (14). Duke zbatuar teoremën e Lagranzhit për funksionin $y = \ln\ln x$ në segmentin [n, n+1] marrim:

$$\ln\ln(n+1) - \ln\ln n = \frac{1}{(n+\theta)\ln(n+\theta)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Këndej del se seria:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+\theta)\cdot \ln(n+\theta)}$$

divergjon, sepse divergjon seria (14). Mirëpo:

$$\frac{1}{(n+\theta)ln(n+\theta)} < \frac{1}{n\ln n}$$

prandaj, nga teorema 1.1.7, shihet se seria (13) divergjon.

Tash kemi:

$$K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}} \right) n \cdot \ln n - (n+1)\ln(n+1) =$$

$$= (n+1)\ln n + \frac{1}{n^{\varepsilon}}\gamma_n \ln n - (n+1)\ln(n+1) = \gamma_n \cdot \frac{\ln n}{n^{\varepsilon}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Meqenëse:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\varepsilon}} = 0 \qquad \text{dhe} \qquad \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = 1,$$

fitohet barazimi:

$$\lim_{n\to\infty} K_n = -1,$$

që, sipas teoremës 1.1.12, tregon se seria (11) divergjon.

Shembulli 1.1.10 Të tregohet se seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

konvergjon.

Zgjidhje: Përdorim kriterin e Raabes. Nëse me a_n shënojmë kufizën e përgjithshme të serisë në shqyrtim fitojmë:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1} - 1\right) = \frac{n(6n+5)}{4n^2+4n+1} \to \frac{3}{2} > 1,$$

kur $n\to\infty$, prej nga shihet se seria është konvergjente.

Rrjedhimi 1.1.7 (kriteri i Bertranit). Në qoftë se:

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] = B,$$

atëherë për $B > 1$ seria (11) konvergjon, kurse për $B < 1$ divergjon.

Vërtetimi. Le të jetë $b_n = n \ln n$. Siq treguam më sipër, seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

divergjon. Tash kemi:

$$K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} n \ln n - (n+1) \ln(n+1) = \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$$

dhe kur dihet se:

$$\lim_{n \to \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = 1$$

fitojmë $\lim\limits_{n \to \infty} K_n = B - 1$. Sipas rrjedhimit 1.1.6. del se seia (11) konvergjon për $B - 1 > 0$ dhe divergjon për $B - 1 < 0$, çka edhe synonim të vërtetonim.

Teorema 1.1.15 *(Kriteri logaritmik). Le të jetë dhënë seria* (11). *Nëse:*

$$\frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} \geq 1 + \alpha, \qquad n \geq 2, \tag{15}$$

ku α është numër pozitiv, seria (11) *konvergjon, ndërsa kur*

$$\frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} < 1, \qquad n \geq 2, \tag{16}$$

ajo divergjon.

Vërtetimi. Nga (15) gjejmë:

$$\log \frac{1}{a_n} \geq (1 + \alpha) \log n = \log n^{1+\alpha},$$

ose:

$$\frac{1}{a_n} \geq n^{1+\alpha},$$

prej nga fitohet

$$a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

Nëse shënojmë $s = 1 + \alpha$, meqë $\alpha > 0$, kemi $s > 1$ që tregon se seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergjon. Prandaj sipas teoremës 1.1.7. edhe seria (11) konvergjon. Tash, le të plotësohet pabarazimi (16). Atëherë:

$$\log \frac{1}{a_n} < \log n,$$

d.m.th. $\frac{1}{a_n} < n$ prej nga fitohet $a_n > \frac{1}{n}$, dhe pohimi i dytë i teoremës rrjedh nga teorema 1.1.7, duke vënë më parë në dukje se seria harmonike divergjon.

1.1.5 Detyra për ushtrime

1. Të shqyrtohet natyra e serisë:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)};\qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1};$$
$$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right);\qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. Të tregohet se nëse seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ konvergjon, atëherë edhe seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergjon.

3. Të tregohet se në qoftë se seritë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ dhe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergjojnë atëherë konvergjojnë edhe seritë:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|, \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2 \quad \text{dhe} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}.$$

4. Duke zbatuar kriterin e Bolcano-Koshit të tregohet konvergjenca e serive:

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n};\qquad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x^n}{n^2}.$$

5. Duke zbatuar kriterin e Bolcano-Koshit të tregohet divergjenca e serive:

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n};\qquad (b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

6. Të shqyrtohet natyra e serive:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} nx\prod_{k=1}^{n}\tfrac{\sin^2 k}{1+x^2+\cos^2 k};\qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4dx};$$
$$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n_\pi}^{\pi(n+1)}\tfrac{\sin^2 x}{x}dx;\qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\tfrac{\sin^2 x}{1+x}dx.$$

7. Duke shfrytëzuar kriterin logaritmik të shqyrtohet natyra e serive:

$$(a)\sum_{n=2}^{\infty}n^{lnx}, x>0;\qquad (b)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{lnn}}.$$

8. Të tregohet se seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cdot\frac{n!}{n^n}$$

konvergjon për $0 < a < e$ kurse divergjon për $a \geq e$.

Udhëzim: Nëse $a \neq e$ atëherë konvergjenca përkatësisht divergjenca mund të tregohet me kriterin e Dalamberit. Për $a = e$, seria divergjon sepse $a_{n+1} > a_n$.

9. Me kriterin e Rabbes të shqyrtohet natyra e serive:

   $(a) 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta-1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}, \ \alpha, \beta, \gamma > 0;$

   $(b) \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}.$

10. Me kriterin e Gaussit të shqyrtohet natyra e serive:

    $(a) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots (2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!n};$

    $(b) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\ldots[a+(n-1)d]}{b(b+d)\ldots[b+(n-1)d]}, (a > 0, b > 0, d > 0).$

11. Me kriterin integral të Koshit të shqyrtohet natyra e serive:

    $(a) \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^s n};$ $\qquad (b) \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log \frac{n+1}{n_1}.$

12. Të vërtetohet se

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} \sin^4 \frac{a}{2^n} = a^2 - \sin^2 a.$$

13. Të vërtetohet barazimi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt, \ (a, b > 0),$$

dhe duke shfrytëzuar atë të gjendet shuma e serive:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n}.$$

Udhëzim: Të shfrytëzohet fakti se

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{k+n} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^n \int_0^1 x^{k+n-1} dx.$$

14. Le të jetë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ seri konvergjente dhe le të jetë $\{b_n\}$ varg numrash pozitiv i tillë që seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ të konvergjojë. Të tregohet se vlen implikimi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n} = c.$$

1.1.6 Seritë me terma të çfarëdoshme

Seria:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

quhet **seri me terma të çfarëdoshëm** në qoftë se nuk bëjmë kurrfarë kufizimi në lidhje me shenjën e termave.

Përkufizimi 1.1.5 *Seria* (1) *quhet* **absolutisht konvergjente** *në qoftë se konvergjon seria*:

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \tag{2}$$

e cila formohet nga vlerat absolute të termave përkatës të serisë (1).

Shembulli 1.1.11 Të tregohet se seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1},$$

konvergjon absolutisht.

Zgjidhje: Është e qartë se

$$\left| \frac{(-1)^n}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Tash konvergjenca absolute e serisë rrjedh nga terorma 1.1.7. duke vënë më parë në dukje se seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergjon.

Teorema 1.1.16 *Çdo seri absolutisht konvergjente është konvergjente.*

Vërtetimi. Supozojmë se seria (1) konvergjon absolutisht d.m.th. seria (2) konvergjon. Atëherë, nga kushti i nevojshëm i teoremës 1.1.4, rrjedh se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $n_0 \in \mathbf{N}$ i tillë që për çdo $n > n_0$ dhe çdo $p \in \mathbf{N}$ vlen:

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Nga pabarazimi i mësipërm dhe duke marrë parasysh se

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}|$$

konstatojmë se për çdo $n > n_0$ dhe çdo $p \in \mathbf{N}$ vlen pabarazimi:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon$$

.

Këndej shohim se pohimi i teoremës rrjedh nga kushti i mjaftueshëm i teoremës 1.1.4. Teorema u vërtetua.

Vërejmë se pohimi i anasjelltë nuk është i saktë . P.sh. seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \tag{3}$$

konvegjon (lehtë shihet nga teorema1.22) ndërsa seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

divergjon.

Përkufizimi 1.1.6 *Nëse seria* (1) *konvergjon kurse* (2) *divergjon, atëherë seria* (1) *quhet* **joabsolutisht konvergjente**.

P.sh. seria (3) është joabsolutisht kovergjente.

Seritë absolutisht konvergjente zënë një vend të posaçëm në mesin e serive konvergjente. Kjo rrjedh nga fakti se seritë absolutisht konvergjente i kanë të gjitha vetitë themelore të shumave të fundme. Në radhë të parë theksojmë vetinë e grumbullimit të çfarëdoshëm të termave të serisë absolutisht konvergjente.

Teorema 1.1.17 *Në qoftë se seria* (1) *është absolutisht kovergjente dhe ka shumën S, atëherë seria:*

$$b_1 + b_2 + ...b_m + ..., \tag{4}$$

e formuar duke bërë rigrupimin e termave të serisë (1) *është seri konvergjente dhe shuma e saj është S.*

Vërtetimi. Le të jetë (1) seri absolutisht konvergjente dhe le të jetë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = N.$$

Në qoftë se me N_n shënojmë shumën e n-të të pjesshme të serisë (2) atëherë $N_n \leq N, n = 1, 2, \cdots$. Pastaj, le të jetë

$$N'_m = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_m|,$$

shuma e m-të e pjesshme e serisë $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|b_m|$, dhe konsiderojmë që $n = n(m) = \max\{1, 2, \cdots, m\}$ d.m.th. numër i tillë që nuk është më i vogël se indeksat e termave të serisë (2) që bëjnë pjesë në shumën N'_m. Atëherë $N'_m \leq N_n$, ku $n = n(m), m = 1, 2, \cdots$. Prandaj:

$$N'_m \leq N, m = 1, 2, \cdots$$

dhe tash, sipas teormave 1.1.6 e 1.1.16, del se seria (4) konvergjon.

Mbetet të tregojmë se në qoftë se S është shuma e serisë (1) atëherë po ai numër është shumë e serisë (4).

Më S_n shënojmë shumën e n-të të pjesshme të serisë (1). Le të jetë $\varepsilon > 0$ numër i çfarëdoshëm. Nga $\lim\limits_{n\to\infty} N_n = N$, ekziston numri n_ε i tillë që për $n > n_\varepsilon$ vlen:

$$\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty}|a_n| = N - S_{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5}$$

prej nga rrjedh se vlen:

$$|S - S_{n_\varepsilon}| = \Big|\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty}|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

Zgjedhim numrin m_ε të tillë që në shumën e pjesshme S_{n_ε} të serisë (4) gjenden termat e serisë (1) të cilat janë sumanda të S_{n_ε} (d.m.th. numri m_ε është i tillë që të gjitha kufizat e serisë (1) me indekse që nuk janë më të mëdhenj se n_ε kanë në serinë (4) indekse që nuk janë më të mëdhenj se m_ε).

Le të jetë $m > m_\varepsilon$. Shënojmë $S^{**}_m = S^*_m - S_{n_\varepsilon}$ dhe vërejmë se:

$$S^{**}_m = a_{n_\varepsilon+1} + a_{n_\varepsilon+2} + ... + a_{m_\varepsilon} + a_m,$$

prej nga duke marrë parasysh (6) fitojmë:

$$|S^{**}_m| = |\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{m} a_n| \leq \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{m}|a_n| \leq \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty}|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Më në fund nga (6) dhe (7) gjejmë:

$$|S - S^*_m| = |S - (S_{n_\varepsilon} + S^{**}_m)| \leq |S - S_{n_\varepsilon}| + |S^{**}_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d.m.th. $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m = S$, çka synuam të tregojmë .

Me një shembull do të tregojmë se teorema 1.1.17. nuk mbetet e vërtetë për seritë joabsolutisht konvergjente. Siç vërejmë seria (3) është joabsulutisht konvergjente. Po e shënojmë me S shumën e serisë:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

I rigrupojmë termat e serisë së dhënë në mënyrë që pas çdo termi pozitiv marrim dy terma negativ. Me K shënojmë shumën e serisë së rigrupuar:

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + ...,$$

dhe tash kemi:

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2 \cdot 2n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2} S.$$

Kështu me rigrupimin e termave të serisë (3) morëm një seri e cila prapë konvergjon, por shuma e saj është sa gjysma e shumës se serisë në fjalë.

Supozojmë se seria (1) ka numër të pafundëm kufizash pozitive dhe kufizash negative. I shënojmë me $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ ato pozitive, ndërsa me $-v_1, -v_2, \cdots, -v_n, \cdots$ termat negative të serisë (1).

Teorema 1.1.18 *Në qoftë se seria* (1) *konvergjon absolutisht, atëherë seritë*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{8}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots \tag{9}$$

konvergjojnë. Nëse seria (1) *konvergjon joabsolutisht, atëherë seritë* (8) *dhe* (9) *divergjojnë.*

Vërtetimi. Së pari supozojmë se seria (1) konvergjon absolutisht dhe shënojmë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = N$. Me S_n e T_n shënojmë, përkatësisht, shumat e pjesshme të serive (8) e (9). Vërejmë se të dy vargjet $\{S_n\}$ e $\{T_n\}$ janë monotono-rritëse dhe të kufizuar nga sipër me numrin N. Prandaj seritë (8) e (9) konvergjojnë .

Tash supozojmë se seria (1) konvergjon joabsolutisht. Sikur seritë (8) e (9) të konvergjojnë njëkohësisht atëherë seria (1) do të konvergjon absolutisht, çka kundërshton supozimin e bërë më sipër. Supozojmë se njëra nga seritë (8) e (9) konvergjon e tjetra divergjon. P.sh. le të konvergjojë seria (8) ndërsa (9) le të divergjojë. Atëherë $T_n \to \infty$, kur $n \to \infty$. Nëse me S_n^* shënojmë shumën e pjesshme të serisë: (1), nga barazimi:

$$S_n^* = S_p - T_q, \; n = p + q,$$

si dhe nga fakti që

$$\lim_{p \to \infty} S_p = S = \sum_{p=1}^{\infty} u_p, \lim_{q \to \infty} T_q = \infty,$$

fitojmë $\lim\limits_{n \to \infty} S_n^* = -\infty$. Kështu arritëm ne kundërshtim me supozimin se seria (1) konvergjon joabsolutisht dhe më këtë vërtetimi i teoremës 1.1.18. u kompletua.

Rrjedhimi 1.1.8 Ne qoftë se seria (1) konvergjon joabsolutisht atëherë për çdo $A \in \mathbf{R}$, çdo $B \in \mathbf{R}$ dhe çdo $n_0 \in \mathbf{N}$ ekzistojnë numrat $p \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$, ashtu që:

$$u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+p} > A$$

$$-v_{n_0+1} - v_{n_0+2} - \cdots - v_{n_0+q} < B.$$

Vërtetimi. Supozojmë të kundërtën, d.m.th. se për çdo $p, q \in \mathbf{N}$ vlen:

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big| \le \sum_{i=1}^{n-1} |a_i \quad & -a_{i+1}||B_i| + |a_n||B_n| \\ & \le B[\Big|\sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})\Big| + |a_n|] = \\ & = B[|a_1 - a_n| + |a_n|] \le B[|a_1| + 2|a_n|],\end{aligned} \tag{10}$$

dhe, nëse pranojmë shënimet që i përdorëm ne vertetimin e teoremës 1.1.18, do të kemi:

$$S_{n_0+p} - S_{n_0} \le A,$$

$$T_{n_0} - T_{n_0+q} \ge B$$

ose $S_{n_0+p} \le A + S_{n_0+q}$, $T_{n_0+q} \le T_{n_0} - B$, çka tregon se shumat e pjesshme të serive (8) e (9) janë të kufizuara nga sipër. Prandaj sipas teoremës 1.1.6. konstatojmë se seritë (8) e (9) konvergjojnë. Por kjo është në kundërshtim me teoremën 1.1.18. Prandaj supozimi se vlejnë pabarazimet (10) është i gabueshëm dhe më këtë vërtetimi përfundoi.

Teorema 1.1.19 *(Rimanit) Le të jetë seria* (1) *joabsolutisht konvergjente. Atëherë për çdo* $C \in \mathbf{R}$, *termat e serisë mund të rigrupohen në atë mënyrë që shuma e serisë së fituar të jetë e barabartë me* C.

Vërtetimi. Le të jetë C numër i çfarëdoshëm real. Në qoftë se, si dhe më sipër, me $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$, shënojmë termat pozitiv të serisë, kurse me $-v_1, -v_2, \cdots, -v_n, \cdots$ ato negative, sipas rrjedhimit 1.1.8, për numrin C ekziston numri n_1 ashtu që

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1} > C. \tag{11}$$

Numrin n_1 e zgjedhim ashtu që të plotësohet edhe pabarazimi:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1-1} \le C.$$

(d.m.th. marrim numrin më të vogël nga numri n_1 ashtu që të plotësohet pabarazimi (11)).

Gjithashtu, sipas rrjedhimit 1.8, ekziston numri n_2 ashtu që të vlejë:

$$-v_1 - v_2 - \cdots - v_{n_2} < C - (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1})$$

ose:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n_1} - v_1 - v_2 - v_3 - \cdots - v_{n_2} < C$$

si dhe

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1} - v_1 - v_2 - \cdots - v_{n_2-1} \geq C.$$

Për arsye të njëjta ekziston numri n_3 ashtu që:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1} - v_1 - v_2 - \cdots - v_{n_2} + u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_3} > C$$

dhe:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1} - v_1 - \cdots - v_{n_2} + u_{n_1+1} + \cdots - u_{n_3-1} \leq C.$$

Duke vazhduar pambarimisht herë këtë ecuri do të fitojmë:

$$u_1 + \cdots + u_{n_1} - v_1 \cdots - v_{n_2} + u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_3} - v_{n_2+1} - \cdots - v_{n_4} + \cdots \quad (12)$$

Për vargun e shumave të pjesshme

$$S_{n_1} > C, \ S_{n_1+n_2} < C, \ S_{n_2+n_3} > C, \cdots$$

dhe se diferenca në vlerën absolute e secilit numër $S_{n_k} + n_{k+1}$ nga numri C s'është më e madhe se termi i tyre i fundit u_{n_k+1} ose v_{n_k+1}:

$$\begin{aligned} |C - S_{n_k+n_{k+1}}| &\leq u_{n_{k+1}}, \\ |C - S_{n_k+n_{k+1}}| &\leq u_{n_{k+1}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Tash, meqenëse seria (1) konvergjon, kemi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

prej nga shohim se, meqë kur $k \to \infty$ edhe $n_{k+1} \to \infty$,

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_{k+1}} = 0, \lim_{k\to\infty} v_{n_{k+1}} = 0.$$

Prandaj nga (13) rrjedh se:

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k+n_{k+1}} = C. \quad (14)$$

Në qoftë se marrim cilëndo shumë të pjesshme S_n të serisë (12), atëherë sipas konstruksionit të asaj serie mund të gjendet numri $k = k(n)$ ashtu që të vlejë pabarazimi:

$$S_{n_k+n_{k+1}} \leq S_n \leq S_{n_{k+1}+n_{k+2}}$$

$$S_{n_k+n_{k+1}} \geq S_n \geq S_{n_{k+1}+n_{k+2}}.$$

Prandaj nga (14) marrim:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = C,$$

çka synuam të tregojmë.

Në vazhdim do të japim kritere të mjaftueshme për konvergjencën e serive të formës:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n. \tag{15}$$

Së pari shqyrtojmë një transformim të shumës së formës

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n, \tag{16}$$

ku a_i, b_i, $i = 1, 2, 3 \cdots, n$, janë numra realë. Vejmë

$$B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \cdots, B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Këndej

$$b_1 = B_1,\ b_2 = B_2 - B_1, \cdots,\ b_n = B_n - B_{n-1}$$

dhe barazimi (16) mund të shkruhet kështu:

$$S = a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \cdots + a_n(B_n - B_{n-1}),$$

prej nga gjejmë:

$$S = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_n B_n.$$

Prandaj:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})B_i + a_n B_n \tag{17}$$

dhe transformimin e shumës (16) në formën (17) e quajmë **transformimi i Abelit.**

Tash do të japim një rezultat që do të përdoret më vonë dhe i cili vërtetohet me transformimin e Abelit.

Lemë (*pabarazimi i Abelit*). *Në qoftë se* $a_i \geq a_{i+1}$ *ose* $a_i \leq a_{i+1}$, *ku* $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, *si dhe* $|b_1 + b_2 + \cdots + b_i| \leq B$, $i = 1, 2, \cdots, n$, *atëherë ka vend pabarazimi:*

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big| \leq B(|a_1| + 2|a_n|). \tag{18}$$

Vërtetimi. Meqenëse, sipas kushteve të lemës, të gjitha ndryshimet në barazimin (17) janë me shenjë të njëjtë, kemi:

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |a_i \quad - a_{i+1}||B_i| + |a_n||B_n| \leq B\Big[\Big|\sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})\Big| + |a_n|\Big] =$$
$$= B[|a_1 - a_n| + |a_n|] \leq B[|a_1| + 2|a_n|],$$

çka synuam të tregojmë.

Kalojmë tash në formulimin e kritereve për të cilët u bë fjalë në fillim.

Le të jetë dhënë seria e formës (15) ku $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ janë dy vargje numrash realë.

Teorema 1.1.20 *(Kriteri i Dirihles). Le të jetë dhënë seria* (15) *ashtu që vargu* $\{a_n\}$ *ka terma pozitiv dhe monotonisht konvergjon kah zero, kurse vargu i shumave të pjesshme* $\{B_n\}$ *të serisë* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *është i kufizuar. Atëherë seria* (15) *konvergjon.*

Vërtetimi. Meqenëse vargu $\{B_n\}$ është i kufizuar atëherë ekziston numri $M > 0$, ashtu që $|B_n| \leq M$ për çdo $n \in N$, si dhe për çdo $p \geq 0$ vlen:

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} b_i\right| = |B_{n+p} - B_{n-1}| \leq 2M. \tag{19}$$

Le të jetë $\varepsilon > 0$. Nga kushti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ rrjedh ekzistenca e numrit n_0, ashtu që për çdo $n \geq n_0$ vlen pabarazimi:

$$a_n < \frac{\varepsilon}{6M}. \tag{20}$$

Tash nga pabarazimi (i Abelit) (18) i zbatuar në shumën $\sum\limits_{i=n}^{n+p} a_i b_i$, ku $n > n_0$ dhe nga pabarazimet (19) e (20) marrim relacionin:

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i\right| \leq 2M(|a_n| + 2|a_{n+p}|) < \varepsilon,$$

prej nga, sipas teoremës 1.1.4. rrjedh konvergjenca e serisë: (15).

Shembulli 1.1.12 Të shqyrtohet natyra e serisë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\ nx}{n}. \tag{21}$$

.

Zgjidhja: Për $x \neq 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, kemi:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\sin kx}{2\sin\dfrac{x}{2}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\dfrac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\dfrac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}} =$$
$$= \frac{\cos\dfrac{1}{2}x - \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}} = \frac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Prandaj:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Këndej, meqenëse vargu $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ është monotono-zvogëlues, në bazë të kriterit të Dirihles, konstatojmë se për $x \neq 2\pi m$ seria (21) konvergjon. Për $x = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, të gjithë termat e serisë (21) janë të barabarta me zero, prandaj ajo, edhe në këtë rast, konvergjon.

Teorema 1.1.21 *(Kriteri i Abelit). Në qoftë se vargu $\{a_n\}$ është monoton dhe i kufizuar dhe seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergjon, atëherë seria* (15) *konvergjon .*

Vërtetimi. Vargu $\{a_n\}$ si monoton dhe i kufizuar ka limit të fundmë, të cilin po e shënojmë me a.

Supozojmë se vargu $\{a_n\}$ është jozvogëlues; atëherë vargu $\{a - a_n\}$ është jorritës dhe tenton në zero, kur $n \to \infty$. Për serinë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ shumat e pjesshme janë të kufizuara, prandaj, sipas teoremës 1.1.20, seria (15) konvergjon.

Në qoftë se vargu $\{a_n\}$ është jorritës atëherë vargu $\{a_n - a\}$ është po ashtu jorritës dhe konvergjon në zero, kur $n \to \infty$. Duke përsëritur përfundimet e më sipërme konstatohet konvergjenca e serisë (15).

Përkufizimi 1.1.7 *Serinë*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - \cdots + (-1)^{n+1}b_n - \cdots \tag{22}$$

ku $b_n > 0$, për çdo $n \in \mathbf{N}$, e **quajmë seri alternative.**

Teorema 1.1.22 *(Kriteri i Laibnicit). Në qoftë se:*

$$0 < b_{n+1} \leq b_n \text{ për çdo } n \in \mathbf{N} \quad \text{dhe} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \tag{23}$$

atëherë seria (22) *konvergjon.*

Vërtetimi. Marrim $a_n = (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$. Atëherë, meqë janë të plotësuara kushtet e teoremës së Dirihles, konstatojmë se seria (22) konvergjon.

Rrjedhimi 1.1.9 Nëse shumën S të serisë alternative (22) për të cilën vlen (23) e zëvendësojmë me shumën e pjesshme:

$$S_n = b_1 - b_2 + b_3 - \cdots + (-1)^{n+1}b_n,$$

atëherë gabimi absolut $\Delta = |S - S_n|$ nuk është më i madh se vlera absolute e termit të parë të lënë, d.m.th.

$$\Delta = |S - S_n| \leq b_{n+1}.$$

Vërtetimi. Me të vërtetë , meqenëse $b_k - b_{k+1} \geq 0$, për çdo $k \in N$, atëherë:

$$\begin{aligned}&\Delta = |S - S_n| = |(-1)^n(b_{n+1} - b_{n+2} + b_{n+3} - b_{n+4} - \cdots)+\\&|(b_{n+1} - b_{n+2}) + (b_{n+3} - b_{n+4}) + \cdots| = (b_{n+1} - b_{n+2}) + (b_{n+2} - b_{n+4})+\\&+ \cdots = b_{n+1} - (b_{n+2} - b_{n+3}) - (b_{n+4} - b_{n+5}) - \cdots \leq b_{n+1},\end{aligned}$$

çka synuam të vërtetojmë.

Shembulli 1.1.13 Të tregohet se seritë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln^{\alpha}} n, \quad (\alpha > 0)$$

konvergjojnë.

Zgjidhje: Meqenëse seritë janë alternative dhe termat e tyre formojnë vargje monotono-zvogëluese të cilët kur $n \to \infty$ tentojnë kah zero, atëherë sipas kriterit të Laibnicit, ato janë konvergjente.

1.1.7 Shumëzimi i serive

Më parë u njohëm me kuptimin e shumës së dy serive si dhe me shumëzimin e serisë me konstantë. Pastaj treguam se kur seritë ishin konvergjente, atëherë edhe seria shumë ishte konvergjente, si dhe produkti i një serie konvergjente me konstantë është seri konvergjente. Lehtë mund të shihet (trego!) se pohimet e theksuara mbeten të sakta edhe kur fjala "konvergjente" zëvendësohet me "absolutisht konvergjente".

Në këtë pikë do të shohim si mund të zgjerohet kuptimi i shumëzimit në rastin e serive dhe si shqyrtohet natyra e serisë së fituar.

Le të jenë dhënë seritë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

dhe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots . \tag{2}$$

Sipas rregullës për shumëzimin e polinomeve ndërtojmë të gjitha prodhimet e kufizave të serisë (1) me kufizat e serisë (2). Këto prodhime i paraqesim në një tabelë:

$$\begin{array}{l} a_1b_1, a_2b_1, a_3b_1, \cdots, a_ib_1, \cdots \\ a_1b_2, a_2b_2, a_3b_2, \cdots, a_ib_2, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1b_j, a_2b_j, a_3b_j, \cdots, a_ib_j, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{3}$$

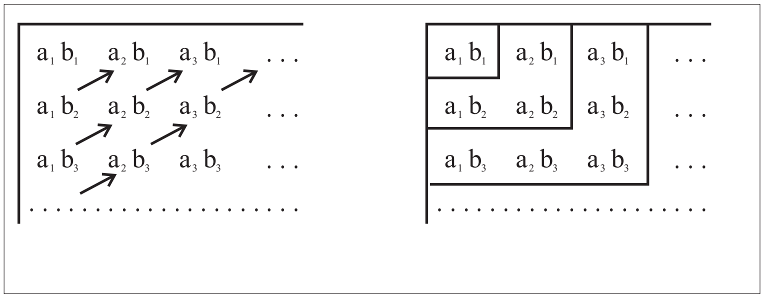
ku $i, j = 1, 2, 3, \cdots$. Ështe e qartë se në tabelën (3) përfshihen të gjitha prodhimet për të cilat u bë fjalë më sipër. Po ashtu është e qartë se nga elementet e kësaj tabele mund te formohen seri të ndryshme në varësi nga mënyra e renditjes së atyre elementeve. P.sh. mund të ndërtohet një seri duke i radhitur "sipas diagonales" :

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_3 + a_2b_2 + a_1b_3 + \cdots \tag{4}$$

ose sipas "katrorëve":

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + \cdots \tag{5}$$

që nga skemat vijuese shihet si janë marrë.



Teorema 1.1.23 *Në qoftë se seritë* (1) *dhe* (2) *konvergjojnë absolutisht dhe kanë, përkatësisht, shumat A dhe B, atëherë edhe seria e ndërtuar me elementet e tabelës* (3) *(në renditje të çfarëdoshme) gjithashtu do të konvergjojë absolutisht e do të ketë shumën e vetë $S = A \cdot B$*

Vërtetimi. Sipas supozimit seritë

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{6}$$

dhe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \tag{7}$$

konvergjojnë, pra kanë shuma të fundme të cilat po i shënojmë me A^* përkat"esisht B^*.

Me elementet e tabelës (3), duke i radhitur (në mënyrë të çfarëdoshme) në varg, ndërtojmë serinë :

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{j_s} = a_{i_1} b_{j_1} + a_{i_2} b_{j_2} + \cdots + a_{i_s} b_{j_s} + \cdots . \tag{8}$$

Tregojmë se seria (8) konvergjon absolutisht, d.m.th. që konvergjon seria:

$$\sum_{s=1}^{\infty} |a_{i_s} b_{j_s}| = |a_{i_1} b_{j_1}| + |a_{i_2} b_{j_2}| + \cdots + |a_{i_s} b_{j_s}| + \cdots . \tag{9}$$

Po shënojmë me S_s shumën e s-të të pjesshme të serisë (9).

Le të jetë $m = \max\{i_1, j_1, i_2, j_2, \cdots, i_s, j_s\}$. Ka vend pabarazimi:

$$S_s = \quad |a_{i_1} b_{j_1}| + |a_{i_2} b_{j_2}| + \cdots + |a_{i_s} b_{j_s}| \leq (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|)$$

$$\cdot(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_m|) \leq A^* \cdot B^*, \quad s = 1, 2, 3, ...$$

i cili tregon se vargu $\{S_s\}$ është i kufizuar nga sipër. Prandaj, sipas teoremës 1.6, seria (9) konvergjon, d.m.th. seria (8) konvergjon absolutisht. Tash, sipas teoremës 1.1.17. sido që të renditen në varg elementet e tabelës (3) dhe me ta të ndërtohet një seri, kjo do të jetë konvergjente dhe do të ketë shumë të njëjtë me serinë (8). Shënojmë me A_n, B_n, S_{nn}, shumat e pjesshme te serive (1), (2), (5), përkatësisht. Pa ndonjë vështirësi vërejmë se:

$$S_{11} = A_1B_1,\ S_{22} = A_2B_2,\ S_{33} = A_3B_3, \cdots,\ S_{nn} = A_nB_n, \cdots$$

prej nga shihet se $S_{nn} \to A \cdot B$, kur $n \to \infty$. Teorema u vërtetua.

Teorema 1.1.24 *Supozojmë se seritë* (1) *e* (2) *konvergjojnë dhe kanë shumat* A *përkatësisht* B *si dhe njëra prej tyre, p.sh.* (1) *konvergjon absolutisht. Atëherë seria:*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

ku $u_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots a_nb_1$, *konvergjon dhe ka shumën* $A \cdot B$.

Vërtetimi. shënojmë: $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k, \quad U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. Atëherë:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n}(a_1b_k + a_2b_{k-1} + \cdots + a_kb_1) = (a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_nB_1). \quad (10)$$

Duke zbritur relacionin (10) nga barazimi $A_nB_n = A_nB_n$, fitojmë:

$$\begin{aligned} &A_nB_n - U_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)B_n - (a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_nB_1) = \\ &= a_2(B_n - B_{n-1}) + a_3(B_n - B_{n-2}) + \cdots + a_{p+1}(B_n - B_q) + a_{p+2}(B_n - B_{q-1}) + \\ &+ \cdots + a_n(B_n - B_1), \end{aligned}$$

ku $p + q = n$. Tash kemi:

$$\begin{aligned} &|A_nB_n - U_n| \leq |a_2||B_n - B_{n-1}| + \cdots + \\ &|a_{p+1}||B_n - B_q| + |a_{p+2}||B_n - B_{q-1}| + \\ &\cdots - |a_n||B_n - B_1|. \end{aligned} \quad (11)$$

Nga konvergjenca e vargut $\{B_n\}$ gjejmë që ndryshimet:

$$|B_n - B_{q-1}|, \cdots, |B_n - B_1|,$$

për çdo $q \in N$ janë të kufizuara me një numër $M > 0$, kurse nga konvergjenca absolute e serisë (1) shohim se shumat:

$$|a_2| + \cdots + |a_{p+1}|$$

për çdo $p \in N$ janë të kufizuara me një numër $K > 0$. Pastaj, nga konvergjenca e serisë (2) rrjedh se $B_n - B_q \to 0$, kur $q \to \infty$, ku $p + q = n$. Prandaj, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $q_0 \in \mathbf{N}$, ashtu që për çdo $q > q_0$ ndryshimet $|B_n - B_{n-1}|, \cdots, |B_n - B_q|$, janë më të vogla se ε. Tash meqë seria (1) konvergjon absolutisht, numrin p mund ta zgjedhim ashtu që mund të vlej:

$$|a_{p+2}| \cdots + |a_n| < \varepsilon.$$

Nga jobarazimet e mësipërme relacioni (11) merr formën:

$$|A_n B_n - U_n| < \varepsilon(|a_2| + \cdots + |a_{p+1}|) + M(|a_{p+2}| + \cdots + |a_n|) < \varepsilon K + \varepsilon M,$$

dhe vlen për $n > q_0 + p = u_0$. Prandaj fitojmë:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot B_n = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = A \cdot B$$

çka synuam të tregojmë.

1.1.8 Seritë e dyfishta

Përkufizimi 1.1.8 *Funksionin*

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{R} : (m, m) \to a_{mn}, \tag{1}$$

$m \in \mathbf{N}$,$n \in \mathbf{N}$, $a_{mn} \in \mathbf{R}$, *e quajmë* **varg i dyfishtë numerik.**

Numrat a_{mn} i quajmë **kufiza (terma)** të vargut të dyfishtë. Termat e vargut të dyfishtë i paraqesim në tabelën (matricën)

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{13} & \cdots & a_{mn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{2}$$

dhe, siç shihet, indeksat m e n përcaktojnë vendin ku gjendet elementi i dhënë i vargut (1) në tabelën (2).

Përkufizimi 1.1.9 *Shprehjen:*

$$\sum_{n,n=1}^{\infty} a_{mn}, \tag{3}$$

ku a_{mn} *janë termat e vargut* (1), *e quajmë* **seri e dyfishtë numerike** *ose vetëm* **seri e dyfishtë**.

Elementet e vargut (1) i quajmë **kufiza** (ose **terma**) të serisë, kurse a_{mn} quhet **termi i përgjithshëm i serisë.**

Shumat e fundme

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} +$$
$$+ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} + \cdots + a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn},$$

$m, n \in \mathbf{N}$, quhen **shuma të pjesshme të serisë** (3).

Përkufizimi 1.1.10 *Thuhet se vargu i dyfishtë* $\{S_{mn}\}$ *ka limitin* $S(\in \mathbf{R})$ *në qoftë se për çdo* $\varepsilon > 0$ *ekziston numri natyral* $N(\varepsilon)$*ashtu që për çdo* $m > N(\varepsilon)$, $n > N(\varepsilon)$ *vlen pabarazimi:*

$$|S_{mn} - S| < \varepsilon.$$

Në këtë rast shkruajmë $\lim\limits_{(m,n)\to\infty} S_{mn} = S$.

Përkufizimi 1.1.11 *Në qoftë se vargu i shumave të pjesshme të serisë* (3) *ka limit të fundëm të cilin po e shënojmë me* S, *atëherë thuhet se ajo seri* **konvergjon** *dhe ka* **shumën** S.

Në këtë rast shkruajmë:

$$S = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m,n} a_{mn}.$$

Në rastin kur vargu i shumave të pjesshme tenton në pakufi ose nuk ka limit, atëherë thuhet se seria (3) **divergjon.**

Teorema 1.1.25 *Në qoftë se seria e dyfishtë* (3) *konvergjon, atëherë:*

$$\lim_{(m,n)\to\infty} a_{mn} = 0.$$

Vërtetimi. Nga përkufizimi i shumës S_{mn} rrjedh

$$a_{mn} = S_{nm} - S_{mn-1} + S_{m-1n-1},$$

prej nga shohim se

$$a_{mn} \to S - S - S + S = 0,$$

Shuma e serisë (3), në disa raste, mund të llogaritet kështu:

(a) Shumojmë kufizat e serisë (3) sipas rreshtave të tabelës (2)

$$\begin{array}{c} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + \cdots = u_1, \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} + \cdots = u_2, \\ a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn} + \cdots = u_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

e pastaj gjejmë shumën e serisë:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m + \cdots.$$

(b) Shumojmë termat e serisë (3) sipas shtyllave të tabelës (2)

$$a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{m1} + \cdots = v_1,$$

$$\begin{array}{l} a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{m2} + \cdots = v_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{mn} + \cdots = v_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

e pastaj llogarisim shumën

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots .$$

Përgjigjen se kur shumimi i përshkruar më sipër çon në shumën e serisë (3) e gjejmë në rezultatin e mëposhtëm.

Teorema 1.1.26 *Supozojmë se seria e dyfishtë* (3) *konvergjon. Atëherë:*
(a) *nëse konvergjojnë seritë sipas rreshtave*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = u_m, \quad m \in \mathbf{N}, \tag{4}$$

po ashtu edhe seria:

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \Big) \tag{5}$$

konvergjon dhe shuma e saj është e barabartë me shumën e serisë (3)*;*

(b) *nëse konvergjojnë seritë sipas shtyllave*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = v_m, \quad m \in \mathbf{N}, \tag{6}$$

po ashtu edhe seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_m = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \Big) \tag{7}$$

konvergjon dhe e ka shumën e barabartë me shumën e serisë (3).

Seritë (5) e (7) i quajmë **seri të përsëritura.**

Vërtetimi. (a) Le të jetë:

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} a_{kp}$$

shumë e pjesshme e serisë (3). Atëherë, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ ashtu që çdo $m, n > N(\varepsilon)$ vlejnë pabarazimet:

$$S - \varepsilon < S_{mn} < S + \varepsilon,$$

ku me S shënuam shumën e serisë (3). Tash kemi:

$$S-\varepsilon<\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{n}a_{kp}-\sum_{k=1}^{m}u_k+\sum_{p=1}^{m}u_k=\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{p=1}^{n}a_{kp}-u_k\Big)+\sum_{k=1}^{m}u_k<S+\varepsilon.$$

Në qoftë se e fiksojmë numrin $m(>N(\varepsilon))$ dhe nëse $n\to\infty$ do të fitojmë:

$$S-\varepsilon<\sum_{k=1}^{m}u_k\le S+\varepsilon,$$

d.m.th.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}u_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}(\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn})=S.$$

(b) Në mënyrë analoge tregohet që

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n}v_l=\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n}(\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn})=S.$$

Teorema u vërtetua.

Tregojmë me një shembull se pohimi i teoremës 1.26. nuk mbetet i vërtetë në rastin kur seritë sipas rreshtave ose sipas shtyllave janë divergjente.

Shembulli 1.1.14 Marrim serinë $\sum\limits_{m,n}a_{mn}$ për të cilën

$$S_{mn}=\Big(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\Big)\sin\frac{\pi m}{2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Meqenëse për çdo $\varepsilon>0$ pabarazimi:

$$|S_{mn}|=\Big|\Big(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\Big)\sin\frac{\pi m}{2}\sin\frac{\pi n}{2}\Big|\le\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<\varepsilon$$

vlen për çdo $m,n>\frac{2}{\varepsilon}$, konstatojmë se seria e dhënë konvergjon.

Mirëpo për atë seri shumat e serive me kufizat:

$$u_m=S_{mn}-S_{m-1n},\qquad v_n=S_{mn}-S_{mn-1}$$

nuk ekzistojnë, d.m.th. seritë sipas rreshtave e shtyllave divergjojnë.

Në vazhdim, po ashtu me një shembull, tregojmë se e kundërta e teoremës 1.26. nuk vlen.

Shembulli 1.1.15 Marrim $\sum\limits_{m,n}a_{mn}$ për të cilën

$$S_{mn}=\frac{mn}{(m+n)^2}.$$

Vërejmë se:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\Big) = \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} S_{mn}) = 0,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\Big) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} S_{mn}) = 0,$$

d.m.th. seritë e përsëritura konvergjojnë në zero. Tregojmë se seria e dyfishtë divergjon. Me të vërtetë, nëse marrim $m = k,\ n = k$, atëherë:

$$S_{mn} = S_{kk} = \frac{k^2}{4k^2} \to \frac{1}{2}, \quad k \to \infty,$$

ndërsa për $m = 2k, \quad n = k$, fitojmë:

$$S_{mn} = S_{2kk} = \frac{2k^2}{(3k^2)} \to \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}, \quad k \to \infty.$$

Prandaj meqë $\lim\limits_{(m,n)\to\infty} S_{mn}$ nuk ekziston, konstatojmë se seria e dyfishtë është divergjente.

Në vazhdim kuptimin e serisë pozitive do ta zgjerojmë për seritë e dyfishta dhe do të japim faktet themelore në lidhje me të.

Përkufizimi 1.1.12 *Serinë* $\sum\limits_{m,n} a_{mn}$ *termat e së cilës janë jonegative e quajmë* **seri e dyfishtë me terma pozitive** ose **vetëm seri e dyfishtë pozitive.**

Teorema 1.1.27 *Seria e dyfishtë pozitive:*

$$\sum_{m,n} a_{mn} \tag{8}$$

konvergjon atëherë dhe vetëm atëherë kur vargu i shumave të pjesshme të saj është i kufizuar.

Vërtetimi. Le të shënojmë me $\{S_{mn}\}$ vargun e shumave të pjesshme të serisë (8). Supozojmë se seria (8) konvergjon. Nga konvergjenca e vargut $\{S_{mn}\}$ rrjedh kufizueshmëria e tij.

Anasjelltas, le të jetë vargu $\{S_{mn}\}$ i kufizuar. Ekziston numri $M > 0$ ashtu që $S_{mn} < M$, për çdo $m, n \in \mathbf{N}$, prej nga rrjedh ekzistenca e supremumit të atij vargu. Po shënojmë $S = \sup\{S_{mn}\}$. Këndej rrjedh se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston çifti $(m_0, n_0) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ashtu që $S_{m_0n_0} > S - \varepsilon$. Mirëpo meqenëse vargu $\{S_{mn}\}$ është monotono rritës kemi:

$$S_{mn} > S_{m_0n_0} > S - \varepsilon,$$

për çdo $m, n > N_0$ ku $N_0 = \max\{m_0, n_0\}$. Rrjedhimisht, $|S_{mn} - S| < \varepsilon$, për çdo $m,\ n > N_0$ që tregon se $\lim\limits_{(n,m)\to\infty} S_{mn} = S$.

Teorema 1.1.28 *Nga konvergjenca e njërës nga tri seritë:*

$$\sum_{m,u} a_{mn}, \quad \sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}),$$

për të cilat $a_{mn} \geq 0$, *rrjedh konvergjenca e dy të tjerave.*

Vërtetimi. Supozojmë se konvergjon seria e dyfishtë (8) dhe shuma e saj le të jetë S. Atëherë, sipas teoremës 1.1.27, kemi:

$$S_{mn} \leq S, \tag{9}$$

prej nga fitojmë:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{mk} = a_{m1} + a_{m2} + ... + a_{mn} \leq S_{mn} \leq S.$$

Tash, kur $n \to \infty$, shohim se për çdo m seritë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ konvergjojnë. Nëse marrim $u_m = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{mk}$, atëherë $\lim\limits_{n\to\infty} S_{mn} = \sum\limits_{k=1}^{m} u_k$. Me të vërtetë nga $u_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{kn}$ del

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell} = \lim_{n\to\infty} S_{mn}.$$

Pastaj, me kalimin në limit në pabarazimin (9) kur $n \to \infty$, fitojmë:

$$\sum_{k=1}^{m} u_k \leq S,$$

për çdo $m \in \mathbf{N}$ dhe, meqë këto shuma janë të kufizuara, konstatojmë se konvergjon seria e përsëritur

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\Big)$$

dhe shuma e saj σ plotëson pabarazimin:

$$\sigma \leq S. \tag{10}$$

Për të treguar konvergjencën e serisë së dytë të përsëritur veprojmë në mënyrë analoge si më sipër.

Tash supozojmë se konvergjon seria e përsëritur

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\Big) = \sigma.$$

Tregojmë se konvergjon seria e dyfishtë. Duke shënuar me $u_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{kn}$ shohim se vlen relacioni:

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell} a_{k\ell} \Big) \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} = \sum_{k=1}^{m} u_k \leq \sigma,$$

që tregon se vargu $\{S_{mn}\}$është i kufizuar. Rrjedhimisht, nga teorema 1.1.27, përfundojmë se seria (8) konvergjon. Në këtë rast vlen:

$$S \leq \sigma. \tag{11}$$

Nga (10) e (11) del $\sigma = S$.

Për vërtetimin e konvergjencës së serisë së dytë të përsëritur veprojmë në mënyrë analoge. Me këtë teorema u vërtetua.

Në fund të kësaj pike do të japim kuptimin e konvergjencës absolute për seritë e dyfishta.

Përkufizimi 1.1.13 *Thuhet se seria e dyfishtë* $\sum\limits_{m,n} a_{mn}$ **konvergjon absolutisht** *në qoftë se konvergjon seria* $\sum\limits_{m,n} |a_{mn}|$.

Teorema 1.1.29 *Çdo seri e dyfishtë absolutisht konvergjente është konvergjente.*

Vërtetimi. Po shënojmë me $S_{mn} = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{\ell=1}^{m} a_{k\ell}$ e $A_{mn} = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{\ell=1}^{m} |a_{k\ell}|$ shumat e pjesshme të serisë së dyfishtë $\sum\limits_{m,n} a_{mn}$, përkatësisht $\sum\limits_{m,n} |a_{mn}|$. Sipas supozimit vargu $\{A_{mn}\}$, kur $m \to \infty, n \to \infty$, konvergjon. Po shënojmë shumën e tij me A. Atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $N_1(\varepsilon)$ ashtu që për $n > N_1(\varepsilon), m > N_1(\varepsilon)$ vlen:

$$|A_{mn} - A| < \varepsilon. \tag{12}$$

Së pari tregojmë se vargu

$$S_{11}, S_{22}, ..., S_{mm}, ... \tag{13}$$

konvergjon. Me të vërtetë, meqë $\{A_{pp}\}$ konvergjon, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $N_2(\varepsilon)$ ashtu që për çdo $m, n > N_2(\varepsilon)$ vlen:

$$|S_{nn} - S_{mm}| \leq |A_{nn} - A_{mm}| = |(A_{nn} - A) - (A - A_{mm})| \leq |A_{nn} - A| +$$
$$+ |A - A_{mm}| < 2\varepsilon.$$

Prandaj, sipas kriterit Koshi, shohim se vargu (13) konvergjon. Le të jetë $S = \lim\limits_{m \to \infty} S_{mm}$. Atëherë për $\varepsilon > 0$ ekziston numri $N_3(\varepsilon)$ ashtu që për $m > N_3(\varepsilon)$ vlen pabarazimi:

$$|S_{mm} - S| < \varepsilon. \tag{14}$$

Tregojmë se S është shumë e serisë së dyfishtë $\sum\limits_{m,n} a_{mn}$. Me të vërtetë, nëse $N_4(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_3(\varepsilon)\}$, atëherë për $m, n > N_4(\varepsilon)$ dhe nga (12) e (14) kemi:

$$|S_{mn} - S| = |(S_{mn} - S_{mm}) + (S_{mm} - S)| \leq |S_{mn} - S_{mm}| + |S_{mm} - S| \leq$$
$$\leq |A_{mn} - A_{mm}| + |S_{mm} - S| = |(A_{mn} - A) + (A - A_{mm}| + |S_{mm} - S| \leq$$
$$\leq |A_{mn} - A| + |A - A_{mm}| + |S_{mm} - S| < 3\varepsilon.$$

Me këtë teorema u vërtetua.

Teorema 1.1.30 *Në qoftë se seria:*

$$\sum_{m,n} a_{mn} \tag{15}$$

konvergjon absolutisht, atëherë seritë sipas rreshtave $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}, m \in \mathbf{N}$ *(sipas shtyllave* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn} = v_n, n \in \mathbf{N}$*) po ashtu konvergjojnë absolutisht. Përveç kësaj, edhe seria* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_m \Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n \Big)$ *konvergjon absolutisht dhe ka shumën e barabartë me atë të serisë së dyfishtë.*

Vërtetimi. Nga fakti se seria (15) konvergjon absolutisht dhe nga teorema 1.1.28, shohim se konvergjojnë seritë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|, m \in \mathbf{N} \ \text{ dhe} \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \Big).$$

Në qoftë se në pabarazimin:

$$\Big| \sum_{n=1}^{p} a_{mn} \Big| \leq \sum_{n=1}^{p} |a_{mn}|$$

kalojmë me limit kur $p \to \infty$ marrim:

$$|u_m| = \Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|.$$

Këndej dhe nga teorema e krahasimit del konvergjenca e serisë $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |u_m|$. Kjo tregon se seria $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_m$ konvergjon absolutisht.

Mëtutje, nga konvergjenca e serisë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|, \quad m \in \mathbf{N}$, rrjedh konvergjenca e serive (teorema 1.1.16)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Prandaj, sipas teoremës 1.26, seria:

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = \sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn})$$

ka shumë të njëjtë me shumën e serisë së dyfishtë.

Në mënyrë analoge tregohet pohimi për serinë sipas shtyllave dhe me këtë vërtetimi i teoremës përfundoi.

1.1.9 Seritë e shumëfishta

Përkufizimi i serisë së $p-$fishtë ($p > 2$), jepet në mënyrë analoge si ai i serisë së dyfishtë.

Përkufizimi 1.1.14 *Funksionin*

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} ... \times \mathbf{N} \to \mathbf{R} : (i, j, ..., k) \mapsto a_{i,j,...,k}$$

ku $i, j, ..., k \in \mathbf{N}$, $a_{i,j,...,k} \in \mathbf{R}$, *e quajmë* **varg i** $p-$**fishtë numerik.**

Numrat $a_{i,j,...,k}$ quhen **kufiza (terma)** të vargut të $p-$fishtë numerik.

Shprehjen:

$$\sum_{i,j,...,k=1}^{\infty} a_{i,j,...,k} \tag{1}$$

e quajmë **seri të** $p-$**fishtë.** Shumën

$$S_{m,n,...r} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} ... \sum_{k=1}^{r} a_{i,j,...,k} \tag{2}$$

e quajmë **shumë të pjesshme të serisë (1)**.

Vargu $\{S_{m,n,...,r}\}$ ka limit numrin $S(\in \mathbf{R})$ nëse për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $N(\varepsilon)$ ashtu që për çdo $m, n, ..., r > N(\varepsilon)$ plotësohet pabarazimi:

$$|S_{m,n,...,r} - S| < \varepsilon.$$

Në rastin kur vargu $\{S_{m,n,...,r}\}$ ka limit të fundmë themi se seria (1) **konvergjon**, ndërsa kur ai limit nuk ekziston ose është i pafundmë themi se seria (1) **divergjon**.

Në mënyrë analoge si te seritë e dyfishta mund të formulohen dhe vërtetohen rezultatet themelore për seritë e $p-$fishta.

1.1.10 Prodhimet e pafundme

Në pikat e mësipërme shqyrtuam problemin e zgjërimit të veprimit të mbledhjes në një numër të pafundmë kufizash. Tash do të trajtojmë problemin e zgjërimit të nocionit të produktit në rastin kur numri i faktorëve është i pafundmë.

Le të jetë dhënë vargu numerik:

$$b_1.b_2, ..., b_n, ...$$

Përkufizimi 1.1.15 *Shprehja:*

$$b_1 \cdot b_2 \cdots b_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{1}$$

quhet **prodhim i pafundmë**.

Numrat $b_1.b_2, ..., b_n, ...$ quhen **faktorë të prodhimit të pafundmë,** kurse

$$P_1 = b_1, P_2 = b_1 \cdot b_2, ..., P_n = b_1 \cdot b_2 \cdots b_n = \prod_{k=1}^{n} b_k, \cdots,$$

quhet **varg i prodhimeve të pjesshme**.

Përkufizimi 1.1.16 *Thuhet se prodhimi* (1) *është* **konvergjent** *në qoftë se vargu* $\{P_n\}$ *ka limit të fundmë* P *të ndryshëm nga zero. Në këtë rast* P *quhet* **vlerë e prodhimit** *dhe shënohet:*

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Nëse limiti i vargut $\{P_n\}$ është zero ose i pafundmë ose nuk ekziston, atëherë prodhimi (1) quhet **divergjent.**

Kur bile njeni nga faktorët e prodhimit është i barabartë me zero, prodhimet e pjesshme, duke filluar nga një numër, janë të barabartë me zero, prandaj prodhimi divergjon. Në vazhdim do të supozojmë që të gjithë faktorët e prodhimit janë të ndryshëm nga zero.

Shembulli 1.1.16 Të shqyrtohet natyra e prodhimit

$$\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2}).$$

Zgjidhje: Prodhimi i $n-$të i pjesshëm është

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{(2^2-1)(3^2-1)\cdots(n^2-1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdots n^2} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2} = \frac{n+1}{2n},$$

prej nga shihet se $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}$, që sipas përkufizimit tregon se prodhimi i dhënë konvergjon.

Shembulli 1.1.17 Të gjendet vlera e prodhimit

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n}, \quad x \neq 0, \quad \frac{x}{2^n} \neq k\pi, \ k, n \in \mathbf{N}.$$

Zgjidhje: Për gjetjen e prodhimit $P_n = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdots \cos\frac{x}{2^n}$ shumëzojmë e pjesëtojmë shprehjen P_n me $\sin\frac{x}{2^n}$ e pastaj $n-$herë përdorim formulën $\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$. Kështu kemi:

$$P_n = \frac{1}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} \sin x,$$

prej nga fitojmë:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n}.$$

Në vazhdim japim kushtin e nevojshëm për konvergjencën e prodhimit (1).

Teorema 1.1.31 *Në qoftë se prodhimi* (1) *konvergjon atëherë* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

Vërtetimi. Sipas supozimit vargu $\{P_n\}$ konvergjon te një numër $p \neq 0$ $(p \in \mathbf{R})$. Meqenëse $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n-1} = p$ fitojmë:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{p}{p} = 1,$$

dhe me këtë teorema u vërtetua.

Nëse shënojmë $b_n = 1 + a_n$, atëherë prodhimi (1) merr formën:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n). \tag{2}$$

Nga teorema 1.1.31. rrjedh se kusht i nevojshëm për konvergjencën e prodhimit (2) është $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Prodhimi $\prod\limits_{n=2}^{\infty} (1 + \sqrt[n]{n})$ divergjon sepse $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0$.

Shembulli vijues tregon se e kundërta e teoremës 1.31, në rastin e përgjithshëm, nuk është e vërtetë.

Për prodhimin $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})$ vlen $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, mirëpo:

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,$$

që tregon se ai divergjon.

Po theksojmë se nga përkufizimi i konvergjencës së prodhimit rrjedh se me heqjen ose shtimin e një numri të fundmë faktorësh të ndryshëm nga zero, natyra e prodhimit nuk ndryshon. Ndërsa, nga kushti i nevojshëm i konvergjencës rrjedh se $b_n>0$ pothuajse për çdo n. Prandaj, pa kufizim përgjithësimi, mund të supozojmë që të gjithë faktorët e prodhimit (1) (ose (2)) janë pozitiv (më të mëdhenj se -1).

Në vazhdim do të shohim lidhjen që ekziston midis konvergjencës së serisë dhe konvergjencës së prodhimit të pafundmë, me qëllim që të përdoret aparati i serive i cili u shqyrtua me mjaft hollësi.

Teorema 1.1.32 *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që prodhimi i pafundmë* (1) *të konvergjojë është konvergjenca e serisë:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln b_n. \tag{3}$$

Në rast konvergjence shuma S e serisë (3) *dhe prodhimi P i* (1) *janë të lidhur me relacionin $P=e^S$.*

Vërtetimi. Shënojmë me S_n shumën e $n-$të të pjesshme të serisë (3) kurse me P_n prodhimin e $n-$të të pjesshëm të (1). Atëherë kemi:

$$S_n=\ln P_n,\quad P_n=e^{S_n}.$$

Nëse prodhimi (1) konvergjon atëherë $P_n\to P$, kur $n\to\infty$, dhe meqë funksioni logaritmik është i vazhdueshëm fitojmë $\ln P_n\to\ln P$, kur $n\to\infty$. Kështu, $\lim_{n\to\infty}\ln P_n=\ln P$, prej nga shihet se vargu $\{S_n\}$ konvergjon në numrin $S=\ln P$, d.m.th. që seria (3) konvergjon.

Nëse seria (3) konvergjon atëherë $S_n\to S$, kur $n\to\infty$, dhe meqë funksioni eksponencial është i vazhdueshëm, shohim se

$$\lim_{n\to\infty}P_n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}S_n}=e^S=P,$$

d.m.th. prodhimi (1) konvergjon.

Teorema u vërtetua.

Vërejtje. Nga teorema 1.1.32 rrjedh se problemi i konvergjencës së prodhimit të pafundmë (2) është ekuivalent me problemin e konvergjencës së serisë:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n). \tag{4}$$

Teorema 1.1.33 *Në qoftë se kufiza* a_n, *të paktën duke filluar nga një indeks i caktuar ruan shenjë, atëherë kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që prodhimi i pafundmë* (2) *të konvergjojë është konvergjenca e serisë:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{5}$$

Vërtetimi. Për konvergjencën e serisë (4) dhe të serisë (5) është e nevojshme që $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Supozojmë se plotësohet ky kusht. Atëherë:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1.$$

Meqenëse duke filluar nga një indeks kufizat e serive (4) e (5) ruajnë shenjë, shohim se, sipas rrjedhimit 1.1.2, ato janë të së njëjtës natyrë. Më në fund, nga vërejtja e mësipërme, shohim se seria (4) konvergjon atëherë dhe vetëm atëherë kur konvergjon prodhimi (2).

Teorema 1.1.34 *Në qoftë se seria* (5) *dhe:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \tag{6}$$

konvergjojnë atëherë konvergjon prodhimi (2).

Vërtetimi. Nga formula e Tejlorit dihet se

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Prandaj:

$$\ln(1+a_n) = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2),$$

ose:

$$\ln(1+a_n) - a_n = -\frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2),$$

ose:

$$a_n - \ln(1+a_n) = \frac{1}{2}a_n^2 - o(a_n^2).$$

Këndej rrjedh se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}.$$

Nga barazimi i mësipërm del se, duke filluar nga një indeks i caktuar, kufizat e serisë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n - \ln(1+a_n)] \tag{7}$$

janë pozitive. Nga konvergjenca e serisë (6) dhe nga rrjedhimi 1.1.2, del konvergjenca e serisë (7). Këndej dhe sipas supozimit se seria (5) konvergjon shohim se konvergjon edhe seria (4), pra konvergjon prodhimi (2).

Teorema 1.1.35 *(Kriteri i Koshit) Prodhimi i pafundmë* (2) *konvergjon atëherë dhe vetëm atëherë kur për çdo* $\varepsilon > 0$ *ekziston numri* n_0 *ashtu që për çdo* $n > n_0$ *dhe çdo* $m \in \mathbf{N}$ *vlen pabarazimi:*

$$|(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2})...(1 + a_{n+m}) - 1| < \varepsilon. \qquad (8)$$

Vërtetimi. Supozojmë se prodhimi (2) konvergjon. Meqë $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$ do të ekzistoj numri $\alpha > 0$ ashtu që pabarazimi $|P_n| > \alpha$ vlen pothuajse për çdo $n \in \mathbf{N}$.

Nga kriteri i Koshit për konvergjencën e vargjeve rrjedh se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri n_0 ashtu që për çdo $n > n_0$ dhe çdo $m \in N$ vlen pabarazimi:

$$|P_{n+m} - P_n| < \varepsilon\,\alpha.$$

Këndej

$$|P_{n+m} - P_n| < \varepsilon\,\alpha < \varepsilon \cdot |P_n|,$$

ose:

$$\frac{|P_{n+m} - P_n|}{|P_n|} < \varepsilon,$$

ose:

$$\left|\frac{P_{n+m}}{P_n} - 1\right| = |(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \cdots (1 + a_{n+m}) - 1| < \varepsilon,$$

çka synuam të tregojmë.

Anasjelltas, supozojmë se për çdo $\epsilon > 0$ ekziston numri n_0 ashtu që për çdo $n > n_0$ dhe $m \in \mathbf{N}$ vlen (8) për çdo $m \in \mathbf{N}$ rrjedh se:

$$\left|\frac{P_{n+m}}{P_n} - 1\right| < \varepsilon,$$

ose:

$$|P_{n+m} - P_n| < \varepsilon|P_n|,$$

ose:

$$|P_{n+m}| < (1 + \varepsilon)|P_n| = A,$$

Kjo tregon se vargu $\{P_n\}$ është i kufizuar. Tash, nga kushti i teoremës, ekziston numri $N(\varepsilon) > n_0$ ashtu që për çdo $n > N(\varepsilon)$ dhe çdo $m \in \mathbf{N}$ kemi:

$$|(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2})...(1 + a_{n+m}) - 1| = \left|\frac{P_{n+m}}{P_n} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{A},$$

ose meqë $|P_n| < A$, për çdo $n > n_0$, kemi:

$$|P_{n+m} - P_n| < \frac{\varepsilon}{A}|P_n| < \varepsilon.$$

Këndej, sipas teoremës së Koshit për konvergjencën e vargjeve, shohim se vargu $\{P_n\}$ i prodhimeve të pjesshme konvergjon. Mbetet të tregojmë se

$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$. Supozojmë se vlen e kundërta, d.m.th. $P = 0$. Atëherë për $n_1 > n_0$ dhe çdo $m \in N$ vlen:

$$\left|\frac{P_{n_1+m}}{P_{n_1}} - 1\right| < \varepsilon, \quad \varepsilon < 1.$$

Me kalim në limit, kur $m \to \infty$, do të fitojmë pabarazimin $1 \leq \varepsilon$ i cili është në kundërshtim me pabarazimin $\varepsilon < 1$. Teorema u vërtetua.

Përkufizimi 1.1.17 *Thuhet se prodhimi* (2) **konvergjon absolutisht,** *nëse konvergjon prodhimi:*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|). \tag{9}$$

Teorema 1.1.36 *Në qoftë se prodhimi* (2) *konvergjon absolutisht atëherë ai konvergjon.*

Vërtetimi. Nga konvergjenca absolute e prodhimit (2) rrjedh konvergjenca e prodhimit (9). Këndej, sipas teoremës 1.1.34, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $N(\varepsilon)$ ashtu që për çdo $n > N(\varepsilon)$ dhe çdo $m \in N$ vlen:

$$|(1 + |a_{n+1}|)(1 + |a_{n+2}|)...(1 + |a_{n+m}|) - 1| < \varepsilon. \tag{10}$$

Tash, sipas pabarazimit (10), për çdo $n > N(\varepsilon)$ dhe çdo $m \in \mathbf{N}$ fitojmë:

$$|(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}).....(1 + a_{n+m}) - 1| = |1 + a_{n+1} + a_{n+2} + ...+$$

$$+a_{n+m} + a_{n+1}a_{n+2} + ... + a_{n+1}a_{n+m} + ... + a_{n+1}a_{n+2}...a_{n+m} - 1| \leq$$

$$\leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+m}| + |a_{n+1}||a_{n+2}| + ... + |a_{n+1}||a_{n+m}|+$$

$$+... + |a_{n+1}||a_{n+2}|...|a_{n+m}| = 1 + |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+m}|+$$

$$+|a_{n+1}||a_{n+2}| + ... + |a_{n+1}||a_{n+m}| + ... + |a_{n+1}||a_{n+2}|...|a_{n+m}| - 1 =$$

$$= (1 + |a_{n+1}|)(1 + |a_{n+2}|)...(1 + |a_{n+m}|) - 1 < \varepsilon.$$

Prandaj, nga teorema 1.1.34. rrjedh se prodhimi (2) konvergjon.

Në fund të kësaj pike japim një rezultat, vërtetimi i të cilit rrjedh menjëherë nga teoremat 1.1.33. e 1.1.35.

Teorema 1.1.37 *Prodhimi* (2) *konvergjon absolutisht atëherë dhe vetëm atëherë kur seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergjon absolutisht.*

Shembulli 1.1.18 Prodhimi

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\right]$$

konvergjon absolutisht sepse seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

konvergjon absolutisht.

1.1.11 * Përgjithësime të kuptimit të shumimit të serive

Le të jetë dhënë seria:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

Në pikën 1.1.1. është dhënë përkufizimi i shumës së serisë (1) si limit i fundëm i vargut të shumave të pjesshme të saj. Në një numër problemesh të analizës mate- matike lind nevoja të operohet me seri të cilat vargun e shumave të pjesshme e kanë divergjent, d.m.th. me seri të cilat në kuptimin e gjertanishëm nuk kishin shumë. Për këtë në mënyrë të natyrshme lind nevoja e përgjithësimit të kuptimit të konvergjencës së serisë (1).

Në këtë pikë do të japim dy metoda të shumimit të serive që në kuptimin e gjertanishëm janë divergjente. Shumën e serisë në kuptimin e ri të shumimit do ta quajmë **shumë të përgjithësuar.** Para se të kalojmë në paraqitjen e atyre meto- dave po japim dy vërejtje.

Së pari, nëse në kuptimin e ri të shumimit seria (1) ka shumën S, kurse seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ka shumën S^*, atëherë $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A\cdot a_n + B\cdot b_n)$, ku A dhe B janë dy konstante të çfarëdoshme, ka shumën e përgjithësuar $A\cdot S + B\cdot S^*$. Metoda që gëzon këtë veti quhet **lineare**.

Së dyti, nëse seria (1) konvergjon në kuptimin e zakonshëm dhe ka shumën S atëherë ajo duhet të konvergjojë edhe në kuptimin e ri dhe shuma e saj e përgjithësuar duhet të jetë S. Metoda e shumimit që gëzon këtë veti quhet e **rregullt.** Në analizë dhe në zbatimet e saja rëndom përgjithësimet e shumimit janë të rregullta dhe lineare.

(a) **Metoda Qezaro** (metoda e të mesmeve aritmetike). *Për serinë divergjente* (1) *thuhet se është e shumueshme me metodën Qezaro në qoftë se ekziston limiti i vargut të të mesmeve aritmetike të shumave të pjesshme të asaj serie, d.m.th. në qoftë se ekziston:*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+...+S_n}{n}. \qquad (2)$$

Lineariteti i kësaj metode të shumimit është evident, ndërsa rregullshmëria rrjedh nga pohimi që vijon.

Pohim. Nëse vargu $\{x_n\}$ konvergjon tek a atëherë edhe vargu i të mesmeve aritmetike $\left\{\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right\}$ konvergjon dhe ka limit a.

Vërtetimi. Me të vërtetë, duke përdorur teoremën e Shtolcit (për konergjencën e herësit të dy vargjeve), kemi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

që edhe synuam të tregojmë.

Nga ky pohim, siç u tha më sipër, rrjedh rregullshmëria e shumimit sipas Qezaros, d.m.th. nëse vargu S_n ka limit $S \in \mathbf{R}$ atëherë edhe vargu σ_n konvergjon dhe ka limitin S.

Vërejmë se metoda Qezaro është jo vetëm e rregulltë por edhe **plotësisht e rregulltë**, d.m.th. nëse $S_n \to +\infty$ kur $n \to \infty$, atëherë edhe $\sigma_n \to +\infty$ kur $n \to \infty$.

Me të vërtetë, nga $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, del që për çdo $M > 0$ ekziston numri n_0 ashtu që për $n > n_0$ vlen $S_n > M$. Tash:

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + ... + S_{n_0}}{n} + \frac{S_{n_0+1} + ... + S_n}{n}$$

dhe është e qartë se kur $n \to \infty$ sumandi i parë tenton në zero. Për sumandin e dytë vlen pabarazimi:

$$\frac{S_{n_0+1} + ... + S_n}{n} > M\frac{n - n_0}{n}$$

i cili për $n > n_0 + 2$ merr formën:

$$\frac{S_{n_0+1} + ... + S_n}{n} > \frac{M}{2}.$$

Prandaj $\sigma \to +\infty$ kur $n \to \infty$.

Shembulli 1.1.19 Marrim serinë:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - ... + (-1)^{n-1} + ...$$

Atëherë:

$$S_n = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}$$

dhe shihet se vargu S_n nuk ka limit, d.m.th. seria divergjon në kuptimin e zakonshëm. Duke përdorur metodën Qezaro, shohim se

$$\sigma_{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},\ \sigma_{2n+1} = \frac{n}{2n+1},\ n \in \mathbf{N},$$

prej nga fitojmë:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sigma_{2n+1} = \frac{1}{2}$$

d.m.th. seria e dhënë është e shumueshme sipas Qezaros.

Shembulli 1.1.20 Të tregohet se seritë:

$$\sum_{n\to 1}^{\infty}\sin n\theta,\ \ 0<\theta<\pi, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\theta,\ \ |\theta|<\pi, \tag{4}$$

divergjojnë në kuptimin e zakonshëm dhe konvergjojnë sipas metodës Qezaro.

Zgjidhja: Supozojmë p.sh. se seria (3) konvergjon në kuptimin e zakonshëm. Nga kushti i nevojshëm konvergjencës shohim se

$$\lim_{n\to\infty}\sin n\theta=0. \tag{5}$$

Këndej del $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)\theta=0$ ose $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta)=0$.

Meqenëse vlen (5), kemi:

$$\lim_{n\to\infty}\cos n\theta=0. \tag{6}$$

Nga (5) dhe (6) rrjedh barazimi $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2 n\theta+\cos^2 n\theta)=0$ i cili është në kundërshtim me identitetin trigonometrik $\sin^2 n\theta+\cos^2 n\theta=1$. Prandaj seria (3) divergjon.

Tregojmë se edhe seria (4) divergjon. Në rast të kundërt do të fitonim $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\theta=0$. Tash nga $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\theta\neq 0$ dhe nga barazimi $\cos(n+1)\theta=\cos n\theta\cos\theta\ -\sin n\theta\sin\theta$ shohim se $\cos(n+1)\theta\to 0$, kur $n\to\infty$, d.m.th, $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\theta\neq 0$, që është në kundërshtim me supozimin.

Tregojmë se seria (3) mund të shumohet me metodën Qezaro. Nga shembulli 1.1.5 kemi:

$$S_n=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\frac{\sin n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}, 0<\theta<\pi.$$

Formojmë vargun σ_n. kemi:

$$\sigma_n=\frac{S_1+S_2+...+S_n}{n}=\frac{1}{n}\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right]=\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-$$

$$-\frac{1}{2n\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2n\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4n\sin^2\frac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n}[\sin(k+1)\theta-\sin k\theta]=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\frac{\sin(n+1)\theta-\sin\theta}{4n\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Tash, kur dihet se $\sin(n+1)\theta$ është madhësi e kufizuar fitojmë:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,.$$

Mbetet të tregohet se seria (4) mund të shumohet me metodën Qezaro. Nga

$$\cos\theta + \cos 2\theta + ... + \cos n\theta = \frac{\cos\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n\theta}{2}}{4n\sin^2\frac{n\theta}{2}}$$

del:

$$S_n = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\,.$$

Prandaj:

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sin\bigl(k+\frac{1}{2}\bigr)\theta = \frac{1}{4n\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n}[\cos k\theta - \cos(k+1)\theta] =$$

$$= \frac{1}{4n\sin^2\frac{\theta}{2}}[\cos\theta - \cos(n+1)\theta],$$

dhe me kalimin në limit gjejmë:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0.$$

(b) **Metoda e Puason-Abelit.** Kjo metodë shumimi bazohet në faktin që për serinë (1) formohet seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + ... + a_n x^{n-1} + ...\,, \tag{7}$$

ku x është numër real dhe $0 < x < 1$.

Thuhet se seria (1) *shumohet me metodën e Pauso-Abelit dhe ka shumën e përgjithësuar* S*, nëse seria (7) konvergjon për çdo* $x \in (0,1)$ *dhe:*

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = S.$$

Meqenëse lineariteti i këtij shumimi është i qartë mbetet të tregohet rregullshmëria. Supozojmë se seria (1) konvergjon në kuptimin e zakonshëm dhe se shuma e saj është S. Duhet treguar se seria (7) tenton te numri S kur $x \to 1-0$.

Meqë seria (1) konvergjon atëherë $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, prandaj ekziston numri $M > 0$ ashtu që $|a_n| < M$, për çdo $n \in \mathbf{N}$. Atëherë:

$$|a_n x^{n-1}| \le M \cdot x^{n-1}\,,$$

për çdo $x \in (0,1)$. Tash, meqë seria e progresionit gjeometrik $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ konvergjon për $|x| < 1$, nga teorema 1.7, shohim se seria (7) konvergjon absolutisht. Këndej rrjedh se ajo konvergjon.

Mbetet të tregojmë se $\lim\limits_{x \to 1-0} S(x) = S$. Shënojmë me S_n shumën e n-të të pjesshme të serisë (1), d.m.th. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Atëherë $a_k = S_k - S_{k-1}$ dhe:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} = S_1 + (S_2 - S_1)x + ... + (S_n - S_{n-1} x^{n-1} = S_1(1-x) + S_2(x - x^2) + ...$$

$$+ S_{n-1}(x^{n-2} - x^{n-1}) + S_n x^{n-1},$$

ose:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{n-1} S_k x^{k-1} + S_n x^{n-1}.$$

Tash, meqë $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ dhe $\lim\limits_{n \to \infty} x^{n-1} = 0$, fitojmë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^{n-1}\,. \tag{8}$$

Zbresim barazimin (8) nga identiteti evident $S = (1-x) \sum\limits_{n=1}^{\infty} S x^{n-1}$:

$$S - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (S - S_n) \cdot x^{n-1},$$

prej nga, pasi që mbetjen e serisë (1) e shënojmë me $R_n (= S - S_n)$, gjejmë:

$$S - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} R_n x^{n-1}. \tag{9}$$

Mbetet të tregojmë se kur $x \to 1-0$ ana e djathtë e barazimit (9) tenton në zero. Me të vërtetë, nga $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$ rrjedh se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri n_0 ashtu që për $n > n_0$ vlen pabarazimi $|R_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Këndej dhe duke vërejtur se $(1-x) \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} x^{n-1} < 1$ për $x \in (0,1)$ fitojmë:

$$\left|(1-x) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} R_n x^{n-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \left|(1-x) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} R_n x^{n-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Meqë

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x) \sum_{n=1}^{n_0} R_n x^{n-1} = 0,$$

për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet numri $\delta > 0$ ashtu që për $1-\delta < x < 1$ ka vend pabarazimi:

$$\left|(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} R_n x^{n-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tash nga (10) e (11) del ajo që kërkohej. Kështu rregullshmëria e metodës Puason-Abel u vërtetua.

Në vazhdim tregojmë se metoda e Pauson-Abelit është plotësisht e rregulltë.

Le të jetë $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Atëherë, për çdo $M > 0$ ekziston numri n_0 ashtu që për $n > n_0$ vlen $S_n > M$. Këndej rrjedh se:

$$\begin{aligned}&(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^{n-1} = (1-x)\sum_{n=1}^{n_0} S_n x^{n-1} + (1-x)\sum_{n=n_0+1}^{\infty} S_n x^{n-1}\\ &> (1-x)\sum_{n=1}^{n_0} S_n x^{n-1} + M\cdot x^{n_0+1}.\end{aligned} \tag{12}$$

Po theksojmë se $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{n_0} S_n x^{n-1} = 0$ si dhe $\lim\limits_{x\to 1-0} M\cdot x^{n_0+1} = M$. Prandaj, për $\varepsilon > 0$ ekzistojnë numrat δ_1, $\delta_2 > 0$ ashtu që për çdo $x \in (1-\delta_1, 1)$ përkatësisht $x \in (1-\delta_2, 1)$, vlen:

$$(1-x)\sum_{n=1}^{n_0} S_n x^{n-1} > -\varepsilon,\ M x^{n_0+1} > M-\varepsilon, \tag{13}$$

Nëse marrim $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ atëherë për çdo $x \in (1-\delta, 1)$ njëkohësisht vlejnë pabarazimet (13). Prandaj, duke marrë parasysh relacionin (12), shohim se $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n x^{n-1} = +\infty$, që tregon se metoda e Puason-Abelit është plotësisht rregulare.

Shembulli 1.1.21 Me metodën e Puason-Abelit të gjendet shuma e përgjithësuar e serisë $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$.

Zgjidhja: Marrim serinë:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1} = 1 - x + x^2 - \dots .$$

Kjo është seri e progresionit gjeometrik, konvergjon për $0 < x < 1$ dhe ka shumën $S(x) = \frac{1}{1-x}$. Meqë $\lim\limits_{x\to 1-0} S(x) = \frac{1}{2}$, konstatojmë se seria në shqyrtim ka shumën e përgjithësuar $\frac{1}{2}$.

Vërejmë se edhe kur shumuam serinë e mësipërme me metodën e Qezaros fitu- am shumën e përgjithësuar $\frac{1}{2}$. Se ky pohim nuk është i rastit tregon rezultati vijues.

Teorema 1.1.38 *(Frobenius). Nëse seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *shumohet me metodën Qezaro dhe ka shumën e përgjithësuar* S*, atëherë ajo shumohet edhe me metodën e Puason-Abelit dhe ka të njëjtën shumë të përgjithësuar.*

Vërtetimi. Supozojmë se seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ shumohet me metodën Qezaro dhe ka shumën S. Meqenëse:

$$S_1 + S_2 + ... + S_n = n\sigma_n,$$

duke marrë parasysh barazimin (8) kemi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^{n-1} = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^{n-1} = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^{n-1} \tag{14}$$

Nga $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ rrjedh se (shih Teoremën 1.2.17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, ose:

$$1 = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}\,. \tag{15}$$

Pasi të shumëzojmë me S të dy anët e barazimit (15) dhe barazimin e fituar e zbre- sim nga (14) gjejmë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} - S = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(\sigma_n - S)x^{n-1} = (1-x)^2 \sum_{k=1}^{n} k(\sigma_k - S)x^{k-1} +$$

$$+(1-x)^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} k(\sigma_k - S)x^{k-1}. \tag{16}$$

Për n të fiksuar kemi:

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)^2 \sum_{k=1}^{n} k(\sigma_k - S)x^{k-1} = 0. \tag{17}$$

Ndërkaq nga $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S$ rrjedh se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri n_0 ashtu që për $n > n_0$ vlen $|\sigma_n - S| < \varepsilon$. Por nëse m e zgjedhim të tillë që $m > n_0$ atëherë po ashtu vlen $|\sigma_n - S| < \varepsilon$ për $n > m$. Këndej dhe nga barazimi (15) gjejmë:

$$\left|(1-x)^2 \sum_{n=m+1}^{N'} n \cdot (\sigma_n - S)x^{n-1}\right| \leq (1-x)^2 \sum_{n=m+1}^{N'} n \cdot |\sigma_n - S| x^{n-1} <$$

$$< \varepsilon(1-x)^2 \sum_{n=m+1}^{N'} n \cdot x^{n-1} < \varepsilon(1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \varepsilon,$$

dhe kur $N' \to \infty$ fitojmë:

$$\left|(1-x)^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} n(\sigma_n - S)x^{n-1}\right| < \varepsilon. \tag{18}$$

Nga (17) e (18) rrjedh barazimi:

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = S,$$

i cili tregon se shuma e përgjithësuar e serisë (1), e fituar me metodën e Puason-Abelit është S. Teorema n vërtetua.

1.1.12 Detyra për ushtrime

1. Të shqyrtohet natyra e serive:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} : \qquad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}.$$

2. Të vërtetohet barazimi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

3. Të shqyrtohet natyra e serisë:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} \cdot y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (|x \cdot y| < 1).$$

4. Të gjendet vlera e këtyre prodhimeve:

$$(a) \prod_{n=2}^{\infty} \tfrac{n^3-1}{n^3+1}; \qquad (b) \prod_{n=1}^{\infty} \cos \tfrac{x}{2^n};$$
$$(\mathbf{c}) \prod_{\mathbf{n=0}}^{\infty} (\mathbf{1}+\mathbf{2^{-2n}}); \qquad (d) \prod_{n=3}^{\infty} \tfrac{n^2-4}{n^2-1}.$$

5. Të shqyrtohet konvergjenca e prodhimeve të pafundme

$$(a) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\tfrac{1}{n^p}\right)(p \in \mathbf{R}); \qquad (b) \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\tfrac{1}{n}};$$
$$(c) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\tfrac{1}{n^p}\right)(p \in \mathbf{R}); \qquad (d) \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}\,.$$

6. Të vërtetohet barazimi:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n) = \frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1-x^{2n-1})} \ (|x|<1)\,.$$

7. Të vërtetohet barazimi:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-3i-j-(i-j)^2} = \frac{4}{3}.$$

8. (a) Të tregohet se për $p > 1, q > 1$ seria e dyfishtë:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^p n^q}$$

konvergjon absolutisht.

(b) Të njehsohet shuma e serisë në rastin kur $p = q = 2$.

9. Të tregohet se seria $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} x^m y^n$ konvergjon absolutisht atëherë dhe vetëm atëherë kur $|x| < 1, |y| < 1$. Të tregohet gjithashtu se në këtë rast shuma e serisë së dhënë është $(1-x)^{-1} \cdot (1-y)^{-1}$.

1.2 VARGJET DHE SERITË FUNKSIONALE

1.2.1 Konvergjenca dhe konvergjenca uniforme

Në paragrafin 1.1 kemi studiuar seritë termat e së cilës janë numra konstantë. Në këtë paragraf do të shqyrtojmë vargjet dhe seritë termat e të cilave janë funksione të një variabli d.m.th. vargjet e formës

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), .., , \tag{1}$$

si dhe seritë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{2}$$

Le të jetë X fushë përkufizimi e termave të vargut (1), d.m.th. $X = D(f_n)$, $n = 1, 2, ...$ si dhe le të jetë $X = D(u_n), n = 1, 2, ...$ Meqenëse për çdo $x \in X$ (1) e (2) bëhen vargje përkatësisht seri numerike, atëherë natyrën e vargjeve e serive funksionale si dhe faktet themelore në lidhje me to i shqyrtojmë duke e përdorur aparatin e mirënjohur të vargjeve e serive numerike.

Përkufizimi 1.2.1 *Thuhet se vargu* (1) **konvergjon** *në pikën* $x_0 \in X$ *në qoftë se vargu numerik* $\{f_n(x_0)\}$ *konvergjon. Vargu* (1) *konvergjon në* X *nëse ai konvergjon në çdo pikë të bashkësisë* X. *Në këtë rast* X *quhet* **fushë** *(ose* **zonë***)* **konvergjence** *e vargut* (1). *Më në fund, në qoftë se* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x \in X$, *atëherë thuhet se vargu* (1) **konvergjon te funksioni** $f(x)$, *kur* $n \to \infty$.

Në mënyrë analoge mund të formulohet përkufizimi edhe për seritë.

Përkufizimi 1.2.2 *Thuhet se seria* (2) *konvergjon në pikën* $x_0 \in X$ *nëse konvergjon seria numerike* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. *Seria (2) konvergjon në* X *nëse ajo konvergjon në çdo pikë të asaj bashkësie. Në këtë rast* X *quhet* **fushë konvergjence** *e serisë* (2).

Përkufizimi 1.2.3 *Seria (2) quhet* **absolutisht konvergjente** *në* X *nëse konvergjon në* X *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Shumën

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \ n = 1, 2, ...,$$

si edhe te seria numerike, e quajmë **shumë e** n**-të e pjesshme** e serisë (2), ndërsa funksionin:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

e quajmë **shumë** të asaj serie.

Serinë

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \tag{3}$$

e quajmë **mbetje e** n**-të e serisë** (2). Ajo konvergjon në X atëherë dhe vetëm atëherë kur në X konvergjon seria (2). Në rast konvergjence shumën e saj e shënojmë me $R_n(x)$. Prandaj $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$.

Lehtë mund të tregohet se vërejtja 2 e §1 vlen edhe për vargjet e seritë funksionale. Prandaj çdo rezultat që vërtetohet për vargjet funksionale mund të riformulohet e vërtetohet edhe për seritë funksionale, dhe anasjelltas.

Shembulli 1.2.1 Të shqyrtohet natyra e serisë:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

në **R**.

Zgjidhja: Tregojmë se kjo seri konvergjon absolutisht. Me të vërtetë, duke e përdorur kriterin e Dalamberit, fitojmë:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

për çdo $x \in \mathbf{R}$, prej nga shihet se seria e dhënë konvergjon absolutisht për çdo $x \in \mathbf{R}$. Këndej, sipas teoremës 1.16, rrjedh se seria e dhënë konvergjon në **R**.

Shembulli 1.2.2 Marrim vargun funksional $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$. Shihet qartë se kufizat e këtij vargu janë funksione të vazhdueshme në **R**. Shqyrtojmë tash konvergjencën e tij. Dihet se për $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$; për $x = 1$ kemi $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$; për $x = -1$ si dhe për $|x| > 1$ vargu $\{x^n\}$ nuk ka limit të fundmë.

Prandaj: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{për } |x| < 1 \\ 1, & \text{për x=1.} \end{cases}$

Grafiku i funksionit $f(x)$ është dhënë në fig. 1.2.

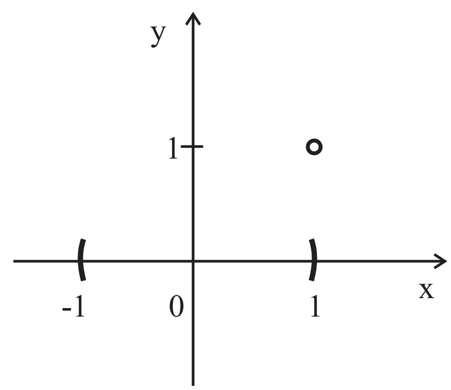


Fig. 1.2.

Në këtë shembull vërejmë, së pari, se fusha e konvergjencës së vargut është $(-1, 1]$ dhe ajo ndryshon nga fusha e përkufizimit të kufizave të tij, e cila është $(-\infty, +\infty)$. Së dyti, termat e vargut janë funksione të vazhdueshme në $(-\infty, +\infty)$ por funksioni limit $f(x)$ ka këputje në pikën $x = 1$.

Shembulli 1.2.3 Të gjendet shuma e serisë:

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + ... + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + ... \tag{4}$$

Zgjidhja: Shuma e n-të e pjesshme e serisë në shqyrtim është

$$S_n(x) = x^2 \left[1 + \frac{1}{1+x^2} + ... + \frac{1}{(1+x^2)^n}\right] = x^2 \frac{1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+x^2}}$$

Meqenëse $0 < q = \frac{1}{1+x^2} < 1$ kemi:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Për $x = 0$ të gjitha kufizat e serisë (4) janë të barabarta me zero, prandaj ajo konvergjon në atë pikë dhe $S(0) = 0$.

Kështu marrim $S(x) = \begin{cases} 0, & \text{për } x = 0 \\ 1 + x^2, & \text{për } x \neq 0. \end{cases}$

Grafiku i funksionit $S(x)$ është dhënë në fig. 1.3.

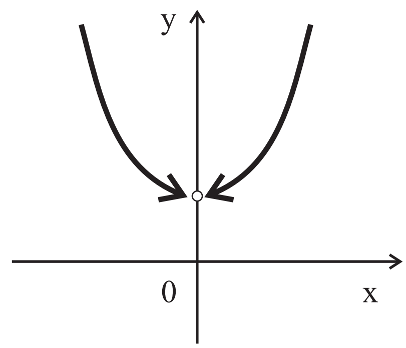


Fig. 1.3.

Vërejmë se edhe pse termat e serisë konvergjente (4) janë funksione të vazhdueshme në intervalin $(-\infty, +\infty)$ shuma e saj $S(x)$ nuk është funksion i vazhdueshëm në atë interval. Këndej rrjedh se, në rastin e përgjithshëm, shuma e serisë konvergjente, termat e së cilës janë funksione të vazhdueshme, nuk është funksion i vazhdueshëm. Nëse $S(x)$ në pikën x_0 ka këputje, atëherë:

$$\lim_{x \to x_0} S(x) \neq S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

ose:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

Prandaj limiti i shumës së një numri të pafundmë sumandash, në rastin e përgjithshëm, nuk është sa shuma e limiteve të tyre.

Në vazhdim do të japim kushtin që duhet plotësuar vargu (1) (seria(2)) ashtu që funksioni limit i vargut (1) (shuma e serisë (2)) të jetë i vazhdueshëm në rastin kur kufizat e vargut (serisë) janë funksione të vazhdueshme.

Së pari vërejmë se kur $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in X$, d.m.th. kur vargu $\{f_n(x)\}$ konvergjon te funksioni $f(x)$ në X, atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $n_0(\varepsilon, x)$, i cili varet nga ε dhe x, ashtu që për çdo $n > n_0$ vlen pabarazimi $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Përkufizimi 1.2.4 *Thuhet se vargu funksional (1)* **konvergjon uniformisht** *te funksioni $f(x)$ në bashkësinë X, në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $n_0(\varepsilon)$ (që varet nga ε dhe nuk varet nga x) i tillë që për $n > n_0$ dhe çdo $x \in X$ vlen pabarazimi:*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zakonisht konvergjenca uniforme e vargut funksional $\{f_n(x)\}$ te funksioni $f(x)$ në bashkësinë X shënohet: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ në X.

Nga përkufizimi 1.2.4. shihet qartë se nëse vargu funksional (1) konvergjon uniformisht te funksioni $f(x)$ në X atëherë ai konvergjon te po ai funksion në X.

Konvergjenca uniforme e vargut funksional gjeometrikisht mund të interpretohet kështu: nëse $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ në $X = [a, b]$, atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $n_0(\varepsilon)$ ashtu që për çdo $n > n_0$ dhe çdo $x \in X$ vlen:

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) - \varepsilon. \tag{5}$$

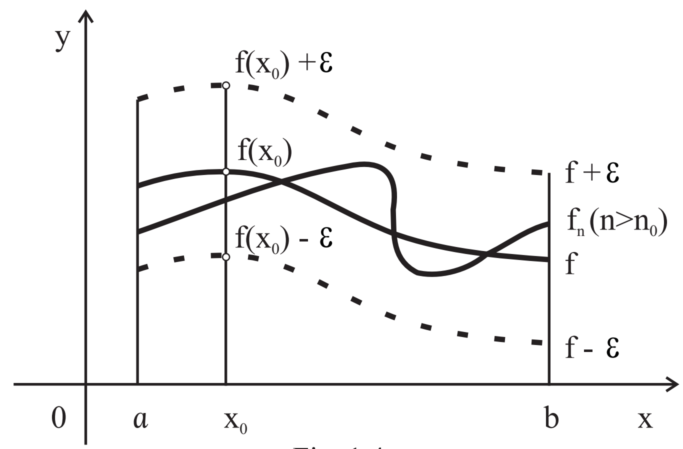


Fig. 1.4.

Pabarazimet (5) tregojnë se të gjithë grafikët e funksioneve $f_n(x)$ për $n > n_0$ përfshihen në "brezin me gjerësi 2ε" (fig. 1.4) të formuar rreth funksionit $f(x)$.

Shembulli 1.2.4 Shqyrtojmë vargun $\{\frac{n}{n+1}x\}$ në intervalin $[0, 1]$.

Kemi: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}x = x$ në $[0, 1]$ Tregojmë se kjo konvergjencë është uniforme. Me të vërtetë, nga:

$$\left|\frac{n}{n+1}x - x\right| = \frac{x}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

rrjedh se pabarazimi:

$$\left|\frac{n}{n+1}x - x\right| < \varepsilon$$

plotësohet për çdo $n > n_0$, ku $n_0 = E(\frac{1}{\varepsilon} - 1)$ (pjesa e plotë e numrit $\frac{1}{\varepsilon} - 1$), dhe për çdo $x \in [0, 1]$, që tregon se vargu në shqyrtim është uniformisht konvergjent në $[0, 1]$.

Shembulli 1.2.5 Të shqyrtohet konvergjenca uniforme e vargut funksional $\{x^n\}$ në segmentet $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $[0, 1]$.

Zgjidhja: Tregojmë se në $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ konvergjenca e vargut është uniforme. Me të vërtetë nga $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ kemi $0 \leq x^n \leq (\frac{1}{2})^n$. Tash, meqë $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $n_0(\varepsilon)$ ashtu që për $n > n_0$ vlen $(\frac{1}{2})^n < \varepsilon$. Prandaj kemi $0 \leq x^n < \varepsilon$, për çdo $n > n_0$ dhe çdo $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Kjo tregon se $x^n \rightrightarrows 0$ në $[0, \frac{1}{2}]$. Vërejmë se vargu i dhënë funksional konvergjon uniformisht edhe në çdo segment $[0, a]$ ku $0 < a < 1$.

Tregojmë se në segmentin $[0, 1]$ konvergjenca nuk është uniforme. Meqenëse $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ për $x \in [0, 1)$ dhe $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$ për $x = 1$, shohim se vargu konvergjon tek funksioni (fig. 1.5)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{per } x = 1\,. \end{cases} \tag{6}$$

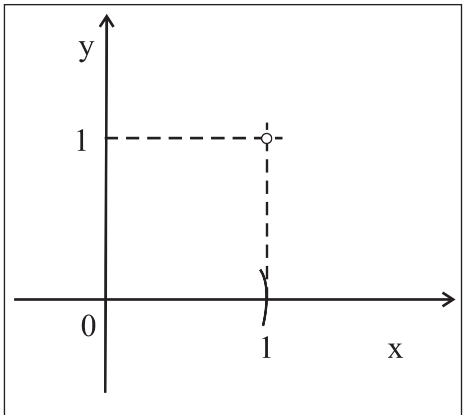


Fig. 1.5.

Supozojmë se vargu $\{x^n\}$ konvergjon uniformisht në $[0, 1]$. Atëherë ai do të jetë konvergjent dhe konvergjon te funksioni i dhënë me relacionin (6). Pastaj, funksioni $f(x)$ në pikën $x = 1$ ka këputje me hopin (kërcimin) e barabartë me 1, dhe meqë të gjitha kufizat e vargut janë të vazhdueshme në atë pikë dhe marrin vlerën 1, atëherë është e natyrshme të pritet që nëse marrim $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ nuk mund të gjendet numri n_0 i tillë që për $n > n_0$ dhe çdo $x \in [0, 1]$ të vlejë

$$|x^n - f(x)| < \varepsilon \tag{7}$$

P.sh. për $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ $(\in (0, 1))$ marrim pabarazimin:

$$|(x_n)^n - f(x^n)| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2} > \varepsilon,$$

i cili kundërshton supozimin e bërë më parë. Kontradiksioni i fituar vërteton pohimin tonë.

Në mënyrë analoge, si për vargjet funksionale, jepet përkufizimi i konvergjencës uniforme për seritë.

Përkufizimi 1.2.5 *Seria funksionale* (2) **konvergjon uniformisht** *te funksioni $S(x)$ në X, nëse vargu i shumave të saj të pjesshme $\{S_n(x)\}$ konvergjon uniformisht te $S(x)$ në X.*

Meqenëse nga:

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x) \tag{8}$$

në X rrjedh se $S_n(x) \to S(x)$ në X, atëherë $S(x)$ është shumë e serisë $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Mirëpo meqenëse $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$, kushti (8) do të jetë ekuivalent me kushtin

$$R_n(x) \rightrightarrows 0, \tag{9}$$

në X.

Tash tregojmë këtë rezultat:

Pohimi 1.2.1 *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që seria konvergjente (2) në X, të konvergjojë uniformisht në X është që*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X}\{|R_n(x)|\} = 0. \tag{10}$$

Vërtetimi. Le të vlejë (9). Për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri n_ε ashtu që për çdo $n > n_\varepsilon$ dhe $x \in X$ vlen pabarazimi $|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Këndej rrjedh se vlen:

$$\sup_{x\in X}\{|R_n(x)|\} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

d.m.th. vlen (10).

Anasjelltas, supozojmë se vlen barazimi (10). Për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri n_ε, ashtu që për çdo $n > n_\varepsilon$ vlen:

$$\sup_{x\in X}\{|R_n(x)|\} < \varepsilon.$$

Këndej dhe nga përkufizimi i supremumit del se:

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

për çdo $x \in X$ dhe çdo $n > n_\varepsilon$, d.m.th. vlen (9).

Pohimi 1.2.1 u vërtetua.

Nga përkufizimet 1.2.3. e 1.2.4. rrjedhin këto dy pohime :

Pohimi 1.2.2 *Shuma (ndryshimi) e një numri të fundmë vargjesh (serish) uniformisht konvergjente në një bashkësi është varg (seri) uniformisht konvergjent në atë bashkësi.*

Vërtetimi. Le të jenë dhënë vargjet $\{f_n(x)\}$ e $\{g_n(x)\}$ dhe supozojmë se $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$, në X. Atëherë, nga kushti i parë rrjedh se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $n_1(\varepsilon)$ ashtu që për $n > n_1(\varepsilon)$ dhe çdo $x \in X$ kemi:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{11}$$

ndërsa, nga i dyti rrjedh ekzistenca e numrit $n_2(\varepsilon)$, ashtu që për $n > n_2(\varepsilon)$ dhe çdo $x \in X$ fitojmë:

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Për $n > n_0$=max $\{n_1, n_2\}$ dhe çdo $x \in X$ pabarazimet (11) e (12) plotësohen njëkohësisht. Prandaj, për n të tillë kemi:

$$|[f_n(x) + g_n(x)] - [f(x) + g(x)]| < \varepsilon.$$

Pjesa tjetër e pohimit 2. tregohet në mënyrë analoge.

Pohimi 1.2.3 *Shumëzimi i të gjitha kufizave të një vargu (serie) uniformisht konvergjente në një bashkësi X me një funksion të kufizuar nuk mund të prishë konvergjencën uniforme.*

Vërtetimi është i qartë.

Në vazhdim po japim disa kritere të konvergjencës uniforme.

Teorema 1.2.1 (*kriteri i Koshit*). *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që vargu $\{f_n(x)\}$, kufizat e të cilit janë të përkufizuar në një bashkësi X, të konvergjojë uniformisht në X, është që për çdo $\varepsilon > 0$ të gjendet numri n_ε i tillë që për çdo $n > n_\varepsilon$ të plotësohet pabarazimi:*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \tag{13}$$

për të gjithë $x \in X$, sido që të jetë numri natyral p.

Vërtetim. Kushti i nevojshëm. Supozojmë se vargu $\{f_n(x)\}$ konvergjon uniformisht në bashkësinë X. Atëherë, sipas përkufizimit 2.4, ekziston funksioni $f(x)$ i tillë që për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri n_ε ashtu që për çdo $n > n_\varepsilon$ plotësohet pabarazimi:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

për të gjithë $x \in X$.

Prandaj, për $n > n_\varepsilon$, $p \in \mathbf{N}$ dhe çdo $x \in X$ marrim:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Kushti i mjaftueshëm. Supozojmë se plotësohet pabarazimi (13). Atëherë, për çdo $x \in X$ të fiksuar, vargu $\{f_n(x)\}$ bëhet varg numerik i cili, sipas kriterit të Koshit për konvergjencën e vargjeve, konvergjon. Shënojmë me $f(x)$ limitin e këtij vargu. Tregojmë se vargu funksional $\{f_n(x)\}$ konvergjon uniformisht në X tek funksioni $f(x)$. Me të vërtet, sipas kushtit (13), për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri n_ε ashtu që për çdo $n > n_\varepsilon$, plotësohet pabarazimi:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{14}$$

për të gjithë $x \in X$, sido që të jetë numri natyral p.

Vëmë në dukje se $\lim\limits_{p\to\infty} f_{n+p}(x) = f(x)$. Duke kaluar me limit në pabarazimin (14), kur $p \to \infty$, për $n > n_\varepsilon$ dhe çdo $x \in X$ fitojmë pabarazimin:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

i cili tregon se $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ në X.

Teorema u vërtetua.

Për rastin e serive fuksionale, teorema e mësipërme merr këtë formë:

Teorema 1.2.2 *(kriteri i Koshit). Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që seria funksionale* (2) *të konvergjojë uniformisht në X është që për çdo $\varepsilon > 0$ të gjendet një n_ε i tillë që për çdo $n > n_\varepsilon$ të plotësohet pabarazimi:*

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\Big| < \varepsilon,$$

për të gjithë $x \in X$, sido që të jetë numri natyral p.

Vërtetimi rrjedh nga teorema 1.2.1.

Në vazhdim do të japim një kriter të mjaftueshëm për konvergjencën uniforme të serive i cili bazohet në krahasimin e serive funksionale me seritë numerike me kufiza pozitive.

Le të jetë dhënë seria pozitive:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{15}$$

Kjo seri quhet **mazhorantë** për serinë funksionale (2), në bashkësinë X, në qoftë se për çdo $n \in N$ dhe çdo $x \in X$, plotësohet kushti

$$|u_n(x)| \leq a_n. \tag{16}$$

Teorema 1.2.3 *(kriteri i Vajershtrasit). Në qoftë se për serinë funksionale (2), termat e së cilës janë të definuar në bashkësinë X, ekziston një mazhorantë e saj e cila është konvergjente, atëherë ajo seri konvergjon absolutisht dhe uniformisht në X.*

Vërtetimi. Le të jetë (15) mazhorantë konvergjente e serisë (2). Atëherë nga (16) dhe nga kriteri i krahasimit (teorema 1.7), rrjedh konvergjenca absolute e serisë (2). Tregojmë pjesën tjetër të teoremës. Meqenëse seria (15) konvergjon atëherë, sipas kriterit të Koshit për konvergjencën e serive numerike, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri n_ε, ashtu që për $n > n_\varepsilon$ dhe çdo $p \in \mathbf{N}$ vlen $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$. Këndej dhe nga (16) fitojmë pabarazimin:

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+p}^{n+p} u_k(x)\Big| \leq \sum_{k=n+p}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+p}^{n+p} a_k < \varepsilon,$$

i cili vlen për çdo $n > n_\varepsilon$, çdo $p \in N$ dhe çdo $x \in X$. Tash, nga teorema 1.2.2. rrjedh konvergjenca uniforme e serisë (2) në X.

Shembulli 1.2.6 Shqyrtojmë serinë

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^5x^2} \sin nx.$$

Po shënojmë me $g_n(x)$ anën e djathtë të pabarazimit evident:

$$|e^{-n^5x^2} \sin nx| \leq n|x|e^{-n^5x^2},$$

dhe gjejmë maksimumin e këtij funksioni. Po theksojmë se, meqë $g_n(x)$ është çift, mjafton të shqyrtojmë rastin kur $x > 0$. Nga $g_n'(x) = n(1 - 2n^5x^2)e^{-n^5x^2}$ shohim se pika stacionare e funksionit $g_n(x)$ është $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{5}{2}}}$. Lehtë shihet se në këtë pikë funksioni në shqyrtim ka maksimum. Prandaj:

$$g_n(x) \leq g_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{5}{2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

dhe meqë seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergjon, sipas kriterit të Vajershtrasit, seria e dhënë konvergjon uniformisht.

Se kriteri i Vajershtrasit jep vetëm kushtin e mjaftueshëm për konvergjencën uniforme të serisë do të shohim nga ky shembull.

Në vijim do të tregojmë se (shih shembullin 1.2.7) seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konvergjon uniformisht në segmentin $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Mirëpo, çfarëdo që jetë seria numerike $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, për të cilën vlen:

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leq a_n,\ n = 1, 2, ...,\ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2},$$

do të kemi:

$$\max_{[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]} \left|\frac{\sin nx}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq a_n\ .$$

Këndej, duke marrë parasysh se seria harmonike divergjon dhe duke e përdorur kriterin e krahasimit, rrjedh se seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergjon. Kjo tregon se për serinë në shqyrtim nuk ekziston mazhorantë konvergjente.

Në vazhdim do të formulojmë kriteret e konvergjencës uniforme për seritë funksionale të formës

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) \tag{17}$$

ku $a_n(x)$ e $b_n(x)$ janë funksione të përcaktuara në bashkësinë X. Së pari japim këto përkufizime:

Përkufizimi 1.2.6 *Thuhet se vargu $\{f_n(x)\}$ është i* **kufizuar** *(nganjëherë quhet edhe* **uniformisht i kufizuar***) në bashkësinë X nëse ekziston konstantja $M > 0$ ashtu që për çdo $x \in X$ dhe çdo $n \in \mathbf{N}$ vlen pabarazimi $|f_n(x)| \leq M$.*

Përkufizimi 1.2.7 *Vargu $\{f_n(x)\}$ quhet* **monotono-jozvoglues** *(***monotono -jorritës***) në bashkësinë X, nëse për çdo $x \in X$ dhe çdo $n \in \mathbf{N}$, vlen pabarazimi $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $(f_n(x) \geq f_{n+1}(x))$.*

Teorema 1.2.4 *(Kriteri i Dirihles). Le të jetë dhënë seria (17). Supozojmë se:*

(1) vargu $\{a_n(x)\}$ është monotono-jorritës në X dhe konvergjon uniformisht kah zero në X;

(2) Vargu i shumave të pjesshme $\{B_n(x)\}$ të serisë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ është i kufizuar në X.

Atëherë, seria (17) konvergjon uniformisht në bashkësinë X.

Vërtetimi. Nga kushti (2) rrjedh ekzistenca e numrit $B > 0$ ashtu që $|B_n(x)| \leq B$ për çdo $x \in X$ dhe çdo $n \in \mathbf{N}$. Prandaj:

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)\Big| = |B_{n+p}(x) - B_n(x)| \leq |B_{n+p}(x)| + |B_n(x)| \leq 2B,$$

për çdo $x \in X$, çdo $n \in N$ dhe çdo $p \in \mathbf{N}$.

Nga kushti (1) i teoremës rrjedh se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri n_ε ashtu që $0 \leq a_n(x) < \frac{\varepsilon}{6B}$, për çdo $x \in X$ dhe çdo $n > n_\varepsilon$. Tash, duke përdor pabarazimin e Abelit (relacioni (18) i pikës 1.1.6) fitojmë:

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \cdot b_k(x)\Big| \leq 2B[a_{n+1}(x) + 2a_{n+p}(x)] < \varepsilon,$$

për çdo $x \in X$, çdo $n > n_\varepsilon$ dhe çdo $p \in N$.

Këndej, sipas kriterit të Koshit për konvergjencën uniforme të serisë, rrjedh se seria (17) konvergjon uniformisht në X.

Shembulli 1.2.7 Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ është një seri e tipit (17) në të cilën mund të merret $a_n(x) = \frac{1}{n}$ dhe $b_n(x) = \sin nx$. Sipas kriterit të Dirihles seria konvergjon uniformisht në çdo segment i cili nuk përmban pikat $x_m = 2\pi m, m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Me të vërtetë, vargu $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ është monotono-zvogëlues dhe konvergjon në zero, kur $n \to \infty$ (d.m.th. edhe uniformisht konvergjon në zero), ndërsa shumat $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$, siç dihet (shih shembullin 1.1.12) plotësojnë pabarazimin:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\Big| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}},$$

d.m.th. janë të kufizuara në çdo segment të sipërpërmendur.

Teorema 1.2.5 *(Kriteri i Abelit). Në qoftë se:*

(1) vargu $\{a_n(x)\}$ është i kufizuar në bashkësinë X : $|a_n(x)| \leq M, x \in X$, $n \in \mathbf{N}$ dhe për çdo $x \in X$ është monoton;

(2) seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ konvergjon uniformisht në bashkësinë X,

atëhere seria (17) konvergjon uniformisht në X.

Vërtetimi. Nga (2) rrjedh se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri n_ε ashtu që për çdo $n > n_\varepsilon$, të plotësohet pabarazimi:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M},$$

për të gjithë $x \in X$, sido që të jetë $p \in \mathbf{N}$.

Këndej dhe nga pabarazimi i Abelit rrjedh se për $n > n_\varepsilon$, çdo $p \in \mathbf{N}$ dhe çdo $x \in X$, vlen pabarazimi:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x) \cdot b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) < \varepsilon,$$

prej nga, në saje të kriterit të Koshit për konvergjencën uniforme të serive, rrjedh pohimi i teoremës.

1.2.2 Vetitë e vargjeve e të serive uniformisht konvergjente

Siç kemi vërejtur më parë (shembulli 1.2.3) shuma e serisë funksionale konvergjente në një bashkësi, termat e së cilës janë funksione të vazhdueshme, në përgjithësi nuk është funksion i vazhdueshëm. Në këtë pikë, përveç të tjerash, do të tregojmë se seritë uniformisht konvergjente kufizat e të cilave janë funksione të vazhdueshme, kanë shumë të vazhdueshme.

Teorema 1.2.6 *Le të jetë dhënë seria:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{1}$$

kufizat e së cilës janë funksione të përcaktuara në bashkësinë X. Nëse funksionet $u_n(x)$, $n \in N$, kanë limit të fundëm në pikën a :

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = a_n \tag{2}$$

dhe seria (1) konvergjon uniformisht në X, atëherë:

(a) konvergjon seria (numerike):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{3}$$

(b) shuma $S(x)$ e serisë (1) ka limit në pikën $x = a$ dhe:

$$\lim_{x \to a} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{4}$$

Para se të japim vërtetimin duhet theksuar se barazimi (4) mund të shkruhet edhe në trajtën:

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to a} u_n(x),$$

që tregon se për seritë e tilla shenja e limitit mund të futet brenda shenjës së shumës ose thuhet se seria lejon kalim në limit term për term.

Vërtetimi i teoremës 1.2.6. Nga supozimi rrjedh se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri n_ε ashtu që për çdo $n > n_\varepsilon$, çdo $p \in N$ dhe çdo $x \in X$ vlen pabarazimi:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Duke kaluar në limitin për $x \to a$, fitojmë:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \lim_{x \to a} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+p}^{n+p} a_k \right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Këndej, nga kriteri i Koshit për konvergjencën e serive numerike, shohim se seria (3) konvergjon.

Për të treguar pohimin (b) po shënojmë me A, A_n dhe α_n, përkatësisht shumën, shumën e pjesshme dhe mbetjen e serisë (3). Atëherë:

$$A = A_n + \alpha_n. \tag{5}$$

Pastaj, duke shënuar me $S_n(x)$ e $R_n(x)$, përkatësisht, shumën e pjesshme dhe mbetjen e serisë (1), fitojmë:

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x). \tag{6}$$

Nga (5) e (6) rrjedh pabarazimi:

$$|S(x) - A| \le |S_n(x) - A_n| + |R_n(x)| + |\alpha_n|. \tag{7}$$

Në saje të konvergjencës uniforme të serisë (1) në X, për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet numri $n_1(\varepsilon)$ që për $n > n_1(\varepsilon), x \in X$, ka vend pabarazimi:

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8}$$

Po ashtu, nga konvergjenca e serisë (3), për $\varepsilon > 0$ gjendet numri $n_2(\varepsilon)$ ashtu që për $n > n_2(\varepsilon)$ ka vend pabarazimi:

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

Për $n > n_0(\varepsilon) = \max\{n_1,\, n_2(\varepsilon)\}, x \in X$, plotësohen njëkohësisht pabarazimet (8) e (9).

Meqenëse:

$$\lim_{x\to a} S_n(x) = \lim_{x\to a}\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k = A_n,$$

atëherë për $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta(\varepsilon) > 0$ ashtu që për $x \in X$ dhe $0 < |x-a| < \delta(\varepsilon)$ vlen pabarazimi:

$$|S_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

Më në fund, nga (7), (8), (9) e (10) del se plotësohet pabarazimi $|S(x)-A| < \varepsilon$, për çdo x të tillë që $0 < |x-a| < \delta(\varepsilon)$, d.m.th. vlen barazimi (4).

Teorema u vërtetua.

Teorema 1.2.7 *Në qoftë se seria* (1) *konvergjon uniformisht në bashkësinë X dhe kufizat e saj janë funksione të vazhdueshme në X, atëherë shuma e saj $S(x)$ është funksion i vazhdueshëm në X.*

Vërtetimi. Le të jetë $x_0 \in X$ pikë e çfarëdoshme e bashkësisë X. Sipas teoremës 1.2.6. kemi:

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x_0),$$

prej nga shihet se funksioni $S(x)$ është i vazhdueshëm në pikën x_0. Meqë x_0 është pikë e çfarëdoshme e bashkësisë X, atëherë shohim se $S(x)$ është i vazhdueshëm në X.

Ngjashëm, si te seritë, për vargjet funksionale vlen:

Teorema 1.2.7$'$ *Nëse kufizat e vargut $\{f_n(x)\}$ janë funksione të vazhdueshme në X dhe nëse $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ në X, atëherë $f(x)$ është funksion i vazhdueshëm në X.*

Kjo tregon se për çdo $x_0 \in X$ vlen:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f_n(x), \tag{11}$$

d.m.th. limitet sipas n e x mund t'i ndërrojnë vendet.

Me të vërtetë, sipas teoremës 2.7$'$. limiti $f(x)$ i vargut $\{f_n(x)\}$ është funksion i vazhdueshëm në X, prandaj:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = f(x_0) \tag{12}$$

Tash, meqë funksionet $f_n(x), n \in \mathbf{N}$, janë të vazhdueshme në X, kemi:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0). \tag{13}$$

Nga (12) e (13) rrjedh barazimi (11).

Me shembullin vijues tregojmë se kushti i konvergjencës uniforme të serisë nuk është i domosdoshëm për vazhdueshmërinë e shumës së saj.

Shembulli 1.2.8 Shqyrtojmë serinë

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right],\ x\in[0,+\infty).$$

Shohim se

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0,$$

d.m.th. seria konvergjon te funksioni i vazhdueshëm $S(x)=0$. Tregojmë se kjo konvergjencë nuk është uniforme. Për këtë mjafton të tregojmë se

$$\sup_{0\le x<+\infty}|S(x)-S_n(x)|\not\to 0,\ n\to\infty.$$

Kemi:

$$|R_n(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

dhe lehtë shihet se:

$$\max_{0\le x<+\infty}|R_n(x)|=R_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

Këndej shohim se

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[0,\infty)}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,\infty)}|R_n(x)|\neq 0,$$

çka synuam të tregojmë.

Në vijim do të shohim se për një klasë të ngushtë serish (vargjesh) janë të vërteta edhe pohimet e anasjellta.

Teorema 1.2.8 *(teorema e Dinit). Në qoftë se kufizat e serisë funksionale* (1) *janë të vazhdueshme dhe jonegative ose jopozitive në segmentin* $[a,b]$ *dhe nëse shuma* $S(x)$ *e serisë është funksion i vazhdueshëm në atë segment, atëherë seria konvergjon uniformisht në* $[a,b]$.

Vërtetim. Mjafton të marrim rastin nuk $u_n(x)\ge 0$, për çdo $n\in\mathbf{N}$ dhe çdo $x\in[a,b]$. Shënojmë, si zakonisht, me $R_n(x)$ e $S_n(x)$ mbetjen, përkatësisht shumën e n-të të pjesshme të serisë (1). Atëherë funksioni $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ është i vazhdueshëm në $[a,b]$. Pastaj, vargu $\{R_n(x)\}$ është monotono-jorritës, sepse $u_n(x)\ge 0$, për çdo $x\in[a,b]$. Për x të fiksuar nga $[a,b]$ kemi $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, prej nga shohim se për çdo $\varepsilon>0$ ekziston numri natyral $N(\varepsilon)$ ashtu që për $n>N(\varepsilon)$ vlen:

$$R_n(x)<\varepsilon. \tag{14}$$

Për të treguar se seria (1) konvergjon uniformisht në $[a,b]$, tregojmë se $R_n(x)\rightrightarrows 0$ në $[a,b]$.

Supozojmë të kundërtën. Ekziston $\varepsilon_0>0$ ashtu që për çdo $n=1,2,...,$ ekziston pika $x_n\in[a,b]$ e tillë që $R_n(x)\ge\varepsilon_0$. Meqenëse kufizat e vargut $\{x_n\}$

gjenden në segmentin $[a,b]$, atëherë, sipas teoremës së Bolcano-Vajershtrasit, nga ky varg nxirret një nënvarg konvergjent $\{x_{n_k}\}$ i cili p.sh. ka limitin $c \in [a,b]$.

Tash, në saje të vazhdueshmërisë së funksionit $R_m(x)$, për çdo $m \in N$, kemi:

$$\lim_{x\to c} R_m(x) = R_m(c),$$

ose:

$$\lim_{k\to\infty} R_m(x_{n_k}) = R_m(c).$$

Le të jetë m numër i tillë që plotëson pabarazimin: $m > N(\varepsilon)$. Tash, le të jetë $k \in N$ i tillë që $n_k > m$. Atëherë:

$$R_m(x_{n_k}) \geq R_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0.$$

Këndej, duke kaluar me limit kur $k \to \infty$, gjejmë:

$$\lim_{k\to\infty} R_m(x_{n_k}) = R_m(c) \geq \varepsilon_0. \tag{15}$$

Për $\varepsilon = \varepsilon_0$, $x = c$ dhe $n = m$ relacioni (14) bëhet

$$R_m(c) < \varepsilon_0,$$

i cili është në kundërshtim me pabarazimin (15). Prandaj, supozimi se vargu $\{R_n(x)\}$ konvergjon uniformisht në $[a,b]$ është i gabueshëm. Me ketë teorema u vërtetua.

Teorema e Dinit për vargjet funksionale formulohet kështu:

Teorema 1.2.8′. *Në qoftë se vargu $\{f_n(x)\}$ i funksioneve të vazhdueshme në $[a,b]$ është monotono-jozvogëlues ose jorritës dhe konvergjon te një funksion i vazhdueshëm $f(x)$, atëherë kjo konvergjencë është uniforme.*

Në vazhdim shqyrtojmë problemin e integrimit dhe të diferencimit term për term të serive (vargjeve) funksionale.

Teorema 1.2.9 *Në qoftë se kufizat e serisë (1), uniformisht konvergjente në segmentin $[a,b]$, janë funksione të vazhdueshme në atë segment, atëherë për çdo $c \in [a,b]$ seria:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)dt, \ a \leq x \leq b, \tag{16}$$

është po ashtu uniformisht konvergjente në $[a,b]$. Pastaj, nëse

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{17}$$

atëherë:

$$\int_c^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)dt, \ a \le x \le b. \tag{18}$$

Vërtetimi. Nga teorema 1.2.7. rrjedh se funksioni $S(x)$ është i vazhdueshëm në $[a, b]$, pra edhe i integrueshëm në çdo segment me skajet $c \in [a, b]$ dhe $x \in [a, b]$.

Tregojmë se seria (16) konvergjon uniformisht në $[a, b]$. Le të jetë:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad \text{dhe} \quad S(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Atëherë:

$$\int_c^x S(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_c^x u_k(t)dt + \int_c^x R_n(t)dt.$$

Kuptohet, mbetja e serisë (16) është:

$$R_n^*(x) = \int_c^x R_n(t)dt.$$

Meqenëse seria (1) konvergjon uniformisht në $[a, b]$, atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $N(\varepsilon)$ ashtu që për çdo $n > N(\varepsilon)$ dhe çdo $x \in [a, b]$ vlen:

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Këndej, për çdo $n > N(\varepsilon)$, çdo $x \in [a, b]$ dhe çdo $c \in [a, b]$, rrjedh se:

$$|R_n^*(x)| = \left| \int_c^x R_n(t)dt \right| \le \int_c^x |R_n(t)|dt < \frac{\varepsilon}{b-a} \left| \int_c^x dt \right| = \frac{\varepsilon}{b-a}|x-c| < \varepsilon,$$

që tregon se $R_n^*(x) \rightrightarrows 0$ në segmentin e sipërpërmendur. Prandaj, seria (16) konvergjon uniformisht te funksioni $\int_c^x S(t)dt$, dhe në veçanti, barazimi (18) u vërtetua.

Vërejtje. Formula (18) mund të shkruhet edhe në formën e barazimit:

$$\int_c^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)dt$$

i cili tregon se, nën kushtet e dhëna në teoremën 1.2.9, seria (1) integrohet term për term.

Për vargje teorema e mësipërme formulohet kështu:

Teorema 1.2.9$'$. *Le të jetë $\{f_n(x)\}$ varg i funksioneve të vazhdueshme në segmentin $[a,b]$ i cili konvergjon uniformisht te funksioni $f(x)$ në atë segment dhe le të jetë c cilado pikë e segmentit $[a,b]$. Atëherë*
$\int\limits_c^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_c^x f(t)dt$ *në* $[a,b]$
dhe në veçanti:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_c^x f_n(t)dt = \int\limits_c^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt.$$

Vërtetimi rrjedh menjëherë nga lidhja e serive me vargjet.

Në teoremën 1.2.9 (teoremën 1.2.9') kushti që seria (vargu) të jetë uniformisht konvergjente (uniformisht konvergjent) është i mjaftueshëm e jo edhe i nevojshëm. Shembulli në vijim e ilustron këtë pohim.

Marrim serinë që e kishim në shembullin 1. Dihet që shuma e sajë është $S(x) = 0$ dhe se ajo nuk konvergjon uniformisht në $[0,\infty)$, pra as në $[0,1]$. Tregojmë se seria në shqyrtim mund të integrohet term për term në segmentin $[0,1]$. Me të vërtetë, nga

$$\int\limits_0^1 S(t)dt = \int\limits_0^1 0\cdot dt = 0$$

si dhe nga:

$$\int\limits_0^1 S_n(t) = \int\limits_0^1 \frac{nt}{1+n^2t^2}dt = \frac{\ln(1+n^2t^2)}{2n}\Bigg|_0^1 = \frac{\ln(1+n^2)}{2n} \to 0,\ n\to\infty,$$

shohim se

$$\int\limits_0^1 S(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 S_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^1\left[\frac{nt}{1+n^2t^2} - \frac{(n-1)t}{1+(n-1)^2t^2}\right]dt,$$

çka edhe synuam të tregojmë.

Teorema 1.2.10 *Në qoftë se funksionet $u_n(x)$, $\quad n = 1,2,...$, janë të integrueshme në $[a,b]$ dhe seria (1) konvergjon uniformisht në $[a,b]$ te funksioni $S(x)$, atëherë shuma e serisë është funksion i integrueshëm në atë segment dhe ka vend barazimi:*

$$\int\limits_a^b S(t)dx = \sum_{a=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)dx. \tag{19}$$

Vërtetimi. Mjafton të tregojmë se funksioni $S(x)$ është i integrueshëm në $[a, b]$ sepse barazimi (19) tregohet në mënyrë analoge si formula (18).

Për të treguar integrueshmërinë e funksionit $S(x)$ tregojmë se për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet $\delta > 0$ ashtu që për $\lambda < \delta$ (d.m.th. për ndarje të tillë të segmentit $[a, b]$ me pikat $a = x_0 < x_1 < ... < x_i < x_{i+}1 < ... < x_n = b$, ashtu që $\lambda = \max\limits_{i=0,...n-1}\{|\Delta x_i|\} < \delta$ ka vend pabarazimi:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Omega_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

ku me $\Omega_i, i = 0, 1, ..., n-1,$ shënojmë luhatjen e funksionit $S(x)$ në segmentin $[x_i,\, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$.

Nga fakti që seria konvergjon uniformisht rrjedh se për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet numri $N(\varepsilon)$ që për $n > N(\varepsilon)$ dhe çdo $x \in [a, b]$ vlen pabarazimi:

$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ose:

$$S_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} < S(x) < S_n(x) + \frac{\varepsilon}{2,} \tag{20}$$

ku me $S_n(x)$, si zakonisht, shënuam shumën e n-të të pjesshme të serisë (1). Funksioni $S_n(x)$ është i integrueshëm ne $[a, b]$, pra edhe i kufizuar në atë segment. Shënojmë me m e M kufijtë e përpiktë të $S_n(x)$ në $[a, b]$. Atëherë relacioni (20) merr formën:

$$m - \frac{\varepsilon}{2} < S(x) < M + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{21}$$

Me ω shënojmë luhatjen e funksionit $S_n(x)$ në $[a, b]$, d.m.th.

$$\underset{[a,b]}{\omega}(S_n) = M - m,$$

kurse me Ω luhatjen e funksionit $S(x)$ në $[a, b]$, d.m.th.

$$\underset{[a,b]}{\Omega}(S) = \sup_{x', x'' \in [a,b]} \{|S(x') - S(x'')|\}.$$

Tregojmë se $\Omega \leq \omega + \varepsilon$. Le të jenë x' e x'' çfarëdo dy pika nga $[a, b]$. Nga (21) fitojmë:

$$m - \frac{\varepsilon}{2} < S(x') < M + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dhe} \quad m - \frac{\varepsilon}{2} < S(x'') < M + \frac{\varepsilon}{2,}$$

prej nga gjejmë:

$$|S(x') - S(x'')| < (M - m) + \varepsilon = \omega + \varepsilon,$$

ose:

$$\Omega = \sup_{x‘, x“ \in [a,b]} \{|S(x') - S(x'')|\} \leq \omega + \varepsilon.$$

Tash kemi:

$$\Omega_i \leq \omega_i + \varepsilon,$$

ku me $\Omega_i(\omega_i)$ shënuam luhatjen e funksionit $S(x)(S_n(x))$ në segmentin $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$.. Këndej, duke shumëzuar me Δx_i anë për anë dhe duke shumuar për $i = 0, 1, ..., n-1$, gjejmë:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Omega_i \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \cdot \Delta x_i + \varepsilon(b-a).$$

Më në fund, meqë $S_n(x)$ është i integrueshëm ne $[a, b]$, nga pabarazimi i fundit gjejmë barazimin:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Omega_i \cdot \Delta x_i = 0,$$

i cili tregon se funksioni $S(x)$ është i integrueshëm në $[a, b]$.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet pohimi analog për vargjet funksionale.

Theksojmë se kushti i konvergjencës uniforme është vetëm kusht i mjaftueshëm .

Kalojmë tashti në problemin e diferencimit të serive.

Teorema 1.2.11 *Supozojmë se funksionet $u_n(x), n = 1, 2, ...,$ kanë derivate të vazhdueshme në segmentin $[a, b]$ dhe seria:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \tag{22}$$

konvergjon uniformisht në segmentin $[a, b]$. Nëse seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergjon bile në një pikë $c \in [a, b]$, ajo do të konvergjojë uniformisht në tërë segmentin $[a, b]$, shuma e saj

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{23}$$

ka derivat të vazhdueshëm në $[a, b]$, si dhe:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \tag{24}$$

Vërtetimi. Le të jetë:

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \tag{25}$$

Meqë seria (22) konvergjon uniformisht, ajo mund të integrohet term për term:

$$\int_c^x \sigma(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], x \in [a,b]. \tag{26}$$

ku $c \in [a,b]$ është pikë në të cilën konvergjon (sipas supozimit të teoremës) seria (1). Sipas teoremës 1.2.9. seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], a \leq x \leq b$$

konvergjon, prandaj konvergjon në $[a,b]$ edhe seria (1).

Këndej rrjedh se (26) mund të shkruhet në formën:

$$\int_c^x \sigma(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c), \tag{27}$$

ose në formën:

$$\int_c^x \sigma(t)dt = S(x) - S(c). \tag{28}$$

Meqenëse funksioni $\sigma(x)$ (sipas Teoremës 2.7) është i vazhdueshëm në $[a,b]$, funksioni që gjendet në anën e majtë të barazimit (28) është i derivueshëm sipas x-it si dhe vlen barazimi:

$$\sigma(x) = S`(x), \tag{29}$$

nga i cili shohim se edhe $S(x)$ është i derivueshëm në $[a,b]$. Tash nga (25) dhe (29) fitojmë formulën (24).

Mbetet të tregojmë se seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergjon uniformisht në $[a,b]$. Nga (27) gjejmë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \int_c^x \sigma(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$$

ose:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c).$$

Seria e parë në anën e djathtë të barazimit të mësipërm, sipas teoremës 1.2.9, konvergjon uniformisht në $[a,b]$, ndërsa seria e dytë si seri numerike konvergjente është uniformisht konvergjente në $[a,b]$, prandaj shuma e tyre konvergjon uniformisht në $[a,b]$.

Teorema u vërtetua.

Formula (24) mund të shkruhet edhe në formën:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

e cila tregon rregullën si, nën kushtet e dhëna, derivohet term për term seria.

Për vargjet funksionale teorema 1.2.11. formulohet kështu:

Teorema 1.2.11$'$. *Le të jetë $\{f_n(x)\}$ varg i funksioneve me derivate të vazhdueshme në segmentin $[a,b]$ i cili konvergjon bile në një pikë $c \in [a,b]$ kurse vargu $\{f_n'(x)\}$ le të konvergjojë uniformisht në $[a,b]$. Atëherë vargu $\{f_n(x)\}$ konvergjon uniformisht në $[a,b]$, funksioni i tij limit ka derivat të vazhdueshëm në atë segment dhe:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))', \ a \le x \le b.$$

Shembulli 1.2.9 Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ mund të derivohet term për term sepse është konvergjente në $\mathbf{R}$ dhe seria e derivateve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ konvergjon uniformisht në $\mathbf{R}$.

Shembulli 1.2.10 Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ konvergjon për çdo $x \in \mathbf{R}$ (bile edhe uniformisht). Por meqë seria e derivateve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ nuk konvergjon uniformisht në $\mathbf{R}$ (sepse për $x = 0$ kthehet në seri divergjente) seria në shqyrtim nuk mund të diferencohet term për term.

Shembulli 1.2.11 Të provohet se a mund të diferencohet term për term në $[0,1]$ seria:

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2) - \frac{1}{2(n-1)}\ln[1+(n-1)^2x^2]\right\}.$$

Zgjidhja: Shuma e n-të e pjesshme e serisë është:

$$S_n(x) = \frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)$$

dhe për çdo $x \in [0,1]$ kemi:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2) = 0.$$

Prandaj, seria e dhënë në $[0,1]$ konvergjon kah funksioni $S(x) = 0$. Seria e

derivateve është
$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\Big].$$
Meqë shuma e n-të e pjesshme e saj është $S_n^*(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ atëherë $S^*(x)$-$=\lim\limits_{n\to\infty}S_n^*(x)=0$, për çdo $x\in[0,1]$. Prandaj, seria e derivateve konvergjon kah funksioni $S^*(x)=0$ por jo uniformisht (shih shembullin 1). Këndej del
$$S`(x)=S^*(x)=0$$
që tregon se seria diferencohet term për term.

Po theksojmë se shembulli 4. tregon se në teoremën 2.11.(2.11$'$) kushti që seria e derivateve (vargu i derivateve) të jetë uniformisht konvergjente (uniformisht konvergjent) është vetëm i mjaftueshëm.

1.2.3 Seritë polinomiale

Në këtë pikë do të studiojmë një klasë të veçantë serish funksionale të cilat luajnë rol të rëndësishëm në analizën matematike.

Përkufizimi 1.2.8 *Seria funksionale*
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{1}$$
ku $a_n\in\mathbf{R}$, $n=0,1,..,$ $x_0\in\mathbf{R}$, *quhet* **seri polinomiale.** *Numrat* a_n, $n=0,1,2,...,$ *quhen* **koeficientë** *të serisë polinomiale.*

Më zëvendësimin $x-x_0=\xi$ seria (1) merr trajtën:
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi^n. \tag{2}$$

Është evidente se problemi i shqyrtimit të konvergjencës së serisë (1) është ekuivalent me atë për shqyrtimin e konvergjencës së serisë (2). Prandaj në vijim do të studiojmë seritë e formës (2) dhe pranojmë marrëveshjen që si ndryshore të marrim shkronjën x e jo ξ.

a. Fusha e konvergjencës. Rrjedhime të konvergjencës uniforme

Teorema 1.2.12 *(teorema e Abelit). Në qoftë se seria polinomiale*
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{3}$$
konvergjon për $x=x_0\neq 0$, *ajo konvergjon absolutisht për çdo* x *të tillë që* $|x|<|x_0|$.

Vërtetimi. Meqenëse seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$ konvergjon atëherë $\lim\limits_{n\to\infty} a_n {x_0}^n = 0$. Këndej rrjedh se vargu $\{a_n {x_0}^n\}$ është i kufizuar, d.m.th. ekziston një numër $M > 0$ i tillë që për çdo $n = 0, 1, ...,$ vlen:

$$|a_n {x_0}^n| \leq M. \tag{4}$$

Atëherë kemi:

$$|a_n x^n| = |a_n {x_0}^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

për $|x| < |x_0|$. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ është seri gjeometrike me herësin $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, prandaj konvergjon. Tash, sipas kriterit të krahasimit, shohim se konvergjon seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, d.m.th. konvergjon absolutisht seria (3) për x të tillë që $|x| < |x_0|$.

Rrjedhimi 1.2.1 Në qoftë se seria (3) divergjon në pikën $x = x_0$, atëherë ajo divergjon edhe për çdo x për të cilin $|x| > |x_0|$.

Vërtetimi. Supozojmë të kundërtën, d.m.th. se seria konvergjon për x të tillë që $|x| > |x_0|$. Atëherë ajo, sipas teoremës 2.12. në veçanti, konvergjon në pikën $x = x_0$ që është në kundërshtim me supozimin.

Përkufizimi 1.2.9 *Numrin $R > 0$ (R numër real ose $+\infty$) i cili ka vetitë që për çdo x për të cilin $|x| < R$ seria* (3) *konvergjon, kurse për çdo x për të cilët $|x| > R$ seria* (3) *divergjon, e quajmë* **rreze e konvergjencës** *e serisë polinomiale* (3).

Teorema 1.2.13 *Për çdo seri polinomiale* (3) *ekziston rrezja e konvergjencës R. Në intervalin e konvergjencës d.m.th. për çdo x për të cilin $|x| < R$, seria* (3) *konvergjon absolutisht. Për r të fiksuar ashtu që $r < R$ seria* (3) *në segmentin $[-r, r]$ konvergjon uniformisht.*

Vërtetimi. Bashkësinë e të gjithë numrave realë e ndajmë në dy klasa në këtë mënyrë: Në klasën e poshtme A marrim të gjithë numrat negativ dhe ata numra pozitiv $x > 0$ (nëse ka të tillë), që seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergjon. Në klasën e sipërme A' marrim numrat e tjerë, d.m.th. për A' marrim komplementin e bashkësisë A ndaj bashkësisë së numrave realë. Tregojmë se $A|A'$ është prerje. Së pari, është evidente se çdo numër real bën pjesë në njërën prej klasave A ose A'. Së dyti, nëse $x \in A, y \in A'$ tregojmë se $x < y$. Me të vërtetë, nëse $x \leq 0$, atëherë, meqë gjithmonë është $y > 0$, fitojmë $x < y$, ndërsa për $x > 0$ shohim, sipas kriterit të Abelit, se $x < y$. Me këtë u tregua se $A|A'$ është prerje në bashkësinë e numrave realë.

Le të jetë R numri i cili e bënë prerjen $A|A'$. Ai numër ekziston sipas teoremës së Dedekindit mbi vazhdueshmërinë e bashkësisë së numrave realë. Me marrëveshje marrim $R = +\infty$ në rastin kur bashkësia A' është boshe. Tregojmë se R është rrezja e konvergjencës së serisë (3). Fiksojmë numrin x të tillë që $|x| < R$. Le të jetë x_0 i tillë që $|x| < x_0 < R$. Meqë R bën prerjen e klasave A e A' atëherë $x_0 \in A$, prandaj seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

konvergjon. Këndej, nga teorema e Abelit, rrjedh se në pikën e fiksuar x, $|x| < R$, seria (3) konvergjon, bile edhe absolutisht.

Tash tregojmë se për çdo $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ seria divergjon. Le të jetë x i tillë që $|x| > R$. Zgjedhim x_0 ashtu që: $R < x_0 < |x|$. Atëherë $x_0 \in A'$, prandaj seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ divergjon. Këndej, sipas rrjedhimit të mësipërm, rrjedh se në këtë rast seria (3) divergjon.

Më në fund marrim $0 < r < R$. Atëherë, seria (3) konvergjon absolutisht për $x = r$, d.m.th. konvergjon seria numerike $\sum\limits_{n_0}^{\infty} |a_n| r^n$. Këndej, meqë për çdo $x \in [-r, r]$ vlen:

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n, \ n = 0, 1, ...,$$

sipas kriterit të Vajershtrasit (teorema.2.3), shohim që seria (3) konvergjon uniformisht në $[-r, r]$ dhe me këtë teorema u vërtetua.

Nga teorema e mësipërme shohim se fusha e konvergjencës së serisë polinomiale në rastin kur R është rreze konvergjence është intervali $(-R, R)$. Në pikat $x = \pm R$ seria mund të konvergjoj apo të divergjoj.

Shembulli 1.2.12 Shqyrtojmë serinë polinomiale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n.$$

Për shqyrtimin e konvergjencës së serisë $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! |x|^n$ përdorim kriterin e Dallamberit. Për $x \neq 0$ kemi:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|(n+1)! x^{n+1}|}{|n! x^n|} = \lim_{n \to \infty} (n+1)|x| = \infty,$$

që tregon se për $x \neq 0$ seria (5) nuk konvergjon absolutisht. Këndej dhe nga rrjedhimi i teoremës së Abelit rrjedh se ajo divergjon për çdo $x \neq 0$.

Shembulli 1.2.13 Seria:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

konvergjon për çdo $x \in (-\infty, +\infty)$. Me të vërtetë, nga relacioni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|n!}{|x^n|(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

i cili vlen për çdo $x \in (-\infty, +\infty)$, shohim se seria konvergjon në intervalin e sipërpërmendur. Rrezja e konvergjencës së serisë në shqyrtim është $+\infty$.

Shembulli 1.2.14 Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ e ka rrezen e konvergjencës $R = 1$.

Me të vërtetë, duke e përdorur kriterin e Dalambertit, gjejmë:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{x^{n+1}}{n+1}|}{|\frac{x^n}{n}|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|,$$

dhe konstatojmë se për $|x| < 1$ seria e dhënë konvergjon absolutisht, d.m.th. konvergjon, ndërsa për $|x| > 1$ ajo divergjon. Për $x = 1$ fitohet seria harmonike $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e cila, siç dihet, divergjon. Për $x = -1$ fitohet seria alternative $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ e cila, sipas kriterit të Lajbnicit, konvergjon. Prandaj $R = 1$ dhe $[-1, 1)$ është intervali i konvergjencës së serisë së dhënë.

Nga shembujt e shqyrtuar shihet se nganjëherë rrezja e konvergjencës R e serisë polinomiale gjendet me kriterin e Dallambertit. Rrjedhimisht ka vend:

Pohimi 1.2.4 *Në qoftë se ekziston* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *(i fundmë ose i pafundmë): atëherë:*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Vërtetimi. Tregojmë se për x të tillë që $|x| < R$ seria (3) konvergjon. Me të vërtetë,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{R} < 1,$$

që, sipas kriterit të Dallambertit, konstatojmë se (3) konvergjon (madje absolutisht).

Tash, le të jetë $|x| > R$. Atëherë:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|x|}{R} > 1,$$

që tregon se seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ divergjon, d.m.th. divergjon edhe seria (3).

Në mënyrë analoge, duke e përdorur kriterin e Koshit (teorema 1.1.11), vërtetohet ky rezultat:

Pohimi 1.2.5 *Në qoftë se ekziston* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *(i fundmë ose i pafundmë), atëherë:*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Shembulli vijues tregon se jo gjithmonë rrezja e konvergjencës së serisë polinomiale mund të gjendet me kriterin e Dalamberit ose të Koshit.

Shembulli 1.2.15 Shqyrtojmë serinë $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ku

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ për } n = 1, 3, 5, .. \\ 0, \text{ për } n = 0, 2, 4, ... \end{cases}$$

Pohimi 1.2.4 nuk mund të përdoret sepse herësi $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nuk ka kuptim për n-çift. Por edhe pohimi 1.2.5 nuk jep përgjigje sepse $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ nuk ekziston. Rrezen e konvergjencës së serisë së dhënë e gjejmë më vonë.

Në vazhdim gjejmë formulën për rrezen e konvergjencës së çfarëdo serie polinomiale.

Teorema 1.2.14 *(Koshi-Adamarit). Në qoftë se R është rreze konvergjencës e serisë* (3) *Atëherë:*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Vërtetimi. Marrim $k = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Së pari shqyrtojmë rastin $k = 0$. Tregojmë se në këtë rast seria (3) konvergjon për çdo x. Le të jetë $x_0 \neq 0$. Vërejmë se nga $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ rrjedh se për $0 < \varepsilon < 1$ ekziston numri n_0 ashtu që për $n > n_0$ vlen:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\varepsilon}{|x_0|} \tag{6}$$

Me të vërtetë, në të kundërtën në intervalin $(\frac{\varepsilon}{|x_0|}, +\infty)$ do të gjendej numër i pafundëm kufizash të vargut $\sqrt[n]{|a_n|}$. Këndej rrjedh ekzistenca e një nënvargu të vargut në shqyrtim i cili ka limit të fundmë ose të pafundmë. Po e shënojmë atë limit me b. Është e qartë se $b \geq \frac{\varepsilon}{|x_0|} > 0$, prej nga shihet se 0 nuk është limiti superior i vargut $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$. Absurditeti i fituar tregon se, për $n > n_0$, vlen relacioni (6). Tash nga (6) rrjedh $|a_n||x_0|^n < \varepsilon^n$ për $n > n_0$ dhe, sipas kriterit të krahasimit, shohim se seria (3) konvergjon për x_0 të dhënë. Meqë x_0 është marrë i çfarëdoshëm shohim se $R = +\infty$.

Marrim rastin kur $k = +\infty$. Tregojmë se seria divergjon për çdo $x \neq 0$. Nga $k = +\infty$ rrjedh ekzistenca e nënvargut $\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\}$ të vargut $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ ashtu që:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty.$$

Prandaj, për çdo $x \neq 0$ ekziston numri k_x ashtu që për $k > k_x$ vlen pabarazimi:

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq \frac{1}{|x|},$$

d.m.th. $|a_{n_k} x^{n_k}| \geq 1$. Këndej është e qartë se seria (3) divergjon në pikën x sepse në këtë pikë kufiza e saj e përgjithshme nuk tenton në zero. Meqenëse $x \neq 0$ është i çfarëdoshëm konstatojmë se seria divergjon për çdo x të tillë, d.m.th. $R = 0$.

Më në fund marrim $0 < k < +\infty$. Tregojmë se për çdo x të tillë që $|x| < \frac{1}{k}$ seria (3) konvergjon. Zgjedhim $\varepsilon > 0$ ashtu që:

$$(k + \varepsilon)|x| = q < 1.$$

Meqenëse k është limit superior i vargut $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ atëherë ekziston numri n_0 ashtu që për $n > n_0$ vlen pabarazimi:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < k + \varepsilon.$$

Këndej, për $n > n_0$ fitojmë:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| < (k + \varepsilon)|x| = q,$$

ose:

$$|a_n x^n| < (k + \varepsilon)^n |x|^n = q^n, 0 < q < 1,$$

dhe, sipas kriterit të krahasimit, shohim se seria (3) konvergjon absolutisht, pra edhe konvergjon.

Mbetet të tregojmë se për x të tillë që $|x| > \frac{1}{k}$ seria divergjon. Zgjedhim $\varepsilon > 0$ të tillë që $(k - \varepsilon)|x| > 1$; atëherë $|x|(k - \varepsilon) > 1$. Por, meqë $k = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ atëherë gjendet vargu i indekseve n_k i tillë që

$$\sqrt[n]{|a_{n_k}|} > k - \varepsilon.$$

ose:

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}|x| > (k - \varepsilon)|x| > 1,$$

ose:

$$|a_{n_k} x^{n_k}| > (k - \varepsilon)^{n_k} |x|^{n_k} \geq 1,$$

që tregon se nuk përmbushet kushti i nevojshëm për konvergjencën e serisë. Prandaj seria (3), për x të tillë që $|x| > \frac{1}{k}$ divergjon, kurse konvergjon për $|x| < \frac{1}{k}$. Kjo tregon që $R = \frac{1}{k}$. Teorema u vërtetua. Seria e dhënë në shembullin 4. ka vetinë që

$$k = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{\frac{1}{2n-1}} = 1.$$

Prandaj, sipas teoremës 2.14, duke qartë se rrezja e konvergjencës është $R = \frac{1}{k} = 1$.

Tash shqyrtojmë rastin kur seria polinomiale konvergjon në pikën $x = R$. Po theksojmë se rasti $x = -R$ kthehet në rastin e mësipërm me zëvendësimin $y = -x$.

Teorema 1.2.15 *(e Abelit). Në qoftë se seria polinomiale* (3) *konvergjon për* $x = R$, *atëherë ajo konvergjon uniformisht në segmentin* $[0, R]$.

Vërtetimi. Le të jetë $x \in [0, R]$. Serinë (3) e shkruajmë në formën:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

Termat e serisë $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ nuk varen nga x prandaj, meqë ajo konvergjon, konvergjenca do të jetë uniforme. Vargu $\{(\frac{x}{R})\}$ është i kufizuar në $[0, R]$ dhe është monotono-zvogëlues në çdo pikë të atij segmenti. Prandaj, sipas kriterit të Abelit për konvergjencën uniforme (teorema 2.5), shohim se seria (3) konvergjon uniformisht në segmentin $[0, R]$.

Rrjedhimi 1.2.2 Nëse seria (3) konvergjon për $x = R$, atëherë shuma e saj është funksion i vazhdueshëm në segmentin $[0, R]$.

Vërtetimi. Sipas teoremës 2.15. seria (3) konvergjon uniformisht në segmentin $[0, R]$. Këndej, meqë edhe termat e serisë janë funksione të vazhdueshme, fitojmë (shih teoremën 1.2.7) se shuma e serisë është funksion i vazhdueshëm.

Kalojmë tash në disa rrjedhime të konvergjencës uniforme të serisë polinomiale. Më parë tregojmë se ka vend:

Teorema 1.2.16 *Rrezet e konvergjencës të serive:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n, \tag{7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot x^{n+1}}{n+1}, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}, \tag{9}$$

janë të barabarta.

Vërtetimi. Po shënojmë me $R-$ rrezen konvergjencës së serisë (7), me R^*- rrezen e konvergjencës së serisë (8) dhe me $R'-$ rrezen e konvergjencës së serisë (9). Nga relacioni:

$$\left|\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}\right| \leq |x||a_n x^n| \leq |x^2||n \cdot a_n x^{n-1}|,$$

$n = 1, 2, ...,$ dhe nga teorema e krahasimit, rrjedh se nëse në ndonjë pikë konvergjon seria (9) atëherë në atë pikë konvergjon edhe seria (7) dhe nëse në ndonjë pikë konvergjon seria (7) atëherë në atë pikë do të konvergjojë edhe seria (8). Këndej fitojmë:

$$R' \leq R \leq R^*. \tag{10}$$

Mbetet të tregojmë se

$$R^* \leq R'. \tag{11}$$

Supozojmë se seria (8) konvergjon në pikën x_0. Atëherë $0 < |x_0| < R^*$. Le të jetë r numër real i tillë që $|x_0| < r < R^*$. Për $n = 1, 2, ...,$ kemi:

$$|na_n x_0^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|x_0|^2} \cdot \left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| \left|\frac{x_0}{r}\right|^{n+1}. \tag{12}$$

Meqë seria (8) konvergjon për $x = r$ fitojmë:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n r^{n+1}}{n+1} = 0,$$

prej nga rrjedh ekzistenca e numrit $M > 0$ ashtu që për çdo $n = 1, 2, ...,$ vlen pabarazimi:

$$\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| \leq M.$$

Nëse marrim $q = |\frac{x_0}{r}|$, nga (12), fitojmë pabarazimin:

$$|n \cdot a_n \cdot x_0^{n-1}| \leq \frac{n(n+1)}{|x_0|^2} M \cdot q^{n+1}.$$

Meqë seria me termin e përgjithshëm $\frac{n(n+1)}{|x_0|^2} \cdot M \cdot q^{n+1}$ konvergjon (tregohet lehtë p.sh. me kriterin e Dallamberit), atëherë për $x = x_0$ konvergjon edhe seria (9). pabarazimi (11) u vërtetua.

Nga relacionet (10) dhe (11) rrjedh se $R = R^* = R'$ çka edhe synuam të tregojmë.

Teorema 1.2.17 *Në qoftë se R është rreze konvergjence e serisë:*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{13}$$

atëherë:

(a) për çdo $x \in (-R, R)$ vlen:

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1},$$

d.m.th. brenda intervalit të konvergjencës seria mund të integrohet term për term;

(*b*) *për çdo* $x \in (-R, R)$ *vlen:*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1},$$

d.m.th. brenda intervalit të konvergjencës seria mund të derivohet term për term;

(*c*) *seritë polinomiale të fituara nga seria* (13) *si rezultat i derivimit term për term ose integrimit term për term, kanë rreze të njëjtë konvergjence, si edhe vetë seria* (13).

Vërtetimi. Pohimi (c) është evident duke marrë parasysh teoremën 1.2.16.

Meqenëse seria e formës (13) konvergjon uniformisht në segmentin $[-r, r]$, $0 < r < R$ (teorema 1.2.15), atëherë pohimet (a) e (b) rrjedhin përkatësisht nga teoremat 1.2.9 e 1.2.11, duke theksuar për pohimin (b) se seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ konvergjon uniformisht në $[-r, r]$ (shih vërtetimin e teoremës 1.2.16).

Rrjedhimi 1.2.3 Nëse seria (13) ka rrezen e konvergjencës R atëherë shuma e saj ka në çdo pikë të intervalit $(-R, R)$ derivat të çfarëdo rendi dhe ai jepet me formulën

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Vërtetimi është i menjëhershëm duke zbatuar pohimin (b) të teoremës 1.2.17 hap pas hapi për derivatin e parë, për të dytin, etj.

Vërejtje. Krejt që u tha rreth serisë $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vlen edhe për serinë e formës $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Në veçanti, intervali i konvergjencës do të jetë $|x - x_0| < R$, d.m.th. intervali $(x_0 - R, x_0 + R)$ me qendër në pikën x_0. Natyrisht, si te seritë (3), në skajet e intervalit $(x_0 - R, x_0 + R)$ kërkohet shqyrtim i posaçëm i natyrës së serisë:.

Shembulli 1.2.16 Të gjendet intervali i konvergjencës së serisë:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}.$$

Zgjidhje: Kemi:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n+1}}} \right| = 3,$$

prandaj seria konvergjon për x të tillë që $|x - 2| < 3$ ose për çdo $x \in (-1, 5)$. Për $x = -1$ fitojmë serinë $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ e cila divergjon. Për $x = 5$ gjejmë serinë $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1+, ...,$ e cila po ashtu divergjon. Prandaj intervali i konvergjencës është $(-1, 5)$.

b. Zbërthimi i funksioneve në seri polinomiale

Në këtë pikë shqyrtojmë problemin e anasjelltë me atë që studiuam më sipër:

Jepet funksioni $f(x)$ dhe kërkohet të dihet kur ky funksion në një bashkësi të dhënë mund të jetë shumë e një serie polinomiale dhe në këtë rast cila është ajo seri polinomiale.

Përkufizimi 1.2.10 *Thuhet se funksioni f(x) është* **analitik** *(ose* **mund të zbërthehet në seri polinomiale)** *në pikën* x_0, *nëse ekzistojnë numrat realë* a_n, $n = 0, 1, 2, ...,$ *dhe numri* $R > 0$ *ashtu që:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \ |x - x_0| < R. \tag{14}$$

Lehtë tregohet se shuma, ndryshimi e prodhimi i dy funksioneve analitike në një pikë është funksion analitik në atë pikë.

Kalojmë tash gradualisht në zgjidhjen e problemit të shtruar.

Teorema 1.2.18 *(uniciteti i paraqitjes së funksionit analitik me seri polinomiale).*

Në qoftë se $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *dhe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ *janë seri konvergjente në intervalin* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *dhe kanë të njëjtën shumë në çdo pikë të atij intervali, atëherë ato janë identike, d.m.th.*

$$a_n = b_n,$$

për çdo $n = 0, 1, 2, ...$

Vërtetimi. Sipas supozimit kemi:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ...$$

Nëse marrim $x = x_0$, atëherë $a_0 = b_0$. Duke derivuar dhe zëvendësuar $x = x_0$ del $a_1 = b_1$. Me vazhdimin e kësaj ecurie gjejmë $a_n = b_n$, për çdo $n = 0, 1, 2, ...$

Teorema 1.2.19 *Në qoftë se funksioni* $f(x)$ *është analitik në pikën* x_0, *d.m.th. paraqitet me serinë* (14) *në rrethinën e asaj pike me rreze konvergjence* $R > 0$, *atëherë:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n = 0, 1, ..., \tag{15}$$

d.m.th.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Vërtetimi. Sipas rrjedhimit të teoremës 1.2.17, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ka në çdo pikë të intervalit $(x_0 - R, x_0 + R)$ derivat të çfarëdo rendi dhe:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)...(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k},$$

për $k = 0, 1, 2, ...$ Duke marrë $x = x_0$ del

$$f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k, k = 0, 1, 2, ...,$$

prej nga fitohet formula (15).

Përkufizimi 1.2.11 *Le të jetë funksioni $f(x)$ i përkufizuar në ndonjë rrethinë të pikës x_0 dhe le të ketë ai derivat të çfarëdo rendi në atë rrethinë. Atëherë seria:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{16}$$

quhet **seri e Tejlorit për funksionin** $f(x)$ **në pikën** x_0.

Nga teoremat 1.2.18. e 1.2.19. rrjedh se, nëse funksioni mund të zbërthehet në seri polinomiale në pikën x_0 atëherë kjo seri është seria e Tejlorit.

Në mënyrë të natyrshme shtrohet problemi i anasjelltë: nëse funksioni $f(x)$ ka derivat të çfarëdo rendi në intervalin $(x_0 - R, x_0 + R), R > 0$, dhe formalisht për të ndërtojmë serinë e Tejlorit në pikën x_0 (d.m.th, serinë (16)) atëherë kjo seri a do të jetë konvergjente në $(x_0 - R, x_0 + R)$ dhe nëse po shuma e saj a do të jetë e barabartë me $f(x)$?

Shembulli që vijon tregon se në rastin e përgjithshëm përgjigjja është negative.

Marrim funksionin:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{për } x \neq 0 \\ 0, & \text{për } x = 0. \end{cases}$$

Ky funksion ka derivat të çfarëdo rendi për çdo x, ndërsa për $x = 0$ tregohet se derivatet i ka të barabartë me zero, d.m.th. $f^{(n)}(0) = 0,\ n = 0, 1, 2, ...$

Këndej, të gjitha kufizat e serisë së Tejlorit të funksionit $f(x)$ në pikën x_0 janë të barabarta me zero dhe si pasojë, edhe shuma e serisë për çdo x do të jetë zero. Prandaj shuma e serisë ndryshon nga $f(x)$ sepse $f(x)$ bëhet zero vetëm për $x = 0$.

Në vazhdim tregojmë se kur seria e Tejlorit për funksionin $f(x)$ në pikën x_0 konvergjon te $f(x)$. Për shqyrtimin e këtij problemi shkruajmë formulën e Tejlorit për funksionin $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x), \tag{17}$$

ku me $r_n(x)$ shënuam termin mbetës në atë formulë. Po shënojmë:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Teorema 1.2.20 *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që funksioni $f(x)$ në intervalin $(x_0 - R, x_0 + R), R > 0$, të përputhet me shumën e serisë së Tejlorit për te d.m.th. që*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

është që

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0,$$

për çdo x nga intervali në shqyrtim.

Vërtetimi. Supozojmë se $f(x)$ zbërthehet në seri polinomiale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ në $(x_0 - R, x_0 + R)$. Atëherë $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n = 0, 1, 2, ...,$ dhe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(x)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

ku $R_n(x)$ është mbetja e serisë. Këndej dhe nga (17) gjejmë se $R_n(x) = r_n(x)$.

Tash nga

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - S_n(x)] = 0$$

shohim se

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

për çdo $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Anasjelltas, le të jetë

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

në $(x_0 - R, x_0 + R)$. Atëherë, nga formula (17) gjejmë $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, që tregon se funksioni $f(x)$ në $(x_0 - R, x_0 + R)$ përputhet me shumën e serisë së vetë të Tejlorit në pikën x_0

Teorema u vërtetua.

Tash japim një konditë të mjaftueshme për zbërthimin e funksionit në seri polinomiale

Teorema 1.2.21 *Në qoftë se funksioni $f(x)$ bashkë me derivatet e tij të çfarëdo rendi janë uniformisht të kufizuara në intervalin $(x_0 - R, x_0 + R)$ atëherë ai zbërthehet në serinë e Tejlorit në atë interval.*

Vërtetimi. Tregojmë se seria e Tejlorit për funksionin $f(x)$ konvergjon te $f(x)$ në $(x_0 - R, x_0 + R)$. Për këtë, sipas teoremës 2.20, mjafton të tregojmë se

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

ku $r_n(x)$ është termi mbetës në formulën e Tejlorit për funksionin $f(x)$.Termin mbetës $r_n(x)$ e marrim në formën e Lagranzhit, d.m.th.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{18}$$

ku $c = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1$. Nga kushtet e teoremës rrjedh ekzistenca e numrit M ashtu që $|f^{(n)}(x)| \leq M$, për çdo $n = 0, 1, 2, ...$ dhe çdo $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Prandaj fitojmë:

$$\Big|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\Big| \leq \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ku $|c - x_0| < |x - x_0| < R$, ose $|r_n(x)| \leq \frac{M\cdot R^{n+1}}{(n+1)!}$. Duke marrë parasysh limitin e mirënjohur $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,\ a > 0$, shohim se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R^{(n+1)}}{(n+1)!} = 0.$$

Këndej dhe nga (18) fitojmë:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0,$$

çka synuam të tregojmë.

Shembuj 1.2.1 **1**.Marrim funksionin $f(x) = e^x$.

Meqenëse $f^{(n)}(x) = e^x$, për çdo numër të fiksuar $R > 0$, çdo $x \in (-R, R)$ dhe çdo $n = 0, 1, 2, ...$, kemi $0 < f^{(n)}(x) < e^R$. Këndej, sipas teoremës 2.21, konstatojmë se funksioni $f(x) = e^x$ mund të zbërthehet në serinë e Tejlorit në tërë boshtin Ox. Më tej, meqë $f^{(n)}(0) = 1$, kemi:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2. Për funksionin $f(x) = \sin x$ dihet se $f^{(n)}(x) = \sin^{(n)} x = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$. Prandaj, meqë:

$$|\sin^{(n)} x| = |\sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})| \leq 1,$$

për çdo x, sipas teoremës 2.21, përfundojmë se funksioni $\sin x$ zbërthehet në seri polinomiale në $(-\infty, +\infty)$. Seria është:

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\, x^{2n-1}\,.$$

Në mënyrë të ngjashme tregohet se:

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\, x^{2n},$$

në $(-\infty, +\infty)$.

3. Zbërthejmë në seri polinomiale funksionin $f(x) = \ln(1+x)$.

Lehtë shihet se formula e Tejlorit për këtë funksion, i cili është definuar në intervalin $(-\infty, +\infty)$, është

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Meqenëse:

$$f^{(n+1)}(x) = [\ln(1+x)]^{(n+1)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

atëherë termi mbetës në formën e Lagranzhit ($x_0 = 0$) është

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\ 0 < \theta < 1.$$

Për $0 \le x \le 1$ kemi:

$$0 < \frac{1}{1+\theta x} < 1,$$

prandaj:

$$|r_n(x)| < \frac{1}{n+1}.$$

Këndej shohim se $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ në $[0,1]$.

Për të shqyrtuar rastin $-1 < x < 0$ termin mbetës $r_n(x)$ e shkruajmë në formën e Koshit:

$$r_n = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{n!}(1-\theta)^{n+1} = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}.$$

Në këtë rast kemi:

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} < 1$$

dhe:

$$\frac{1}{1+\theta x} = \frac{1}{1-\theta|x|} < \frac{1}{1-|x|},$$

prandaj:

$$|r_n(x)| \le \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \cdot \frac{1}{|1+\theta x|} \cdot |x|^{n+1} \le \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}.$$

Këndej shihet se $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ në $(-1, 0)$.

Tash kemi:

$$\ln(1+x)=\sum_{u=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \tag{19}$$

në $(-1,1]$. Për $x=-1$ seria që gjendet në anën e djathtë të barazimit (19) merr formën $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\cdot\frac{1}{n}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Këndej shihet se ajo divergjon në pikën $x=-1$. Seria në fjalë divergjon edhe për $|x|>1$ sepse termi i n-të i saj nuk konvergjon në zero kur $n\to\infty$.

4. Zbërthejmë në seri funksionin binomial $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, α numër real. Seria e Tejlorit për funksionin në shqyrtim është:

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+...(20).$$

Për $\alpha\in N$ të gjithë koeficientët a_{n+1} e lartë bëhen zero prandaj kemi të bëjmë me formulën e binomit të Njutonit (seria e (20) përmban vetëm numër të fundmë termash të ndryshme nga zero, prandaj konvergjon për çdo x).

Shqyrtojmë rastin $\alpha\notin\mathbf{N}$. Rrezja e konvergjencës së serisë (20) është

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=1$$

prandaj jashtë segmentit $[-1,1]$ seria (20) divergjon. Tregojmë se në intervalin $(-1,1)$ shuma e serisë (20) është e barabartë me $(1+x)^a$. Për këtë mjafton të tregojmë se termi mbetës në formulën e Tejlorit tenton në zero kur $n\to\infty$. Kufizën mbetës e marrim në trajtën e Koshit ($x_0=0$):

$$r_n(x)=\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!}f^{(n+1)}(\theta x),\ 0<\theta<1.$$

Këndej dhe nga barazimi:

$$[(1+x)^a]^{(n)}=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{a-n},$$

fitojmë:

$$r_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n\cdot x^{n+1},\ 0<\theta<1. \tag{21}$$

Po theksojmë se për $x>-1$ vlen $0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$, prej nga gjejmë $0<(\frac{1-\theta}{1+\theta x})^n<1$, për çdo $n=1,2,....$ Përveç kësaj, shprehja

$$K_n(x)=\frac{(\alpha-1)...[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!}x^n$$

është kufiza e përgjithshme e serisë së Tejlorit për funksionin $(1+x)^{\alpha-1}$ e cila siç u tha më sipër, konvergjon për çdo $x\in(-1,1)$. Prandaj:

$$\lim_{n\to\infty}K_n(x)=0 \tag{22}$$

për çdo $x \in (-1,1)$. Pastaj, nga fakti që $1-|x| < \theta x < 1+|x|$, shohim se shprehja:

$$|L_n(x)| = |\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}| \tag{23}$$

përfshihet midis $|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1}$ dhe $|\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}$, të cilat nuk varen nga θ. Këndej rrjedh se vargu $\{L_n(x)\}$ për x të fiksuar nga $(-1,1)$, është i kufizuar. Më në fund nga $(21), (22)$ e (23) shohim se $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, $|x| < 1$.

Kështu treguam se për $|x| < 1$ ka vend barazimi:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ... \tag{24}$$

Seria (24) quhet **seria e binomit** ose **seria binomiale.**

Vërejtje. Natyra e serisë binomiale në skajet e intervalit të konvergjencës varet nga numri α. Tregohet se:

(a) në pikën $x = -1$ për $\alpha \geq 0$ seria binomiale konvergjon absolutisht, ndërsa për $\alpha < 0$ divergjon;

(b) në pikën $x = 1$ për $\alpha > -1$ seria binomiale konvergjon, ndërsa për $\alpha \leq -1$ divergjon.

Në vazhdim po paraqesim disa raste të veçanta.

Për $\alpha = -1$ del seria e progresionit gjeometrik

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^{n-1}x^n + ..., \ |x| < 1.$$

Për $\alpha = \frac{1}{2}$ kemi:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + ... + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + ...,$$

kurse për $\alpha = -\frac{1}{2}$ kemi:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + ... + (-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + ...$$

c. Llogaritja e integraleve me ndihmën e zbërthimeve në seri

Nga teoria e integraleve dihet se p.sh. integrali i secilit prej funksioneve

$$\frac{e^x}{x}, \ \frac{\sin x}{x}, \ \frac{\cos x}{x}, \ e^{-x^2}, \ \frac{1}{\log x}$$

nuk mund të llogaritet në trajtë të fundme (nuk mund të shprehet me funksione elementare).

Teoria e serive bën të mundshme llogaritjen e integraleve

$$\int_c^x \frac{e^t}{t}dt,\ \int_c^x \frac{\sin t}{t}dt,\ \int_c^x \frac{\cos t}{t}dt,\ \int_c^x e^{-t^2}dt,\ \int_c^x \frac{dt}{\log t},$$

$c \in \mathbf{R}$, të cilët me radhë, quhen **integrali-funksioni eksponencial, integrali-sinus, integrali-kosinus, integrali i Laplasit, integrali-logaritmik**.

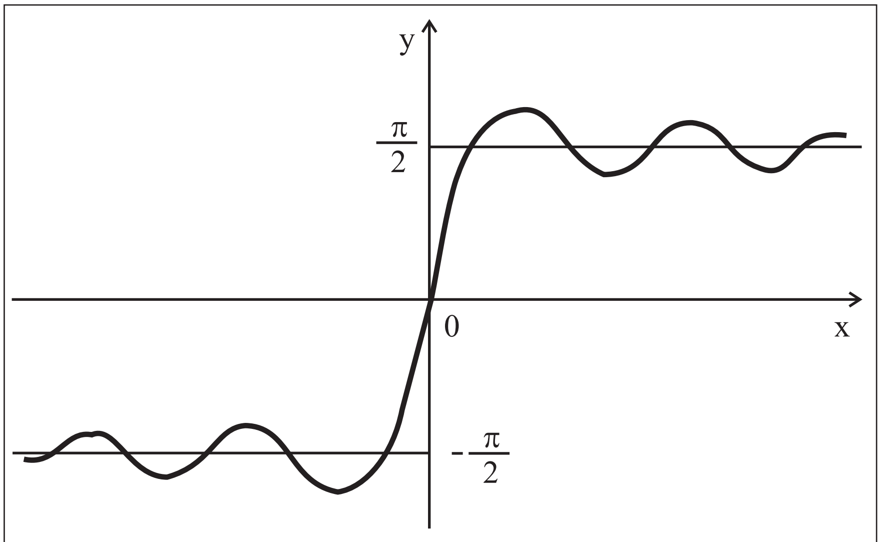


Fig. 1.6.

Do të ndalemi te integrali-sinus. Për rastet e tjera veprohet ne mënyrë analoge.

Për $c = 0$ integrali-sinus shënohet më $\mathrm{Si}\, x$, d.m.th. $\mathrm{Si}\, x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Duke pjesëtuar me t barazimin:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + ...$$

gjejmë:

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + ... \ . \tag{25}$$

Nëse marrim $\frac{\sin t}{t} = 1$ për $t = 0$, atëherë funksioni nënintegral do të jetë i vazhdueshëm për çdo t. Prandaj ai është i integrueshëm në çdo segment $[0, x], x \in \mathbf{R}$. Seria (25) konvergjon uniformisht për çdo t, prandaj duke integruar në $[0, x]$ gjejmë:

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots.$$

Grafiku i funksionit Si x duket kështu:

1.2.4 Detyra për ushtrime

1. Të shqyrtohet konvergjenca e serisë funksionale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2^n}}{2^n} x^n (1-x)^n.$$

2. Të tregohet se seria funksionale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{-p} \sin nx$$

(a) konvergjon në $\mathbf{R}$, nëse $p > 1$;

(b) konvergjon uniformisht në çdo segment $[a, b]\,(0 < a < b < 2\pi)$ nëse $0 < \rho < 1$.

3. Të shqyrtohet konvergjenca uniforme e vargjeve funksionale me termin e përgjithshëm

(a) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $0 \leq x \leq 1$; (b) $f_n(x) = n(\sqrt{x} + \frac{1}{n} - \sqrt{x}),\ 0 < x < +\infty$;

(c) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $-\infty < x < +\infty$; (d) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n},\ x \in (-\infty, +\infty)$;

(e) $f_n(x) = \begin{cases} n^2, \text{ nëse } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ n^2\left(\frac{2}{n} - x\right), \text{ nëse } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}, \\ 0, \text{ nëse } x \geq \frac{2}{n}, \end{cases}$

në segmentin $[0, 1]$.

4. Le të jetë funksioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pafund herë i derivueshëm ashtu që të plotësohet $f^{(n)}(x) \rightrightarrows \phi(x)$ në çdo interval të fundmë (a, b). Të tregohet se $\phi(x) = c \cdot e^x$, ku c është konstante.

5. Le të jenë $\{f_n(x)\}$ dhe $\{g_n(n)\}$ vargje funksionesh të përkufizuara në segmentin $[-1, 1]$ në këtë mënyrë

$$f_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2) dt}, \quad g_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

Të tregohet në se segmentin $[0, 1]$, $g_n(x) \rightrightarrows |x|$.

6. Duke shfrytëzuar kriterin e Vajershtrasit të vërtetohet konvergjenca uniforme e këtyre serive funksionale:

   $(a) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2},\ |x| < +\infty;$ $\quad$ $(b) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}(x^n - x^{-n}), \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2;$

   $(c) \sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right), |x| < a;$

   $(d) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; 1) në segmentin $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$, ku $\varepsilon > 0$; 2) në segmentin $0 \leq x \leq 2\pi$;

7. Për cilat vlera të parametrit α : 1) vargu $\{f_n(x)\}$, ku $f_n(x) = n^a \cdot x \cdot e^{-nx}$, $n = 1, 2, ...,$ konvergjon në segmentin $[0, 1]$; 2) vargu $\{f_n(x)\}$ konvergjon uniformisht në $[0, 1]$; 3) lejohet kalimi me limit nën shenjën e integralit

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx\ ?$$

8. Të gjendet intervali i konvergjencës së këtyre serive:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n; \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (1+\tfrac{1}{n})^{n^2} \cdot x^n;$$
$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} \quad (a > 1); \qquad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}},\ (a > 0).$$

9. Të gjendet shuma e serive polinomiale:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n; \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n;$$
$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}; \qquad (d) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{(n-1)!}.$$

   item Të zbërthehet në seri polinomiale funksioni: (a) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$;
   (b) $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$;

   (c) $f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3)$; (d) $f(x) = \arcsin x$;

   (ç) $f(x) = \arctan \frac{2x}{2-x^2}$.

   item Le të jetë $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Të tregohet se $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$.

10. Është dhënë funksioni $f(t) = \int\limits_0^{\infty} x^2 \cos(x^2)dx$.

    (a) Të zbërthehet funksioni f në seri polinomiale;

    (b) Të gjendet rrezja e konvergjencës së serisë së fituar.

11. Është dhënë funksioni

$$f(t) = \int_0^t \arctan x \; dx.$$

(a) Të zbërthehet funksioni i dhënë në seri polinomiale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ dhe të shqyrtohet konvergjenca e serisë së fituar;

(b) Të çmohet gabimi i bërë gjatë përafrimit $f(10^{-1}) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 10^{-1}$.

12. Është dhënë funksioni

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

(a) Të zbërthehet funksioni i dhënë f në seri polinomiale;

(b) Me ndihmën e rezultatit të fituar të llogaritet $\ln 2$ me saktësi $2^{-1} \cdot 10^{-5}$.

13. Le të jetë k grafiku i funksionit $y = \ln(1+x)$. Shënojmë me $f(t)$ syprinën e sipërfaqes së kufizuarme tangjenten e lakores së dhënë në pikën $0(0,0)$, harkun e kësaj lakoreje në segmentin [0.t] dhe drejtëzën $x = t$.

(a) Të gjendet funksioni $f(t)$ dhe të zbërthehet ai në seri polinomiale;

(b) Të shqyrtohet konvergjenca e serisë së fituar;

(c) Të llogaritet $f(10^{-1})$ ashtu që gabimi i bërë të jetë më i vogël se 10^{-4}.

14. Është dhënë seria:

$$S_\alpha(x) = \sum n = 1^\infty n^{\alpha n}(1+\frac{1}{n})^{n^2 \ln n} x^n, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

(a) Të shqyrtohet natyra e kësaj serie;

(b) Të shqyrtohet konvergjenca e integralit $\int\limits_0^{R_\alpha} S_\alpha(x)dx$, ku $R_\alpha(x)$ është rrezja e konvergjencës së serisë së dhënë.

Udhëzim. Më parë të vërtetohet relacioni

$$n^{(\frac{n}{n+1} \; +\alpha)n} < n^{\alpha n}(1+\frac{1}{n})^{n^2 \ln n} < n^{n(\alpha+1)},$$

duke dijtë se

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}), \quad n \in N.$$

15. Të vërtetohet barazimi:
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

16. Të vërtetohet se
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin ax \; dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

17. Le të jetë $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funksion i vazhdueshëm. Në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston polinomi $P(x)$ i tillë që për çdo $x \in \mathbf{R}$, $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$, d.m.th. nëse funksioni $f(x)$ lejon përafrim uniform në $\mathbf{R}$ me saktësi të çfarëdoshme me polinome, tregoni se $f(x)$ është polinom.

1.3 SERITË FURIE

Nga fakti se ndonjë funksion mund të përafrohet me polinome, duke e përdorë formulën e Tejlorit, u paraqit kërkesa për shqyrtimin e gjithanshëm të serive polinomiale.

Në analizë dhe në aplikimet e saja rol të rëndësishëm ka klasa e funksioneve periodike sepse shumë procese periodike (lëkundjet dhe lëvizjet e ndryshme rrotulluese të pjesëve të makinave, lëvizjet e trupave qiellor, etj.) përshkruhen me ndihmën e funksioneve të asaj klase. Funksionet periodike është e natyrshme të përafrohen me funksione trigonometrike, në veçanti me sinuse e kosinuse sepse lëvizjet më të thjeshta periodike janë të lidhura me këto funksione. Prandaj, është e natyrshme që problemi i përafrimit të funksioneve periodike të na çojë në shqyrtimin e serive termat e së cilave janë funksionet trigonometrike $\sin x$ e $\cos x$.

Në këtë paragraf do të paraqesim disa elemente të teorisë së të ashtuquajturave seri trigonometrike Furie, të cilat kanë zbatim të madh në fusha të ndryshme.

1.3.1 Seritë trigonometrike Furie

Përkufizimi 1.3.1 *Seria e trajtës:*
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1}$$
ku $a_i \in \mathbf{R}$, $b_i \in \mathbf{R}$, $\;i = 1, 2, ...,\;$ $a_0 \in \mathbf{R}$, *quhet* **seri trigonometrike.**

Shumat e pjesshme të serisë (1) janë kombinime lineare të funksioneve nga sistemi trigonometrik:
$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ..., \sin nx, \cos nx, ... \tag{2}$$

Në qoftë se ndryshores x në serinë (1) i shtojmë 2π, të gjitha kufizat e saj mbeten të pandryshuara. Në këtë rast në qoftë se seria (1) konvergjon, nuk ndryshon as shuma e saj. Pra, shuma e serisë (1), nëse ekziston, është funksion periodik me periodë 2π. Ky fakt na lejon të ndalemi në një segment me gjatësi sa perioda. Zakonisht segmentin e tillë e marrim të jetë $[-\pi, \pi]$.

Përkufizimi 1.3.2 *Funksionet e integrueshme $f(x)$ e $g(x)$ në $[a, b]$ quhen* **ortogonale** *në $[a, b]$, në qoftë se:*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = 0.$$

Sistemi i funksioneve të integrueshme në $[a, b]$

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...,$$

quhet **ortogonal në** *$[a, b]$ nëse elementet e tij janë dy nga dy ortogonale në $[a, b]$.*

Teorema 1.3.1 *Sistemi trigonometrik* (2) *është ortogonal në çdo segment me gjatësi 2π.*

Së pari vërtetojmë këtë rezultat:

Lema 1.3.1 *Në qoftë se $\varphi(x)$ është funksion periodik me periodë 2π, atëherë ka vend barazimi:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)dx = \int_a^{a+2\pi} \varphi(x)dx, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Vërtetimi. Për çdo $a \in \mathbf{R}$ vlen:

$$\int_a^{a+2\pi} \varphi(x)dx = \int_a^{-\pi} \varphi(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi+a} \varphi(x)dx. \tag{3}$$

Më tej kemi:

$$\int_a^{-\pi} \varphi(x)dx = \int_a^{-\pi} \varphi(x + 2\pi)dx,$$

dhe pasi të zëvendësojmë $t = x + 2\pi$ gjejmë:

$$\int_a^{-\pi} \varphi(x)dx = \int_{a+2\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = \int_{a+2\pi}^{\pi} \varphi(x)dx.$$

Këndej dhe nga (3) del barazimi i kërkuar.

Vërtetimi i teoremës 1.3.1 Nga lema 1.3.1 shohim se mjafton të tregojmë që:

(a) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos \ell x dx = 0, \quad k \neq \ell, \quad k, \ell = 0, 1, 2, ...;$

(b) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin \ell x dx = 0, \quad k \neq \ell, \quad k, \ell = 1, 2, ...;$

(c) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin \ell x dx = 0, \quad k, \ell = 0, 1, 2, ...$

Po e vërtetojmë barazimin (a). Meqenëse:

$$\cos kx \cos \ell x = \frac{1}{2}[\cos(k+\ell)x + \cos(k-\ell)x]$$

atëherë:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos \ell x dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+\ell)x + \cos(k-\ell)x]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(k+\ell)x}{k+\ell} + \frac{\sin(k-\ell)x}{k-\ell}\Big]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Në mënyrë analoge, duke përdorë relacionet

$$\sin kx \sin \ell x = \frac{1}{2}[\cos(k-\ell)x - \cos(k+\ell)x],$$

$$\cos kx \sin \ell x = \frac{1}{2}[\sin(k+\ell)x - \sin(k-\ell)x],$$

tregohen barazimet (b) e (c). Teorema u vërtetua.

Kjo veti e sistemit trigonometrik ka mjaft zbatime. Në vazhdim marrim një zbatim mjaft të rëndësishëm.

Teorema 1.3.2 *Në qoftë se:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{4}$$

dhe seria që gjendet në anën e djathtë të barazimit (4) *konvergjon uniformisht në segmentin* $[-\pi, \pi]$ *kah funksioni* $f(x)$, *atëherë:*

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx; \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx; \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$n = 1, 2, \ldots$.

Vërtetimi. Me qenë se seria që gjendet në anën e djathtë të barazimit (4) konvergjon uniformisht në segmentin $[-\pi, \pi]$, dhe termat e saj janë funksione të vazhdueshme në atë segment, atëherë edhe shuma $f(x)$ e serisë është funksion i vazhdueshëm në atë segment si dhe seria mund të integrohet term për term (shih [ ], teorema I 2.9) në $[-\pi, \pi]$. Prandaj:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big)\ dx =$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \pi \cdot a_0,$$

Këndej rrjedh e para nga formulat (5).

Vërejmë se nëse serinë (4) e shumëzojmë me $\cos nx$ ose $\sin nx$ $(n \in \mathbf{N})$, atëherë seritë e fituara janë po ashtu uniformisht konvergjente në segmentin $[-\pi, \pi]$. Me të vërtetë, nëse p.sh. e shumëzojmë me $\cos nx$ atëherë mbetja e serisë së fituar do të jetë $r_n(x) \cos nx$, ku $r_n(x)$ është mbetja e serisë (4). Tash kemi:

$$|r_n(x) \cos nx| \leq |r_n(x)|$$

dhe nga fakti se $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0,\ x \in [-\pi, \pi]$, rrjedh se $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) \cdot \cos nx = 0,\ x \in [-\pi, \pi]$, çka deshëm të tregojmë.

Në qoftë se barazimin (4) e shumëzojmë me $\cos nx$ gjejmë:

$$f(x) \cos nx = \frac{a_0}{2} \cos nx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos nx\ \cos kx + b_k \sin kx\ \cos nx),$$

për çdo $x \in [-\pi, \pi]$. Seria që gjendet në anën e djathtë të barazimit të mësipërm mund të integrohet (shih shih [ ], teorema I 2.9) term për term, prandaj:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\ dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\ dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + \right.$$

$$\left. + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx \right).$$

Këndej, në saje të ortogonalitetit të sistemit (2), rrjedh se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\ dx = \frac{a_0}{2} \cdot 0 + a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\ dx + 0 = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(x + \frac{\sin 2nx}{2n}\Big)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} a_n = \pi \cdot a_n,$$

prandaj:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx, \quad n = 1, 2, ...$$

Në mënyrë analoge, duke shumëzuar (4) me $\sin nx$ dhe duke e integruar në $[-\pi, \pi]$ barazimin e fituar, marrim barazimin e tretë të (5), dhe me këtë teorema u vërtetua.

Përkufizimi 1.3.3 *Le të jetë f funksion i integrueshëm në segmentin* $[-\pi, \pi]$. *Seria trigonometrike* (1), *koeficientët e së cilës jepen me formulat (5), quhet* **seri trigonometrike Furie** *ose* **seri Furie**, *kurse numrat a_n e b_n*−**koeficientët Furie** *të funksionit $f(x)$.*

Në këtë rast shkruajmë:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Në rastin kur funksioni $f(x)$ është tek ose parë seria Furie merr një trajtë më të thjesht. Dihet se nëse $g(x)$ është parë në $[-a, a]$, atëherë

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = 2\int_{0}^{a} g(x)dx,$$

kurse nëse është tek atëherë:

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = 0.$$

Le të jetë $f(x)$ funksion parë në $[-\pi, \pi]$. Kemi

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$

$b_n = 0,$

$n \in \mathbf{N}$, kështu që:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Në mënyrë analoge tregohet se kur $f(x)$ është tek atëherë:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Vërejtje. Është e qartë se çdo funksioni të integrueshëm në $[-\pi, \pi]$ i përgjigjet një seri Furie. Por, si edhe te seritë polinomiale, mbetet për shqyrtim problemi se çfarë kushtesh duhet të plotësoj funksioni $f(x)$ që të jetë shumë e serisë së vet Furie. Pikërisht këtë problem do ta zgjidhim në pikën në vijim.

1.3.2 Konvergjenca e serisë Furie

Përkufizimi 1.3.4 *Thuhet se funksioni $f(x)$ është* **pjesë-pjesë i vazhdueshëm** *në $[a,b]$, nëse është i vazhdueshëm në të gjitha pikat e këtij segmenti, me përjashtim ndoshta të një numri të fundmë pikash në të cilat ka këputje të llojit të parë.*

Përkufizimi 1.3.5 *Funksioni pjesë-pjesë i vazhdueshëm në $[a,b]$ quhet* **pjesë-pjesë i lëmueshëm** *në atë segment, në qoftë se $f'(x)$ ekziston dhe është pjesë-pjesë i vazhdueshëm në $[a,b]$.*

Nga përkufizimi 1.3.5 shihet se grafiku i funksionit pjesë-pjesë të lëmueshëm ka kudo tangjente me përjashtim, ndoshta të një numri të fundmë pikash në të cilat ka tangjente të njëanshme.

Në qoftë se funksioni $f(x)$ është pjesë-pjesë i lëmueshëm në $[a,b]$, atëherë ky segment mund të ndahet në një numër të fundmë segmentesh

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n],$$

ku $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, të tillë që brenda secilit prej tyre funksionet $f(x)$ e $f'(x)$ janë të vazhdueshme dhe në skaje kanë limite të fundme. Prandaj, funksionet $f(x)$ dhe $f'(x)$ janë të kufizuara në secilin prej segmenteve $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$, pra edhe në $[a,b]$.

Në teoremën në vijim, e cila konsiderohet si rezultati më i rëndësishëm i këtij paragrafi, tregohet se funksioni pjesë-pjesë i lëmueshëm mund të zbërthehet në seri Furie në $[-\pi, \pi]$.

Teorema 1.3.3 *Në qoftë se funksioni $f(x)$ është pjesë-pjesë i lëmueshëm në segmentin $[-\pi, \pi]$, atëherë seria e tij Furie konvergjon në çdo pikë të atij segmenti dhe për shumën e saj*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{1}$$

kanë vend barazimet:

(1) *$S(x) = f(x)$ për çdo pikë $x \in (-\pi, \pi)$ në të cilën funksioni $f(x)$ është i vazhdueshëm;*

(2) $S(x) = \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ *në pikat e këputjes së funksionit $f(x)$ në $[-\pi, \pi]$;*

(3) $S(-\pi) = S(\pi) = \dfrac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$.

Për vërtetim duhet ky rezultat:

Lema 1.3.2 *Në qoftë se funksioni $f(x)$ është pjesë-pjesë i lëmueshëm në segmentin $[a,b]$, atëherë:*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \alpha x \, dx = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\alpha x\,dx = 0. \tag{3}$$

Rrjedhimi 1.3.1 Koeficientët Furie të funksionit pjesë-pjesë të lëmueshëm tentojnë në zero kur $n \to \infty$.

Vërtetimi i lemës 1.3.2 Segmentin $[a, b]$ me ndihmën e pikave

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n = b,$$

e ndajmë në atë mënyrë që në secilin prej intervaleve $(x_i, x_{i+1}),\ i = 0, 1, ..., n-1$, funksionet $f(x)$ dhe $f'(x)$ janë të vazhdueshme kurse në skaje kanë limite të njëanshme të fundme.

Me qenë se

$$\int_a^b f(x)\sin\alpha x dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin\alpha x dx,$$

mjafton të vërtetojmë se për çdo i të fiksuar ndërmjet 0 e $n-1$, ka vend barazimi:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin\alpha x dx = 0. \tag{4}$$

Funksionet $f(x)$ e $f'(x)$ i përkufizojmë në skajet e intervalit (x_i, x_{i+1}) në atë mënyrë që vlerat e atyre funksioneve në ato pika të përputhen me limitet e tyre të njëanshme në pikat $x = x_i$ e $x = x_{i+1},\ i = 0, 1, ...n-1$. Atëherë $f(x)$ e $f'(x)$ në (x_i, x_{i+1}) janë të vazhdushme, prandaj mund të përdoret formula e integrimit me pjesë. Pra:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin\alpha x dx = -\frac{f(x)\cos\alpha x}{\alpha}\Bigg|_{x=x_i+0}^{x=x_{i+1}-0} + \frac{1}{\alpha}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cos\alpha x dx.$$

Meqë $f(x)$ e $f'(x)$ janë të vazhdueshme në (x_i, x_{i+1}), atëherë ekzistojnë konstantet M e M' ashtu që:

$$|f(x)| \le M, \quad |f'(x)| \le M',$$

për çdo $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Këndej rrjedh se

$$\Big|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin\alpha x dx| \le \left| -\frac{f(x_{i+1})\cdot\cos\alpha x_{i+1}}{\alpha} + \frac{f(x_i)\cos\alpha x_i}{\alpha}\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{\alpha}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)\cos\alpha x dx\right| \le \frac{2M}{\alpha} + \frac{M'(x_{i+1}-x_i)}{\alpha},$$

prandaj kur $\alpha \to \infty$ marrim barazimin (2).

Barazimi (3) vërtetohet në mënyrë analoge dhe me këtë lema u vërtetua.

Vërtetimi i teoremës 1.3.3 Funksionin e dhënë $f(x)$ e zgjerojmë në mënyrë periodike në tërë drejtëzën $(-\infty, +\infty)$, d.m.th. nëse me f^* shënojmë funksionin e zgjeruar, atëherë:

$$f^*[-\pi, \pi] = f,$$

si dhe për çdo $x_0 \in [-\pi, \pi]$ kemi:

$$f^*(x_0 + 2k\pi) = f^*(x_0)(= f(x_0)), k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Për thjeshtësi funksionin $f^*(x)$, i cili është zgjerim periodik i funksionit $f(x)$ në $(-\infty, +\infty)$ e shënojmë me $f(x)$.

Le të jetë $x \in (-\pi, \pi)$ pikë në të cilën funksioni $f(x)$ është i vazhdueshëm. Atëherë $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$, prandaj:

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Për të treguar (1) duhet të tregojmë se

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

ose që:

$$S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \to 0, \tag{5}$$

kur $n \to \infty$, ku

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_x \sin kx \tag{6}$$

është shuma e pjesshme e serisë Furie të funksionit $f(x)$ në segmentin $[-\pi, \pi]$. Koeficientët Furie, të cilët siç dihet llogaritet me formulat

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)du, a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cdot \cos ku\ du, b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cdot \sin ku\ du,$$

i zëvendësojmë në (6) dhe gjejmë:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\ du + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)[\cos ku \cdot \cos kx + \sin ku \cdot \sin kx]du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(u-x) \right] du.$$

Pasi të marrim zëvendësimin $u - x = z$ gjejmë:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+z) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kz \right] dz. \tag{7}$$

Shprehjen:

$$D_n(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kz \tag{8}$$

e quajmë **bërthama e Dirihles**. Nga (8) gjejmë:

$$2 \sin \frac{z}{2} D_n(z) = \sin \frac{z}{2} + 2 \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{z}{2} \cos kz =$$

$$\sin \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) z - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) z \right] = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) z,$$

d.m.th.:

$$D_n(x) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) z}{2 \sin \frac{z}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kz. \tag{9}$$

Tash nga (7) marrim:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+z) \cdot D_n(z) dz = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+z) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz. \tag{10}$$

Meqë bërthama e Dirihles është funksion periodik me periodë 2π, ndërsa sipas konstruktimit edhe $f(x)$ është i tillë, atëherë edhe funksioni:

$$f(x+z) \cdot \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) z}{2 \sin \frac{z}{2}}$$

është periodik dhe ka periodën 2π. Këndej dhe nga lema 1.3.1 shohim se relacioni (10) mund të shkruhet kështu:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz. \tag{10'}$$

Duke integruar (9) në lidhje me z në $[-\pi, \pi]$ gjejmë:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(z) dz = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kz \right] dz = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dz + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kz dz = 1,$$

Meqenëse funksioni $D_n(z)$ është parë në $[-\pi, \pi]$, atëherë nga (11) gjejmë:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz=\frac{1}{2},\ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz=\frac{1}{2}. \tag{12}$$

Të parin nga relacionet (12) e shumëzojmë me $f(x-0)$ kurse të dytin me $f(x+0)$ dhe pasi t'i mbledhim fitojmë:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x-0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz. \tag{13}$$

Duke zbritur (13) nga barazimi (10′) gjejmë:

$$S_n(x)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x+z)-f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+z)-f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz. \tag{14}$$

Mbetet të tregohet se të dy integralet në anën e djathtë të barazimit (14) tentojnë në zero kur $n\to\infty$. Këtë e vërtetojmë për integralin e dytë sepse për të parin vërtetohet në mënyrë analoge.

Le të jetë δ i tillë që $0<\delta<\pi$. Atëherë:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+z)-f(x+)]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)2\sin\frac{z}{2}dz=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\,\frac{\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)zdz$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+z)-f(x+0)}{2\sin\frac{z}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)zdz=I_n'+I_n'' \tag{15}$$

Marrim $\varepsilon>0$. Tregojmë se duke e zgjedhur δ -në në mënyrë të përshtatshme integrali I_n' mund të bëhet më i vogël se $\frac{\varepsilon}{2}$ njëkohësisht për çdo n. Meqenëse $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}=f'(x+0)$, atëherë për $\delta>0$ mjaft të vogël dhe për çdo z nga intervali $(0,\delta)$ ka vend pabarazimi:

$$\left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right|<|f'(x+0)|+1.$$

Meqenëse:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}=1,$$

për $\delta>0$, mjaft të vegjël, dhe për çdo $z\in(0,\delta)$ vlen:

$$\left|\frac{\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right|\le 2.$$

Këndej, duke marrë parasysh se për çdo $n\in N$ vlen pabarazimi:

$$\left|\sin(n+\frac{1}{2})z\right|\le 1.$$

gjejmë:

$$\begin{aligned}|I_n'| \quad &\le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}\left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right|\left|\frac{\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right|\left|\sin(n+\frac{1}{2})z\right|dz\\ &\le \frac{2}{\pi}[|f'(x+0)|+1]\int\limits_0^{\delta}dz=\frac{2\delta}{\pi}[|f'(x+0)|+1],\end{aligned}$$

për δ mjaft të vegjël. Duke zgjedhur $\delta>0$ të vogël ashtu që

$$\frac{2\delta}{\pi}[|f'(x+0)|+1]<\frac{\varepsilon}{2}$$

del se

$$|I_n'|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{16}$$

për çdo n. Konsiderojmë δ të fiksuar në mënyrë që të plotësohet (16) dhe shqyrtojmë integralin I_n''. Funksioni $\dfrac{f(x+z)-f(x+0)}{2\sin\dfrac{z}{2}}$ është pjesë-pjesë i lëmueshëm në segmentin $[\delta,\pi]$, sepse i tillë është numëruesi, kurse emëruesi ka derivat të vazhdueshëm dhe ai është i ndryshëm nga 0 në këtë segment. Prandaj, në bazë të lemës 1.3.2 rrjedh se $\lim\limits_{n\to\infty}I_n''=0$ d.m.th. për n mjaft të mëdhenj vlen:

$$|I_n''|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

Nga (15), (16) e (17) rrjedh pabarazimi:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}[f(x+z)-f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz\right|=|I_n'+I_n''|\le|I_n'|+|I_n''|<\varepsilon.$$

Prandaj $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$, për çdo $x\in(-\pi,\pi)$ në të cilën f është i vazhdueshëm dhe pjesa (1) e teoremës së Dirihles u vërtetua.

Nëse $x \in (-\pi, \pi)$ është pikë këputje e funksionit f kemi:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

që tregon pohimin (2) të teoremës 1.3.3.

Më në fund, për $x = -\pi$ dhe $x = \pi$, për shkak të periodicitetit të funksionit f kemi:

$$S(-\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(-\pi+0)}{2} = \frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2},$$
$$S(\pi) = \frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2} = \frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2},$$

d.m.th. $S(-\pi) = S(\pi)$, që tregon se vlen (3). Teorema e Dirihles u vërtetua.

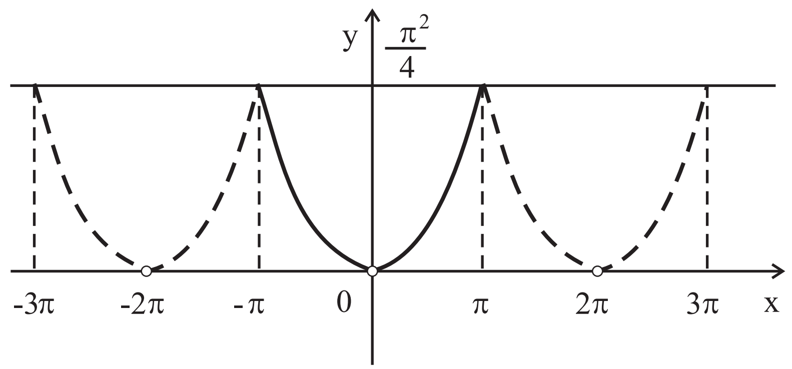


Fig. 1.7.

Shembulli 1.3.1 Të gjendet seria Furie për funksionin $f(x) = \dfrac{x^2}{4}, -\pi \le x \le \pi, f(x+2\pi) = f(x)$.

Zgjidhja: Funksioni i dhënë është çift prandaj $b_n = 0$, ndërsa

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^2}{4}dx = \frac{\pi^2}{6}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^2}{4}\cos nx dx = (-1)^n\frac{1}{n^2}.$$

Prandaj:

$$S(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Meqenëse funksioni i plotëson kushtet e teoremës së Dirihles dhe $f(-\pi) = f(\pi)$, atëherë seria Furie e atij funksioni në çdo pikë të segmentit $[-\pi, \pi]$ konvergjon te funksioni $\dfrac{x^2}{4}$:

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Grafiku i funksionit $S(x)(= f(x))$ në $(-\infty, +\infty)$ është dhënë në fig. 1.7.

Shembulli 1.3.2 Të gjendet seria Furie për funksionin $f(x) = \text{sh}\, x, -\pi \leq x \leq \pi, f(x + 2\pi) = f(x)$.

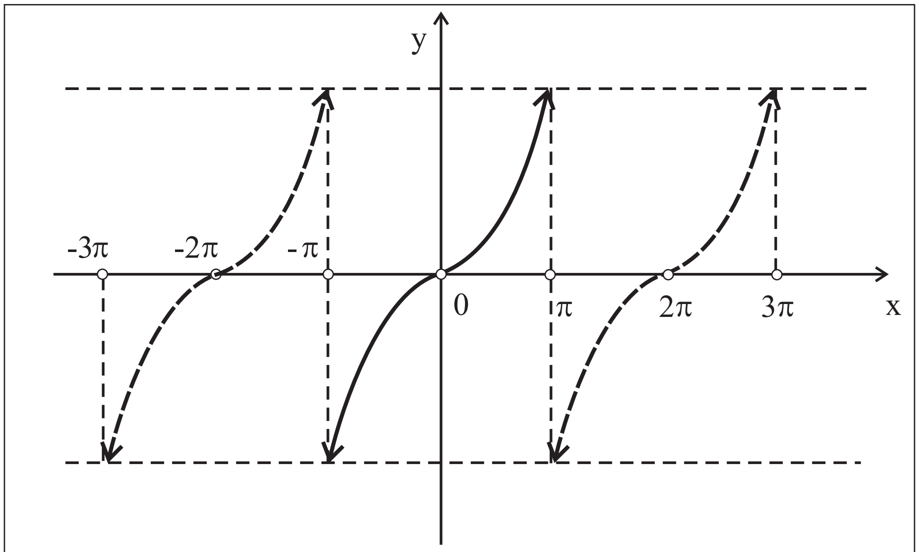


Fig. 1.8.

Zgjidhja: Meqë funksioni në shqyrtim është tek kemi $a_n = 0$, për $n = 0, 1, 2, \ldots$. dhe:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sh}x \sin nx dx = (-1)^{n-1} \frac{2n\text{sh}\pi}{\pi(1+n^2)}, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Funksioni $f(x) = \text{sh}\, x$ është pjesë-pjesë i lëmueshëm në $[-\pi, \pi]$, por $\text{sh}(-\pi) \neq \text{sh}(\pi)$, prandaj seria Furie e atij funksioni konvergjon në $(-\pi, \pi)$ te po ai funksion:

$$\text{sh}x = \frac{2\text{sh}\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{1+n^2} \sin nx, -\pi < x < \pi,$$

kurse në pikat $x = -\pi$ e $x = \pi$ konvergjon te numri $\frac{\text{sh}(-\pi)+\text{sh}\pi}{2} = 0$.

Vërejmë se seria Furie e funksionit $\text{sh}\, x$ nuk konvergjon uniformisht te funksioni $\text{sh}\, x$ në segmentin $[-\pi, \pi]$. Me të vërtetë, në të kundërtën shuma e saj do të ishte funksion i vazhdueshëm në $[-\pi, \pi]$. Por, funksioni $S(x)$ ka këputje në pikat $x = -\pi$ e $x = \pi$.

Grafikët e funksioneve $\text{sh}\, x$ dhe të shumës $S(x)$ të serisë së vet Furie janë dhënë në fig. 1.8.

1.3.3 Seritë Furie në rastin e intervalit të çfarëdoshëm

Teoria e serive Furie për funksionin $f(x)$ i cili është periodik dhe ka periodën 2π, lehtë mund të përgjithësohet edhe për funksionet periodike me çfarëdo periodë

2ℓ. Për këtë mjafton që segmentin $[-\ell,\ell]$ ta transformojmë në segmentin $[-\pi,\pi]$ me funksionin:

$$t=\frac{\pi}{\ell}x, -\ell\le x\le \ell, -\pi\le t\le\pi,$$

dhe problemi kthehet në rastin që shqyrtuam më parë.

Le të jetë $f(x)$, i dhënë në $[-\ell,\ell]$, funksion periodik me periodë 2ℓ. Atëherë, meqë funksioni $g(t)$, ku $f(x)=f\big(\frac{\ell t}{\pi}\big)=g(t)$, është i dhënë në $[-\pi,\pi]$, dhe ka periodën 2π. kemi:

$$g(t)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt, \tag{1}$$

ku

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)dt,\ \alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cdot\cos ktdt,\ \beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin ktdt. \tag{2}$$

Me kalimin në variablën fillestare formula (1) merr formën:

$$g\big(\frac{\pi}{\ell}x\big)=f(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos\frac{k\pi}{\ell}x+\beta_k\sin\frac{k\pi}{\ell}x,$$

kurse formulat (2) marrin trajtën:

$$\alpha_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx,\ \alpha_k=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{k\pi}{\ell}xdx,\ \beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{k\pi}{\ell}xdx.$$

Vërejtje. Duke bërë modifikimet përkatëse mund të formulohet dhe vërtetohet teorema e Dirihles për funksionin me periodë 2ℓ.

Shembulli 1.3.3 Të gjendet seria Furie të funksionit

$$f(x)=\begin{cases}c_1, & -\ell<x<0\\ c_2, & 0<x<\ell\end{cases},$$

$f(x+2\ell)=f(x)$.

Zgjidhja: Kemi:

$$\alpha_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{0}c_1dx+\frac{1}{\ell}\int_{0}^{\ell}c_2dx=c_1+c_2,$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\ell}\left\{\int_{-\ell}^{0}c_1\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx+\int_{0}^{\ell}c_2\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx\right\}=0,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{0} c_1 \sin\frac{n\pi}{\ell}xdx + \frac{1}{\ell}\int\limits_{0}^{\ell} c_2 \sin\frac{n\pi}{\ell}xdx = \frac{c_1}{n\pi}(\cos n\pi - 1) - \frac{c_2}{n\pi}(\cos n\pi - 1),$$

d.m.th.

$$\beta_n = \begin{cases} 0, & \text{për } n-\text{çift} \\ \frac{2(c_2-c_1)}{n\pi}, & \text{për } n-\text{tek.} \end{cases}$$

Seria Furie e funksionit $f(x)$ është:

$$\frac{c_1+c_2}{2} + \frac{2(c_2-c_1)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{\ell}x. \tag{3}$$

Meqë funksioni $f(x)$ i plotëson kushtet e teoremës (së modifikuar) të Dirihles atëherë, nëse me $S(x)$ shënojmë shumën e serisë (3), kemi:

$$S(x) = \begin{cases} c_1, & -\ell < x < 0 \\ c_2, & 0 < x < \ell \\ \frac{c_1+c_2}{2}, & x = 0 \text{ dhe } x = \pm\ell. \end{cases}$$

1.3.4 Zbërthimi në seri Furie në intervalin $[0, \pi]$

Në disa zbatime ndodhë që funksioni $f(x)$ të jetë i përkufizuar në segmentin $[0, \pi]$ dhe kërkohet që ai të paraqitet me anën e serisë Furie. Po paraqesim dy mënyra në të cilat shohim si realizohet zbërthimi i tillë:

1) Funksionin $f(x)$ të përkufizuar me intervalin $[0, \pi]$ e zgjërojmë në intervalin $[-\pi, 0]$ ashtu që $f(x) = f(-x)$ (fig. 1.9). Atëherë, koeficientët Furie të funksionit të zgjeruar do të jenë

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad b_n = 0.$$

Seria Furie në këtë rast do të përmbajë vetëm kosinuse:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

dhe thuhet se funksioni $f(x)$ është **zbërthyer në** $[0, \pi]$ **sipas kosinuseve (ose në mënyrë çifte).**

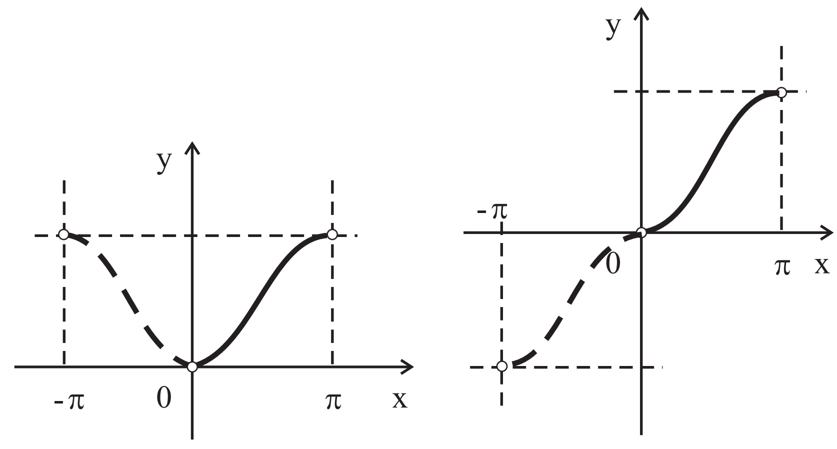


Fig. 1.9. Fig. 1.10.

2) Funksionin $f(x)$ të përkufizuar në segmentin $[0,\pi]$ e zgjerojmë në $[-\pi,0]$ ashtu që $f(-x)=-f(x)$ (fig 1.10). Kemi $a_n=0$, $b_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\sin nx dx$. Seria Furie në këtë rast do të përmbajë vetëm sinuse:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^\infty \sin nx$$

dhe themi se funksionin $f(x)$ e kemi zbërthyer **sipas sinuseve (ose në mënyrë teke).**

Vërejtje. Në mënyrë analoge mund të zbërthehet funksioni $f(x)$ i dhënë në $[0,\ell]$ sipas kosinuseve e sinuseve.

Shembulli 1.3.4 Të zbërthehet në seri Furie funksioni $f(x)=1-x$ i dhënë në $[0,1]$:

(a) sipas kosinuseve;

(b) sipas sinuseve.

:

Zgjidhja: (a) Kemi

$$a_0=\frac{2}{1}\int\limits_0^1(1-x)dx=1, a_n=\frac{2}{1}\int\limits_0^1(1-x)\cos n\pi x dx=\frac{2}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]=$$

$$=\begin{cases}0, & n\text{- çift}\\ \frac{4}{n^2\pi^2}, & n\text{-tek}\end{cases}, \qquad b_n=0,$$

prandaj:

$$1-x\sim\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\pi(2n-1)x.$$

Përveç kësaj, sipas teoremës (së modifikuar) të Dirihles, shuma $S(x)$ e serisë që gjendet në anën e djathtë të relacionit të mësipërm përputhet në $[-1,1]$ me vetë funksionin $f(x)$; pra $S(x)=1-x$, për çdo $x\in[-1,1]$.

(b) Kemi:

$$a_n=0,\ b_n=\frac{2}{1}\int\limits_0^1(1-x)\sin n\pi x dx=2\left(\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}+\frac{\cos n\pi}{n\pi}\right)=\frac{2}{n\pi},$$

prandaj:

$$1-x\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}.$$

Nëse me $S(x)$ shënojmë anën e djathtë të relacionit të mësipërm atëherë:

$$S(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x\leq 1\\ -1-x, & -1\leq x<0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

1.3.5 Përgjithësimi i serive Furie

Në pikën 1.3.1 pamë se llogaritja e koficientëve Furie ishte pazgjidhshmërisht e lidhur me ortogonalitetin e sistemit

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots \tag{1}$$

në $[-\pi,\pi]$ e jo me strukturën e e tij. Këndej, në mënyrë të natyrshme, rrjedh nevoja për përgjithësimin e serive Furie lidhur me një sistem ortogonal të çfarëdoshëm të funksioneve (të integrueshme)

$$g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x),\cdots \tag{2}$$

në segmentin $[a,b]$. Ky problem do të shqyrtohet në këtë pikë e njëherësh do të jepen disa rezultate që në analizë kanë aplikim të gjërë. Le të jetë pra (2) sistem ortogonal i funksioneve në $[a,b]$.

Përkufizimi 1.3.6 Normë *e funksionit* φ, *të integrueshëm në* $[a,b]$, *quhet numri*

$$||\varphi||=\left(\int\limits_a^b\varphi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Është e qartë se $||\varphi||\geq 0$. Përveq kësaj, nga ortogonaliteti i sistemit (2), rrjedh se:

$$\int\limits_a^b g_i(x)g_k(x)dx=\begin{cases}0, & \text{për } i\neq k\\ ||g_k||^2, & \text{për } i=k.\end{cases}$$

Le të jetë dhënë funksioni $f(x)$ i cili është i integrueshëm në $[a,b]$. Supozojmë se

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kg_k(x), \tag{3}$$

ku $a_k\in\mathbf{R},\ k=1,2,\cdots$, kurse $g_k(x)$ janë elemente të sistemit (2). Kërkojmë të shprehim numrat a_k në varësi të funksionit $f(x)$ dhe të elementeve të sistemit (2). Për këtë qëllim shumëzojmë me $g_n(x)$ të dy anët e barazimit (3) dhe i integrojmë (duke supozuar se plotësohen kushtet e integrimit term për term të serisë funksionale $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kg_k(x)g_n(x)$) në $[a,b]$). Kështu fitojmë:

$$\int_a^b f(x)g_n(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_a^b g_k(x)g_n(x)dx=a_n||g_n||^2,$$

prej nga gjejmë:

$$a_n=\frac{1}{||g_n||^2}\int_a^b f(x)g_n(x)dx. \tag{4}$$

Numrat $a_n,\ n=1,2,\cdots$, të përcaktuar me formulën (4) quhen **koeficientë Furie** të funksionit $f(x)$ në lidhje me sistemin ortogonal (2), kurse seria (3) koeficientët a_k të së cilës përcaktohen nga formula (4) quhet **seri Furie** e funksionit $f(x)$ në lidhje me sistemin ortogonal (2).

Duhet theksuar se për çdo funksion $f(x)$ të integrueshëm ne $[a,b]$, mund të ndërtohet seria e tij Furie në lidhje me sistemin ortogonal (2). Në këtë rast shkruajmë:

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_kg_k(x). \tag{5}$$

Kushtet që duhet t'i plotësoj funksioni $f(x)$ që shenja $\sim$ në (5) të kthehet në shenjë barazimi varen nga vetitë e sistemit ortogonal $\{g_k(x)\}$. Në rastin kur sistemi ortogonal është sistemi (1), disa kushte të mjaftueshme për barazimin në relacionin (5) u dhanë në teoremën e Dirihlesë. Vërtetimi i rezultateve analoge për sisteme të tjera ortogonale kërkon shqyrtime të posaçme.

Në vazhdim do të shqyrtojmë një veti të rëndësishme që kanë koeficentët Furie. Marrim funksionet:

$$g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x),$$

nga sistemi ortogonal (2), në $[a,b]$. Funksionin

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}b_kg_k(x), \tag{6}$$

ku b_k janë konstante, e quajmë **polinom i rendit n në lidhje me sistemin ortogonal** (2).

Le të jetë $f(x)$ funksion i integrueshëm në $[a, b]$. Shtrohet ky problem:

Si duhet të jenë koeficientët $b_k,\ k = 1, 2, \cdots, n$ që polinomi (6) të realizojë përafrimin më të mirë të funksionit $f(x)$ në $[a, b]$? Ose, më konkretisht, si duhet të zgjedhen numrat $b_k, k = 1, 2, \cdots, n$, që polinomi të paraqet përafrim të funksionit $f(x)$ për të cilin ,,gabimi" i bërë do të jetë më i ,,vogli"? Gabimi i bërë mund të përkufizohet në shumë mënyra.

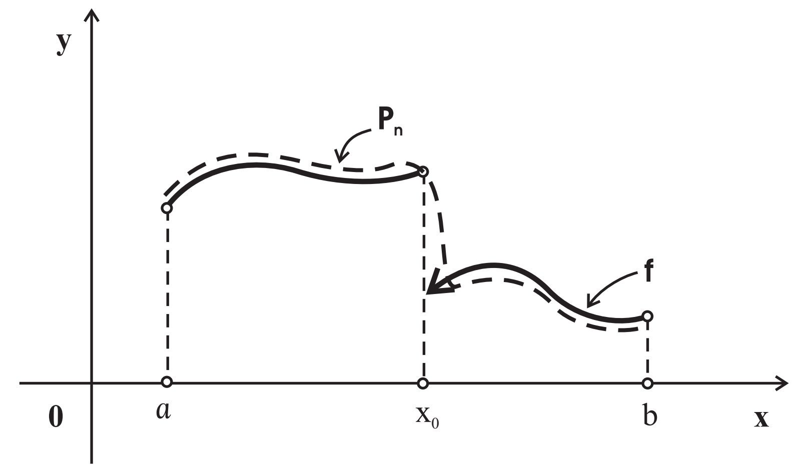


Fig. 1.11.

Vërejmë se shprehja $\max|f - P_n|$ nuk është e përshtatshme për të shprehur ,,gabimin" e bërë kur f përafrohet me P_n në $[a, b]$. Me të vërtetë, në fig. 1.11 shihet se $P_n(x)$ paraqet një përafrim të mirë të funksionit $f(x)$ në $[a, b]$, por $|f - P_n|$ është i madh në rrethinën e pikës x_0. Po japim një përkufizim i cili më së miri shprehë gabimin e bërë në $[a, b]$, d.m.th. përcakton ,,distancën" e funksionit të dhënë me polinomine që e përafron.

Përkufizimi 1.3.7 *Le të jenë funksioni $f(x)$ e polinomi $P_n(x)$ të përkufizuar në $[a, b]$.* **Distancë** *ose* **devijim i mesëm kuadratik** *të funksionit $f(x)$ dhe polinomit $P_n(x)$ në $[a, b]$ quajmë madhësinë*

$$\rho(f, P_n) = \sqrt{\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx}\,.$$

Tash, problemi i shtruar më lart mund të formulohet kështu: si duhen të zgjedhen koeficientët b_k të polinomit (6) në mënyrë që devijimi kuadratik i tij nga funksioni $f(x)$ në segmentin $[a, b]$ të jetë më i vogli? Kemi:

$$\rho^2(f, P_n) = \int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^{n} b_k \int_a^b f(x)g_k(x)dx +$$

$$+\int_a^b \Big(\sum_{k=1}^n b_k g_k(x)\Big)^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^n b_k a_k ||g_k||^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 ||g_k||^2,$$

sepse

$$\int_a^b g_i(x)\cdot g_k(x)dx = 0,$$

për $i \neq k$, ndërsa

$$\int_a^b a_k^2 \cdot g_k(x)dx = a_k ||g_k||^2$$

dhe:

$$\int_a^b g_k^2(x)dx = ||g_k||^2,$$

ku a_k janë koeficientët e serisë Furie të funksionit $f(x)$.

Relacionin

$$\rho^2(f, P_n) = \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^n b_k a_k ||g_k||^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 ||g_k||^2.$$

e plotësojmë në katror të plotë:

$$\rho^2(f, P_n) = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 ||g_k||^2 + \sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2 ||g_k||^2. \tag{7}$$

Në barazimin (7) vetëm shuma e fundit varet nga b_k. Meqë ajo është jonegative, atëherë vlerën më të vogël e ka zeron. Ajo arrihet për $b_k = a_k$. Pra, madhësia $\rho^2(f, P_n)$, d.m.th. edhe $\rho(f, P_n)$ arrin vlerën e vetë më të vogël për $b_k = a_k, k = 1, 2, \cdots, n$. Shprehja (7) në këtë rast merr trajtën:

$$\rho^2(f, P_n) = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 ||g_k||^2. \tag{8}$$

Meqë ana e majtë e barazimit (8) është jonegative, kemi:

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 ||g_k||^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx,$$

dhe duke vepruar me limit kur $n \to \infty$, gjejmë:

$$\sum_{n=1}^\infty a_n^2 ||g_n||^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx. \tag{9}$$

Kështu u vërtetua kjo teoremë:

Teorema 1.3.4 *(e Besselit). Nga të gjitha polinomet e tipit (6) devijimin kuadratik më të vogël nga funksioni $f(x)$ në segmentin $[a,b]$ e siguron polinomi koeficientët e të cilit janë koeficientët Furie të funksionit $f(x)$ ndaj sistemit ortogonal prej të cilit merret polinomi (6). Më tej, nëse a_n, $n = 1, 2, \cdots$, janë koeficientët Furie të funksionit $f(x)$ ndaj sistemit (2), atëherë vlen relacioni (9) i cili quhet* **pabarazimi i Besselit**.

Në rastin kur për sistem ortogonal marrim sistemin (1) atëherë polinomi (6) është i trajtës

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

kurse pabarazimi i Besselit merr formën:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx, \tag{10}$$

ku a_n dhe b_n janë koeficientet Furie të funksionit $f(x)$ në lidhje me atë sistem.

Vërejtje. Nga pabarazimi (10) rrjedh se për funksionin e integrueshëm $f(x)$ në $[-\pi, \pi]$ seria:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_0^2 + b_n^2)$$

konvergjon. Meqë termi i përgjithshëm i serisë konvergjente tenton në zero, gjejmë:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

d.m.th.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0$$

Kështu edhe një herë fituam rezultatin që më parë e kemi konstatuar (rrjedhimi i lemës 1.3.2).

1.3.6 Përafrimi i funksioneve të vazhdueshme me polinome

Në këtë pikë formulojmë dhe vërtetojmë njërën ndër teoremat themelore të analizës matematike të vërtetuar në gjysmën e dytë të shekullit të kaluar. Me këtë teoremë zgjerohet klasa e funksioneve që zbërthehen në seri polinomiale.

Teorema 1.3.5 *(e Vajershtrasit). Në qoftë se funksioni $f(x)$ është i vazhdueshëm në segmentin $[-\pi, \pi]$ dhe $f(-\pi) = f(\pi)$, atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston polinomi trigonometrik*

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

ashtu që:

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, -\pi \leq x \leq \pi$$

(d.m.th. $T_n(x)$ e përafron uniformisht funksionin $f(x)$ me saktësi ε).

Për vërtetimin e teoremës nevojiten dy rezultate ndihmëse të cilat po i japim më poshtë.

Lema 1.3.3 *Për çdo funksion $f(x)$ të vazhdueshëm në $[a,b]$ dhe për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston një funksion i vazhdueshëm dhe pjesë-pjesë i lëmueshëm $g_\varepsilon(x)$ i tillë që:*

$$|f(x) - g_\varepsilon(x) < \frac{\varepsilon}{2},\ a \leq x \leq b \tag{1}$$

dhe i tillë që:

$$g_\varepsilon(a) = f(a), g_\varepsilon(b) = f(b).$$

Vërtetimi. Meqë funksioni $f(x)$ është uniformisht i vazhdueshëm në $[a,b]$, atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta > 0$ ashtu që për çdo dy pika $x', x'' \in [a,b]$ të tilla që $|x'' - x'| < \delta$ vlen $|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Le të jetë $\varepsilon > 0$ i fiksuar dhe $\delta > 0$ numri përkatës në përkufizimin e vazhdueshmërisë uniforme. Segmentin $[a,b]$ e ndajmë në n-pjesë me pikat

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Përcaktojmë funksionin $g_\varepsilon(x)$ duke supozuar $g_\varepsilon(x_i) = f(x_i)$ për $i = 0, 1, \cdots, n$, dhe duke marrë $g_\varepsilon(x)$ linear në çdo segment $[x_i,\ x_{i+1}]$, për $i = 0, 1, \cdots, n$. Sipas konstruksionit kemi $g_\varepsilon(a) = f(a),\ \varepsilon(b) = f(b)$. Tregojmë se vlen relacioni (1) për çdo $x \in [a,b]$. Le të jetë $x' \in [a,b]$. Atëherë gjendet numri nga bashkësia $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ ashtu që të jetë $x' \in [x_i, x_{i+1})$. Në saje të linearitetit të $g_\varepsilon(x)$ vlera e atij funksioni në piken x' është e përfshirë ndërmjet vlerave $g_\varepsilon(x_i)(= f(x_i))$ dhe $g_\varepsilon(x_{i+1})(= f(x_{i+1}))$. Këndej, meqë funksioni i vazhdueshëm $f(x)$ merr në $[x_i, x_{i+1}]$ vlerat ndërmjet $f(x_i)$ e $f(x_{i+1})$, do të gjendet $x'' \in [x_i, x_{i+1}]$ ashtu që $g_\varepsilon(x') = f(x'')$ (fig. 1.12). Prandaj:

$$|f(x') - g_\varepsilon(x')| = |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

sepse $x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]$, dhe lema u vërtetua.

Në vazhdim shohim se çfarë kushtesh duhet të plotësoj funksioni $f(x)$ në $[-\pi, \pi]$ në mënyrë që seria e tij trigonometrike Furie të konvergjoj uniformisht te $f(x)$ në $[-\pi, \pi]$.

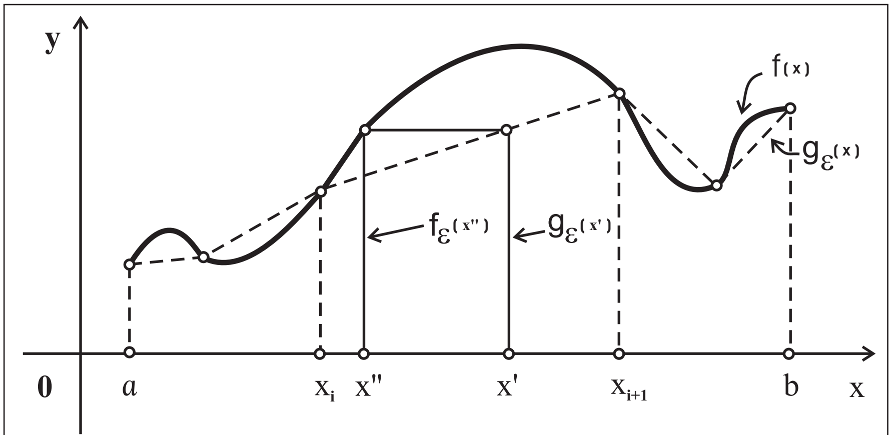


Fig. 1.12.

Lema 1.3.4 *Në qoftë se funksioni $f(x)$ është i vazhdueshëm dhe pjesë-pjesë i lëmueshëm në segmentin $[-\pi, \pi]$ si dhe $f(-\pi) = f(\pi)$, atëherë seria e tij Furie*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{2}$$

konvergjon uniformisht në këtë segment dhe $S(x) = f(x)$ në çdo pikë të $[-\pi, \pi]$.

Vërtetimi. Mjafton të tregojmë ekzistencën e një mazhorante konvergjente të serisë (2) (shih teoremën 2.3). Meqenëse $|a_n \cos nx| \leq |a_n|$ dhe $|b_n \sin nx| \leq |b_n|$, atëherë seria numerike:

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$$

është mazhorantë e serisë (2). Tregojmë se seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ konvergjon.

Me a_n' e b_n' shënojmë koeficientët Furie të derivatit të funksionit $f(x)$, pra:

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx, b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx.$$

Duke integruar me pjesë koeficientët Furie a_n e b_n , gjejmë:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n} f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx = -\frac{1}{n} b_n',$$

dhe, në mënyrë analoge:

$$b_n = \frac{1}{n} a_n'.$$

Këndej del se

$$|a_n| + |b_n| \leq \left(\frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n} \right) = \frac{1}{n}(|a'_n| + |b'_n|). \tag{3}$$

Tash, meqë $f'(x)$ është i integrueshëm në $[-\pi, \pi]$, nga pabarazimi i Besselit, rrjedh se seria:

$$\frac{{a'_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ({a'_n}^2 + {b'_n}^2) \tag{4}$$

konvergjon. Më tej nga pabarazimet:

$$0 \leq \left(|a'_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = {a'_n}^2 - \frac{2|a'_n|}{n} + \frac{1}{n^2},$$

$$0 \leq \left(|b'_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = {b'_n}^2 - \frac{2|b'_n|}{n} + \frac{1}{n^2},$$

marrim:

$$\frac{|a'_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(a_n'^2 + \frac{1}{n^2} \right), \frac{|b'_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(b_n'^2 + \frac{1}{n^2} \right).$$

Prandaj

$$\frac{|a'_n| + |b'_n|}{n} \leq \frac{1}{2}(a_n'^2 + b_n'^2) + \frac{1}{n^2}. \tag{5}$$

Tash, meqë seria (4) konvergjon dhe meqë edhe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergjon, rrjedh se seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n'^2 + b_n'^2) + \frac{1}{n^2} \right]$$

konvergjon. Këndej dhe duke vërejtur se nga (3) e (5) rrjedh

$$|a_n| + |b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n'^2 + b_n'^2) + \frac{1}{n^2},$$

gjejmë se seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ konvergjon. Pra, seria (2) konvergjon uniformisht te funksioni $S(x)$ në $(-\infty, +\infty]$. Barazimi $f(x) = S(x)$ në $[-\pi, \pi]$ rrjedh nga teorema e Dirihles (teorema 1.3.3).

Po theksojmë se lema 1.3.4 mbetet e vërtetë kur në vend të $[-\pi, \pi]$ marrim segmentin $[-\ell, \ell]$.

Vërtetimi i teoremës 1.3.5 Le të jetë $\varepsilon > 0$. Në saje të lemës 1.3.3, ekziston funksioni $g_\varepsilon(x)$ në $[-\pi, \pi]$ i cili është i vazhdueshëm dhe pjesë-pjesë i lëmushëm i tillë që:

$$|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ -\pi \leq x \leq \pi \tag{6}$$

si dhe:

$$g_\varepsilon(-\pi) = g_\varepsilon(\pi).$$

Tash, sipas lemës 1.3.4, seria Furie e funksionit $g_\varepsilon(x)$ konvergjon uniformisht te $g_\varepsilon(x)$ në $[-\pi, \pi]$. Prandaj shuma e saj e pjesshme

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

do të plotsoj pabarazimin:

$$|g_\varepsilon(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, -\pi \leq x \leq \pi. \tag{7}$$

Duke shfrytëzuar (6) dhe (7) gjejmë:

$$|f(x) - T_n(x)| \leq |f(x) - g_\varepsilon(x)| + |g_\varepsilon(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

për çdo $x \in [-\pi, \pi]$. Teorema u vërtetua.

Kalojmë në formulimin e rezultatit kryesor të kësaj pike.

Teorema 1.3.6 *(e Vajershtrasit). Në qoftë se funksioni f(x) është i vazhdueshëm në segmentin $[a, b]$, atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston polinomi $P(x)$ i tillë që*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, a \leq x \leq b$$

.

Vërtetimi. Me funksionin

$$x = a + \frac{b-a}{\pi}t,\ 0 \leq t \leq \pi,\ a \leq x \leq b,$$

segmenti $[0, \pi]$ transformohet në segmentin $[a, b]$. Nëse:

$$f^*(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi}t\right),$$

atëherë shohim se funksioni f^* është i përkufizuar në segmentin $[0, \pi]$. Funksionin e tillë e zgjerojmë në segmentin $[-\pi, 0]$ në mënyrë çifte, d.m.th. marrim:

$$f^*(t) = f^*(-t),\ t \in [-\pi, \pi].$$

Është e qartë se funksioni f^* është i vazhdueshëm në segmentin $[-\pi, \pi]$ dhe vlen $f^*(-\pi) = f^*(\pi)$. Prandaj, sipas teoremës 1.2.5, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston polinomi trigonometrik T(t) i tillë që:

$$|f^*(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, -\pi \leq t \leq \pi. \tag{8}$$

Mirëpo, meqë $T(t)$ është kombinimi linear i funksioneve $\cos kt$ e $\sin kt$, $k = 1, 2, ...$, të cilët janë funksione analitike në $(-\infty, +\infty)$, atëherë edhe vetë polinomi $T(t)$ është funksioni analitik në atë interval. Prandaj T(t) zbërthehet në seri polinomiale në $(-\infty, +\infty)$ e cila konvergjon uniformisht në çdo segment të fundmë:

$$T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t^n. \tag{9}$$

Nëse me $Q_n(t)$ shënojmë shumën e n-të të pjesshme të serisë (9), atëherë, meqë ajo në veçanti konvergjon uniformisht në $[-\pi, \pi]$, ekziston numri n_ε i tillë që për $n > n_\varepsilon$ vlen pabarazimi:

$$|T(t) - Q_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, -\pi \leq t \leq \pi.$$

Këndej, për $n = n_\varepsilon + 1$ gjejmë:

$$|T(t) - Q_{n_\varepsilon+1}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, -\pi \leq t \leq \pi \qquad (10).$$

Shënojmë $P_{n_\varepsilon+1} = P(t)$. Nga (8) e (10) fitojmë:

$$|F^*(t) - Q(t)| \leq |f^*(t) - T(t)| + |T(t) - Q(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Këndej, kur dihet se $t = \pi\dfrac{x-a}{b-a}$, fitojmë:

$$\left| f(t) - Q\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon,\ a \leq x \leq b.$$

Marrim zëvendësimin $Q(x) = P\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)$. Atëherë, është e qartë se $Q(x)$ është polinom ndërsa pabarazimi i fundit merr formën:

$$|f(x) - Q(x)| < \varepsilon, a \leq x \leq b.$$

Teorema u vërtetua.

Vërejtje. Le të jetë f funksion i vazhdueshëm nï segmentin $[a, b]$. Marrim vargun e numrave $\varepsilon_n > 0, n = 1, 2, ...,$ i cili tenton në zero (p.sh. $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$); atëherë, sipas teoremës 1.3.6, për çdo n=1,2,.., ekziston polinomi $P_n(x)$ (n nuk është shkalla e polinomit !) i tillë që

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n,\ a \leq x \leq b. \tag{11}$$

Kur $n \to \infty$ atëherë shihet se $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ në segmentin $[a, b]$

Kështu shohim se çdo funksion i vazhdueshëm në segment është limit i vargut të polinomeve i cili konvergjon uniformisht te ai funksion në atë segment. Të rikujtojmë (teorema 1.2.6) që më parë treguam se çdo funksion i cili është limit i vargut të polinomeve, e që konvergjon uniformisht në ndonjë segment, është i vazhdueshëm në atë segment.

Po theksojmë se teorema e Vajershtrasit paraqet vetinë karakteristike të funksioneve të vazhdueshme. Ajo tregon se klasa e funksioneve të tillë nuk është larg klasës së polinomeve! Kjo rrjedh nga fakti se për çfarëdo funksioni të vazhdueshëm në segment dhe për çfarëdo shkalle saktësie ε, gjithmonë ekziston polinomi i cili ndryshon nga funksioni (në atë segment) për jo më shumë se ε.

Gjithashtu, nga (1) fitojmë:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x),\ \ a \le x \le b,$$

ose:

$$f(x) = P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}[P_{n+1}(x) - P(x)], \tag{12}$$

ku konvergjenca e serisë së polinomeve (termat janë polinome) (12) është uniforme në $[a, b]$. Kështu treguam këtë rezultat:

Rrjedhimi 1.3.2 Çdo funksion i vazhdueshëm në segment zbërthehet në seri polinomesh.

Siç shihet rezultati i mësipërm është shumë i rëndësishëm sepse me te zgjerohet klasa e funksioneve që zbërthehen në seri polinomiale (rikujtojmë se për zbërthim në seri polinomiale kërkohej që, përveç të tjerash, funksioni të ketë derivat të çfarëdo rendi).

1.3.7 Mbi plotësinë e sistemit të funksioneve

Me $Q[a.b]$ shënojmë një bashkësi të çfarëdoshme funksionesh $f(x)$ të përkufizuara në segmentin $[a, b]$.

Përkufizimi 1.3.8 *Sistemi i funksioneve*

$$g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x), ... \tag{1}$$

quhet i **plotë për bashkësinë** $Q[a, b]$ **në kuptimin e përafrimit uniform** *nëse për çdo* $f \in Q[a, b]$ *dhe çdo* $\in> 0$ *ekziston numri i fundmë i funksioneve* $g_{n_1}, g_{n_2}, ..., g_{n_k}$ *nga sistemi* (1) *si dhe numrat realë* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$,*ashtu që:*

$$|f(x) - [\lambda_1 g_{n_1}(x) + \lambda_2 g_{n_1}(x) + ... + \lambda_k g_{n_k}(x)]| < \varepsilon,$$

për çdo $x \in [a, b]$.

Pra, sistemi (1) është i plotë në kuptimin e përafrimit uniform për bashkësinë $Q[a, b]$, nëse çdo funksion $f \in Q[a, b]$ mund të përafrohet me gabim mjaft të vogël me kombinimin linear të një numri të fundmë funksionesh nga sistemi (1).

Nga teoremat 1.3.5 e 1.3.6 rrjedhim këto rezultate:

Rrjedhimi 1.3.3 Sistemi i funksioneve trigonometrike

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx, ... \tag{2}$$

është i plotë në kuptimin e përafrimit uniform për bashkësinë

$$Q^*[-\pi,\pi] = \{f|f \text{ i vazhdueshëm në } [-\pi,\pi], f(-\pi) = f(\pi)\}. \tag{3}$$

Rrjedhimi 1.3.4 Sistemi i funksioneve

$$1, x, x^2, ..., x^n, ..., \tag{4}$$

është i plotë në kuptimin e përafrimit uniform për bashkësinë e të gjitha funksioneve të vazhdueshme të përkufizuara në çfarëdo segmenti.

Përkufizimi 1.3.9 *Sistemi* (1) *quhet i* **plotë për bashkësinë** $Q[a,b]$ **në kuptimin e përafrimit të mesëm kuadratik,** *nëse për çdo* $f \in Q[a,b]$ *dhe çdo* $\varepsilon > 0$ *ekziston numër i fundmë funksionesh* $g_{n_1}, g_{n_2}, ..., g_{n_k}$*, nga sistemi* (1) *dhe numrat realë* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$*, ashtu që:*

$$\sqrt{\int\limits_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n \lambda_k g_{n_k}(y)\right]^2 dx} < \varepsilon.$$

Pra, sistemi (1) është i plotë për $Q[a,b]$ në kuptimin e përafrimit të mesëm kuadratik nëse për çdo $f \in Q[a,b]$ dhe çdo $\varepsilon > 0$ ekziston kombinimi linear i një numri të fundmë funksionesh nga (1), i tillë që devijimi i mesëm kuadratik nga funksioni f është më i vogël se ε.

Teorema 1.3.7 *Sistemi i funksioneve trigonometrike (2) është i plotë në kuptimin e përafrimit të mesëm, për bashkësinë* $Q^*[-\pi,\pi]$((3)).

Vërtetimi. Le të jetë $f \in Q^*[-\pi,\pi]$. Sipas teoremës 1.3.5, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston polinomi trigonometrik $T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ ashtu që:

$$|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}, -\pi \le x \le \pi.$$

Këndej rrjedh se:

$$\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2\pi}} 2\pi = \varepsilon,$$

çka synuam të tregojmë.

Teorema 1.3.8 *Sistemi* (4) *është i plotë në kuptimin e përafrimit të mesëm kuadratik për bashkësinë e funksioneve të vazhdueshme të përkufizuara në çfarëdo segmenti.*

Vërtetimi. Le të jetë f funksion i vazhdueshëm në një segment $[a,b]$. Atëherë, sipas rrjedhimit 1.3.2, për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston polinomi P ashtu që:

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}\ ,\ a \le x \le b.$$

Këndej rrjedh se:

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx} < \varepsilon,$$

dhe me këtë teorema u vërtetua.

Në vazhdim do ta japim një rezultat i cili përgjithëson teoremën 1.3.7.

Me $Q_1[-\pi, \pi]$ shënojmë bashkësinë e funksioneve pjesë-pjesë të vazhdueshme në $[-\pi, \pi]$. Ka vend kjo teoremë:

Teorema 1.3.9 *Sistemi i funksioneve trigonometrike* (2) *është i plotë në kuptimin e përafrimit të mesëm kuadratik për bashkësinë* $Q_1[-\pi, \pi]$.

Vërtetimi. Le të jetë $f \in Q_1[-\pi, \pi]$ dhe $\varepsilon > 0$ numër i çfarëdoshëm. Tregojmë se ekziston polinomi trigonometrik $S(x)$ i tillë që

$$\rho(f, S) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S(x)]^2 dx} < \varepsilon.$$

Meqë $f \in Q_1[-\pi, \pi]$ atëherë ekziston konstantja $M > 0$ ashtu që $|f(x)| \le M$ në $[-\pi, \pi]$. Për thjeshtësi supozojmë se funksioni $f(x)$ ka këputje vetëm në pikën $x_0 \in (-\pi, \pi)$. Së pari tregojmë se mund të gjejmë funksionin e vazhdueshëm $g(x)$ të definuar në $[-\pi, \pi]$ të tillë që $g(-\pi) = g(\pi)$ dhe që të plotësoj pabarazinë

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Për këtë qëllim, duke marrë $\delta > 0$ mjaft të vogël, supozojmë se $g(x) = f(x)$ për $-\pi \le x \le x_0 - \delta$ dhe për $x_0 + \delta \le x \le \pi - \delta$. Funksionin $g(x)$ në segmentin $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e konsiderojmë linear, ndërsa në $[\pi - \delta, \pi]$ e definojmë të jetë po ashtu linear por që plotëson kushtet:$f(\pi - \delta) = g(\pi - \delta 0$, $g(\pi) = f(-\pi)$ (fig. 1.13).

Nga përkufizimi i funksionit $g(x)$ shohim se $g(-\pi) = g(\pi) = f(-\pi)$, ndërsa diferenca $f(x) - g(x)$ mund të jetë e ndryshme nga zero vetëm në intervalet $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dhe $(\pi - \delta, \pi)$. Prandaj:

$$\rho^2(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [f(x) - g(x)]^2 dx + \int_{\pi-\delta}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx \le$$

$$\leq \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [|f(x)|+|g(x)|]^2 dx + \int\limits_{\pi-\delta}^{\pi} [|f(x)|+|g(x)|]^2 dx \leq 4M^2\cdot 2\delta + 4M^2\cdot\delta = 12M^2\cdot\delta.$$

Duke e zgjedhur δ të tillë që $12M^2 \cdot \delta < \dfrac{\varepsilon^2}{4}$, fitojmë:

$$\rho^2(f,g) < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

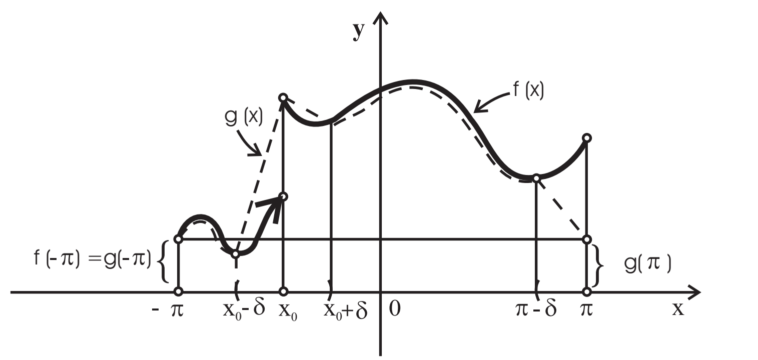


Fig. 1.13.

Tash, meqë $g(x)$ është funksion i vazhdueshëm në $[-\pi,\pi]$ dhe meqë $g(\pi) = g(-\pi)$, në saje të teoremës së Vajershtrasit (teorema 1.3.5), ekziston një polinom trigonometrik

$$T_{n_0}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n_0} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

i tillë që

$$|g(x) - T_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{8\pi}}, \ -\pi \leq x \leq \pi.$$

Rrjedhimisht

$$\rho^2(g, T_{n_0}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} [g(x) - T_{n_0}(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{8\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{7}$$

Duke marrë në pabarazimin elementarë:

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2,$$

$a = f(x) - g(x), \ b = g(x) - T_{n_0}(x)$, gjejmë:

$$[f(x) - T_{n_0}(x)]^2 \leq 2\{[f(x) - g(x)]^2 + [g(x) - T_{n_0}(x)]^2\}$$

Këndej dhe nga (6) e (7) gjejmë:

$$\rho^2(f, T_{n_0}) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_{n_0}(x)]^2 dx \le 2 \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx$$

$$+2 \int_{-\pi}^{\pi} [g(x) - T_{n_0}(x)]^2 dx < 2\frac{\varepsilon^2}{4} + 2\frac{\varepsilon^2}{4} = \varepsilon^2.$$

Nëse me $S_{n_0}(x)$ shënojmë polinomin Furie të funksionit $f(x)$, d.m.th.

$$S_{n_0}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n_0} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

atëherë, sipas teoremës së Besselit (teorema 1.3.4) kemi:

$$\rho(f, S_{n_0}) \le \rho(f, T_{n_0}),$$

rrjedhimisht:

$$\rho^2(f, S_{n_0}) < \varepsilon^2. \tag{8}$$

Pabarazimi (8), duke përdorur barazimin (8) të pikës 1.3.4, merr formën;

$$\rho^2(f, S_{n_0}) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n_0} (a_k^2 + b_k^2) \right\} < \varepsilon^2.$$

Për $n > n_0$ aq më parë vlen barazimi:

$$\rho^2(f, S_n) = \int_{-\pi}^{\pi} -\pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right\} < \varepsilon^2,$$

prej nga gjejmë:

$$\rho(f, S_n) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx} < \varepsilon,$$

dhe me këtë teorema u vërtetua.

Në vazhdim tregojmë se në kushtet të caktuara, pabarazimi i Besselit kthehet në barazim.

Teorema 1.3.10 *Le të jetë sistemi* (1) *ortogonal në* $[a, b]$ *dhe i plotë në kuptimin e përafrimit të mesëm kuadratik për bashkësinë* $Q_1[a, b]$. *Atëherë për çdo* $f \in Q_1[a, b]$ *vlen relacioni:*

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 ||g_n||^2, \tag{9}$$

ku a_n janë koeficientët Furie të funksionit f, në lidhje me sistemin (1).

Relacioni (9) quhet **barazimi i Parsevalit.**

Vërtetimi. Le të jetë f funksion i çfarëdoshëm nga bashkësia $Q_1[a,b]$ dhe $\varepsilon > 0$ po ashtu i çfarëdoshëm. Nga plotësia e sistemit (1), në kuptimin e përafrimit të mesëm kuadratik për bashkësinë $Q_1[a,b]$, rrjedh se: ekziston polinomi $P(x)$ i ndonjë rendi n në lidhje me sistemin (1) ashtu që:

$$\rho^2(f,P) = \int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx < \varepsilon. \tag{10}$$

Le të jetë $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k g_k(x)$ polinom në lidhje me sistemin (1), koeficientët e të cilit janë koeficientët Furie të funksionit $f(x)$, d.m.th.

$$a_k = \frac{1}{||g_k||^2} \int_a^b f(x) g_k(x) dx, \;\; k = 1, 2, ...$$

Atëherë, sipas teoremës se Besselit, kemi:

$$\int_a^b [f(x) - S(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx,$$

ose duke marrë parasysh relacionin (10),

$$\int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx < \varepsilon.$$

Këndej dhe nga fakti se vlen (relacioni (8) i pikës 1.3.4):

$$\int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \rho^2(f, S_n) = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 ||g_k||^2$$

gjejmë:

$$\int_a^b f^2(x) dx - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 ||g_n||^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 ||g_k||^2 < \varepsilon.$$

Meqë ky pabarazim vlen për çdo $\varepsilon > 0$, atëherë ana e majtë e tij është e barabartë me zero.

Teorema u vërtetua.

Rrjedhimi 1.3.5 Çdo funksion $f \in Q_1[a,b]$ mund të paraqitet si limit kur $n \to \infty$, në kuptimin e përafrimit të mesëm kuadratik, i vargut të shumave të pjesshme të serisë së vet Furie në lidhje me sistemin ortogonal (1) i cili është i plotë për $Q_1[a,b]$, d.m.th.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0.$$

Vërtetimi. Nga teorema 1.3.10. rrjedh se:

$$\lim_{n\to\infty} \rho^2(f, S_n) = \lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 ||g_k||^2 \right] = 0,$$

çka edhe synuam të tregojmë.

Duke vënë në dukje se ka vend edhe e kundërta e teoremës 1.3.10 konstatojmë se vlen ky rezultat:

Teorema 1.3.11 *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që sistemi ortogonal*

$$g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x), ...$$

në $[a,b]$ të jetë i plotë, në kuptimin e përafrimit të mesëm kuadratik, për $Q_1[a,b]$, është që për çdo funksion $f \in Q_1[a,b]$ të plotësohet barazimi i Parsevalit ((9)).

Vërejtje. Në rastin e sistemit trigonometrik (2), i cili është i plotë në $Q_1[-\pi,\pi]$, për çdo $f \in Q_1[-\pi,\pi]$ barazimi (9) merr trajtën:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \tag{11}$$

Shembulli 1.3.5 Duke përdorur barazimin e Parsevalit (11) të gjenden shumat e serive

(*a*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$; (*b*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

Zgjidhja: (a) Marrim funksionin $f(x) = \pi^2 - x^2$ në segmentin $[-\pi,\pi]$. Meqë $f \in Q^*[-\pi,\pi]$ dhe sistemi (2) është i plotë (teorema 1.3.7) për atë bashkësi funksionesh, atëherë f plotëson barazinë (11), ku a_0, a_n e b_n janë koeficientët Furie të funksionit f. Shohim se

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos nx dx = (-1)^{n-1} \frac{4}{n^2},\ n \in N,$$

$$b_n = 0, n \in N.$$

Prandaj barazimi (11) merr formën:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2)^2 dx = \frac{8}{9}\pi^4 + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4},$$

dhe duke marr parasysh se:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2)^2 dx = \frac{16}{15}\pi^4,$$

marrim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(b) Sipas pikës (a) dhe teoremës së Dirihles kemi:

$$\pi^2 - x^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$$

ose:

$$\pi^2 - x^2 - \frac{2}{3}\pi^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx. \tag{12}$$

Meqë:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

dhe seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergjon, atëherë seria që gjendet në anën e djathtë të barazimit (12) konvergjon uniformisht. Prandaj:

$$\int\limits_0^x (\frac{\pi^2}{3} - t^2) dt = 4 \int\limits_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nt\ dt = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \int\limits_0^x \cos nt\ dt =$$

$$= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin nx,$$

ose:

$$\frac{\pi^2}{3} x - \frac{x^3}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin nx.$$

Për funksionin $\varphi(x) = \frac{\pi^2}{3}x - \frac{x^3}{3}$ koeficientët Furie janë:

$$a_n = 0,\ n = 0, 1, 2, ...,$$

$$b_n = 4\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}, n = 1, 2, ...$$

Meqë $\varphi \in Q_1[-\pi, \pi]$ dhe sistemi (2) është ortogonal në $[-\pi, \pi]$ si dhe i plotë (në kuptimin e përafrimit të mesëm kuadratik) për bashkësinë $Q_1[-\pi, \pi]$, atëherë φ plotëson barazimin e Parsevalit, d.m.th.:

$$16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\frac{\pi^2 x}{3} - \frac{x^3}{3})^2 dx = \frac{6\pi^6}{405}.$$

Kështu fitojmë:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{1080}.$$

1.3.8 Detyra për ushtrime

1. Funksioni $f(x) = x$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ të zbërthehet në seri Furie $(f(x+2\pi) = f(x))$.

2. Le të jetë $f(x)$ funksioni periodik me periodën 2π i dhënë me:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{për } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{për } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

   Të zbërthehet funksioni i dhënë në seri Furie e pastaj të paraqitet grafikisht shumat e pjesshme S_1, S_2 dhe S_3 të serisë së fituar.

3. Le të jetë $f(x)$ funksioni periodik me periodën 2π i cili në intervalin $(-\pi, \pi)$ është i dhënë me barazimin $f(x) = e^x$.

   (a) Të zbërthehet funksioni $f(x)$ në serinë Furie.

   (b) Me ndihmën e zbërthimit të fituar të njehsohet shuma e këtyre serive numerike

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}; \qquad (2) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}:$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}; \qquad (4) \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2-1}.$$

4. (a) Të tregohet se:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{2\pi}{n^2}.$$

(b) Duke e shfrytëzuar barazimin e më sipërm të zbërthehet funksioni $f(x) = x^2 \sin x \ \ (-\pi \le x \le \pi)$ në seri Furie.

(c) Duke shfrytëzuar rezultatin e gjetur në (b) të vërtetohet barazimi:

$$\frac{\pi}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)^2}{(2n-1)^2(2n+1)^2}.$$

5. Të zbërthehet në seri Furie funksioni: $f(x) = \begin{cases} x, \text{ nëse } 0 \le x \le 1, \\ 1, \text{ nëse } 1 < x < 2, \\ 8 - x, \text{ nëse } 2 \le x \le 3, \end{cases}$ i cili është periodik me periodë $T = 3$.

6. Funksioni $f(x)$ është antiperiodik me periodë π d.m.th. $f(x+\pi) = -f(x)$. Çfarë veti ka seria Furie e atij funksioni në intervalin $(-\pi, \pi)$?

7. Të zbërthehet në intervalin $(0, \pi)$ funksioni $f(x) = e^{ax}$:

   (a) sipas kosinuseve;

   (b) sipas sinuseve.

8. Të zbërthehet në intervalin $(0, \pi)$ funksioni $f(x) = x^2$:

   (a) sipas kosinuseve;

   (b) sipas sinuseve.

   Duke i shfrytëzuar ato zbërthime të llogaritet shuma e serive:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

9. Është dhënë funksioni $f(x) = x \sin x, -\pi \le x \le \pi, f(x+2\pi) = f(x)$.

   (a) Të zbërthehet ai funksion në seri Furie në$[-\pi, \pi]$.

   (b) Duke shfrytëzuar atë zbërthim të gjendet shuma e serisë:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1}.$$

10. Të tregohet se për $0 < x < \pi$ vlen barazimi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos2x}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\text{sin}x$$

e pastaj të gjendet shuma e serisë:

$$-\frac{1}{3}+\frac{1}{15}-\frac{1}{35}+...+\frac{(-1)^n}{(2^n)^2-1}+....$$

11. Të zbërthehet në seri Furie funksioni:

$$f(x)=\begin{cases}0, -2\leq x\leq -1\\ k, -1<x<1,\\ 0, 1<x\leq 2,\end{cases}\quad f(x+4)=f(x).$$

12. Të zbërthehet në seri Furie funksioni:

$$f(x)=\begin{cases}1, 0\leq x<1,\\ -x, 1\leq x\leq 2.\end{cases}$$

(a) sipas kosinuseve;

(b) sipas sinusieve.

13. Është dhënë vargu $\{\cos nx\}$.

(a) Të tregohet se asnjë term i këtij vargun nuk lejon përafrim uniform me saktësi të çfarëdoshme në segmentin $[0,\pi]$ me kombinim linear të termave të tjera të këtij vargu.

(b) A vlen pohimi i mësipërm në segmentin $[0,a]$, $0<a<\pi$?

2

FUNKSIONET ME m NDRYSHORE

Dihet se te funksionet $x \mapsto f(x)$ numri $f(x)$ përkufizohet me numrin e dhënë x nga fusha e përkufizimit të atij funksioni. Shumë madhësi varen jo nga një, por nga më shumë faktorë. Në qoftë se vetë madhësia si dhe faktorët nga të cilët varet ajo mund të karakterizohen me ndonjë numër atëherë varësia kthehet në faktin që sistemit të numrave $(x_1, x_2, ..., x_m)$ secili nga të cilët përshkruan faktorin përkatës, i shoqërohet vlera $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ e cila përcakton madhësinë që përkufizojnë faktorët në fjalë.

P.sh. syprina S e drejtkëndëshit është e barabartë me prodhimin e gjatësive të dy brinjëve a e b ; vëllimi i sasisë së gazit llogaritet me formulën $V = R \cdot \frac{mT}{p}$, ku R është konstante, m - masa, T - temperatura absolute dhe p - trysnia (shtypja) e gazit. Kështu madhësia S varet nga çifti (a, b) ndërsa V varet nga treshja (a, T, p) e numrave të sipërpërmendur. Në këtë rast thuhet se S është funksion i dy ndryshoreve a e b, ndërsa V është funksion i tri ndryshoreve m, t dhe p.

Në këtë kapitull do të shqyrtohet këto lloje të vartësive, pra funksionet me shumë ndryshore. Së pari shqyrtojmë fushën e përcaktimit të këtyre funksioneve.

2.1 HAPËSIRA $\mathbf{R}^m$. DISA NËNBASHKËSI TË RËNDËSISHME TË HAPËSIRËS $\mathbf{R}^m$

2.1.1 Bashkësia $\mathbf{R}^m$ dhe largesa në të

Me $\mathbf{R}^m$ shënojmë bashkësinë e të gjitha sistemeve të renditura $\boldsymbol{x}$=$(x_1, x_2, ..., x_m)$ të m numrave realë të çfarëdoshëm, d.m.th:

$$\mathbf{R}^m = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) |\, x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, ..., m\}.$$

Çdo sistem i tillë m-numrash realë quhet **pikë** e kësaj bashkësie, kurse numrat $x_1, x_2, ..., x_m$ **koordinata** të kësaj pike. Fakti që pika P i ka koordinatat $x_1, x_2, ..., x_m$ simbolikisht shënohet me $P(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Në vazhdim shohim se si zgjerohet koncepti i largesës së pikave në drejtëz (rrafsh, hapësirë) në bashkësinë $\mathbf{R}^m (m > 3)$. Le të jenë dhënë pikat $\boldsymbol{x}_1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1), \boldsymbol{x}_2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2) \in \mathbf{R}^m$. Atëherë **largesa (distanca)** në mes të pikave $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ të cilën e shënojmë me $d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$, përkufizohet me formulën:

$$d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i^2 - x_i^1)^2}\,. \tag{1}$$

Funksioni:

$$d : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R},$$

i përkufizuar me formulën (1), ka këto veti:

(a) $d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \geq 0$;

(b) $(d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0) \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2)$;

(c) $d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = d(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)$ (simetria);

(ç) $d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) \leq d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + d(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ (relacioni i trekëndëshit).

Vetitë (a), (b) e (c) janë të qarta. Tregojmë (ç).

Së pari tregojmë se për sistemet e numrave realë $a^1, a^2, ..., a^m$ dhe $b^1, b^2, ...,$ b^m, ka vend pabarazimi:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (a^i + b^i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (a^i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (b^i)^2}\,. \tag{2}$$

Duke ngritur në katror anëpëranë pabarazimin (2) gjejmë:

$$\sum_{i=1}^{m} (a^i + b^i)^2 \leq \sum_{i+1}^{m} (a^i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (a^i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (b^i)^2} + \sum_{i+1}^{m} (b^i)^2,$$

ose:

$$\sum_{i+1}^{m} (a^i)(b^i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (a^i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (b^i)^2}. \tag{3}$$

Vërtetojmë pabarazimin (3).

Meqenëse ana e djathtë e barazimit:

$$\sum_{i=1}^{m} (a^i x + b^i)^2 = x^2 \sum_{i=1}^{m} (a^i)^2 + 2x \sum_{i=1}^{m} a^i b^i + \sum_{i=1}^{m} (b^i)^2$$

nuk merr vlera negative, atëherë deskriminanta e saj është jopozitive. Pra:

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} a^i b^i\Big)^2 - \sum_{i=1}^{m}(a^i)^2 \sum_{i=1}^{m}(b^i)^2 \leq 0,$$

prej nga fitohet pabarazimi (3), d.m.th. (2).

Tash në pabarazimin (2) vëmë: $a^i = x_i^2 - x_i^1, b^i = x_i^3 - x_i^2$ dhe fitojmë:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i^3 - x_i^1)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i^2 - x_i^1)} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i^3 - x_i^2)^2}$$

ose:

$$d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) \leq d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + d(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3).$$

Funksionin e përkufizuar në çiftet $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ të pikave të ndonjë bashkësie X i cili ka vetitë (a)-(d) e quajmë **metrikë** ose **distancë** në X.

Bashkësinë X bashkë me metrikën e fiksuar në të d e quajmë **hapësirë metrike** dhe e shënojmë me (X, d) ose vetëm X.

Kështu, $\mathbf{R}^m$ me metrikën $d : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ të përkufizuar me (1) qenka hapësirë metrike. Njohuri më të hollësishme për hapësirat metrike jepen në kurse të tjera të matematikës. Në shqyrtimet e mëtejme, për ne mjafton hapësira $\mathbf{R}^m$.

Nga relacioni (1), për $i = 1, 2, ..., m$, shohim se:

$$|x_i^2 - x_i^1| \leq d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i^2 - x_i^1| \tag{4}$$

d.m.th. largesa në mes të pikave $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^m$ është mjaft e vogël atëherë kur largesa në mes të koordinatave përkatëse është mjaft e vogël.

Lehtë vërehet se hapësira $\mathbf{R}^m$ për $m = 1, 2, 3$, nuk është tjetër pos drejtëza, rrafshi e hapësira e zakonshme euklidiane.

2.1.2 Bashkësitë e hapura dhe të mbyllura në $\mathbf{R}^m$

Përkufizimi 2.1.1 *Bashkësinë:*

$$B(\boldsymbol{a}; \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m |\, d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < \delta\}$$

ku $\delta > 0$ e quajmë **rruzull i hapur** *me qendër në pikën $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m$ e me rreze δ ose edhe* **δ-rrethinë** *të pikës $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m$.*

Lehtë shihet se kur $m = 1$, $B(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$, d.m.th. intervali i hapur me qendër në pikën $a \in \mathbf{R}$ e rrezes δ, kurse për $m = 2$ fitojmë qarkun e hapur me qendër në pikën $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^2$ e rreze δ.

Përkufizimi 2.1.1′ *Bashkësinë e të gjitha pikave $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbf{R}^m$ koordinatat e të cilave plotësojnë relacionet*

$$|x_1 - x_1^0| < d_1, |x_2 - x_2^0| < d_2, |x_m - x_m^0| < d_m,$$

ku $d_i > 0$, $i = 1, ..., m$, e quajmë **rrethinë drejtkëndëshe** *të pikës $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, ..., x_m^0) \in \mathbf{R}^m$.*

Pohimi 2.1.1 *Çdo δ-rrethinë e pikës $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^m$ përmban një rrethinë drejtkëndëshe të asaj pike dhe anasjelltas.*

Vërtetimi. Le të jetë dhënë një δ-rrethinë e pikës $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^m$. Marrim $d_1 = d_2 = ... = d_m = \frac{\delta}{\sqrt{m}}$. Atëherë, rrethina drejtkëndëshe e pikës $\boldsymbol{x}_0$ me numrat $d_1, d_2, ..., d_m$ të zgjedhur si më sipër, do të përmbahet në $\delta-$ rrethinën e pikës $\boldsymbol{x}_0$,

Le të jetë U rrethinë drejtkëndëshe e pikës $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^m$. Vëmë $\delta = \min\{d_1, ..., d_m\}$. Atëherë δ-rrethina e pikës x_0 përmbahet në U. Pohimi u vërtetua.

Këndej rrjedh se, sipas rastit do të përdorim rrethinën drejtkëndëshe ose δ-rrethinën e pikës $x_0 \in \mathbf{R}^m$ sepse kjo nuk do të ndikojë në rezultat.

Përkufizimi 2.1.2 *Bashkësia $G \subset \mathbf{R}^m$ quhet* **e hapur në $\mathbf{R^m}$**, *nëse për çdo $\boldsymbol{x} \in G$ gjendet rruzulli $B(\boldsymbol{x}; \delta)$ i tillë që $B(\boldsymbol{x}; \delta) \subset G$.*

Shembuj 2.1.1 1. $\mathbf{R}^m$ është bashkësi e hapur.

2. Bashkësia boshe $\emptyset$ nuk përmban asnjë pikë, prandaj mund të përfundohet se plotësohet përkufizimi 2.1.3, d.m.th. $\emptyset$ është bashkësi e hapur në $\mathbf{R}^m$.

3. Rruzulli $B(\boldsymbol{a}; r)$ është bashkësi e hapur në $\mathbf{R}^m$.

Me të vërtetë, nëse $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}; r)$. d.m.th. $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < r$, atëherë për $0 < \delta < r - d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ kemi $B(\boldsymbol{x}; \delta) \subset B(\boldsymbol{a}; r)$ sepse (shih fig 3.1), $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \Rightarrow d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \delta \Rightarrow d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) + d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) + \delta < d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) + r - d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = r \Rightarrow \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{a}, r)$.

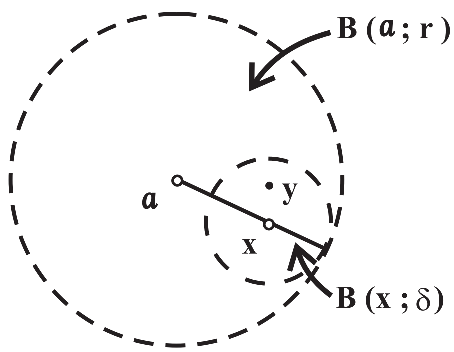


Fig. 2.1.

Përkufizimi 2.1.3 *Bashkësia $F \subset \mathbf{R}^m$ quhet* **e mbyllur** *në $\mathbf{R}^m$, nëse komplementi i saj në $\mathbf{R}^m$, $G = \mathbf{R}^m \backslash F$ është bashkësi e hapur në $\mathbf{R}^m$.*

Shembulli 2.1.1 Bashkësia $B[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{x}] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m | \, d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \leq r\}, r > 0$, është e mbyllur në $\mathbf{R}^m$.

Mjafton të tregojmë se bashkësia:

$$G = \mathbf{R}^m \subset B[\boldsymbol{a}; r] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m | \, d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) > r\}$$

është e hapur në $\mathbf{R}^m$. Kjo tregohet ngjashëm si në shembullin 2.1.1. 3.

Bashkësinë $B[\boldsymbol{a}, r]$ e quajmë **rruzull i mbyllur** me qendër në pikën **a** dhe me rreze r.

Teorema 2.1.1 *a) Unioni* $\bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ *i bashkësive* G_α *të hapura në* $\mathbf{R}^m$*, ku* $G_\alpha \in \{G_\alpha |\, \alpha \in A\}$ *është e hapur në* $\mathbf{R}^m$.

b) Prerja $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ *e një numri të fundëm të bashkësive të hapura në* $\mathbf{R}^m$ *është bashkësi e hapur në* $\mathbf{R}^m$.

a′) Prerja $\bigcap\limits_{\alpha\in A} F_\alpha$ *e bashkësive të mbyllura* F_α *në* $\mathbf{R}^m$ *të një familjeje* $\{F_\alpha |\, \alpha \in A\}$ *është bashkësi e mbyllur në* $\mathbf{R}^m$.

b′) Unioni $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ *i një numri të fundmë bashkësish* F_i *të mbyllura në* $\mathbf{R}^m$ *është bashkësi e mbyllur në* $\mathbf{R}^m$.

Vërtetimi. a) Nëse $\boldsymbol{x} \in \bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$, atëherë gjendet indeksi $\alpha_0 \in A$ ashtu që $\boldsymbol{x} \in G_{\alpha_0}$. Prandaj ekziston $\delta-$ rrethina $B(\boldsymbol{x};\delta)$ e pikës $\mathbf{x}$ me vetinë $B(\boldsymbol{x};\delta) \subset G_{\alpha_0}$. Këndej, $B(\boldsymbol{x};\delta) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$.

b) Le të jetë $\boldsymbol{x} \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$. Atëherë $\boldsymbol{x} \in G_i$, për $i = 1, 2, 3, ..., n$. Le të jenë $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ numra pozitiv të tillë që $B(\boldsymbol{x};\delta_i) \subset G_i$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$. vëmë $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$. Shohim se $\delta > 0$ dhe se $B(\boldsymbol{x};\delta) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$.

a′) Mjafton të tregojmë se komplementi në $\mathbf{R}^m$ i bashkësisë $\bigcap\limits_{\alpha\in A} F_\alpha$ është bashkësi e hapur në $\mathbf{R}^m$. Kemi:

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha\in A} (F_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha,$$

ku $G_\alpha = (F_\alpha)^c$ është bashkësi e hapur në $\mathbf{R}^m$. Tash a’) rrjedh nga a).

Në mënyrë analoge nga b) gjejmë:

b′) $\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i\Big)^c = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (F_i)^c = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$.

Teorema u vërtetua.

Përkufizimi 2.1.4 *Bashkësinë*

$$S(\boldsymbol{a};r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m |\, d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = r\}, \quad r > 0$$

e quajmë **sferë** *me qendër në* $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m$ *dhe rreze* r.

Shohim se:

$$\complement_{\mathbf{R}^m} S(\boldsymbol{a};r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m |\, d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) > r\} \cup B(\boldsymbol{a};r),$$

dhe meqë bashkësitë në anën e djathtë të barazimit të mësipërm janë të hapura, konstatojmë se bashkësia në anën e majtë është e hapur në $\mathbf{R}^m$. Prandaj S($\mathbf{a}$;r) është bashkësi e mbyllur në $\mathbf{R}^m$.

Përkufizimi 2.1.5 *Le të jetë $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m$. Bashkësia e hapur në $\mathbf{R}^m$ e cila e përmban pikën $\boldsymbol{a}$ quhet* **rrethinë e pikës $\boldsymbol{a}$** *në $\mathbf{R}^m$.*

Nga shembulli 2.1.1. 3, shohim se $\delta-$rrethina e pikës $\boldsymbol{a}$ është rrethinë e saj.

Përkufizimi 2.1.6 *Thuhet se pika $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m$ është:*

pikë e brendshme *e bashkësisë E, $E \subset \mathbf{R^m}$, nëse ajo së bashku me ndonjë rrethinë të saj gjendet në E;*

pikë e jashtme *e bashkësisë E, nëse është pikë e brendshme e komplementit të $E-$ së në $\mathbf{R}^m$;*

pikë kufiri (konturi) *e bashkësisë E, nëse ajo nuk është pikë e brendshme e as e jashtme e bashkësisë E, d.m.th. çdo rrethinë e saj përmban pika të brendshme dhe pika të jashtme të asaj bashkësie.*

Bashkësia e pikave të kufirit të bashkësisë E quhet **kufi (kontur)** e asaj bashkësie dhe shënohet me ∂E ose $Bd\,E$ (boundary-kufiri).

Shembulli 2.1.2 Sfera $S(\boldsymbol{a};r)$, $r > 0$, është kufi i bashkësive $B(\boldsymbol{a};r)$ e komplementit të bashkësisë $B[\boldsymbol{a};r)$.

Shembulli 2.1.3 Për bashkësinë $\mathbf{R}^m \backslash \{\boldsymbol{a}\}$ e cila nuk ka pika të jashtme, pika $\mathbf{a}$ është pikë kufiri.

Shembulli 2.1.4 Të gjitha pikat e sferës $S(\boldsymbol{a};r)$ janë pika kufiri të asaj bashkësije. Bashkësia $S(\boldsymbol{a};r)$ si nënbashkësi e $\mathbf{R}^m$, nuk ka pika të brendshme.

Përkufizimi 2.1.7 *Thuhet se pika $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R^m}$ është* **pikë grumbullimi** *ose* **pikë limite** *e bashkësisë $E \subset \mathbf{R^m}$, në qoftë se cilado rrethinë e saj përmban pikë të bashkësisë E të ndryshme nga $\boldsymbol{a}$, d.m.th. nëse $E \cap (O(\boldsymbol{a}) \setminus \{\boldsymbol{a}\}) \neq \emptyset$, ku $O(\boldsymbol{a})$ është rrethinë e çfarëdoshme e pikës $\boldsymbol{a}$.*

Vërejmë se në qoftë se $\boldsymbol{a}$ është pikë grumbullimi e bashkësisë bashkësisë $E \subset \mathbf{R^m}$, atëherë për çdo rrethinë $O(\boldsymbol{a})$ të pikës $\mathbf{a}$ prerja $E \cap O(\boldsymbol{a})$ është bashkësi e pafundme (trego!).

Përkufizimi 2.1.8 *Unioni i bashkësisë E dhe i të gjitha pikave të saj të grumbullimit quhet* **mbyllje** *e bashkësisë E dhe shënohet me $\overline{E}$.*

Shembulli 2.1.5 $\overline{S(\boldsymbol{a};r)} = S(\boldsymbol{a};r)$.

Rezultati në vijim e sqaron shembullin 8.

Teorema 2.1.2 *(F e mbyllur në $\mathbf{R}^m$) $\Longleftrightarrow$ ($F = \overline{F}$ në $\mathbf{R}^m$).*

Me fjalë të tjera, F është e mbyllur në $\mathbf{R}^m$ atëherë dhe vetëm atëherë kur ajo përmban të gjitha pikat e veta të grumbullimit.

Vërtetimi. Le të jetë F bashkësi e mbyllur në $\mathbf{R}^m, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m$ dhe $\mathbf{x} \notin F$. Mjafton të tregojmë se $\mathbf{x}$ nuk është pikë grumbullimi e bashkësisë F.

Bashkësia e hapur $G = \mathbf{R}^m \backslash F$ është rrethinë e pikës $\boldsymbol{x}$ e cila nuk përmban pika të bashkësisë F, d.m.th. $F \bigcap G = \emptyset$. Këndej shohim se pika $\mathbf{x}$ nuk është pikë grumbullimi e bashkësisë F.

Anasjelltas, supozojmë se $F = \overline{F}$. Tregojmë se bashkësia $G = \mathbf{R}^m \backslash F$ është e hapur në $\mathbf{R}^m$. Nëse $\boldsymbol{x} \in G$ atëherë $\boldsymbol{x} \notin \overline{F}$, d.m.th. $\boldsymbol{x}$ nuk është pikë grumbullimi e bashkësisë F. Këndej rrjedh se gjendet rrethinë e tillë e pikës $\boldsymbol{x}$ në të cilën gjendet numër i fundmë pikash: $\boldsymbol{x_1, x_2, ..., x_n}$, të bashkësisë F. Meqë $\boldsymbol{x} \notin \overline{F}$ atëherë mund të konstruktohen rrethinat p.sh. rruzullore:

$$O_1(\boldsymbol{x}), O_2(\boldsymbol{x}), ..., O_n(\boldsymbol{x})$$

të pikës $\boldsymbol{x}$ të tilla që $\boldsymbol{x}_i \notin O_i(\boldsymbol{x}),\ i = 1, 2, ..., n$. Atëherë $O(\boldsymbol{x}) = \bigcap_{i=1}^{n} O_i(\boldsymbol{x})$ është rrethinë e hapur e pikës $\boldsymbol{x}$ e cila nuk përmban pika të bashkësisë F, d.m.th. $O(\boldsymbol{x}) \subset \mathbf{R}^m \backslash F$. Prandaj, $\mathbf{R}^m \backslash F = \mathbf{R}^m \backslash \overline{F}$ është e hapur në $\mathbf{R}^m$, që don të thotë se F është e mbyllur në $\mathbf{R}^m$.

Përkufizimi 2.1.9 *Bashkësia $E \subset \mathbf{R}^m$ quhet* **e lidhur** *nëse ajo nuk është union i dy bashkësive të hapura që nuk priten, ose union i dy bashkësive të mbyllura që nuk priten, ose nëse në E nuk ekzistojnë njëkohësisht nënbashkësi të hapura dhe të mbyllura përveç E dhe bashkësisë së zbrazët $\emptyset$.*

Përkufizimet e dhëna më sipër janë ekuivalente sepse komplementi i dy bashkësive të hapura është bashkësi e mbyllur si dhe komplementi i dy bashkësive të mbyllura është bashkësi e hapur.

Shembulli 2.1.6 Bashkësitë $[a, b],\ [a, b),\ (a, b],\ (a, b)$, ku $a, b \in R$, janë nënbashkësi të lidhura të bashkësisë $\mathbf{R}$.

Përkufizimi 2.1.10 *Bashkësia e hapur dhe e lidhur quhet* **zonë.**

Përkufizimi 2.1.11 *Zona bashkë me kufirin e saj quhet* **zonë e mbyllur.**

2.1.3 Bashkësitë kompakte në R^m

Përkufizimi 2.1.12 *Thuhet se familja $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ është* **mbulojë** *për bashkësinë X nëse $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Mbuloja është e* **fundme (numërueshme)** *nëse A është e fundme (numrëueshme).*

Përkufizimi 2.1.13 *Bashkësia $K \subset \mathbf{R}^m$ quhet* **kompakte,** *nëse nga cilado mbulojë e K, me bashkësi të hapura në $\mathbf{R}^m$ mund të nxirret mbulojë e fundme.*

Shembulli 2.1.7 Segmenti $I = [a, b]$ është bashkësi kompakte.

Supozojmë të kundërtën, d.m.th. se I nuk është kompakte. Atëherë, ekziston mbuloja $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in A\}, U_\alpha$ e hapur në $\mathbf{R}$, e cila nuk përmban nënmbulojë të fundme për I. Le të jetë $c=\frac{a+b}{2}$. Njëri nga segmentet $[a,c]$, $[c,b]$ nuk mund të mbulohet me numër të fundëm të $\mathcal{U}$; Le të jetë ai I_1. Gjatësia e segmentit I_1 është $\frac{b-a}{2}$ dhe $I\supset I_1$. Ndajmë segmentin I_1 në dy pjesë të barabarta dhe e vazhdojmë atë ecuri. Në këtë mënyrë marrim vargun e segmenteve $\{I_n\}$ i cili ka këto veti:

(a) $I\supset I_1\supset I_2\supset ...$;

(b) I_n nuk mund të mbulohet me numër të fundmë aëntarësh të $\mathcal{U}$;

(c) gjatësia e segmentit I_n është $\frac{b-a}{2^n}$, d.m.th. për $x,y\in I_n$ vlen $|x-y|\leq\frac{b-a}{2^n}$.

Lehtë shihet se $\{I_n\}$ është varg i segmenteve që shtrëngohen dhe në bazë të teoremës së Kantorit rrjedh ekzistenca e pikës z e cila i takon të gjithë segmenteve I_n. Këndej rrjedh se ekziston $\alpha\in A$ ashtu që $z\in U_\alpha$. Meqë U_α është bashkësi e hapur në $\mathbf{R}$, ekziston $r>0$ ashtu që rruzulli $B(z;r)$ me qendër në z e rreze r përmbahet në U_α. Zgjedhim numrin natyral n_0 ashtu që të vlej $\frac{b-a}{2^{n_0}}<r$ (ai numër ekziston sepse $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$). Atëherë $I_{n_0}\subset B(a;r)\subset U_\alpha$, e kjo është në kundërshtim me (b). Prandaj $I=[a,b]$ është bashkësi kompakte.

Teorema 2.1.3 *Nëse $K\subset\mathbf{R}^m$ është kompakte atëherë:*

(a) K është e mbyllur në $\mathbf{R}^m$;

(b) çdo bashkësi e mbyllur në $\mathbf{R}^m$ e cila përmbahet në K është po ashtu kompakte.

Vërtetimi. (a) Sipas teoremës 2.1.2. mjafton të tregojmë se çdo pikë $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^m$ e cila është pikë grumbullimi e bashkësisë K i takon bashkësisë K.

Le të jetë $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^m$ pikë grumbullimi e bashkësisë K. Supozojmë se $\boldsymbol{a}\notin K$. Për çdo pikë $\boldsymbol{x}\in K$ konstruktojmë rrethinën e tillë $G(\boldsymbol{x})$ për të cilën ekziston rrethina $O_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a})$ e tillë që $O_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a})\cap G(\boldsymbol{x})=\emptyset$. Për këtë, marrim një pikë të çfarëdoshme $\boldsymbol{x}\in K$ dhe le të jetë ε largesa mes atyre piave, d.m.th. $d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})=\varepsilon$. Vëmë $B(\boldsymbol{x},\frac{\varepsilon}{4})=O_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a})$, $B(\boldsymbol{a},\frac{\varepsilon}{4})=G(\boldsymbol{x})$. Tash, qartazi $O_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a})\cap G(\boldsymbol{x})=\emptyset$.

Familja $\mathcal{U}=\{G(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\in K\}$ është mbulojë e hapur e bashkësisë kompakte K. Le të jetë:

$$\{G(\boldsymbol{x}_1),G(\boldsymbol{x}_2),...,G(\boldsymbol{x}_n)\}$$

nënfamilje e $\mathcal{U}$ e cila mbulon bashkësinë K. Nëse $O_i(\boldsymbol{a})$, $i=1,2,...,n$, është rrethinë e tillë e pikës $\boldsymbol{a}$ që $G(\boldsymbol{x}_i)\cap O_i(\boldsymbol{a})=\emptyset$, për çdo $i=1,2,...,n$, atëherë:

$$O(\boldsymbol{a})=\bigcap_{i=1}^{n}O_i(\boldsymbol{a})$$

është po ashtu rrethinë e pikës $\boldsymbol{a}$ e cila ka vetinë $F\cap O(\boldsymbol{a})=\emptyset$. Kjo tregon se $\boldsymbol{a}$ nuk mund të jetë pikë grumbullimi e bashkësisë K, që është në kundërshtim me supozimin. Prandaj $\boldsymbol{a}\in K$, gjë që deshëm të tregojmë.

(b) Le të jetë F e mbyllur në $\mathbf{R}^m$ dhe $F\subset K$. Le të jetë $\{U_\alpha|\alpha\in A\}$ mbulojë e bashkësisë F me bashkësi të hapura në $\mathbf{R}^m$. Atëherë:

$$\mathcal{U}=\{U_\alpha|\,\alpha\in A\}\cup(\mathbf{R}^m\backslash F)$$

është mbulojë e hapur e $\mathbf{R}^m$, pra edhe e bashkësisë K. Meqë K është kompakte ekziston nënmbuloja e fundme $\mathcal{U}'$ e mbulojës $\mathcal{U}$ për atë bashkësi. Kjo po ashtu mbulon edhe bashkësinë F. Meqë $(\mathbf{R}^m \backslash F) \cap F = \emptyset$, nëse $\mathbf{R}^m \backslash F$ bën pjesë në mbulojën e fundme $\mathcal{U}'$, atëherë edhe me largimin e saj $\mathcal{U}'$ mbetet mbulojë e fundme e bashkësisë F. Këndej rrjedh se F është kompakte.

Përkufizimi 2.1.14 **Diametër** *i bashkësisë* $E \subset \mathbf{R}^m$ *quhet madhësia:*

$$d(E) = \sup_{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E} \{d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\}.$$

Përkufizimi 2.1.15 *Bashkësia* E *quhet e* **kufizuar** *nëse diametri i saj është i fundmë.*

Teorema 2.1.4 *Në qoftë se* $K \subset \mathbf{R}^m$ *është bashkësi kompakte, atëherë ajo është nënbashkësi e kufizuar e* $\mathbf{R}^m$.

Vërtetimi. Supozojmë se K nuk është e kufizuar në $\mathbf{R}^m$. Le të jetë $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m$ pikë e çfarëdoshme. Familja:

$$\mathcal{U} = \{B(\boldsymbol{a}; m) | m = 1, 2, ...\}$$

është mbulojë e hapur e bashkësisë $\mathbf{R}^m$, pra edhe e bashkësisë K. Meqë K nuk është e kufizuar në $\mathbf{R}^m$, nuk mund të nxirret nënmbulojë e fundme e K nga $\mathcal{U}$. Mirëpo kjo është në kundërshtim me supozimin se K është kompakte.

Teorema 2.1.5 *Bashkësia* $K \subset \mathbf{R}^m$ *është kompakte atëherë dhe vetëm atëherë kur* K *është e mbyllur dhe e kufizuar.*

Vërtetimi. Kushti i nevojshëm rrjedh nga teoremat 2.1.3. e 2.1.4.

Kushti i mjaftueshëm. Meqë K është e kufizuar atëherë ekziston paralelepipedi i mbyllur $m-$ dimenzional:

$$I = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m | \, a_i \leq x_i \leq b_i, \; i = 1, 2, ..., m\},$$

i cili e përmban bashkësinë K. Bashkësia I është kompakte (trego!). Tash, sipas teoremës 2.1.3, rrjedh se K është bashkësi kompakte.

Teorema u vërtetua.

Përkufizimi 2.1.16 *Le të jenë* $E_1, \; E_2 \subset \mathbf{R}^m$. **Distancë** $d(E_1, \; E_2)$ *në mes të bashkësive* E_1 *e* E_2 *quhet madhësia:*

$$d(E_1, \; E_2) = \inf\{d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) | \boldsymbol{x}_1 \in E_1, \boldsymbol{x}_2 \in E_2\}.$$

Nga përkufizimi 2.1.16. rrjedh se nëse $\boldsymbol{a} \in E_1$, atëherë:

$$d(\boldsymbol{a}, \; E_2) = \inf\{d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_2) | \, \boldsymbol{x}_2 \in E_2\}.$$

Është e qartë se kur bashkësitë E_1 e E_2 kanë të paktën një pikë të përbashkët, largesa midis tyre është zero. Largesa mund të jetë zero edhe kur $E_1 \cap E_2 = \emptyset$; p.sh. qarqet e hapur që kufizohen me dy rrathë tangjent së jashtmi. Megjithatë, një gjë e tillë nuk mund të ndodhë kur bashkësitë janë të mbyllura dhe të paktën njëra prej tyre është e kufizuar.

Teorema 2.1.6 *Largesa midis dy bashkësive të mbyllura $D, D' \subset \mathbf{R}^m$, prej të cilave të paktën njëra është e kufizuar dhe që $D \cap D' = \emptyset$, është një numër pozitiv.*

Vërtetimi. Le të jetë D e kufizuar dhe $\boldsymbol{a} \in D$ pikë e çfarëdoshme. Atëherë $\boldsymbol{a} \notin D'$. Tregojmë së pari se $d(\boldsymbol{a}, D') > 0$. Supozojmë të kundërtën. Atëherë, në bazë të përkufizimit të infimumit, në çdo $\delta-$ rrethinë të pikës $\boldsymbol{a}$ gjenden pika të bashkësisë D', d.m.th. mund të ndodhin këto dy raste:

(a) pika $\boldsymbol{a}$ është pikë e brendshme e zonës D', ose

(b) pika $\boldsymbol{a}$ është pikë e konturi e zonës D'.

Sido që të jetë, meqë D' është e mbyllur, shohim se $\boldsymbol{a} \in D'$ që është në kundërshtim me faktin se $\boldsymbol{a} \notin D'$. Këndej rrjedh se $d(\boldsymbol{a}, D') > 0$, si dhe ekzistenca e rruzullit $B(\boldsymbol{a}; \delta)$ që ka vetinë $B(\boldsymbol{a}; \delta) \cap D' = \emptyset$. Familja $\mathcal{U} = \{B(\boldsymbol{x}; \frac{\delta_{\boldsymbol{x}}}{2}) | \boldsymbol{x} \in D\}$ është mbulojë e hapur e bashkësisë D. Meqë D është kompakte, atëherë nga $\mathcal{U}$ mund të nxirret një nënmbulojë e fundme e D. Le të jetë ajo:

$$\mathcal{U}' = \{B(\boldsymbol{x}_i; \frac{\delta_{\boldsymbol{x}_i}}{2}) | i = 1, 2, ..., k\}.$$

Shënojmë me $\delta_0 = \min\{\frac{\delta_{\boldsymbol{x}_i}}{2} |\ i = 1, 2, ..., k\}$. Është e qartë se se $\delta_0 > 0$. Mbetet të tregojmë se $d(D, D') \geq \delta_0$.

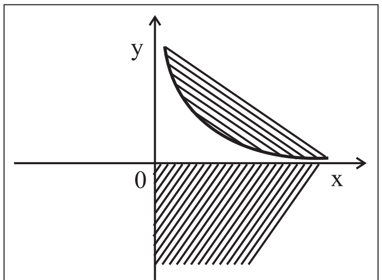


Fig. 2.2.

Le të jenë $\boldsymbol{b} \in D, \boldsymbol{c} \in D'$ dy pika të çfarëdoshme të bashkësisë D, përkatësisht D'. Meqë $D = \bigcup\limits_{i=1}^{k} B(\boldsymbol{x}_i; \frac{\delta_{\boldsymbol{x}_i}}{2})$, atëherë ekziston $\alpha \in \{1, 2, ..., k\}$, ashtu që $\mathbf{b} \in B(\boldsymbol{x}_i; \frac{\delta_{\boldsymbol{x}_i}}{2})$. Tash kemi

1) $d(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{c}) > \delta_{\boldsymbol{x}_\alpha}$, sepse $\boldsymbol{c} \in D'$;

2) $d(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{b}) < \frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{x}_\alpha}$,

dhe, në bazë të rregullës së trekëndëshit, marrim:

$$d(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \geq d(\boldsymbol{x}_\alpha, \mathbf{c}) - d(\boldsymbol{x}_\alpha, \mathbf{b}) > \delta_{\boldsymbol{x}_\alpha} - \frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{x}_\alpha} = \frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{x}_\alpha} \geq \delta_0 > 0.$$

Këndej rrjedh se δ_0 shërben si kufi i poshtëm i bashkësisë $\{d(\mathbf{b}, \mathbf{c}) | \mathbf{b} \in D, \mathbf{c} \in D'\}$, prandaj:

$$d(D, D') = \inf\{d(\mathbf{b}, \mathbf{c}) | \mathbf{b} \in D, \mathbf{c} \in D'\} \geq \delta_9,$$

dhe teorema u vërtetua.

Vërejtje. Teorema 2.1.6. nuk është e vërtetë kur të dy bashkësitë e mbyllura janë të pakufizuara. P.sh, bashkësitë e mbyllura që janë vizuar në fig. 2.2. nuk kanë pika të përbashkëta por largesa midis tyre është zero.

2.1.4 Detyra për ushtrime

1. Të tregohet që:

   (a) Mbyllja $\overline{E}$ në $\mathbf{R}^m$ e cilësdo bashkësi $E \subset \mathbf{R}^m$ është bashkësi e mbyllur në $\mathbf{R}^m$;

   (b) Bashkësia ∂E e pikave të kufirit të çdo bashkësie $E \subset \mathbf{R}^m$ është bashkësi e mbyllur;

   (c) në qoftë se G është bashkësi e hapur në $\mathbf{R}^m$, F e mbyllur në $\mathbf{R}^m$, atëherë $G \backslash F$ është e hapur në $\mathbf{R}^m$.

2. Të tregohet se paralelepipedi i mbyllur $m-$ dimensional:

$$I = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m |\ a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, ..., m\},$$

   është bashkësi kompakte.

3. Të tregohet se nëse $K_1, K_2, ..., K_n, ...,$ janë bashkësi kompakte dhe nëse $K_1 \supset K_2 \supset ... \supset K_n \supset ...,$ atëherë $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$.

2.1.5 Kuptimi i funksionit me m ndryshore

Funksioni me $m-$ ndryshore përkufizohet në mënyrë të ngjashme si funksioni me një ndryshore.

Përkufizimi 2.1.17 *Në qoftë se çdo pike $E \subset \mathbf{R}^m$ i përgjigjet, sipas ndonjë ligji (rregulle, transformimi) të caktuar, një dhe vetëm një pikë e bashkësisë $\mathbf{R}$ atëherë thuhet se është dhënë funksioni nga bashkësia E në $\mathbf{R}$.*

Në këtë rast shkruajmë $f : E \to \mathbf{R}$, dhe bashkësinë E e quajmë **domen** të funksionit f. Nëse $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^m$, atëherë pikën të cilën funksioni f e pasqyron në $\mathbf{R}$ e shënojmë me $u = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$. Funksionet me $m-$ ndryshore, ashtu si funksionet me një ndryshore, mund të jepen në mënyra të ndryshme. Më të përdorshmet janë: mënyra analitike, ajo tabelore, parametrike, grafike, etj. Për funksionet e dhëna në mënyrë analitike, si fushë përcaktimi merret bashkësia e të gjitha sistemeve $(x_1, x_2, ..., x_m)$ për të cilët shprehja analitike e këtij funksioni ka kuptim.

Shembuj 2.1.2 **1**. Funksioni me dy ndryshore $u = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$, është i përcaktuar në bashkësinë $R^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

2. Funksioni $u = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2}}$ është i përcaktuar në qarkun me qendër në fillimin e sistemit koordinativ dhe me rreze 2. Bashkësia e vlerave (rangu i tij) është segmenti $[0, 2]$.

3. Funksioni $u = \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 4}}$ është i përcaktuar jashtë qarkut me qendër në fillimin e sistemit koordinativ e me rreze 2. Bashkësia e vlerave është gjysmëdrejtëza $u > 0$.

4. Le të jetë $u = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_m^2}$. Fushë përcaktimi e këtij funksioni është rruzulli i mbyllur $m-$ dimensional me qendër në pikën $0(0, 0, ...0)$ dhe me rreze 1.

5. Le të jetë:

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x_1^2}{a_1^2} - \dfrac{x_2^2}{a_2^2} - ... - \dfrac{x_m^2}{a_m^2}}}.$$

Fushë përkufizimi e këtij funksioni është bashkësia e të gjithë sistemeve $(x_1, x_2, ..., x_m)$ koordinatat e të cilëve plotësojnë pabarazimin:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + ... + \frac{x_m^2}{a_m^2} < 1,$$

(në këtë rast supozohet që $a_1, a_2, ..., a_m$, janë numra pozitiv). Bashkësia e lartcekur është zonë në $\mathbf{R}^m$ dhe paraqet bashkësinë e të gjitha pikave të brendshme të ashtuquajturit elipsoidit $m-$ dimensional, ekuacioni i të cilit është:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + ... + \frac{x_m^2}{a_m^2} \leq 1.$$

2.2 LIMITI I FUNKSIONIT ME m NDRYSHORE

2.2.1 Konvergjenca e vargjeve R^m

Supozojmë se çdo numri natyral n i përgjigjet pika $\boldsymbol{x}_n \in \mathbf{R}^m$. Shprehjen:

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n, ...,$$

e quajmë **varg i pikave në hapësirën $\mathbf{R}^m$** (ose vetëm **varg**) dhe zakonisht e shënojmë me $\{\boldsymbol{x}_n\}$.

Përkufizimi 2.2.1 *Vargu $\{\boldsymbol{x}_n\}$ quhet* **konvergjent**, *nëse ekziston pika $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m$ ashtu që për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $n_0(\varepsilon)$ që për çdo $n > n_0(\varepsilon)$ vlen pabarazimi $d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{a}) < \varepsilon$.*

Në këtë rast $\boldsymbol{a}$ quhet **limit** i vargut $\{\boldsymbol{x}_n\}$ dhe shkruajmë $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$.

Teorema 2.2.1 *a) Le të jetë* $\boldsymbol{x}_n = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn})$, $\boldsymbol{x}_n \in \mathbf{R}^m, n \in \mathbf{N}$. *Kushtë i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që vargu* $\{\boldsymbol{x}_n\}$ *të konvergjoj tek* $\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, ..., a_m)$ *është që:*

$$\lim_{n\to\infty} a_{in} = a_i,\ 1 \le i \le m. \tag{1}$$

b) Nëse $\{\boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{y}_n\}$, *ku* $\boldsymbol{y}_n = (b_{1n}, b_{2n}, ..., b_{mn})$, *janë vargje në* $\mathbf{R}^m$, $\{\alpha_n\}$ *varg i numrave realë dhe* $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$, $\alpha_n \to \alpha$, *kur* $n \to \infty$, *atëherë:*

$$\lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{x_n} + \boldsymbol{y_n}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y},$$

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n \cdot \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}, \tag{2}$$

ku $\boldsymbol{x}_n \cdot \boldsymbol{y}_n = a_{1n}b_{1n} + a_{2n}b_{2n} + ... + a_{mn}b_{mn}$, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_mb_m$,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \boldsymbol{x}_n = \alpha \cdot \boldsymbol{x}. \tag{2'}$$

Vërtetimi. a) **Kushti i nevojshëm.** Supozojmë se $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$. Atëherë, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri $n_0(\varepsilon)$ që për çdo $n > n_0(\varepsilon)$ vlen pabarazimi $d(\boldsymbol{x}_n, a) < \varepsilon$, ose $\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{in} - a_i)^2} < \varepsilon$. Këndej, për $n > n_0(\varepsilon)$ rrjedh se:

$$|a_{in} - a_i| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

që tregon se vargu $\{a_{in}\}$ konvergjon tek a_i, d.m.th. vlen (1).

Kushti i mjaftueshëm. Supozojmë se vlen (1). Atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ ekzistojnë numrat $n_1, n_2, ..., n_m$, ashtu që për $n > n_i$, $i = 1, 2, ..., m$, vlen:

$$|a_{in} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

Marrim $n_0 = \max\{n_1, n_2, ..., n_m\}$. Atëherë për $n > n_0$ vlen:

$$\sum_{i=1}^{m} (a_{im} - a_i)^2 < m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m} = \varepsilon^2$$

ose:

$$d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (a_{in} - a_i)^2} < \varepsilon,$$

që tregon se $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$.

b) Supozojmë se vargjet $\{\boldsymbol{x}_n\} = \{(a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn})\}$, $\{\boldsymbol{y}_n\} = \{(b_{1n}, b_{2n}, ..., b_{mn})\}, n \in \mathbf{N}$ konvergjojnë përkatësisht në $\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, ..., a_m)$, $\mathbf{y} = (b_1, b_2, ..., b_m)$. Atëherë, nga a) rrjedh se:

$$a_{in} \to a_i,\ b_{in} \to b_i,\ 1 \le i \le m,$$

kur $n \to \infty$. Këndej rrjedh se:

$$\lim_{n\to\infty}(a_{in}+b_{in}) = a_i + b_i,\ \lim_{n\to\infty} a_{in}\cdot b_{in} = a_i \cdot b_i,$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n a_{in} = \alpha a_i,\ 1 \le i \le m.$$

Tash nga kushti i mjaftueshëm i a) konstatojmë se vlejnë barazimet (2) e (2′). Teorema u vërtetua.

Rrjedhimi 2.2.1 Nëse vargu $\{\boldsymbol{x}_n\}$, ku $\boldsymbol{x}_n = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn})$, $n \in \mathbf{N}$ konvergjon atëherë :

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = (\lim_{n\to\infty} a_{1n}, \lim_{n\to\infty} a_{2n}, ..., \lim_{n\to\infty} a_{mn}).$$

Edhe më shumë: për konvergjencën e vargut $\{\boldsymbol{x}_n\}$ është e nevojshme dhe e mjaftueshme që vargjet e koordinatave të tij $\{a_{in}\}, i = 1, ..., m$, të konvergjojnë d.m.th.:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n \Leftrightarrow (\forall i = 1, 2, ..., m, \exists \lim_{n\to\infty} a_{in}).$$

Në vazhdim japim kuptimin e vargut fundamental të hapësirës $\mathbf{R}^m$.

Përkufizimi 2.2.2 *Vargu $\{\boldsymbol{x}_n\}$ i pikave të hapësirës $\mathbf{R}^m$ quhet* **fundamental** *ose* **varg i Koshit** *nëse për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri natyral n_0, ashtu që për çdo $m > n_0, n > n_0$ rrjedh se:*

$$d(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_n) < \varepsilon, \tag{3}$$

Në veçanti vargu numerik $\{\boldsymbol{x}_n\}, \boldsymbol{x}_n \in \mathbf{R}$, quhet **fundamental** nëse

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall m > n_0 \wedge \forall n > n_0 \Rightarrow |\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n| < \varepsilon. \tag{4}$$

Pa prishur përgjithësimin mund të marrim $m > n$. Atëherë $m = n + p$, ku $p \in \mathbf{N}$. Në këtë rast pabarazimet (3) dhe (4) marrin formë:

$$d(\boldsymbol{x}_{n+p}, \boldsymbol{x}_n) < \varepsilon,\ \forall n > n_0 \wedge p \in \mathbf{N}, \tag{3′}$$

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,\ \forall n > n_0 \wedge p \in \mathbf{N}. \tag{4′}$$

Teorema 2.2.2 *Që vargu $\{\boldsymbol{x}_n\}$ i elementeve të hapësirës $\mathbf{R}^m$ të jetë fundamental, është e nevojshme dhe e mjaftueshme që secili nga vargjet përkatës koordinativ $\{a_{in}\}, i = 1, ..., m$ të jetë fundamental (në $\mathbf{R}$).*

Vërtetimi. Kushti i nevojshëm. Le të jetë vargu $\{\boldsymbol{x}_n\}, \boldsymbol{x}_n \in \mathbf{R}^m$, varg fundamental. Atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri n_0 në mënyrë që

$$d(\boldsymbol{x}_{n+p}, \boldsymbol{x}_n) < \varepsilon,$$

për çdo $n > n_0$ dhe $p \in \mathbf{N}$.

Këndej meqë:

$$|a_{in+p} - a_{in}| \leq d(x_{n+p}, x_n), i = 1, 2, ..., m,$$

rrjedh se:

$$|a_{in+p} - a_{in}| < \varepsilon,$$

për çdo $i = 1, 2, ..., m$, dhe $n > n_0$, që tregon se vargjet $\{a_{in}\}, i = 1, ..., m$, janë fundamentale.

Kushti i mjaftueshëm. Supozojmë se për $\forall i = 1, ..., m \wedge \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_i \in \mathbf{N}$: $\forall n > n_i \wedge \forall p \in \mathbf{N} \Rightarrow |a_{in+p} - a_{in}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Atëherë pabarazimi:

$$d(\boldsymbol{x}_{n+p}, \boldsymbol{x}_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (a_{i\;n+p} - a_{in})^2} < \varepsilon$$

vlen për çdo $n > n_0 = \max\{n_1, ..., n_m\}, p \in \mathbf{N}$, dhe tregon se vargu $\{\boldsymbol{x}_n\}$ është fundamental.

Teorema 2.2.3 *(kriteri i Koshit për konvergjencën e vargut nga $\mathbf{R}^m$) Vargu $\{\boldsymbol{x}_n\}$ i elementeve të hapësirës $\mathbf{R}^m$ konvergjon, atëherë dhe vetëm atëherë kur është fundamental.*

Vërtetimi. Kushti i nevojshëm. Supozojmë se vargu $\{x_n\}$ konvergjon në pikën $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m$. Atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri n_0 ashtu që për çdo $m > n_0$ vlejnë pabarazimet:

$$d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{a}) < \frac{\varepsilon}{2}, \; d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Këndej dhe nga pabarazimi i trekëndëshit fitojmë:

$$d(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_n) \leq d(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{a}) + d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

për çdo $m > n_0$ dhe $n > n_0$ që tregon se vargu $\{\boldsymbol{x}_n\}$ është fundamental.

Kushti i mjaftueshëm. Supozojmë se vargu $\{\boldsymbol{x}_n\} = \{(a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn})\}$ është fundamental. Atëherë, sipas teoremës 2.2.2, secili varg $\{a_{in}\}$, $i = 1, ..., m$, është fundamental. Këndej sipas kriterit te Bolcano-Koshit për konvergjencën e vargjeve numerike rrjedh se vargjet $\{a_{in}\}, i = 1, ..., m$, janë konvergjente. Më në fund nga teorema 2.2.1, gjejmë se vargu $\{\boldsymbol{x}_n\}$ konvergjon.

Në vazhdim tregojmë se edhe për vargjet nga $\mathbf{R}^m$ mbetet në fuqi teorema e Bolcano-Vajershtrasit për vargjet numerike. Së pari japim nocionin e vargut të kufizuar dhe nënvargut të vargut nga $\mathbf{R}^m$.

Përkufizimi 2.2.3 $\{\boldsymbol{x}_n\}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m$, *është i* **kufizuar** *nëse ekziston numri $M > 0$ ashtu që për çdo $n \in \mathbf{N}$ vlen pabarazimi $d(O, \boldsymbol{x}_n) \leq M$, ku O është pika koordinatat e te cilës janë të barabarta me zero.*

Me fjalë të tjera, vargu nga $\mathbf{R}^m$ është i kufizuar nëse të gjitha kufizat e tij i takojnë rruzullit të mbyllur me qendër në pikën O dhe me rreze sado të madhe.

Përkufizimi 2.2.4 *Le te jetë:*

$$n_1, n_2, ..., n_k, ...,$$

çfarëdo vargu numerik rritës dhe $\{\boldsymbol{x}_n\}$ *varg nga* $\mathbf{R}^m$. *Atëherë vargun:*

$$\boldsymbol{x}_{n_1}, \mathbf{x}_{n_2}, ..., \boldsymbol{x}_{n_k}, ...$$

e quajmë **nënvarg** *të vargut* $\{\boldsymbol{x}_n\}$.

Teorema 2.2.4 *(Bolcano-Vajershtrasit). Nga çdo varg i kufizuar nga* $\mathbf{R}^m$ *mund të nxirret së paku një nënvarg konvergjent.*

Vërtetimi. Vërtetimin e bëjmë për rastin $m = 2$, ndërsa për rastin e përgjithshëm veprohet në mënyrë analoge.

Supozojmë se $\{\boldsymbol{x}_n\}, \boldsymbol{x}_n = (a_n, b_n) \in \mathbf{R}^2$, është i kufizuar. Atëherë, ekziston numri $M > 0$ ashtu që për çdo $n \in \mathbf{N}$ vlen $d(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}_n) \leq M$, ku $O(0,0)$. Prandaj, $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq M, \ \forall n \in \mathbf{N}$, prej nga rrjedh se për çdo $n \in \mathbf{N}$ vlen:

$$|a_n| \leq M, \ |b_n| \leq M,$$

d.m.th. vargjet e koordinatave $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ janë po ashtu të kufizuara. Tash sipas teoremës së Bolcano-Vajershtrasit për vargjet numerike rrjedh se nga vargu $\{a_n\}$ mund të nxirret nënvargu konvergjent $\{a_{n_k}\}$. Është e qartë se edhe nënvargu $\{b_{n_k}\}$ është i kufizuar. Këndej nga teorema e sipërpërmendur rrjedh se nga vargu $\{b_{n_k}\}$ mund të nxirret nënvargu konvergjent $\{b_{n_{k_s}}\}$. Kështu nënvargu $\{\boldsymbol{x}_{n_{k_s}}\}$ ku $\boldsymbol{x}_{n_{k_s}} = (a_{n_{k_s}}, b_{n_{k_s}})$, është konvergjent sepse vargjet $\{a_{n_{k_s}}\}$ e $\{b_{n_{k_s}}\}$ janë konvergjente (teorema 2.2.1).Teorema u vërtetua.

Të rikujtojmë se bashkësia

$$I = \{(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbf{R}^m |\, a_i \leq x_i \leq b_i, \ i = 1, ..., m\}$$

quhet **paralelepiped (i mbyllur) m-dimenzional.**

Përkufizimi 2.2.5 *Vargu i paralelepipedëve*

$$I_1, I_2, ..., I_n, ... \tag{5}$$

quhet **varg i paralelepipedëve që shtrëngohen** *nëse* $I_n \supset I_{n+1}$ *për çdo* $n \in \mathbf{N}$ *dhe nëse* $\lim\limits_{n\to\infty} d(I_n) = 0$, *ku* $d(I_n)$ *është diametri i bashkësisë* I_n.

Teorema 2.2.5 *(e Kantorit) Nëse (5) është varg i paralelepipedëve që shtrëngohen, atëherë ekziston pika e vetme e përbashkët* $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$ *e të gjitha kufizave të tij.*

Vërtetimi. Nga fakti se $I_n \supset I_{n+1}$, për çdo $n \in \mathbf{N}$, rrjedh se:

$$[a_{in}, b_{in}] \supset [a_{in+1}, \, b_{in+1}], \ i = 1, ..., m. \tag{6}$$

Është e qartë se:

$$d(I_n) = \sqrt{\sum_{i-1}^{m}(b_{in} - a_{in})^2}.$$

Nëse $d(I_n) \to 0$ kur $n \to \infty$ atëherë edhe $b_{in} - a_{in} \to 0$ kur $n \to \infty$, $i = 1, ..., m$. Këndej dhe nga (6) rrjedh se vargu $\{[a_{in}, b_{in}]\}$ është varg i segmenteve që shtrëngohen. Prandaj, për çdo $i = 1, ..., m$ dhe çdo $n \in \mathbf{N}$ ekziston pika e vetme $\xi_i \in [a_{in}, b_{in}]$. Këndej rrjedh se $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \in I_n$, për çdo $n \in \mathbf{N}$, dhe teorema 2.5 u vërtetua.

2.2.2 LIMITI I FUNKSIONIT ME m NDRYSHORE

Le të jetë $D \subset \mathbf{R}^m, \boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^m$ pikë grumbullimi e bashkësisë D dhe $f : D \to \mathbf{R}$ funksion nga bashkësia D në $\mathbf{R}$.

Përkufizimi 2.2.6 *(i Hajnes) Numri $A \in \mathbf{R}$ quhet* **limit** *i funksionit f kur $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ nëse për vargun e çfarëdoshëm:*

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, ..., \boldsymbol{x}_n, ...$$

të tillë që $\boldsymbol{x}_n \in D, \boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{x}_0, \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_0$, vargu përkatës $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ i vlerave të funksionit f konvergjon në A, d.m.th. $f(\boldsymbol{x}_n) \to A$ kur $n \to \infty$.

Në këtë rast shkruajmë $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = A$ ose $f(\boldsymbol{x}) \to A$ kur $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ ose:

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \cdots\\ x_m\to x_m^0}} f(x_1, x_2, ..., x_m) = A,$$

ku $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$.

Përkufizimi 2.2.7 *(i Koshit) Numri $A \in \mathbf{R}$ quhet* **limit** *i funksionit f kur $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ nëse për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta(\varepsilon) > 0$ ashtu që për çdo $\boldsymbol{x} \in D$ për të cilin $0 < d(\boldsymbol{x}, x_0) < \delta$ vlen $|f(\boldsymbol{x}) - A| < \varepsilon$.*

Pra, funksioni f ka limitin A kur $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ nëse

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : 0 < d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - A| < \varepsilon$$

Po vëmë në dukje se përkufizimet 2.2.6. e 2. 2.7. janë ekuivalente (vërtetimi bëhet ne mënyrë analoge si në rastin e funksionit me një ndryshore).

Teorema 2.2.6 *Supozojmë se funksionet $f, g : D \to \mathbf{R}, D \subset \mathbf{R}^m$, kanë limitet A përkatësisht B në pikën $\boldsymbol{x}_0$. Atëherë edhe funksionet $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $(g(\boldsymbol{x}) \neq 0)$ kanë limit në pikën $\boldsymbol{x}_0$ dhe:*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} [f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})] = A \pm B, \tag{1}$$

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})\cdot g(\boldsymbol{x}) = A\cdot B, \tag{2}$$

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{A}{B}, B\neq 0, g(\boldsymbol{x})\neq 0, \boldsymbol{x}\in D(g). \tag{3}$$

Vërtetimi. Tregojmë barazimin (1). Barazimet tjera vërtetohen ne mënyrë analoge.

Le të jetë $\{\boldsymbol{x}_n\}$ varg i çfarëdoshëm nga D i tillë që $\boldsymbol{x}_n\neq\boldsymbol{x}_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}_0$. Atëherë vargjet $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ *e* $\{g(\boldsymbol{x}_n)\}$ konvergjojnë në numrat A e B, përkatësisht, kur $n\to\infty$. Tash, sipas teoremës 2.2.1.(b), vargu shumë $\{f(\boldsymbol{x}_n)+g(\boldsymbol{x}_n)\}$ është konvergjent dhe ka limitin $A+B$, kur $n\to\infty$. Kjo pikërisht tregon se vlen (1).

Përkufizimi 2.2.8 *Vargu* $\{\boldsymbol{x}_n\}$ *i pikave te hapësirës* $\mathbf{R}^m$ **tenton në pakufi** *kur* $n\to\infty$ *nëse për çdo* $M>0$ *ekziston numri* $n_0\in\mathbf{N}$ *ashtu që për çdo* $n>n_0$ *vlen* $d(\mathbf{0},\boldsymbol{x}_n)>M(\boldsymbol{x}_n\notin B(\mathbf{0};M))$, ku $\mathbf{0}$ *është pika* $(0,0,...,0)\in\mathbf{R}^m$.

Në këtë rast shkruajmë $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\infty$, ose $\boldsymbol{x}_n\to\infty$ kur $n\to\infty$.

Përkufizimi 2.2.9 *(i Hajnes) Funksioni* $f:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ *ka limitin* $A\in\mathbf{R}$ *kur* $\boldsymbol{x}\to\infty$, *nëse për çdo varg* $\{\boldsymbol{x}_n\}$ *nga* $\mathbf{R}^m$ *të tillë që* $\boldsymbol{x}_n\to\infty$ kur $n\to\infty$, *vargu përkatës* $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ *i vlerave të funksionit* f *konvergjon në* A, *d.m.th.:*

$$f(\boldsymbol{x}_n)\to A \text{ kur } \mathrm{n}\to\infty.$$

Përkufizimi 2.2.10 *(i Koshit) Funksioni* $f:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ *ka limitin* $A\in\mathbf{R}$ *kur* $\boldsymbol{x}\to\infty$, *nëse:*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists M>0:\forall x\in\mathbf{R}^m,\ d(\mathbf{0},\boldsymbol{x})>M\Rightarrow|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon.$$

ose:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists M>0:\forall x\in\mathbf{R}^m\wedge x\notin B(O;M)\Rightarrow|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon.$$

Lehtë tregohet se përkufizimet 2.2.9. e 2.2.10. janë ekuivalente.

Shembuj 2.2.1 **1**. Të tregohet se funksioni:

$$f(x_1,x_2)=\frac{x_1\cdot x_2}{x_1^2+x_2^2}$$

nuk ka limit ne pikën (0,0).

Zgjidhja: Vargjet $\{(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\}$ *e* $\{(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\}$ konvergjojnë në pikën $(0,0)$ kur $n\to\infty$. Mirëpo, meqë:

$$f\Big(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\Big)\to\frac{1}{2},\ f\Big(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\Big)\to\frac{2}{5}$$

kur $n\to\infty$, atëherë sipas përkufizimit të Hajnes shohim se funksioni nuk ka limit në pikën $0(0,0)$.

2. Të tregohet se për $m > 2$ vlen:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0\\ \cdots\cdots \\ x_m\to 0}} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_m}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_m^2} = 0.$$

Zgjidhja: Me të vërtetë kemi:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2} \tag{4}$$

ku $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_m), \boldsymbol{0} = (0, 0, ..., 0)$. Nga (4) shohim se

$$|x_i| \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}),\ i = 1, 2, ..., m.$$

Prandaj:

$$|f(\boldsymbol{x})| = \frac{|x_1 x_2 ... x_m|}{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2} \leq \frac{(d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}))^m}{(d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}))^2} = (d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}))^{m-2} < \varepsilon,$$

nëse:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) < \varepsilon^{\frac{1}{m-2}} = \delta.$$

Kështu:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{m-2}} : \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m (m > 2) \wedge 0 < d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(\boldsymbol{x})| < \varepsilon,$$

dhe kjo tregon se vlen (2).

2.2.3 Limitet e pérsëritura

Për funksionin $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ të m ndryshoreve mund të jepet kuptimi i limitit sipas njërës nga ndryshoret e pavarura duke i konsideruar të tjerat të fiksuara. Në lidhje me këtë del kuptimi i **limitit të përsëritur.** Po e sqarojmë këtë kuptim për funksionet me dy ndryshore $u = f(x, y)$. Supozojmë se funksioni $u = f(x, y)$ është i dhënë në një rrethinë drejtkëndëshe

$$|x - x_0| < d_1,\ |y - y_0| < d_2,$$

të pikës $M_0(x_0, y_0)$, me përjashtim ndoshta të vetë pikës M_0. Supozojmë se edhe për çdo y të fiksuar për të cilin $0 < |y - y_0| < d_2$, ekziston limiti i funksionit $u = f(x, y)$ i ndryshores x në piken $x = x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$$

dhe, përveç kësaj, ekziston limiti b i funksionit $\varphi(y)$ në pikën $y = y_0$:

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = b.$$

Në këtë rast thuhet se ekziston limiti i përsëritur b për funksionin $u = f(x,y)$ në pikën M_0 të cilin e shënojmë kështu:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y). \tag{1}$$

Në mënyrë analoge përkufizohet limiti i përsëritur

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y). \tag{2}$$

Ne vijim tregojmë se në rastin e përgjithshëm limitet (1) dhe (2) janë të ndryshëm.

Shembulli 2.2.1 Për funksionin $u = f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2+x^4+y^4}{x^2+y^2}$, limitet e përsëritura në pikën $O(0,0)$ janë:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}(y^2-1) = -1,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}(1+x^2) = 1,$$

d.m.th. janë të ndryshëm.

Shembulli 2.2.2 Për funksionin $u = f(x,y) = x\cdot\sin\dfrac{1}{y}$, limiti i përsëritur $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} x\cdot\sin\dfrac{1}{y}$ nuk ekziston, ndërsa $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\dfrac{1}{y} = 0$

Përgjigjen se kur mund të ndryshojmë renditjen e kalimit në limit e gjejmë në rezultatin vijues.

Teorema 2.2.7 *Supozojmë se funksioni $u = f(x,y)$:*

(1) *është i përkufizuar në rrethinën drejtkëndëshe*

$$|x-x_0| < d_1,\ |y-y_0| < d_2$$

të pikës $M_0(x_0,y_0)$, me përjashtim, ndoshta të pikës M_0;

(2) *ka limitin b kur $x\to x_0$, $y\to y_0$, d.m.th. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b$; dhe*

(3) *ka vetinë që për çdo x të fiksuar, $0 < |x-x_0| < d_1$, ekziston $\lim\limits_{y\to y_0}$-$f(x,y) = \psi(x)$ si dhe për çdo y të fiksuar, $0 < |y-y_0| < d_2$, ekziston limiti $\varphi(y) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.*

Atëherë, ekzistojnë $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ e $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ dhe ata janë të barabartë.

Vërtetimi. Me qenë se b është limit i funksionit $f(x,y)$ në pikën $M_0(x_0,y_0)$ atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta(\varepsilon) > 0$ ashtu që për çdo $(x,y)\in D(f)$, për të cilin $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta(\varepsilon)$ (d.m.th. $|x-x_0| < \delta, |y-y_0| < \delta$) rrjedh se:

$$|f(x,y)-b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Fiksojmë një x të tillë që $0 < |x - x_0| < \delta$ dhe kalojmë me limit në pabarazimin (3) kur $y \to y_0$. Në bazë të kushtit (3) të teoremës del se $|\psi(x) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, që tregon se:

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = b. \tag{4}$$

Në mënyrë analoge del:

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = b. \tag{5}$$

Nga (4) e (5) del pohimi i teoremës .

Vërejtje. Teorema 2.2.7 jep vetëm kushtin e mjaftueshëm që limitet e përsëritur ië jenë të barabartë. Këtë e ilustron ky shembull:

Funksioni $u = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ ne pikën $O(0,0)$ ka limitet e përsëritur të barabartë:

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = 0 = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{xy^2}{x^2 + y^4},$$

mirëpo ai nuk ka limit në atë pikë. Me të vërtetë, nëse marrim vargun $\{\boldsymbol{x}_n\} = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}$ i cili konvergjon në $(0,0)$, gjejmë se:

$$u\Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\Big) = \frac{n}{n^2 + 1} \to 0, n \to \infty.$$

Mirëpo, për vargun $\{x'_n\} = \{(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})\}$, i cili po ashtu konvergjon në $(0,0)$ kemi:

$$u\Big(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}, n \to \infty.$$

Kjo tregon, sipas përkufizimit të Hajnes, se funksioni i dhënë nuk ka limit në pikën $0(0,0)$.

2.3 VAZHDUESHMËRIA E FUNKSIONIT ME m NDRYSHORE

2.3.1 Përkufizimi i vazhdueshmërisë

Le të jetë $f : D \to \mathbf{R},\ D \subset \mathbf{R}^m$, dhe $\boldsymbol{x}_0$ pikë grumbullimi e bashkësisë D që i takon asaj bashkësie.

Shtesë e argumentit të pavarur në pikën $\boldsymbol{x}_0$ quhet shprehja $\triangle \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$.

Shtesë ose **shtesë e plotë** e funksionit $u = f(\boldsymbol{x})$ në pikën $\boldsymbol{x}_0$ quhet funksioni $\triangle u$ i përkufizuar me formulën:

$$\triangle u = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) \tag{1}$$

Meqë $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \triangle \boldsymbol{x}$ atëherë shprehja (1) mund te shkruhet edhe në formën:

$$\triangle u = f(\boldsymbol{x}_0 + \triangle \boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0).$$

Përkufizimi 2.3.1 *Thuhet se funksioni f është i* **vazhdueshëm në pikën $\mathbf{x_0} \in \mathbf{D}$**, *nëse plotësohen kushtet:*

1) për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta > 0$ ashtu që për çdo $\boldsymbol{x} \in D$ të tillë që $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta$ vlen $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$;

2) për çdo $\{\boldsymbol{x}_n\}, \boldsymbol{x}_n \in D$, i cili konvergjon në pikën $\boldsymbol{x}_0$, vargu përkatës $f(\boldsymbol{x}_n)$ i vlerave të funksionit f konvergjon në $f(\boldsymbol{x}_0)$;

3) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$ ose $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) \to 0$, kur $\boldsymbol{x} \to x_0$, që tregon se shtesa e funksionit f në pikën $\boldsymbol{x}_0$ tenton në zero kur shtesa e argumentit të pavarur tenton në zero;

4) për çdo $\varepsilon-$rrethinë të pikës $f(\boldsymbol{x}_0)$, d.m.th. për çdo interval $(f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon, f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon)$, ekziston $\delta-$ rrethina e pikës $\boldsymbol{x}_0$, d.m.th. rruzulli $B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$, ashtu që:

$$f(B(\boldsymbol{x}_0; \delta)) \subset (f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon, f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon),$$

ose që:

$$f : B(\boldsymbol{x}_0; \delta) \to (f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon, f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon).$$

Teorema 2.3.1 *Kushtet $1) - 4)$ të përkufizimit 2.3.1. janë ekuivalente.*

Vërtetimi. Mjafton të tregojmë se $1) \iff 2), 1) \implies 3), 2) \implies 3),$ dhe $4) \iff 1)$.

Ekuivalenca $1) \iff 2)$ rrjedh nga ekuivalenca e përkufizimeve të limitit të funksionit në pikë, sipas Koshit e Hajnes.

Po ashtu, nga përkufizimet e sipërpërmendura është evidente se $1) \implies 3)$ dhe $2) \implies 3)$.

Tregojmë se $1) \implies 4)$. Së pari po vëmë në dukje se:

$$f(B(\boldsymbol{x}_0; \delta)) = \{f(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R} | \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0; \delta)\}.$$

Le të jetë $y \in f(B(\boldsymbol{x}_0; \delta))$ i çfarëdoshëm. Atëherë, ekziston $\boldsymbol{x}_1 \in B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$ i tillë që $y = f(\boldsymbol{x}_1) \in R$. Nga kushti 1) rrjedh se për $\boldsymbol{x}_1 \in B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$ vlen $|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$, d.m.th. $|y - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$. Kjo tregon që $y \in (f(\boldsymbol{x}_0)) - \varepsilon, f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon)$. Prandaj, $f(B(\boldsymbol{x}_0; \delta)) \subset (f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon, f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon)$,

Më në fund tregojmë se $4) \implies 1)$. Le të jetë $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$. Nga 4) kemi $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0; \delta) \implies f(\boldsymbol{x}) \in f(B(\boldsymbol{x}_0; \delta)) \implies f(\boldsymbol{x}) \in B(f(\boldsymbol{x}_0); \varepsilon) = (f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon, f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon) \implies |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$.

Teorema u vërtetua.

Nga teorema 2.3.1. rrjedh se për të qenë funksioni f i vazhdueshëm në pikën $\boldsymbol{x}_0$ duhet të plotësoj njërën nga kushtett 1)-4) të përkufizimit 3.1.

Vërejtje. Me qenë se $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$, atëherë kushti 3) mund të shkruhet në formën:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\lim_{\boldsymbol{x}\to x_0} \boldsymbol{x})$$

që tregon se, kur funksioni f është i vazhdueshëm në pikën $\boldsymbol{x}_0$, simbolet lim e f mund t'i ndërrojnë vendet.

Përkufizimi 2.3.2 *Thuhet se funksioni* $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^m$, *është* **i vazhdueshëm** *në* D *nëse ai është i vazhdueshëm në çdo pikë të asaj bashkësie.*

Pikat në të cilat funksioni f nuk është i vazhdueshëm i quajmë **pika të këputjes** të atij funksioni.

Shembulli 2.3.1 Të tregohet se funksioni:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{nëse } x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 0, & \text{nëse } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

ka këputje në pikën $(0, 0)$, ndërsa funksioni:

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 \cdots x_m}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}, & \text{nëse } x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 \neq 0 \\ 0, & \text{nëse } (x_1, x_2, ..., x_m) = (0, 0, ..., 0) \end{cases}$$

për $m > 2$ është i vazhdueshëm në pikën $(0, 0, ..., 0)$.

Me të vërtetë, funksioni i çift ka këputje në pikën $(0, 0)$ sepse ai nuk ka limit në atë pikë (shih shembullin 1. të pikës 2.2. nga §2). Për funksionin e dytë dimë se (shembulli 2.2.1 2).

$$\lim_{\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0 \\ \cdots \\ x_m \to 0}} f(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$$

dhe meqë $f(0, 0, ..., 0) = 0$ shohim se ai është i vazhdueshëm në pikën gjegjëse.

Për funksionet me m ndryshore shqyrtohet edhe vazhdueshmëria e tyre në lidhje me secilën prej ndryshoreve në një pikë. Për të sqaruar këtë kuptim shqyrtojmë të ashtuquajturat shtesa të pjesshme të funksionit në pikë.

Le të jetë $u = f(\boldsymbol{x})$, si në fillim të kësaj pike, funksion i përkufizuar në bashkësinë $D \subset \mathbf{R}^m$ dhe $\boldsymbol{x}_0 \in D$. Për $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ ..., x_m^0)$ dhe çdo $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in D$ vëmë:

$$x_1 - x_1^0 = \Delta x_1, \ x_2 - x_2^0 = \Delta x_2, \cdots, \ x_m - x_m^0 = \Delta x_m.$$

Atëherë, shtesa e funksionit ((1)) Δu e shprehur me shtesat përkatëse të argumenteve të pavarur $\Delta x_1, \ \Delta x_2, \cdots, \ \Delta x_m$, mund të shkruhet në formën:

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, \ x_2^0 + \Delta x_2, \ ..., x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \ x_2^0, ..., x_m^0).$$

Këndej shihet se kushti 3) i përkufizimit 2.3.1 mund të shkruhet në formën:

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta u = 0.$$

I fiksojmë të gjithë argumentet përveç të parit. Argumentit x_1 i japim shtesën Δx_1 të tillë që pikat me koordinatat $x_1 + \Delta x_1, \ x_2, ..., x_m$ të mbeten në domenin e funksionit f. Atëherë, shprehja:

$$\Delta_{x_1} u = f(x_1^0 + \Delta x_1, \ x_2^0, ..., x_m^0) - f(x_1^0, \ x_2^0, ..., x_m^0)$$

quhet **shtesë e pjesshme** e funksionit f në pikën $\boldsymbol{x}_0$ që i përgjigjet shtesës Δx_1 të argumentit x_1. Në mënyrë analoge përkufizohen shtesat e pjesshme të funksionit në lidhje me shtesat e argumenteve tjerë.

Përkufizimi 2.3.3 *Funksioni $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ quhet* **i vazhdueshëm në pikën $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ sipas argumentit x_k,** *nëse shtesa e pjesshme $\Delta_{x_k} u$ e atij funksioni në pikën $\boldsymbol{x}_0$ tenton në zero kur $\Delta x_k \to 0$, d.m.th.:*

$$\lim_{\Delta_{x_k} \to 0} \Delta_{x_k} u = 0.$$

Është e qartë se nga vazhdueshmëria e funksionit $u = f(\boldsymbol{x})$ në pikën $\boldsymbol{x}_0$, rrjedh vazhdueshmëria e tij në lidhje me secilën ndryshore. Pohimi i anasjelltë në përgjithësi nuk është i vërtetë. Kështu p.sh. funksioni:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{nëse } x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 0, & \text{nëse } x_1^2 + x_2^2 = (0,0) \end{cases},$$

është i vazhdueshëm në pikën $(0,0)$ në lidhje me variablat x_1 e x_2 ($\Delta_{x_1} u = \Delta_{x_2} u = 0$), por nuk është i vazhdueshëm në atë pikë (shembulli 2.3.1).

2.3.2 Veti të funksioneve të vazhdueshme

Në këtë pikë jepen vetitë themelore të funksioneve të vazhdueshme me m ndryshore. Meqë vërtetimi i tyre është analog me vërtetimin e vetive përkatëse të funksionit me një ndryshore dhe duke i marrë në konsiderim rezultatet që u dhanë më sipër, për disa prej tyre vetëm do të jepen shpjegime të shkurtra duke ia lënë lexuesit vërtetimin e detaleve.

Teorema 2.3.2 *3.2. Në qoftë se funksionet me m ndryshore $f(\boldsymbol{x})$ e $g(\boldsymbol{x})$, të përkufizuara në bashkësinë $D \subset \mathbf{R}^m$, janë të vazhdueshme në pikën $\boldsymbol{x}_0 \in D$ atëherë edhe funksionet $f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x})$, e $\frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}$ janë të vazhdueshme në pikën $\boldsymbol{x}_0$ (në rastin e herësit duhet të jetë $g(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$).*

Vërtetimi është i menjëhershëm kur përdorim teoremën 2.2.6.

Teorema 2.3.3 *Nëse funksioni $u = f(\boldsymbol{x})$, i përkufizuar në bashkësinë $D \subset \mathbf{R}^m$, është i vazhdueshëm në pikën $\boldsymbol{x}_0 \in D$ dhe nëse $f(\boldsymbol{x}_0) > 0$ ($f(\boldsymbol{x}_0) < 0$), atëherë ekziston $\delta-$rrethina e pikës $\boldsymbol{x}_0$, d.m.th. rruzulli $B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$, ashtu që për çdo $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$ kemi $f(\boldsymbol{x}) > 0$ ($f(\boldsymbol{x}) < 0$).*

Vërtetimi. Sipas supozimit, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston rruzulli $B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$ ashtu që për çdo $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$ vlen:

$$f(\boldsymbol{x}_0) - \varepsilon < f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon. \tag{1}$$

Le të jetë $f(\boldsymbol{x}_0) > 0$. Zgjedhim numrin ε të tillë që $\varepsilon = \frac{f(\boldsymbol{x}_0)}{2}$. Atëherë nga (1) shohim se $f(\boldsymbol{x}) > 0$ për çdo $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$.

Në rastin kur $f(\boldsymbol{x}_0) < 0$ marrim $\varepsilon = -\frac{f(\boldsymbol{x}_0)}{2}$ dhe veprojmë ngjashëm si më sipër. Teorema u vërtetua.

Në vazhdim tregojmë se kompozimi i dy funksioneve të vazhdueshme me shumë ndryshore është funksion i vazhdueshëm. Për thjeshtësi marrim rastin kur hallkat janë funksione me dy ndryshore. Së pari shohim si përkuzohet kompozimi i dy funksioneve të tilla. Le të jenë:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2) \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2), \end{aligned} \tag{2}$$

funksione të dhëna në bashkësinë $C \subset \mathbf{R}^2$ (t_1 e t_2 janë koordinatat e pikave në atë hapësirë). Atëherë, çdo pike $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in C$ i përgjigjet, sipas formulave (2), pika $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Shënojmë me D bashkësinë e të gjitha atyre pikave. Le të jetë $u = f(x_1, x_2)$ funksion me dy ndryshore i dhënë në bashkësinë $D \subset \mathbf{R}^2$. Në këtë rast thuhet se në bashkësinë $C \subset \mathbf{R}^2$ është përkufizuar funksioni i përbërë $u = f(x_1, x_2)$, ku x_1, x_2 janë funksione të ndryshoreve t_1, t_2 dhe ato janë të përkufizuara me barazimet (2).

Teorema 2.3.4 *Le të jenë $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2)$ funksione të vazhdueshme në pikën $\boldsymbol{t}_0 = (t_1^0, t_2^0)$, kurse funksioni $u = f(x_1, x_2)$ i vazhdueshëm në pikën $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0) = (\varphi_1(t_1^0, t_2^0), \varphi_2(t_1^0, t_2^0))$. Funksioni i përbërë $u = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2)$, ku x_1, x_2 janë funksione të argumenteve t_1 e t_2 të përkufizuaraa më sipër, është i vazhdueshëm në pikën $\boldsymbol{t}_0 = (t_1^0, t_2^0)$.*

Vërtetimi. Le të jetë $\{\boldsymbol{t}_n\} = \{(t_1^n, t_2^n)\}$ varg i çfarëdoshëm i pikave të C ashtu që $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{t_n} = \mathbf{t_0} = (t_1^0, t_2^0)$. Shënojmë me $\{\boldsymbol{x}_n\} = \{(x_1^n, x_2^n)\}$ vargun përkatës të pikave të hapësirës R^2, ku:

$$x_1^n = \varphi_1(t_1^n, t_2^n),\ x_2^n = \varphi_2(t_1^n, t_2^n).$$

Meqë funksionet φ_1 e φ_2 janë të vazhdueshme në pikën $\mathbf{t_0}$, atëherë, sipas përkufizimit 2.3.1. (kushti 2), rrjedh se vargu $\{\boldsymbol{x}_n\}$ konvergjon tek pika $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$. Tash nga fakti se funksioni $u = f(\boldsymbol{x})$ është i vazhdueshëm në pikën $\boldsymbol{x}_0$, sipas po atij përkufizimi, rrjedh se vargu $\{f(\boldsymbol{x}_n)\} = \{f(x_1^n, x_2^n)\}$ konvergjon te numri $f(\boldsymbol{x}_0) = f(x_1^0, x_2^0)$. Prandaj, vargu $\{f[\varphi_1(t_1^n, t_2^n), \varphi_2(t_1^n, t_2^n)]\}$ konvergjon tek numri $f[\varphi_1(t_1^0, t_2^0), \varphi_2(t_0^n, t_2^0)]$, që do të thotë se funksioni i përbërë është i vazhdueshëm në pikën $\mathbf{t_0} = (t_1^0, t_2^0)$. Teorema u vërtetua.

Teorema 2.3.5 *(teorema e parë e Vajershtrasit) Në qoftë se f është funksion i vazhdueshëm në bashkësinë e mbyllur e të kufizuar $D \subset \mathbf{R}^m$, atëherë ai është i kufizuar në D.*

Vërtetimi. Le të jetë $\boldsymbol{x}_0 \in D$ pikë e çfarëdoshme e bashkësisë D. Për çdo $\varepsilon > 0$, pra edhe për $\varepsilon = 1$, ekziston rruzulli $B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$ ashtu që për $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0; \delta)$ vlen:

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < 1.$$

Këndej, duke marrë parasysh pabarazimin e mirënjohur: $||a|-|b|| \leq |a-b|,\ a, b \in \mathbf{R}$, gjejmë:

$$|f(\boldsymbol{x})| < |f(\boldsymbol{x}_0)| + 1. \tag{3}$$

E mendojmë këtë proces të kryer për të gjitha pikat e zonës D. Si rezultat fitojmë familjen $\mathcal{U}$ të rruzujve e cila është mbulojë e zonës D. Meqë bashkësia D është kompakte (teorema 2.1.5) atëherë nga $\mathcal{U}$ mund të nxirret familja e fundme $\mathcal{U}'$ e cila është mbulojë e bashkësisë D. Le të jetë:

$$\mathcal{U}' = \{B(\boldsymbol{x}_i; \delta_i)|\ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Shënojmë me $M = \max\{|f(\boldsymbol{x}_i)|\, i = 1, 2, ..., n\}$. Tregojmë se funksioni f kufizohet me konstanten $(M + 1)$ në D.

Me të vërtetë, le të jetë $\boldsymbol{x} \in D$ pikë e çfarëdoshme. Atëherë, ekziston rruzulli $B(\boldsymbol{x}_{i_0}; \delta_{i_0}) \in \mathcal{U}', i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ ashtu që $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_{i_0}; \delta_{i_0})$. Sipas konstruksionit (shih (3)) do të kemi:

$$|f(\boldsymbol{x})| < |f(\boldsymbol{x}_{i_0})| + 1 \leq M + 1,$$

dhe me këtë teorema u vërtetua.

Supremumi dhe infimumi i funksionit me m ndryshore përkufizohet në mënyrë analoge si në rastin e funksionit me një ndryshore.

Thuhet se numri $M(m)$ është **supremum (infimum)** i funksionit f, të përkufizuar në bashkësinë D, nëse plotësohen kushtet:

1) $f(\boldsymbol{x}) \leq M \quad (f(\boldsymbol{x}) \geq m)$, për çdo $\boldsymbol{x} \in D$;

2) për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet pika $\boldsymbol{x}_1 \in D$ e tillë që $f(\boldsymbol{x}_1) > M - \varepsilon$ $(f(\boldsymbol{x}_1) < m + \varepsilon)$.

Simbolikisht shkruajmë $M = \sup\limits_{\boldsymbol{x} \in D}\{f(\boldsymbol{x})\},\ m = \inf\limits_{\boldsymbol{x} \in D}\{f(\boldsymbol{x})\}$.

Teorema 2.3.6 *(teorema e dytë e Vajershtrasit) Nëse $f\colon D \to \mathbf{R}$ është funksion i vazhdueshëm në bashkësinë e mbyllur e të kufizuar (kompakte) $D \subset \mathbf{R}^m$, ndërsa $M = \sup\limits_{\boldsymbol{x} \in D}\{f(\boldsymbol{x})\},\ m = \inf\limits_{\boldsymbol{x} \in D}\{f(\boldsymbol{x})\}$, atëherë ekzistojnë së paku dy pika $\boldsymbol{x}_M \in D, \boldsymbol{x}_m \in D$, ashtu që $f(\boldsymbol{x}_M) = M,\ f(\boldsymbol{x}_m) = m$.*

Me fjalë të tjera: funksioni i vazhdueshëm në zonën e mbyllur e të kufizuar D arrin vlerën më të madhe dhe vlerën më të vogël.

Vërtetimi i teoremës 2.3.6 është i ngjashëm si në rastin e funksionit me një ndryshore.

Po vëmë në dukje se nëse bashkësia $D \subset \mathbf{R}^m$ është e lidhur (shih përkufizimin 2.1.9) atëherë çdo dy pika të saj mund të bashkohen me vijën e thyer që shtrihet plotësisht në te.

Teorema 2.3.7 *Në qoftë se f është funksion i vazhdueshëm në bashkësinë e lidhur $D \in \mathbf{R}^m$, që ka vetinë se në pikat $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in D$ merr vlera me shenja të* *kundërt* ($f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{x}') < 0$)*, atëherë ekziston bile një pikë* $\boldsymbol{x}_0 \in D$ *ashtu që të jetë* $f(\boldsymbol{x}_0) = 0$.

Vërtetimi. Vërtetimin do ta bëjmë në rastin kur funksioni f është funksion me dy ndryshore, d.m.th. në rastin kur $u = f(x_1, x_2)$; rasti më i përgjithshëm tregohet në mënyrë analoge.

Meqë D është e lidhur, atëherë pikat $\boldsymbol{x}, x'$ mund të bashkohen me një vijë të thyer $A_1A_2...A_n$ ($A_1 = \boldsymbol{x}$, $A_n = \boldsymbol{x}'$) që shtrihet tërësisht në të. Nëse në ndonjërin prej kulmeve A_i ($i = 2, 3, ..., n-1$) të vijës së thyer funksioni f anulohet atëherë teorema konsiderohet e vërtetuar. Në rast të kundërt në vijën e thyer ekziston të paktën një segment i tillë A_iA_{i+1} ($i = 1, ..., n-1$) në skajet e të cilit funksioni merr vlera me shenja të ndryshme. Shënojmë me (x_1^i, x_2^i) e (x_1^{i+1}, x_2^{i+1}) pikat $\boldsymbol{x}_i = A_i, \boldsymbol{x}_{i+1} = A_{i+1}$. Ekuacionet parametrike të segmentit A_iA_{i+1} janë:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^i + (x_1^{i+1} - x_1^i)t \\ x_2 &= x_2^i + (x_2^{i+1} - x_2^i)t, \qquad\qquad 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

Kur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in A_iA_{i+1}$, atëherë funksioni $u = f(x_1, x_2)$ kthehet në funksion të një variabli i përkufizuar në segmentin [0,1]. Pra:

$$u = F(t) = f(x_1^i + (x_1^{i+1} - x_1^i)t, x_2^i + (x_2^{i+1} - x_2^i)t).$$

Funksioni $u = F(t)$ është i vazhdueshëm si funksion i përbërë i funksioneve të tillë. Po vëmë në dukje se:

$$F(0) = f(x_1^i, x_2^i) = f(\boldsymbol{x}_i), \ F(1) = f(\boldsymbol{x}_{i+1}),$$

si dhe $F(0) \cdot F(1) < 0$. Nga teorema e Bolcano-Koshit (për funksionet me një ndryshore) rrjedhë ekzistenca e pikës $t_0 \in [0, 1]$ ashtu që $F(t_0) = 0$. Pra $F(t_0) = f(x_1^0, x_2^0) = f(\boldsymbol{x}_0) = 0$, ku:

$$x_1^0 = x_1^i + (x_1^{i+1} - x_1^i)t_0, \ x_2^0 = x_2^i + (x_2^{i+1} - x_2^i)t_0.$$

Pra, pika $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$ si pikë e segmentit A_iA_{i+1} është pikë e bashkësisë D që ka vetinë $f(\boldsymbol{x}_0) = 0$. Teorema u vërtetua.

Rrjedhimi 2.3.1 Funksioni i vazhdueshëm $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^m$, në bashkësinë e lidhur D merr vlerë midis çdo dy vlerave të tij.

Vërtetimi bëhet në mënyrë analoge si në rastin e funksionit me një ndryshore.

Përkufizimi 2.3.4 *Funksioni* $f : D \to \mathbf{R}, D \subset \mathbf{R}^m$*, quhet* **uniformisht i vazhdueshëm në bashkësinë** D*, nëse për çdo* $\varepsilon > 0$ *ekziston* $\delta(\varepsilon) > 0$ *i tillë që për çdo* $\boldsymbol{x} \in D$ *dhe çdo* $\boldsymbol{y} \in D$*, që plotësojnë kushtin* $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \delta$*, plotësohet pabarazimi:*

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon.$$

Nga përkufizimi 2.3.4. rrjedh menjëherë se funksioni uniformisht i vazhdueshëm në bashkësinë D është i vazhdueshëm në të, por pohimi i anasjelltë në rastin e përgjithshëm nuk është i vërtetë.

Kështu, p.sh. funksioni $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$ është i vazhdueshëm në $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ por në te nuk është uniformisht i vazhdueshëm. Me të vërtetë për $\delta > 0$, sado të vogël, marrim pikat $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ që gjenden përkatësisht në largesat δ e $\frac{\delta}{2}$ nga origjina e koordinatave në të njëjtën rreze OL (fig. 2.3). Atëherë:

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')| = \left| \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{{x_1}'^2+{x_2}'^2}} \right| = \left| \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\frac{\delta}{2}} \right| = \frac{1}{\delta} \to \infty,$$

kur $\delta \to 0$, kurse largesa $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{\delta}{2} \to 0$.

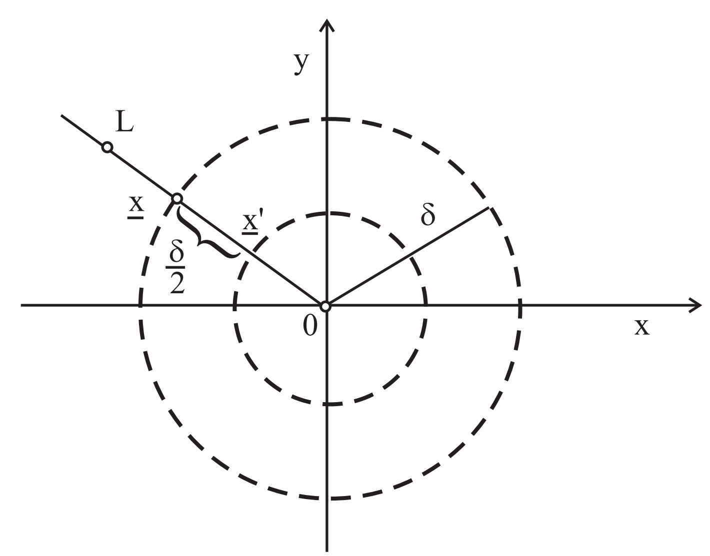


Fig. 2.3.

Megjithatë në rastin kur bashkësia D është e mbyllur dhe e kufizuar kuptimet e vazhdueshmërisë dhe vazhdueshmërisë uniforme janë ekuivalente. Ka vend ky rezultat:

Teorema 2.3.8 *(e Kantorit). Nëse $f : D \to \mathbf{R}$. $D \subset \mathbf{R}^m$, është funksion i vazhdueshëm në bashkësinë e mbyllur e të kufizuar D, atëherë ai është uniformisht i vazhdueshëm në atë bashkësi.*

Vërtetimi. Le të jetë $\boldsymbol{x}$ një pikë e fiksuar e zonës D. Atëherë, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston rruzulli $B(\boldsymbol{x}; \delta)$ ashtu që për çdo $\boldsymbol{x}' \in B(\boldsymbol{x}; \delta)$ vlen $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nëse $\boldsymbol{x}'' \in B(\boldsymbol{x}; \delta)$, atëherë:

$$|f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')| \le |f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x})| + |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}'')| < \varepsilon. \tag{4}$$

Këtë ecuri e konsiderojmë të kryer për çdo pikë $\boldsymbol{x} \in D$. Për çdo pikë të D gjendet rrethina e saj, çdo dy pika të së cilës plotësojnë pabarazimin (4).

Marrim në shqyrtim rruzujt me rreze $\frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$, për çdo $\boldsymbol{x} \in D$. Familja $\mathcal{U} = \{B(\boldsymbol{x}; \frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{x}})\}|\boldsymbol{x} \in D\}$ është mbulojë e hapur e bashkësisë kompakte. Prandaj, nga ajo mbulojë mund të nxirret nënmbuloja e fundme:

$$\mathcal{U}' = \{B(\boldsymbol{x}_i; \frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{x}_i}) \,|\, \boldsymbol{x}_i \in D, \; i = 1, 2, ..., n\}$$

e bashkësisë D. Marrim $\delta = \min\{\frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{x}_i} | \; i = 1, 2, ..., n\}$. Mbetet të tregojmë se për çdo dy pika $\boldsymbol{x}', x'' \in D$ të tilla që $d(\boldsymbol{x}', x'') < \delta$ plotësohet pabarazimi $|f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')| < \varepsilon$. Me të vërtetë, meqë $\boldsymbol{x}' \in D$ dhe $\mathcal{U}'$ është mbulojë e zonës D, ekziston $k \in \{1, ..., n\}$ ashtu që $\boldsymbol{x}' \in B(\boldsymbol{x}_k, \frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{x}_k})$; Këndej fitojmë:

$$d(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}') < \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{x}_k. \tag{5}$$

Nga ana tjetër, meqë $\delta < \frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{x}_k}$ kemi:

$$d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'') < \delta < \frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{x}_k}. \tag{6}$$

Nga (5) e (6) gjejmë:

$$d(\boldsymbol{x}'', \boldsymbol{x}_k) \leq d(\boldsymbol{x}'', \boldsymbol{x}') + d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}_k) < \delta_{\boldsymbol{x}_k},$$

d.m.th. $\boldsymbol{x}'' \in B(\boldsymbol{x}_k; \delta_{\boldsymbol{x}_k})$. Tash, meqë $\boldsymbol{x}' \in B(\boldsymbol{x}_k; \delta \boldsymbol{x}_k)$ si dhe $d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'') < \delta$, nga (4) rrjedh se $|f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')| < \varepsilon$. Teorema u vërtetua.

Përkufizimi 2.3.5 Luhatja e funksionit $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^m$, *në zonën* D, *shënohet me* $\omega_D(f)$ *(ose* $\omega(f; D)$*), quhet diferenca ndërmjet kufijve të përpiktë të vlerave të këtij funksioni në* D, *d.m.th.:*

$$\omega_D(f) = \sup_{\boldsymbol{x} \in D}\{|f(\boldsymbol{x})|\} - \inf_{\boldsymbol{x} \in D}\{|f(\boldsymbol{x})|\}$$

Nga teorema 2.3.8. rrjedh ky rezultat:

Rrjedhimi 2.3.2 Në qoftë se funksioni $f : D \to \mathbf{R}, D \subset \mathbf{R}^m$, është i vazhdueshëm në bashkësinë e mbyllur e të kufizuar D, atëherë për çdo $\epsilon > 0$ ekziston $\delta > 0$ ashtu që për çdo ndarje të bashkësisë D në bashkësi të mbyllura $D_1, D_2, ..., D_n$, të cilat nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta, me diametra më të vegjël se δ, luhatja ω_i e funksionit f në D_i, $i = 1, ..., n$, do të jetë më e vogël se ε.

Vërtetimi. Sipas teoremës 2.3.8, funksioni f është uniformisht i vazhdueshëm në D. Prandaj, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta > 0$ ashtu që për çdo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \delta$ vlen pabarazimi $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$. Më qenë se diametri i pjesëve ndarëse është më i vogël se δ, atëherë $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \delta$ për çdo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D_i, \; i = 1, ..., n;$, d.m.th $|f(\boldsymbol{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$. Le të jenë $\boldsymbol{x}_1 \in D_i, \; \boldsymbol{x}_2 \in D_i, \; i = 1, ..., n$, pika të tilla që $f(\boldsymbol{x}_1) = \sup\limits_{\boldsymbol{x} \in D_i}\{f(\boldsymbol{x})\}$, $f(\boldsymbol{x}_2) = \inf\limits_{\boldsymbol{x} \in D_i}\{f(\boldsymbol{x})\}$. Atëherë, nga:

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq \sup\{|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})|\} = f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2) < \varepsilon,$$

për çdo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D_i$, $i = 1, ..., n$, shohim se $\omega_i(f) < \varepsilon$.

2.3.3 Detyra për ushtrime

1. Le të jetë E bashkësi joboshe në të cilën është përkufizuar largesa $d(x,y)$ (në mes të elementeve $x,y\in E$) me

   $d(x,y)=\begin{cases} a(>0), & x\neq y,\\ 0, \text{ x= y.} \end{cases}$

   Të tregohet se (E,d) është hapësirë metrike.

2. Le të jetë $C[a,b]$ bashkësia e të gjitha funksioneve të vazhdueshme të përkufizuara në segmentin $[a,b]$ dhe:

   $$d(x,y)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|,\ (\forall x,y\in C[a,b]).$$

   Të tregohet se $C[a,b]$ është hapësirë metrike.

3. Le të jetë $C[\alpha,\beta]$ bashkësia e të gjitha funksioneve të vazhdueshme në $[\alpha,\beta]$, dhe:

   $$d(x,y)=\left\{\int_{\alpha}^{\beta}[x(t)-y(t)]^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

   Të tregohet se $C(\alpha,\beta)$ është hapësirë metrike.

4. Janë dhënë nënbashkësitë e $\mathbf{R}^2$:

   $$\begin{aligned} E &= \left\{(x,y)|x^2+y^2<4\right\},\\ F &= \left\{(x,y)|\left[(x-1)^2+y^2\leq\frac{1}{2}\right]\vee(12\leq 4x+3y\leq 15)\right\} \end{aligned}$$

   Të tregohet se a janë bshkësitë:

   $$E,F,E\cap F,E\cap F^c \text{ dhe } E\cup\partial E,$$

   konvekse, të kufizuara, të lidhura dhe të hapura (të mbyllura).

5. Të zgjidhet detyra 4. në rastin kur:

   $$\begin{aligned} E &= \{(x,y)|1<x^2+y^2<2\},\\ F &= \{(x,y)|\ (xy>-1)\wedge(2x+y\geq 0\} \end{aligned}$$

6. Të shqyrtohet konvergjenca e vargjeve:

   a)$\{\boldsymbol{x}_n\},\boldsymbol{x}_n=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^2+1}\right)$;

   b)$\{\boldsymbol{x}_n\},\boldsymbol{x}_n=\{(-1)^n,\frac{1}{n}\}$;

   c) $\{\boldsymbol{x}_n\},\boldsymbol{x}_n=\left(\dfrac{1}{n+1},e^{-n},\sqrt[n]{2},\arctan n\right)$;

7. Të shqyrtohet konvergjenca e vargut $\{\boldsymbol{x}_n\}, \boldsymbol{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$.

8. Të gjendet fusha e përkufizimit për funksionet:

   a) $f(x,y) = x + y$; $\quad b) f(x,y) = \frac{1}{x+y}$;

   c)$f(x,y) = \frac{x}{y}$; $\quad d) f(x,y) = \ln(x+y)$;

   c) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$; $\quad f) f(x,y) = \arctan(x+y) + \sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$;

   g) $f(x,y,z) = \arcsin\frac{z}{x^2+y^2} + xyz - e^{xyz}$;

   h) $f(x,y,z) = \sqrt{(x^2+y^2-z^2-1)(4-x^2-y^2-z^2)}$.

9. Të caktohet dhe të paraqitet grafikisht fusha e përkufizimit për funksionet:

   $a) f(x,y) = \sqrt{xy}$; $\quad b)\ f(x,y) = y^2 + \arccos\frac{x}{x+y}$.

10. Është dhënë funksioni $f(x,y) = \dfrac{xy-1}{y+6}$. Me përkufizim të tregohet se

    $a) \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 1}} f(x,y) = -\frac{2}{7}$ $\qquad b) \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to\infty}} f(x,y) = a$.

11. Të tregohet se nuk ekziston:

    $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}.$$

    Udhëzim: të merren vargjet $\{\boldsymbol{x}_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}, \{\mathbf{y}_n\} = \left\{\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ dhe të përdoret përkufizimi i Hajnes për limitin e funksionit.

12. Të tregohet se për funksionin $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ ekzistojnë limitet e përsëritura në pikën $(0,0)$ por nuk ekziston $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x,y)$.

    Udhëzim: të merren në shqyrtim vargjet si në detyrën e mësipërme.

13. Le të jetë $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$. Të tregohet se ekziston $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$, mirëpo limitet e përsëritura në pikën $(0,0)$ nuk ekzistojnë.

14. Të llogariten limitet:

    a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -1}} \dfrac{xy-x-y-1}{\sqrt{xy-x-y+2-1}}$; $\qquad$ **b**) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{x}$;

    c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)x^2y^2$; $\qquad$ **d**) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} (1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$.

15. Të gjenden:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+x-y}{y^2+x^3+y^3}$, nëse pika (x,y) i afrohet pikës $(0,0)$ sipas lakoreve: 1^0 $y=e^x-1$; 2^0 $y=x$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{xy}$, nëse pika (x,y) gjendet në lakoren $x^5-x-6^y-y=1$.

16. Të shqyrtohet vazhdueshmëria e funksionit f i dhënë me:

a) $f(x,y)=\arcsin(x+y)$;

b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0),\\ 1, (x,y)=(0,0);\end{cases}$

c) $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y-1}$.

17. Të tregohet se nëse në ndonjë bashkësi $D\subset \mathbf{R}^2$ funksioni $f(x,y)$ është i vazhdueshëm sipas ndryshores x dhe plotëson kushtin e Lipshicit sipas y, d,m,th.:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|,$$

ku $(x,y_1)\in D, (x,y)\in D$ dhe L-konstante, atëherë ai funksion është i vazhdueshëm në D.

18. Të tregohet se bashkësia e pikave të këputjes të funksionit $f(x,y)=\sin\frac{1}{y}$, nëse $y\neq 0$ dhe $f(x,0)=0$, nuk është e mbyllur.

19. Të shqyrtohet konvergjenca uniforme e funksionit:

$$f(x,y)=\sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$$

në bashkësinë:

$$D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}.$$

20. Të shqyrtohet vazhdueshmëria dhe vazhdueshmëria uniforme e funksioneve :

a) $(x,y)\mapsto u=\frac{1}{\ln(x^2+y^2+1)}$;

b) $(x,y)\mapsto u=\frac{\log(xy)}{x^2+y^2-a^2}(a\in\mathbf{R})$:

21. Le të jetë:

1) $f(x,y)$ i vazhdueshëm në bashkësinë $D=\{(x,y)\,|\,a<x<A,\, b<y<B\}$;

2) funksioni $\varphi(x)$ i vazhdueshëm në intervalin (a,A) dhe merr vlerat nga intervali (b,B).

Të tregohet se funksioni $F(x)=f(x,\phi(x))$ është i vazhdueshëm në (a,A).

22. Le të jetë $f(x,y)$ funksion i vazhdueshëm në bashkësinë:

$$D = \{(x,y) \,|\, a \le x \le A,\ b \le y \le B\},$$

kurse vargu i funksioneve $\{\varphi_n(x)\}$ konvergjon uniformisht në $[a,A]$ dhe plotëson kushtin $b \le \varphi_n(x) \le B$ $(n = 1,2,...)$. Të tregohet se vargu i funksioneve $\{F_n(x)\}$, $F_n(x) = f(x, \varphi_n(x))$ $(n = 1,2,...)$ po ashtu konvergjon uniformisht në $[a,A]$.

23. Le të jetë $g(x,y) = x + y + f(x-y)$.

1. Të caktohen funksionet f e g nëse $g(x,0) = x^2$.

2. A mund të plotësohet domeni e funksionit $F(x,y) = \dfrac{g(x,y)-2y}{(x+y)^2}$, ashtu që ai të jetë i vazhdueshëm në pikën $(0,0)$?

2.4 DIFERENCIMI I FUNKSIONEVE ME m NDRYSHORE

2.4.1 Derivatet e pjesshme

Le të jetë $M(x_1,x_2,...,x_m)$ pikë e brendshme e bashkësisë $D \subset \mathbf{R^m}$ në të cilën është i përkufizuar funksioni $u = f(x_1,x_2,...,x_m)$. Atëherë, shprehja:

$$\frac{\triangle_{x_k} u}{\triangle x_k} = \frac{f(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_k+\triangle x_k,x_{k+1},...,x_m) - f(x_1,x_2,...,x_m)}{\triangle x_k} \tag{1}$$

paraqet raportin e shtesës së pjesshme $\triangle_{x_k} u$ dhe shtesës përkatëse $\triangle x_k$ të argumentit x_k në pikën $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,...,x_m)$.

Herësi (1) është funksion i $\triangle x_k$, i përkufizuar për çdo $\triangle x_k \neq 0$ për të cilët pika $(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_k+\triangle x_k,x_{k+1},...,x_m)$ i takon fushës së përkufizimit D të funksionit $u = f(x_1,x_2,...,x_m)$.

Përkufizimi 2.4.1 *Limitin e herësit (1), nëse ekziston, kur $\triangle x_k \to 0$, e quajmë* **derivat të pjesshëm** *të funksionit $u = f(x_1,x_2,...,x_m)$ në pikën M sipas argumentit x_k dhe e shënojmë me njërin nga simbolet:*

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial f}{\partial x_k}, u'_{x_k}, f'_{x_k}.$$

Kështu:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\triangle x_k \to 0} \frac{\triangle_{x_k} u}{\triangle x_k}.$$

Theksojmë se derivati i pjesshëm i funksionit $u = f(x_1,x_2,...,x_m)$ sipas ndryshores x_k, paraqet derivatin e zakonshëm të funksionit të një ndryshoreje x_k kur argumentet e tjera i fiksojmë. Prandaj llogaritja e derivatit të pjesshëm bëhet sipas rregullave të zakonshme për llogaritjen e derivatit të funksionit me një ndryshore.

Shembuj 2.4.1 **1.** $u = \arctan(xy^2)$; $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y^2}{1 + x^2 \cdot y^4}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2xy}{1 + x^2 y^4}.$

2. $u = e^{\frac{x^2+y^2}{z}}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{z} e^{\frac{x^2+y^2}{z}}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{z} e^{\frac{x^2+y^2}{z}}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x^2+y^2}{z^2} e^{\frac{x^2+y^2}{z}}, z \neq 0.$$

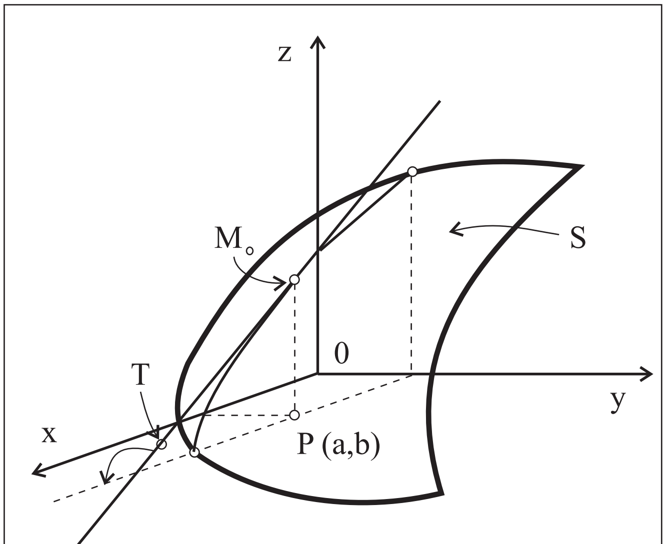


Fig. 2.4.

Vërejtja 1. Nga ekzistenca e të gjitha derivateve të pjesshme në pikën e dhënë, në rastin e përgjithshëm, nuk rrjedh vazhdueshmëria funksionit në atë pikë. Ne dimë se funksioni (shembulli 2.3.1)

$$u = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ për } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 \text{ për } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

nuk është i vazhdueshëm në pikën $O(0,0)$. Mirëpo, lehtë shihet se:

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial u(0,0)}{\partial y} = 0,$$

d.m.th. ekzistojnë derivatet e pjesshme të funksionit në atë pikë.

Vërejtje 2. Derivatet e pjesshme të funksionit me dy ndryshore mund të interpretohen gjeometrikisht në mënyrë analoge si derivati i zakonshëm i funksionit. Dihet se funksioni $u = f(x,y)$ paraqet në hapësirë, në lidhje me një sistem koordinativ Oxy, një sipërfaqe S. Marrim $y = b$, d.m.th. fiksojmë ndryshoren y. Gjeometrikisht kjo do të thotë që sipërfaqen S e presim me rrafshin $y = b$, dhe si rezultat merret vija e cila në rrafshin e mësipërm jepet me ekuacionin $u = f(x,b)$ (fig. 2.4), d.m.th. si grafik i funksionit u të argumentit x. Atëherë, siç e dimë nga kuptimi gjeometrik i derivatit të zakonshëm, derivati i pjesshëm i funksionit $u = f(x, y)$ në një pikë $P(a, b)$, që është derivat i zakonshëm i funksionit $u = f(x, b)$ në pikën $x = a$, paraqet koeficientin këndor të tangjentes M_0T të lakores me ekuacion $u = f(x, b)$, të hequr në pikën me abshisë $x = a$. Pra, ai paraqet tangjentin e këndit që formon kjo tangjente me drejtimin pozitiv të boshtit Ox. Në mënyrë analoge jepet interpretimi gjeometrik i derivatit të pjesshëm $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

2.4.2 Diferenciali i funksionit me m ndryshore

Së pari shqyrtojmë rastin e funksionit me dy ndryshore. Le të jetë $u = f(x_1, x_2)$ funksion i përkufizuar në bashkësinë $D \subset \mathbf{R}^2$ dhe $M(x_1, x_2)$ pikë e çfarëdoshme e saj. Në qoftë se ndryshoreve x_1 e x_2 u japim shtesat $\triangle x_1$ e $\triangle x_2$, përkatësisht, ashtu që pika $M'(x_1 + \triangle x_1, x_2 + \triangle x_2)$ të mbetet në D, atëherë shtesa (shtesa e plotë) e funksionit është:

$$\triangle u = f(x_1 + \triangle x_1, x_2 + \triangle x_2) - f(x_1, x_2)$$

Përkufizimi 2.4.2 *Thuhet se funksioni $u = f(x_1, x_2)$ është i* **diferencueshëm** *në pikën e dhënë $M(x_1, x_2)$, nëse shtesa e tij e plotë në atë pikë mund të paraqitet në formën:*

$$\triangle u = A_1 \triangle x_1 + A_2 \triangle x_2 + \alpha_1 \triangle x_1 + \alpha_2 \triangle x_2, \tag{1}$$

ku A_1, A_2, janë numra realë që nuk varen nga $\triangle x_1$ e $\triangle x_2$, kurse α_1 e α_2 janë madhësi pambarimisht të vogla kur $\triangle x_1 \to 0, \triangle x_2 \to 0$, ndërsa janë të barabarta me 0 kur $\triangle x_1 = \triangle x_2 = 0$.

Në këtë rast pjesa $A_1 \triangle x_1 + A_2 \triangle x_2$ e shtesës $\triangle u$, që është kombinim linear i $\triangle x_1$ e $\triangle x_2$ (kur të paktën njëra nga A_1 ose A_2 është i ndryshëm nga zero) dhe që paraqet pjesën kryesore të kësaj shtese, quhet **diferencial i plotë** ose **diferencial** i këtij funksioni në pikën $M(x_1, x_2)$ dhe shënohet me një nga simbolet:

$$df(x_1, x_2), du(x_1, x_2), df, du.$$

Në vazhdim barazimin (1), i cili quhet dhe **kushti i diferencushmërisë** së funksioneve në pikën e dhënë M, do ta shkruajmë në formë tjetër. Le të jetë:

$$\rho = \sqrt{\triangle x_1^2 + \triangle x_2^2}.$$

Vërejmë se ρ është funksion pambarimisht i vogël kur $\triangle x_1 \to 0, \triangle x_2 \to 0$, si dhe $\rho = 0$ kur $\triangle x_1 = \triangle x_2 = 0$. Tregojmë se shuma $\alpha_1 \triangle x_1 + \alpha_2 \triangle x_2$, kur $\triangle x_1 \to 0, \triangle x_2 \to 0$ është madhësi pambarimisht e vogël e rendit më të lartë vogëlsie se ρ, d.m.th. që:

$$\alpha_1 \triangle x_1 + \alpha_2 \triangle x_2 = 0(\rho).$$

Me të vërtetë, për $\rho \neq 0$ kemi:

$$\frac{|\triangle x_1|}{\rho} \leq 1, \frac{|\triangle x_2|}{\rho} \leq 1,$$

prandaj:

$$|\alpha_1 \triangle x_1 + \alpha_2 \triangle x_2| \leq \left(|\alpha_1|\frac{|\triangle x_1|}{\rho} + |\alpha_2|\frac{|\triangle x_2|}{\rho}\right)\rho \leq (|\alpha_1| + |\alpha_2|)\rho.$$

Këndej rrjedh se kushti (1) mund të shkruhet në formën:

$$\triangle u = A_1 \triangle x_1 + A_2 \triangle x_2 + 0(\rho). \tag{2}$$

Në rastin kur $\rho = 0$ konsiderojmë që $0(\rho) = 0$.

Që të tregojmë se kushtet (2) e (1) janë ekuivalente mbetet të tregojmë se nëse $\triangle u$ jepet me barazimin (2) atëherë $\triangle u$ mund të paraqitet edhe me (1).

Supozojmë se $\triangle x_1$ e $\triangle x_2$ njëkohësisht nuk janë të barabarta me zero (në të kundërtën të gjithë termat e formulës (1) bëhen zero). Atëherë:

$$0(\rho) = \frac{0(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho^2}{\rho} = \frac{0(\rho)}{\rho} \frac{\triangle x_1^2 + \triangle x_2^2}{\rho} = \frac{0(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\triangle x_1}{\rho} \cdot \triangle x_1 + \frac{0(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\triangle x_2}{\rho} \cdot \triangle x_2.$$

Nëse shënojmë:

$$\frac{0(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\triangle x_1}{\rho} = \alpha_1, \frac{0(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\triangle x_2}{\rho} = \alpha_2,$$

shohim se α_1 e α_2 janë madhësi pambarimisht të vogla kur $\rho \to 0$ (d.m.th. kur $\triangle x_1 \to 0, \triangle x_2 \to 0$). Këndej rrjedh se $\triangle u$ mund të paraqitet me formulën (1). Kështu treguam se kushti i diferencueshmërisë mund të shkruhet me formulën (1) ose (2).

Po theksojmë se në përkufizimin 2.4.2. nuk është përjashtuar mundësia që numrat A_1 e A_2 të jenë të barabartë me zero. Kështu, nëse shtesa $\triangle u$ mund të shkruhet në formën (1) ose (2) ku $A_1 = A_2 = 0$, atëherë funksioni u do të jetë i diferencueshëm në pikën e dhënë.

Është e natyrshme të shtrohet problemi i gjetjes së konstanteve A_1 e A_2. Ka vend kjo teoremë:

Teorema 2.4.1 *Në qoftë se funksioni $u = f(x_1, x_2)$ është i diferencueshëm në pikën $M(x_1, x_2)$, atëherë në këtë pikë ekzistojnë derivatet e pjesshme të tij dhe:*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = A_1, \frac{\partial u}{\partial x_2} = A_2.$$

Vërtetimi. Nga kushti (1) i diferencueshmërisë së funksionit në pikën $M(x_1, x_2)$ rrjedh se shtesa e pjesshme $\triangle_{x_1} u$ në atë pikë është:

$$\triangle_{x_1} u = f(x_1 + \triangle x_1, x_2) - f(x_1, x_2) = A_1 \triangle x_1 + \alpha_1 \triangle x_1.$$

Këndej fitojmë:

$$\frac{\triangle_{x_1} u}{\triangle x_1} = A_1 + \alpha_1,$$

dhe meqë $\alpha_1 \to 0$ kur $\triangle x_1 \to 0$, marrim:

$$\lim_{\triangle x_1 \to 0} \frac{\triangle_{x_1} u}{\triangle x_1} = A_1,$$

d.m.th.:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = A_1.$$

Në mënyrë analoge tregohet se $A_2 = \dfrac{\partial u}{\partial x_2}$, dhe teorema u vërtetua.

Rrjedhimi 2.4.1 Kushti (2) i diferencueshmërisë së funksionit $u = f(x_1, x_2)$ mund të shkruhet në këtë formë:

$$\triangle u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \triangle x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \triangle x_2 + 0(\rho). \tag{3}$$

Tash dhe duke ditur se:

$$\triangle x_1 = dx_1, \triangle x_2 = dx_2,$$

shohim se diferenciali i plotë i funksionit $u = f(x_1, x_2)$ në pikën $M(x_1, x_2)$, mund të shkruhet edhe në trajtën:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2.$$

Rrjedhimi 2.4.2 Nëse funksioni $u = f(x_1, x_2)$ është i diferencueshëm në pikën $M(x_1, x_2)$, atëherë paraqitja e shtesës $\triangle u$ në formën (1) ose (2) është e vetme.

Vërtetimi është evident meqë koeficientët A_1 e A_2 janë derivate të pjesshme $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, përkatësisht, në pikën e dhënë, d.m.th. janë të përkufizuar me shprehje të vetme.

Vërejmë se **nëse funksioni është i diferencueshëm në pikën** $M(x_1, x_2)$ **atëherë ai është i vazhdueshëm në atë pikë**.

Me të vërtetë, nga kushti (1) rrjedh se $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}} \Delta u = 0$, që tregon ae funksioni është i vazhdueshëm në pikën $M(x_1, x_2.)$

Teorema 2.4.1. pohon se diferencueshmëria e funksionit në një pikë siguron ekzistencën e derivateve të pjesshme të tij në atë pikë. Në rastin e funksionit me një ndryshore, siç dihet, ka vend edhe pohimi i anasjelltë. Me fjalë të tjera kuptimet e derivatit e të diferencialit të funksionit me një ndryshore janë ekuivalente. Për funksionet me dy ndryshore ky pohim, në përgjithësi nuk është i vërtetë.

Marrim p.sh. funksionin $u = f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$. Meqë $f(x_1, 0) = 0 = f(0, x_2)$, atëherë $\frac{\partial u(0,0)}{\partial x_1} = 0 = \frac{\partial u(0,0)}{\partial x_2}$, d.m.th. funksioni ka derivate të pjesshme në pikën $O(0,0)$. Tregojmë e ky funksion nuk është i diferencueshëm në këtë pikë. Nga supozimi i kundërt do të kishim:

$$\Delta u = o(\rho). \tag{4}$$

Por, për $\Delta x_1 = \Delta x_2 > 0$ kemi $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2} = \sqrt{2}\Delta x_1$, kurse:

$$\Delta u = f(\Delta x_1, \Delta x_1) - f(0,0) = \Delta x_1.$$

Këndej rrjedh se:

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta u}{\rho} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_1}{\sqrt{2}\Delta x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d.m.th. gjetëm se Δu e ρ janë madhësi pambarimisht të vogla të të njëjtit rend vogëlsie kur $\Delta x_1 \to 0$, që është në kundërshtim me barazimin (4).

Pra, në përgjithësi kërkesa e diferencueshmërisë së një funksionit në një pikë është më e fuqishme se kërkesa e ekzistencës së derivateve të pjesshme të funksionit në atë pikë. Megjithatë, ka vend rezultati në vijim i cili siguron kusht të nevojshëm dhe të mjaftueshëm për diferencueshmërinë e funksionit në një pikë.

Teorema 2.4.2 *Në qoftë se funksioni $u = f(x_1, x_2)$ ka derivate të pjesshme të vazhdueshme në pikën $M(x_1, x_2)$, atëherë ai është i diferencueshëm në këtë pikë.*

Vërtetimi. Me qenë se funksioni ka derivate të pjesshme të vazhdueshme në pikën $M(x_1, x_2)$, ato janë të përcaktuara në një rrethinë të asaj pike.

Le të jenë Δx_1 e Δx_2 shtesat e argumenteve x_1 e x_2 të tilla që pika $M_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ të përfshihet në atë rrethinë të pikës $M(x_1, x_2)$.

Tregojmë se:

$$\frac{\Delta u - du}{\rho} \to 0,$$

kur $\rho \to 0$. Për këtë qëllim, shtesën Δu të funksionit e paraqesim në formën:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= [f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2 + \Delta x_2)] + \\ &+ [f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)]. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Shqyrtojmë së pari diferencën e parë në barazimin (5). Argumenti i dytë në të dy kufizat e saj ruan të njëjtën vlerë $x_2 + \Delta x_2$, prandaj këtë diferencë mund ta konsiderojmë si shtesë të funksionit të argumentit x_1 :

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2 + \Delta x_2)$$

në $[x_1, x_2 + \Delta x_2]$.

Sipas supozimit, funksioni $\varphi(x_1)$ është i derivueshëm në segmentin $[x_1, x_1 + \Delta x_1]$ dhe:

$$\varphi'(x_1) = \frac{\partial f(x_1, x_2 + \Delta x_2)}{\partial x_1}$$

prandaj, në bazë të teoremës së Lagranzhit, kemi:

$$f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) - f(x_1, x_2+\Delta x_2) =$$
$$= f'_{x_1}(x_1+\theta_1\cdot\Delta x_1, x_2+\Delta x_2)\cdot\Delta x_1, \text{ ku } \quad 0<\vartheta_1<1.$$

Në mënyrë analoge diferencën e dytë të anës së djathtë së (5) mund ta shkruajmë në trajtën:

$$f(x_1, x_2+\Delta x_2) - f(x_1,x_2) = f'_{x_2}(x_1, x_2+\vartheta_2\cdot\Delta x_2)\cdot\Delta x_2 \text{ ku } \quad 0<\vartheta_2<1.$$

Tash barazimi (5) merr formën:

$$\Delta u = f'_{x_1}(x_1+\vartheta_1\Delta x_1, x_2+\Delta x_2)\cdot\Delta x_1 + f'_{x_2}(x_1, x_2+\vartheta_2\Delta x_2)\cdot\Delta x_2,$$

prandaj:

$$\Delta u - du = [f'_{x_1}(x_1+\vartheta_1\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) - f'_{x_1}(x_1,x_2)]\Delta x_1 +$$
$$+[f'_{x_2}(x_1, x_2+\vartheta_2\Delta x_2) - f'_{x_2}(x_1\cdot x_2)]\cdot\Delta x_2.$$

Nga fakti se $|\Delta x_1|\le\rho, |\Delta x_2|\le\rho$, marrim:

$$\frac{|\Delta u - du|}{\rho} \le |f'_{x_1}(x_1+\vartheta_1\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) - f'_{x_1}(x_1,x_2)| +$$
$$+|f'_{x_2}(x_1, x_2+\vartheta_2\Delta x_2) - f'_{x_2}(x_1,x_2)|.$$

Nga vazhdueshmëria e funksioneve $f'_{x_1}(x_1,x_2)$ e $f'_{x_2}(x_1,x_2)$ në pikën e dhënë $M(x_1,x_2)$ rrjedh se, kur $\rho\to 0$, kufizat e anës së djathtë të pabarazimit të fundit tentojnë në zero. Prandaj:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u - du}{\rho} = 0$$

ose:

$$\Delta u = du + 0(\rho),$$

që tregon se funksioni $f(x_1,x_2)$ është i diferencueshëm në pikën $M(x_1,x_2)$. Teorema u vërtetua.

Konceptet e diferencueshmërisë e të diferencialit në mënyrë analoge zgjerohen edhe për funksionet e m ndryshoreve, $m>2$, dhe në mënyrë të ngjashme formulohen e vërtetohen pohimet e mësipërme për këto funksione. Kështu, funksioni $u=f(x_1,x_2,....,x_m)$ është i diferencueshëm në pikën $M(x_1,\ x_2,....,x_m)$, nëse shtesa e plotë e tij Δu mund të paraqitet me njërin nga barazimet:

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + ... + \alpha_m\Delta x_m$$

ose:

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_m\Delta x_m + 0(\rho)$$

($\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+...+\Delta x_m^2}$) ku $A_i,\ i=1,...,m$, janë numra që nuk varen nga $\Delta x_i,\ i=1,...,m,$, kurse $\alpha_i\to 0$, kur $\Delta x_i\to 0$, i=1 ,..., m. Pastaj $\alpha_i=0$ kur $\Delta x_i=0$, $i=1,....,m$.

Diferenciali i funksionit $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ në pikën $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_m)$ është:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m.$$

2.4.3 Kuptimi gjeometrik i kushtit të diferencueshmërisë

Në rastin e funksionit me dy ndryshore mund të jepet kuptimi gjeometrik i kushtit të diferencueshmërisë. Shënojmë me S sipërfaqen e cila është grafiku i funksionit me dy ndryshore $u = f(x, y)$. Së pari japim përkufizimin e rrafshit tangjent të sipërfaqes S, i cili kalon nëpër një pikë N_0 të saj .

Rrafshi Π, i cili kalon nëpër pikën N_0 të sipërfaqes S, quhet **rrafsh tangjent** në atë pikë nëse këndi në mes të atij rrafshi dhe tetivës, e cila kalon nëpër pikën N_0 dhe cilëndo pikë N_1 të sipërfaqes, tenton në zero kur pika N_1 tenton në N_0 (fig.2.5).

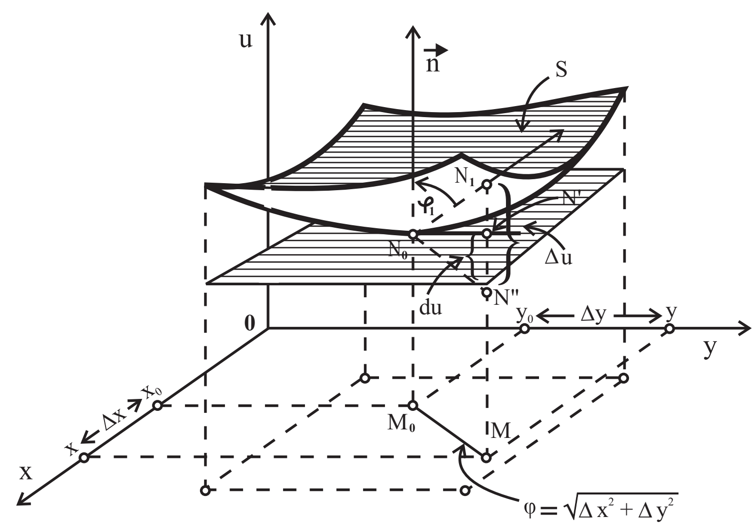


Fig. 2.5.

Tregojmë se në qoftë se funksioni $u = f(x, y)$ është i diferencueshëm në pikën $M_0(x_0, y_0)$, atëherë ekziston rrafshi tangjent i grafikut S të atij funksioni në pikën $N_0(x_0, y_0, u_0), u_0 = f(x_0, y_0)$. Shënojmë $\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = y - y_0,\ \Delta u = u - u_0$. Atëherë, kushtin (1) të pikës 2.4.2 (d.m.th. kushtin e diferencueshmërisë) mund ta shkruajmë në formën:

$$u - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho), \quad (1)$$

ku A dhe B janë konstante të tilla që $A = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x},\ B = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}$, kurse α e β tentojnë në zero kur $\Delta x \to 0$ dhe $\Delta y \to 0$, si dhe $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Marrim barazimin:

$$U - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0). \quad (2)$$

Nga gjeometria analitike dihet se (2) paraqet, në sistemin koordinativ të dekartit (x, y, U), ekuacionin e një rrafshi Π, i cili kalon nëpër pikën $N_0(x_0, y_0, u_0)$ vektori normal i të cilit është $\mathbf{n} = \{A, B, -1\}$.

Tregojmë se rrafshi Π është rrafsh tangjent i sipërfaqes S në pikën N_0. Për këtë mjafton të tregojmë se: 1) rrafshi Π kalon nëpër pikën N_0 të sipërfaqes S dhe 2) këndi φ_1 në mes të normales $\mathbf{n}$ dhe çdo tetive N_0N_1 tenton në $\frac{\pi}{2}$, kur pika N_1 e sipërfaqes S tenton në pikën N_0. Pohimi 1) është evident. Tregojmë se vlen 2). Meqë $\mathbf{N_0N_1} = \{x-x_0, y-y_0, u-u_0\}$, kemi:

$$\cos\varphi_1 = \frac{A(x-x_0)+B(y-y_0)-(u-u_0)}{\sqrt{A^2+B^2+1}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(u-u_0)^2}}.$$

Nga (1) gjejmë:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)-(u-u_0) = 0(\rho).$$

Prandaj:

$$|\cos\varphi_1| \leq \frac{|0(\varphi)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{|0(\varphi)|}{\rho} \to 0,$$

kur $\rho \to 0$, d.m.th. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\cos\varphi_1 = \cos\lim\limits_{\varphi\to 0}\varphi = 0$. Këndej rrjedh se $\lim\limits_{\varphi\to 0}\varphi = \frac{\pi}{2}$, dhe po himi 2) u vërtetua.

Nga (2) shohim se $du = U-u_0$. Prandaj kuptimi gjeometrik i diferencialit të funksionit me dy ndryshore është: **nëse $u=f(x,y)$ është i diferencueshëm në pikën $M_0(x_0,y_0)$, sipërfaqja S e cila është grafik i funksionit u ka në pikën M_0 rrafsh tangjent dhe diferenciali du i këtij funksioni në pikën M_0 është i barabartë me $U-u_0 = N''N'$ (fig. 2.5), që paraqet shtesën e plotë të funksionit të rrafshit tangjent në pikën N_0 që i korrespondon shtesave të argumenteve Δx e Δy në atë pikë.**

Meqë $A = \frac{\partial u}{\partial x}, B = \frac{\partial u}{\partial y}$, nga (2) gjejmë:

$$U-u_0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(y-y_0).$$

Bartësja e vektorit $\mathbf{n} = \{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1\}$, që është normale në rrafshin tangjent, quhet **normale** e sipërfaqes $u=f(x,y)$ në pikën $N_0(x_0,y_0,u_0)$.

2.4.4 Diferencimi i funksioneve të përbëra

Teorema 2.4.3 *Në qoftë se funksionet $x=x(t), y=y(t)$ janë të diferencueshme (d.m.th. të derivueshme, sepse janë funksione të një ndryshoreje) në pikën t_0 kurse funksioni $u=f(x,y)$ është i diferencueshëm në pikën $(x_0,y_0)(x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$, atëherë funksioni i përbërë $u=f[x(t),y(t)]$, i përkufizuar në një rrethinë të pikës t_0, është i derivueshëm në pikën t_0 dhe derivati i tij është:*

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \tag{1}$$

ose më saktë:

$$\frac{df(x(t_0),y(t_0))}{dt} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot\frac{dx(t_0)}{dt}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot\frac{dy(t_0)}{dt}.$$

Vërtetimi. Argumentit t i japim shtesën Δt dhe me Δx, Δy e Δu shënojmë shtesat përkatëse të funksioneve $x = x(t), y = y(t)$ dhe $u = f(x, y)$. Meqë funksioni u është i diferencueshëm në pikën (x_0, y_0), kemi:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + 0(\rho) \tag{2}$$

ku $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Le të jetë $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ madhësi pambarimisht e vogël kur $\rho \to 0$. Shënojmë $0(\rho) = \alpha \cdot \rho$. Nga (2) fitojmë:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \sqrt{\Big(\frac{\Delta x}{\Delta t}\Big)^2 + \Big(\frac{\Delta y}{\Delta t}\Big)^2}. \tag{3}$$

Kur $\Delta t \to 0$, shohim se $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$ (sepse funksionet $x(t)$ e $y(t)$ janë të vazhdueshme në pikën t_0,) prandaj edhe $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \rho = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0$. Atëherë, $\lim\limits_{\rho \to 0} \alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \alpha = 0$. Pastaj:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\Big(\frac{\Delta x}{\Delta t}\Big)^2 + \Big(\frac{\Delta y}{\Delta t}\Big)^2} = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}.$$

Pra, kur $\Delta t \to 0$ ana e djathtë e barazimit (3) ka limit:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

që vërteton se ekziston:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt},$$

dhe se vlen formula (1). Teorema u vërtetua.

Në mënyrë analoge zgjidhet problemi për derivatin $\dfrac{du}{dt}$, në rastin kur u është funksion i tri ndryshoreve $x, y,$ e z, ku $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ janë të derivueshme në pikën t_0, kurse funksioni $u = f(x, y, z)$ është i diferencueshëm në pikën përkatëse (x_0, y_0, z_0). Funksioni i përbërë $u = f(x(t), y(t), z(t))$ do të jetë i derivueshëm në pikën t_0 dhe derivati i tij $\frac{du}{dt}$ llogaritet sipas formulës:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

e cila është analoge me formulën (1). Rasti më i përgjithshëm shqyrtohet në vijim (Vërejtja 2).

Rrjedhimi 2.4.3 Supozojmë se funksionet $x = x(t, s)$ dhe $y = y(t, s)$ janë të përkufizuaraa në një rrethinë të pikës (t_0, s_0), kurse funksioni $u = f(x, y)$ është i përkufizuar në një rrethinë të pikës (x_0, y_0) ku $x_0 = x(t_0, s_0), y_0 = y(t_0, s_0)$. Nëse funksioni $f(x, y)$ është i diferencueshëm në pikën (x_0, y_0) dhe nëse në pikën

(t_0, s_0) ekzistojnë derivatet e pjesshme $\frac{\partial x}{\partial t}$ e $\frac{\partial y}{\partial t}$, atëherë në pikën (t_0, s_0) ekziston edhe derivati i pjesshëm $\frac{\partial u}{\partial t}$ i funksionit të përbërë $u = f[x(t,s), y(t,s)]$ dhe:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{4}$$

Vërtetimi. Le të jetë $s = s_0$ pië e fiksuar. Shqyrtojmë funksionin e përbërë $u = f[x(t, s_0), y(t, s_0)]$ të ndryshores t. Sipas teoremës 2.4.3, funksioni u është i derivueshëm në pikën t_0. Kështu, ekziston derivati $\frac{\partial u}{\partial t}$ në pikën (t_0, s_0) dhe nga formula (1) del formula (4). Rrjedhimi u vërtetua.

Në mënyrë analoge tregohet se nëse në pikën (t_0, s_0) ekzistojnë derivatet e pjesëshme $\frac{\partial x}{\partial s}$ e $\frac{\partial y}{\partial s}$, atëherë ekziston derivati i pjesshëm $\frac{\partial u}{\partial s}$ në atë pikë dhe:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Në rastin e përgjithshëm, supozojmë se në një rrethinë të pikës $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ është dhënë funksioni $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ dhe se janë dhënë funksionet $x_i = x_i(t_1, t_2, ..., t_k), i = 1, ..., m$, të tilla që $x_i^0 = x_i(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$. Në qoftë se funksioni $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ është i diferencueshëm në pikën $\boldsymbol{x}_0$ dhe nëse në pikën $\mathbf{t}_0 = (t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$ ekzistojnë derivatet e pjesshme $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $j = 1, ..., k$, $i = 1, ..., m$, atëherë funksioni i përbërë $u = f(x_1(t_1, t_2, ..., t_k), ..., x_m(t_1, ..., t_k))$ në pikën $\mathbf{t}_0$ ka derivatet e pjesshme $\frac{\partial u}{\partial t_j}, j = 1, ..., k$, dhe:

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j},\ j = 1, 2, ..., k. \tag{5}$$

Vërejtja 1. Po theksojmë se nëse, përveç supozimeve të bëra më sipër, funksionet $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}, i = 1, ..., m, j = 1, ..., k$, janë të vazhdueshme në pikat përkatëse $\boldsymbol{x}_0$ e $\mathbf{t}_0$, atëherë nga formula (5) shohim se edhe derivatet e pjesshme të funksionit të përbërë janë të vazhdueshme në pikën $\mathbf{t}_0$ dhe, rrjedhimisht, ai është i diferencueshëm në atë pikë (rezultati analog në rastin e funksionit me m ndryshore me teoremën 2.4.2).

Vërejtja 2. Shqyrtojmë rastin e rëndësishëm kur funksionet $x_1, x_2, ..., x_m$ varen nga një argument t. Atëherë do të kemi funksionin e përbërë të një ndryshoreje $t : u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, ku $x_i = x_i(t), i = 1, ..., m$. Derivati $\frac{du}{dt}$ i atij funksioni të përbërë jepet me formulën:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{dx_m}{dt}. \tag{6}$$

Formulën (6) do ta përdorim për të vërtetuar teoremën e Eulerit për funksionet homogjene, të cilën e japim më poshtë.

Polinomi i dy ndryshoreve $P(x, y)$ quhet **homogjen** në qoftë se shuma e eksponentëve të fuqive të x-it e y-it në çdo monom të tij është një numër konstant k. P.sh.:

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

është polinom homogjen i rendit të tretë. Nëse $P(x, y)$ është i rendit k atëherë për çdo x, y e t ka vend barazimi:

$$P(tx, ty) = t^k P(x, y).$$

Këndej shohim se mund të jepet kuptimi i homogjenitetit për një funksion të çfarëdoshëm me m ndryshore.

Përkufizimi 2.4.3 *Funksioni* $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, *i përkufizuar në bashkësinë* $D \subset \mathbf{R}^m$, *quhet funksion* **homogjen i rendit** k *në* D, *nëse për çdo pikë* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in D$ *dhe çdo* $t \in \mathbf{R}$ *për të cilin* $tx = (tx_1, tx_2, ..., tx_m) \in D$ *vlen:*

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_m) = t^k f(x_1, x_2, ..., , x_m). \tag{7}$$

Teorema 2.4.4 *(e Eulerit) Në qoftë se* $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, *në një bashkësi* $D \subset \mathbf{R}^m$, *është funksion i diferencueshëm e homogjen i rendit* k, *atëherë në çdo pikë* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$*të bashkësisë* D *vlen barazimi:*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}x_m = k \cdot u. \tag{8}$$

Vërtetimi. Le të jetë $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ pikë e çfarëdoshme e bashkësisë D. Shqyrtojmë funksionin e përbërë $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, ku $x_i = tx_i^0$, $i = 1, 2, ..., m$, d.m.th. funksionin $u = f(tx_1^0, tx_2^0, ..., tx_m^0)$. Meqenëse për $t = 1$ funksionet $x_i = tx_i^0$ janë të diferencueshme, ndërsa funksioni $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ është i diferencueshëm në pikën përkatëse $\boldsymbol{x}_0$ atëherë, sipas vërejtjes 2, dhe meqë $\frac{dx_i}{dt} = x_i^0$, kemi:

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}x_1^0 + \frac{\partial u}{\partial x_2}x_2^0 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}x_m^0. \tag{9}$$

Nga ana tjetër, nga (7) kemi:

$$u = f(tx_1^0, tx_2^0, ..., tx_m^0) = t^k f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0),$$

prej nga fitojmë:

$$\frac{du}{dt} = kt^{k-1} f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0),$$

d.m.th.:

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = k \cdot f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0). \tag{10}$$

Duke i krahasuar (9) e (10) fitojmë barazimin (8) për pikën $\boldsymbol{x}_0$. Meqë $\boldsymbol{x}_0 \in D$ është pikë e çfarëdoshme, konstatojmë se teorema u vërtetua.

2.4.5 Pavarësia e trajtës së diferencialit. Rregullat e llogaritjes së diferencialit

Kur funksioni $u = f(x, y)$ ishte i diferencueshëm në pikën (x, y), në rastin kur argumentet e tij ishin ndryshore të pavarura, diferenciali në këtë pikë, si u pa edhe më lart, mund të shkruhej në trajtën:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{1}$$

Supozojmë se argumentet e këtij funksioni janë funksione të ndryshoreve të pavarura t dhe s:

$$x = x(t, s), \ y = y(t, s). \tag{2}$$

të cilët janë të diferencueshme në pikën (t, s), kurse funksioni $u = f(x, y)$ i diferencueshëm në pikën përkatëse (x, y). Tregojmë se edhe funksioni i përbërë $u = f[x(t, s), y(t, s)]$ është i diferencueshëm në pikën (t, s), dhe diferenciali i tij jepet me formulën (1), ku dx e dy paraqesin diferencialet e funksioneve (2) në pikën në fjalë. Me të vërtetë, u japim ndryshoreve të pavarura t e s shtesat Δt e Δs dhe me Δx, Δy e Δu shënojmë shtesat përkatëse të funksioneve x, y e u.

Meqenëse funksionet (2) janë të diferencueshme kemi:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= x'_t(t, s)\Delta t + x'_s(t, s)\Delta s + 0(\rho) = dx + 0(\rho) \\ \Delta y &= y'_t(t, s)\Delta t + y'_s(t, s)\Delta s + 0(\rho) = dy + 0(\rho), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ku $\rho = \sqrt{\Delta t^2 + \Delta s^2}$.

Nga diferencueshmëria e funksionit $u = f(x, y)$ në pikën (x, y) kemi:

$$\Delta u = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y. \tag{4}$$

Zëvendësojmë në barazimin (4) Δx e Δy sipas formulave (3) dhe fitojmë:

$$\Delta u = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy + f_x(x, y)\cdot 0(\rho) + f_y(x, y)\cdot 0(\rho) + \alpha_1[dx + 0(\rho)] +$$

$$+\alpha_2[dy + 0(\rho)], \tag{5}$$

ku $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$ kur $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Tregojmë se:

$$f_x(x, y)\cdot 0(\rho) + f_y(x, y)\cdot 0(\rho) + \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_1 0(\rho) + \alpha_2 0(\rho), \tag{6}$$

është $0(\rho)$. Për këtë mjafton të tregojmë se $\alpha_1 dx$ e $\alpha_2 dy$ janë madhësi pambarimisht të vogla, të trajtës $0(\rho)$, sepse është e qartë se shprehja (6) është $0(\rho)$ si shumë e një numri të fundmë madhësish të tilla. Kemi:

$$|\alpha_1 dx| = |\alpha_1(x'_t\Delta t + x'_s\Delta s)| \le |\alpha_1\rho|\cdot\left(|x'_t|\left|\frac{\Delta t}{\rho}\right| + |x'_s|\left|\frac{\Delta s}{\rho}\right|\right) \le$$

$$\leq |\alpha_1 \rho| \cdot (|x_t^{'}| + |x_s^{'}|) = K \cdot |\alpha_1 \rho|,$$

ku $K = |x_t^{'}| + |x_s^{'}|$ dhe $\alpha_1 \rho$ si prodhim i madhësive pambarimisht të vogla është madhësi pambarimisht e vogël e një rendi më të lartë vogëlsie se secili prej tyre, pra edhe se ρ, d.m.th. $\alpha_1 \cdot \rho = 0(\rho)$. Tash, nga:

$$|\alpha_1 dx| \leq K|0(\rho)| = |0(\rho)|$$

del se $\alpha_1 dx = 0(\rho)$.

Në mënyrë analoge tregohet se $\alpha_2 dy = 0(\rho)$.

Kështu, barazimi (5) merr formën:

$$\Delta u = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy + 0(\rho) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + 0(\rho).$$

Pra, treguam se funksioni $u = f(x(t, s), y(t, s))$ është i diferencueshëm në pikën (t, s) dhe se diferenciali i tij mund të shkruhet në trajtën (1), d.m.th. kjo formulë mbetet e vërtetë edhe kur argumentet nuk janë ndryshore të pavarura, por funksione të diferencueshme të argumenteve të rinj.

Ky pohim vlen edhe për funksionet e m ndryshoreve.

Pavarësia e trajtës së diferencialit të funksionit bën të mundshëm të tregojmë se për funksionet e shumë ndryshoreve vlejnë rregullat e zakonshme të diferencimit të cilat vlejnë për diferencialet e funksioneve të një ndryshoreje. Supozojmë se funksionet me m ndryshore u e ν janë të diferencueshme. Atëherë edhe funksionet $c\,u$ $(c \in \mathbf{R}), u \pm \nu, u \cdot \nu$ dhe $\frac{u}{\nu}$ (për $\nu \neq 0$) janë të diferencueshme dhe madje:

$$\begin{aligned} &d(cu) = cdu, \\ &d(u \pm \nu) = du \pm d\nu, \\ &d(u\nu) = ud\nu + \nu du, \\ &d\left(\frac{u}{\nu}\right) = \frac{\nu du - ud\nu}{\nu^2}. \end{aligned}$$

Vërtetojmë p.sh. formulën e tretë. Funksioni $w = u\nu$ është i diferencueshëm si funksion i argumenteve u e ν dhe:

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial u}du + \frac{\partial \omega}{\partial \nu}d\nu = \nu du + ud\nu.$$

Në saje të pavarësisë së formulës së diferencialit të funksionit me shumë ndryshore, shprehja $vdu + udv$ është diferencial i funksionit uv edhe kur u e v nuk janë ndryshore të pavarura por funksione të diferencueshme të ndryshoreve të reja, prandaj vlen barazimi i sipërpërmendur.

2.4.6 Derivati sipas një drejtimi. Gradienti

Le të jetë $u = f(x, y)$ një funksion i dy ndryshoreve. Siç dihet (vërejtja 2, pika 2.4.1.) $\frac{\partial f}{\partial x}$ paraqet koeficientin e drejtimit të tangjentes së lakores, e cila fitohet kur sipërfaqen e ndërpresim me një rrafsh normal me boshtin Oy (y konsiderohet konstante). Në mënyrë analoge, $\frac{\partial f}{\partial y}$ paraqet koeficientin e drejtimit të tangjentes së lakores e cila merret kur sipërfaqen e ndërpresim me një rrafsh normal me boshtin Ox. Këto janë pikërisht rastet e derivateve të pjesshme, sipas drejtimit të boshteve koordinative. Në mënyrë të natyrshme paraqitet problemi i përkufizimit dhe llogaritjes së derivatit sipas një drejtimi të çfarëdoshëm. Shqyrtojmë këtë problem për rastin e funksionit me dy ndryshore.

Le të jetë $M(x, y)$ një pikë e fiksuar dhe $\mathbf{s}$ një vektor njësi, në rrafshin Oxy, me pikë të fillimit në M i cili me boshtin Ox formon këndin θ (fig. 2.6). Vektori $\mathbf{s}$ mund të paraqitet në formën:

$$\mathbf{s} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$$

Le të jetë P cilado pikë në drejtëzën e orientuar e cila përmban vektorin $\mathbf{s}$. Po e shënojmë me ρ gjatësinë e segmentit MP. Është e qartë se koordinatat e pikës P do të jenë: $(x + \rho\cos\theta)$ dhe $(y + \rho\sin\theta)$. Formojmë:

$$\frac{\Delta_{\mathbf{s}} u}{\rho} = \frac{f(x + \rho\cos\theta, y + \rho\sin\theta) - f(x, y)}{\rho}. \tag{1}$$

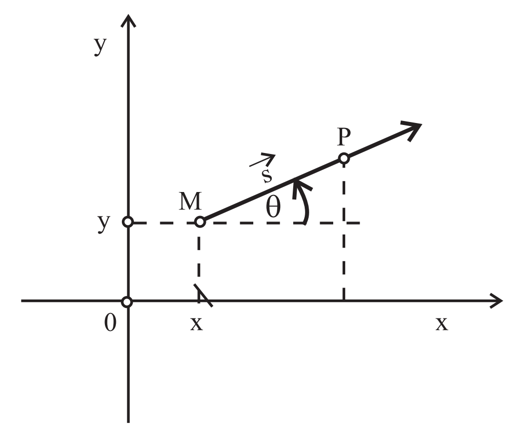


Fig. 2.6.

Përkufizimi 2.4.4 *Limiti i shprehjes* (1) *kur* $\rho \to 0$, *nëse ekziston, quhet* **derivat i funksionit f në drejtim të vektorit s** *dhe shënohet me* $D_{\mathbf{s}} f$.

Vërejmë se derivatet e pjesshme $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ dhe $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ janë raste veçanta të derivateve sipas drejtimit. Me të vërtetë, në rastin kur $\theta = 0$ kemi:

$$D_{\mathbf{s}} u = \lim_{s \to 0} \frac{f(x + \rho, y) - f(x, y)}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial x},$$

ndërsa për $\theta = \frac{\pi}{2}$ fitojmë $D_{\mathbf{s}} u = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Shembulli 2.4.1 Nëse $u = x^2 + y^2$ dhe $\mathbf{s}$ është vektor njësi i cili me boshtin Ox formon këndin 30^0, atëherë:

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{s}}u &= \lim_{\rho \to 0} \frac{f\left(x + \rho\frac{\sqrt{3}}{2}, y + \rho \cdot \frac{1}{2}\right) - f(x,y)}{\rho} = \\
&= \lim_{\rho \to 0}\left(\sqrt{3}\,x + \frac{3}{4}\rho + y + \frac{1}{2}\rho\right) = \sqrt{3}\,x + y.
\end{aligned}
$$

Mënyra e këtillë e llogaritjes së derivateve sipas një drejtimi të dhënë nuk është praktike. Prandaj, është e natyrshme të kërkojmë ndonjë lidhje ndërmjet këtyre derivateve me derivatet parciale.

Teorema 2.4.5 *Le të jetë funksioni $u = f(x, y)$ i diferencueshëm në pikën $M_0(x_0, y_0)$. Atëherë, në atë pikë funksioni f ka derivat të çfarëdo drejtimi* $\mathbf{s}$ *dhe ai llogaritet me formulën:*

$$
D_s u = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta, \tag{2}
$$

ku $\mathbf{s}$ *është vektori njësi i cili me boshtin Ox formon këndin θ.*

Vërtetimi. Sipas kushtit kemi:

$$
\Delta u = du + 0(\rho),
$$

ku $\rho \to 0$ në mënyrë të çfarëdoshme. Prandaj edhe:

$$
\Delta_{\mathbf{s}}u = du + 0(\rho) \text{ ose } \Delta_{\mathbf{s}}u = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + 0(\rho).
$$

Por, në drejtimin $\mathbf{s}$ kemi $\Delta x = \rho\cos\theta, \Delta y = \rho\sin\theta$ prandaj:

$$
\frac{\Delta_{\mathbf{s}}u}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \frac{0(\rho)}{\rho},
$$

dhe rrjedhimisht:

$$
\lim_{\rho \to 0}\frac{\Delta_{\mathbf{s}}u}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta,
$$

çka synuam të tregojmë.

Derivati sipas drejtimit të vektorit $\mathbf{s}$ ka interpretim të thjesht gjeometrik. Le të jetë $M_0(x_0, y_0)$ pikë e rrafshit $0xy$ dhe $\mathbf{s}$ vektori njësi me fillim në këtë pikë. Rrafshi që e përmban vektorin $\mathbf{s}$ dhe është normal në rrafshin Oxy e ndërpret sipërfaqen S, që grafikisht paraqet funksionin $u = f(x, y)$, sipas lakores ℓ. Derivati sipas drejtimit $\mathbf{s}$ paraqet koeficientin e drejtimit të tangjentes së lakores ℓ në pikën e saj $P'(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (fig. 2.7).

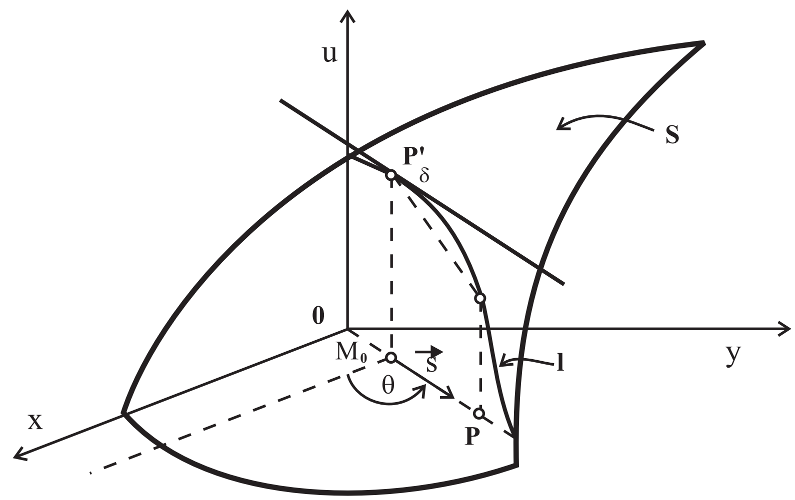


Fig. 2.7.

Përkufizimi 2.4.5 Gradient i funksionit *$u = f(x, y)$ në pikën $M_0(x_0, y_0)$ quhet vektori me koordinata $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}$ dhe shënohet me simbolin* $\mathrm{grad} f$, *pra:*

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\,.$$

Formula (2) mund të shkruhet edhe në formën e prodhimit skalar $D_{\mathbf{s}}u = |\mathbf{s}\cdot$ grad f , ku $\mathbf{s} = \cos\theta\cdot\mathbf{i} + \sin\theta\cdot\mathbf{j}$ është vektori njësi. Në bazë të përkufizimit të prodhimit skalar mund të shkruajmë

$$D_s u = |s||\mathrm{grad} f|\cos\psi,$$

ku ψ është këndi midis vektorit grad f dhe vektorit njësi $\mathbf{s}$. Meqë $|\mathbf{s}| = 1$ kemi $D_{\mathbf{s}}u = |\mathrm{grad}\ f|\cos\psi$. Nga kjo formulë vërejmë se $D_{\mathbf{s}}u$ merr vlerën maksimale për $\psi = 0$, d.m.th. kur drejtimi i vektorit $\mathbf{s}$ përputhet me drejtimin e gradientit të funksionit në pikën përkatëse.

Le të marrim parasysh tash funksionin e tri ndryshoreve $u = f(x, y, z)$. Le të jetë $\mathbf{s}$ vektori njësi, në hapësirë, me fillim në pikë P. Atëherë, siç dihet:

$$\mathbf{s} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k},$$

ku α, β, γ janë këndet që formon ai vektor me boshtet koordinative $Ox, Oy,$ e Ou përkatësisht. Në bartësen e vektorit $\mathbf{s}$ marrim pikën $P'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, dhe shohim se $\Delta x = \rho\cos\alpha, \Delta y = \rho\cos\beta, \Delta z = \rho\cos\gamma,$ ku ρ është gjatësia e segmentit PP'.

Derivati i funksionit u sipas drejtimit të vektorit $\mathbf{s}$ është:

$$D_{\mathbf{s}}u = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\cos\beta, z+\rho\cos\gamma)-f(x,y,z)}{\rho},$$

në qoftë se ky limit ekziston.

Ngjashëm, si në teoremën 2.4.5. tregohet se në qoftë se funksioni $u = f(x,y,z)$ është i diferencueshëm në pikën $P(x,y,z)$ atëherë:

$$D_{\mathbf{s}}u = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

Gradienti i funksionit $u = f(x,y,z)$ në pikën P është vektori

$$\operatorname{grad} \mathrm{f} = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{z}}\mathbf{k}.$$

Në mënyrë analoge këto kuptime e rezultate zgjerohen edhe për funksionet me m ndryshore.

2.4.7 Derivatet e pjesshme të rendeve të larta

Për funksionin $u = f(x,y)$ derivatet e pjesshme $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ (nëse ato eksistojnë) i quajmë edhe **derivate të pjesshme të rendit të parë**. Ato janë po ashtu funksione të ndryshoreve x e y dhe, në mënyrë të natyrshme, shtrohet problemi i gjetjes së derivateve të pjesshme të atyre funksioneve. Derivatet e pjesshme të funksioneve $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, nëse ekzistojnë, i quajmë **derivate të pjesshme të rendit të dytë** të funksionit f. Ato janë $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ dhe shënohen kështu:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\cdot\partial x} = f_{xy},\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy},$$

Duke i gjetur sërish, nëse ekzistojnë, nga derivatet e rendeve të dyta fitojmë derivatet e pjesshme të rendit të tretë:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z},\ \text{etj.}$$

Në përgjithësi, derivatet e pjesshme të derivateve të pjesshme të rendit $(n-1)$ të një funksioni, nëse ekzistojnë, quhen **derivate të pjesshme të rendit** n të atij funksioni. Në rastin e përgjithshëm, derivatet e pjesshme ndryshojnë nga njëri tjetri për nga radha e derivimit në lidhje me ndryshoret, si p.sh. f_{xy} e f_{yx},

f_{yxx} e f_{xxy}, etj. Këndej shihet se problemi i gjetjes së derivateve të rendeve të larta lehtësohet shumë kur derivati nuk varet nga radha e derivimit. Shembulli vijues tregon se, në rastin e përgjithshëm, derivati varet nga radha e derivimit. Për funksionin

$$u = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{për } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, \quad \text{për } x^2+y^2=0, \end{cases}$$

derivatet $u_{xy}(0,0)$ e $u_{yx}(0,0)$ ekzistojnë, por nuk janë të barabarta. Me të vërtetë:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{për} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, \quad \text{për} \quad x^2+y^2=0, \end{cases}$$

prandaj:

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = \begin{cases} -y, & \text{për} \quad y \neq 0, \\ 0, & \text{për} \quad y=0. \end{cases}$$

Kështu:

$$\frac{\partial^2(0,0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}\right)\right]\Bigg|_{y=0} = -1.$$

Duke llogaritur në të njëjtën mënyrë fitojmë $\frac{\partial^2 u(0,0)}{\partial x \partial y} = 1$. Kështu:

$$\frac{\partial^2 u(0,0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 u(0,0)}{\partial y \partial x}.$$

Megjithatë ekziston një klasë e gjerë funksionesh për të cilët radha e derivimit nuk ndikon në rezultatin e derivimit. Duke u kufizuar në fillim në derivatet e rendit të dytë, tregojmë se ka vend:

Teorema 2.4.6 *Le të jetë funksioni $f(x,y)$, së bashku me derivatet e pjesshme f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} të përkufizuara në ndonjë rrethinë të pikës (x_0,y_0) dhe le të jenë derivatet f_{xy} e f_{yx} të vazhdueshme në atë pikë. Atëherë:*

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0).$$

Vërtetimi. Supozojmë se funksionet f, f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} janë të përkufizuara në δ rrethinën e pikës (x_0,y_0) dhe le të jenë Δx e Δy të tilla që $\Delta x^2 + \Delta y^2 < \delta^2$. Si edhe më parë, me $\Delta_x f$ e $\Delta_y f$ shënojmë shtesat e pjesshme të funksionit f sipas argumentit x, përkatësisht y në pikën (x_0,y_0). Shënojmë $\Delta_{xy} f = \Delta_x(\Delta_y f)$, $\Delta_{yx} f = \Delta_y(\Delta_x f)$ dhe tregojmë se:

$$\Delta_{xy} f = \Delta_{yx} f. \tag{1}$$

Me të vërtetë:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{xy} f \quad &= \Delta_x(\Delta_y f) = \Delta[f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y))] = \\ &= [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)] - \\ &-[f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Në mënyrë analoge:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{yx}f &= \Delta_y(\Delta_x f) = [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)- \\ &-f(x_0, y_0+\Delta y)] - [f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)].\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Duke i krahasuar barazimet (2) e (3) fitojmë barazimin (1). Nëse marrim:

$$\varphi(x) = f(x, y_0+\Delta y) - f(x, y_0),$$

atëherë (2) mund të shkruhet në formën:

$$\Delta_{xy}f = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0).$$

Meqë, sipas supozimit, në $\delta-$rrethinën e pikës (x_0, y_0) ekziston derivati i pjesshëm f_x, funksion $\varphi(x)$ është i diferencueshëm në segmentin me skaje x_0 e $x_0+\Delta x$. Sipas teoremës sé Lagranzhit fitojmë:

$$\Delta_{xy}f = \varphi`(x_0+\vartheta_1\Delta x)\Delta x, 0<\vartheta_1<1.$$

Por $\varphi`(x) = f_x(x, y_0+\Delta y) - f_x(x, y_0)$, Prandaj:

$$\Delta_{xy}f = [f_x(x_0+\vartheta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f_x(x_0+\vartheta_1\Delta x, y_0)]\Delta x.$$

Duke e përdorur edhe një herë teoremën e Lagranzhit, por tash sipas ndryshores y (për funksionin f_x), fitojmë:

$$\Delta_{xy}f = f_{xy}(x_0+\vartheta_1\Delta x, y_0+\vartheta_2\Delta y)\Delta x\Delta y, \text{ ku } 0<\vartheta_1<1, 0<\vartheta_2<1 \quad (4)$$

Ngjashëm, nëse marrim:

$$\psi(y) = f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0, y)$$

fitojmë:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{yx}f &= \psi(y_0+\Delta y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0+\vartheta_3\Delta y)\Delta y = \\ &= [f_y(x_0+\Delta x, y_0+\vartheta_3\Delta y) - f_y(x_0, y_0+\vartheta_3\Delta y)]\Delta y = \\ &= f_{yx}(x_0+\vartheta_4\Delta x, y_0+\vartheta_3\Delta y)\Delta y\Delta x, 0<\vartheta_3<1, 0<\vartheta_4<1.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Nga (1), (4) e (5) gjejmë:

$$f_{xy}(x_0+\vartheta_1\Delta x, y_0+\vartheta_2\Delta y)\Delta x\Delta y = f_{yx}(x_0+\vartheta_4\Delta x, y_0+\vartheta_3\Delta y)\Delta y\Delta x,$$

ose, pasi ta thjeshtojmë me $\Delta x\Delta y$, kur $\Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0$,

$$f_{xy}(x_0+\vartheta_1\Delta x, y_0+\vartheta_2\Delta y) = f_{xy}(x_0+\vartheta_4\Delta x, y_0+\vartheta_3\Delta y). \quad (6)$$

Duke kaluar me limit në barazimin (6), për shkak se funksionet f_{xy} e f_{yx} janë të vazhdueshme në pikën (x_0, y_0), fitojmë:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Teorema u vërtetua.

Teorema e mësipërme, me modifikimet përkatëse, mund të vërtetohet edhe për derivatet e cilit do rend.

Përkufizimet e simbolet që u dhanë më lartë për derivatet e rendeve të larta të funksioneve me dy ndryshore, në mënyrë të ngjashme zgjerohen edhe për funksionet e tri e në përgjithësi m ndryshoreve. Po ashtu mbetet i vërtetë pohimi se, nën kushtet e caktuara, mund të ndryshojë renditja e derivimit pa ndryshimin e rezultatit të derivimit. Po e sqarojmë këtë me një shembull. Tregojmë se $f_{xyz} = f_{zyx}$. Me të vërtetë, kemi:

$$f_{xyz} = (f_x)_{yz} = (f_x)_{zy} = (f_{xz})_y = (f_{zxy}) = (f_z)_{xy} = (f_z)_{yx} = f_{zyx}.$$

2.4.8 Diferencialet e rendeve të larta

Le të jetë dhënë funksioni $u = f(x, y)$ i cili është i diferencueshëm në zonën $D \subset \mathbf{R}^2$. Diferenciali i këtij funksioni në pikën (x, y) shkruhet në trajtën:

$$du = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy. \tag{1}$$

dhe e quajmë **diferencial i rendit të parë** i funksionit $f(x, y)$ në pikën (x, y). Nëse ndryshoret x e y janë të pavarura, atëherë $dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$. Duke i fiksuar këto shtesa shohim se diferenciali du është një funksion dy ndryshoresh, prandaj edhe për të shtrohet problemi i diferencimit. Diferencialin e diferencialit du të funksionit $u = f(x, y)$ në një pikë, në qoftë se ekziston, e quajmë **diferencial të dytë** të këtij funksioni në atë pikë dhe shënojmë me simbolin d^2u ose $d^2f(x, y)$ ose d^2f. Pra $d(du) = d^2u$. Nëse funksioni ka derivate të pjesshme të vazhdueshme të rendit të dytë, atëherë du ka derivate të pjesshme të vazhdueshme, prandaj është i diferencueshëm (teorema 2.4.2). Në bazë të rregullave të diferencimit gjejmë:

$$d^2u = d(du) = d\Big(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\Big) = d\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)dx + d\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)dy. \tag{1'}$$

Duke marrë parasysh se

$$d\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)dx + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dy,$$

$$d(\frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})dx + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

dhe duke zëvendësuar në (1') fitojmë:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2. \tag{2}$$

Në mënyrë të ngjashme, diferenciali i d^2u në një pikë, në qoftë se ekziston, quhet **diferencial i tretë** i funksionit u në atë pikë dhe shënohet me njërin nga simbolet:

$$d^3u, d^3f, d^3f(x, y).$$

Pra $d^3u = d(d^2u)$. Në qoftë se funksioni u ka derivate të pjesshme të vazhdueshme edhe të rendit të tretë atëherë, si duket nga formula (2), d^2u ka derivate të pjesshme të vazhdueshme dhe për pasojë, është i diferencueshëm, d.m.th. ekziston d^3u. Në këtë rast:

$$d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3. \qquad (3)$$

Në përgjithësi, **diferenciali i rendit** n i funksionit u në një pikë përkufizohet si diferencial (në qoftë se ekziston) i diferencialit të rendit $(n-1)$ të tij (duke e konsideruar të përcaktuar këtë të fundit) dhe shënohet me njërin nga simbolet:

$$d^nu, d^nf, d^nf(x, y), d^nu(x, y).$$

Pra, $d^nu = d(d^{n-1}u)$. Në rastin kur funksioni u ka derivate të pjesshme të vazhdueshme deri te rendi n (së bashku me këtë rend), është e qartë se ekziston diferenciali i rendit n i funksionit u, sepse d^{n-1} që do të përmbante derivate të rendit $(n-1)$ të funksionit u do të ishte i diferencueshëm. Me rritjen e n-it shprehja për diferencial do të bëhej më i ndërlikuar prandaj, për të thjeshtuar shkrimin e tyre përdorim këtë simbolikë të re:

Marrim simbolin $d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$ dhe përkufizojmë fuqinë me eksponent n ($n \in \mathbf{N}$) të tij si veprim të zakonshëm të ngritjes në fuqi me eksponent n sipas formulës së binomit të Njutonit. P.sh.:

$$d^2 = \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2;$$

$$d^3 = \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 +$$

$$+\frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3;$$

etj. Atëherë diferencialet du, d^2u, d^3u, si duket nga formulat (1), (2) e (3), mund të konsiderohen si prodhim të simboleve d, d^2, d^3 me funksionin u:

$$du = d \cdot u = \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big) \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

$$d^2u = d^2 \cdot u = \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^2 \cdot u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2,$$

dhe ngjashëm gjejmë d^3u. Duke e përdorur metodën e induksionit matematik mund të vërtetohet se diferenciali i rendit n i funksionit $u = f(x, y)$ mund të

shkruhet:
$$d^n u = \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^n \cdot u.$$

Vërejtje. Kuptimi i diferencialeve të rendeve të larta jepet në mënyrë të ngjashme edhe për funksionet e m ndryshoreve $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$. Po ashtu, edhe për rastin e funksionit me m ndryshore kemi:

$$d^n u = d^n f(x_1, x_2, ..., x_m) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\Big)^n \cdot u,$$

Në vazhdim tregojmë se pavarësia e trajtës së diferencialit është veti vetëm e diferencialit të parë. Supozojmë se është dhënë funksioni $u = f(x, y)$ argumentet e të cilit janë funksione të ndryshoreve të reja t e s:

$$x = \varphi(t, s),\ \ y = \psi(t, s).$$

Edhe në këtë rast, siç u pa në pikën 2.4.5, diferenciali i funksionit u jepet me formulën:
$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Por, tash në përgjithësi dx e dy janë funksione të ndryshoreve t e s, si dhe diferenciali i tyre nuk është zero. Kështu:

$$d^2 u = d(du) = d\Big(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\Big) = d\Big(\frac{\partial u}{\partial x}dx\Big) + d\Big(\frac{\partial u}{\partial y}dy\Big) = d\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)dx +$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}d(dx) + d\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)dy + \frac{\partial u}{\partial y}d(dy) = \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^2 u + \frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y.$$

Pra, për diferencialin e rendit të dytë nuk ka vend pavarësia e trajtës së diferencialit. Është e qartë se, aq më parë, edhe për diferencialet e rendit n ($n > 2$) kjo pavarësi nuk ka vend sepse krahas pjesëve të $\Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^n \cdot u$ ka edhe kufiza tjera.

Megjithatë, duhet veçuar rastin kur x e y janë funksione lineare të ndryshoreve të reja të pavarura:

$$\begin{aligned} x &= at + bs + c \\ y &= a_1 t + b_1 s + c_1. \end{aligned}$$

Në këtë rast kemi $d^2x = d^3x = .. = 0$ dhe $d^2y = d^3y = .. = 0$, prandaj:

$$d^n u = \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^n u,$$

d.m.th. trajta është e pavarur edhe për diferencialet e rendeve të larta.

2.4.9 Detyra për ushtrime

1. Në qoftë se $f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$, të gjendet $f_x(x,1)$.

2. Të gjenden derivatet e pjesshme të funksioneve:

$$\begin{aligned} a)\ (x,y) \mapsto z &= \sqrt[3]{x^3+y^3};\\ b)\ (x,y,z) \mapsto z &= \sqrt{x^2+y^2+z^2};\\ c)\ (x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto z &= x_1^{x_2} + x_3 \cdot x_4. \end{aligned}$$

3. Është dhënë funksioni:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^n+y^n)\cos\frac{1}{x^{2n}+y^{2n}}, & (n\in N), (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

   a) Të gjenden derivatet e pjesshme të funksionit f;

   b) Të shqyrtohet vazhdueshmëria e funksioneve f, f_x e f_y;

   c) Të shqyrtohet të sjellurit e funksioneve f, f_x, f_y në rrethinën e pikës $O(0,0)$.

4. Është dhënë funksioni:

$$f(x,y) = x + (1-y)(\arcsin\frac{x^2}{y-5} + \ln xy).$$

   a) Të gjendet domeni i funksioneve $f(x,y)$ dhe $f(x,1)$;

   b) Të gjendet $f_x(x,1)$.

5. Në qoftë se $z = x^y y^x$, të tregohet se vlen barazimi:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z(x+y+\ln z).$$

6. Në qoftë se:

$$z = \frac{e^{xy}}{e^x+e^y}$$

   të tregohet se vlen barazimi:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z(x+y-1).$$

7. Në qoftë se $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, të gjendet $f_x(0,0)$ dhe $f_y(0,0)$. A është ky funksion i diferencueshëm në pikën $O(0,0)$?

8. A është i diferencueshëm në pikën $O(0,0)$ funksioni: $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$?

9. Të shqyrtohet diferencueshmëria e funksionit:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 > 0, \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

   në pikën $O(0,0)$.

10. Të tregohet se funksioni:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^6+y^2}, & x^6+y^2 \neq 0, \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

   ka këputje për $x=0, y=0$, por ka derivate të pjesshme në pikën $O(0,0)$.
   Udhëzim: të merret në shqyrtim vargu $\{\boldsymbol{x}_n\} = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3})\}$.

11. Të gjendet diferenciali i plotë për funksionet:

   a) $u = x \cdot \log(ax+by),\ (a, b > 0)$;

   b) $u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 + x_2^2 + x_5^2$;

   c) $u = \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{x}$.

12. Të gjendet $d(1,1,1)$ nëse $f(x,y,z) = \sqrt[z]{\frac{x}{y}} + a$.

13. Të tregohet se nëse $f(x,y,z)$ është funksion i diferencueshëm homogjen i rendit p, atëherë derivatet $f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)$ janë funksione homogjene të rendit $(p-1)$.

14. Le të jetë $u = f(x,y,z)$ funksion dy herë i diferencueshëm, homogjen i rendit n. Të tregohet se:

$$\Big(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\Big)^2 u = n(n-1)u.$$

15. Të tregohet se $f(x,y)$ i cili ka derivate të pjesshme të kufizuara $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ në ndonjë bashkësi konvekse E, është uniformisht i vazhdueshëm në E.

16. Të tregohet se nëse $f(x,y)$ është i vazhdueshëm sipas ndryshores x për çdo y të fiksuar dhe ka derivat të kufizuar sipas y, atëherë ai funksion është i vazhdueshëm për çdo $(x,y) \in \mathcal{D}(f)$.

17. Le të jetë $P_n(x,y,z)$ polinom homogjen i rendit n, Të tregohet se:

$$d^n P_n(x,y,z) = n! P_n(dx, dy, dz).$$

18. Të gjendet $\frac{dz}{dt}$ nëse:

    a) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x = \sin t, y = \cos t;$

    b) $z = \frac{y}{x},\ x - e^t,\ y = e^{2t};$

19. Të gjenden derivatet e pjesshme dhe diferencialet e funksioneve:

    a) $\omega = u^2 \ln v,\ u = \frac{x}{y},\ v = x + y;$

    b) $\omega = \arctan \frac{u}{v},\ u = x + y, v = x + y;$

    c) $\omega = ue^{\frac{u}{v}},\ u = x^2 + y^2, v = xy.$

20. Të tregohet se funksioni $z = e^y g(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$ plotëson barazimin:

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz,$$

    nëse g është i diferencueshëm.

21. Të gjendet derivati i funksionit $f(x,t,z) = xy + z$ në pikën $A(-1,2,2)$ sipas drejtimit të vektorit $\mathbf{s}\,(\frac{2}{\sqrt{13}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{13}})$.

22. Të gjendet derivati i funksionit $u = x^2yz$ në pikën $A(1,2,3)$ sipas drejtimit të vektorit $\boldsymbol{a}B$, ku $B(3,2,1)$.

23. Të gjendet derivati i funksionit $u = \arctan xy$ në pikën $A(1,1)$ në drejtimin e simetrales së kuadrantit të parë.

24. Të gjendet derivati i funksionit $u = xyz$ në pikën $M(1,1,1)$ sipas drejtimit të vektorit $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, ku α, β, γ janë këndet që përfshinë vektori $\vec{n}$ me boshtet Ox, Oy, Oz, përkatësisht. Sa është intensiteti i gradientit në atë pikë?

25. Të gjendet këndi ndërmjet gradientëve të funksionit $u = x^2 + y^2z^2$ në pikat $A(\varepsilon, 0, 0)$ dhe $B(0, \varepsilon, 0)$.

26. Të gjenden derivatet e pjesshme dhe diferenciali i plotë i rendit të dytë për funksionet

    a) $u = x^4 - 10x^2y^2 - xy^3;$ b) $z = x + y - ye^x;$

    c) $z = x^y;$

    d) $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{(x^1+y^2)}$ për $(x,y) \neq (0,0)$ dhe $f(0,0) = 0.$

    ç) $f(x_1, x_2, ..., x_m) = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m},\ a_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, ..., m.$

27. Të gjenden derivatet e pjesshme dhe diferencialet për funksionet:

    a) $u = x^2 \ln(xy),\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial y}\Big|_{(-1,-2)}$ b) $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x,\ \frac{\partial^7 u}{\partial x^3 \partial y^4},\ d^4u(0,0);$

    c) $u = \ln \frac{1}{x+y},\ d^{10}u;$

    d) $u = f(x)g(y),\ d^n u.$

28. Të tregohet se në qoftë se funksioni $u = u(x,y)$ plotëson barazimin e Laplasit $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, atëherë funksioni $v = u(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ po ashtu plotëson atë barazim.

29. Të tregohet se funksioni $z = xf(\frac{y}{x}) - g(\frac{y}{x})$, ku f e g janë funksione të çfarëdoshme (që kanë derivat të dytë), plotësojnë barazimin

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

30. Le të jetë $x^2 = v\omega,\ y^2 = u\omega,\ z^2 = uv$ dhe $f(x,y,z) = F(u,v,\omega)$. Të tregohet se:

$$xf_x + yf_y + zf_z = uF_u + vF_v + \omega F_\omega.$$

2.5 FORMULA E TEJLORIT

Në këtë paragraf tregohet se funksioni me shumë ndryshore, ashtu si funksioni me një ndryshore, mund të paraqitet si shumë e një polinomi dhe termit mbetës.

Teorema 2.5.1 *Le të jetë funksioni $u = f(x,y)$ i vazhdueshëm së bashku me derivatet e tij të pjesshme deri te rendi $(n+1)$ duke e përfshirë edhe atë, në një $\delta-$rrethinë të pikës (x_0,y_0) dhe $\Delta x,\ \Delta y$ le të jenë shtesat e ndryshoreve të tilla që $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$. Atëherë, ka vend formula:*

$$\Delta u = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y +$$
$$+\frac{1}{2!}\Big(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\Big) +$$
$$+\frac{1}{3!}\Big(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\Big)^3 f(x_0,y_0) + ... + \frac{1}{n!}\Big(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\Big)^n f(x_0,y_0) +$$
$$+r_n(\Delta x, \Delta y),$$

ose më thjeshtë:

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\Big(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k f(x_0,y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y), \qquad (1)$$

ku

$$r_n(\Delta x,\Delta y) = \frac{1}{(n+1)!}\Big(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{n+1} f(x_0+\vartheta\Delta x, y_0+\vartheta\Delta y), \qquad (2)$$

si dhe $0 < \vartheta < 1$.

Vërtetimi. Marrim Δx dhe Δy të tilla që plotësojnë kushtin e teoremës. Ekuacionet parametrike të segmentit me pikat e skajshme (x_0,y_0) dhe $(x_0 +$

$\Delta x, y_0 + \Delta y)$ janë:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + t\Delta x \\ y &= y_0 + t\Delta y, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ku $t \in [0,1]$. Zëvendësojmë ndryshoret x e y të funksionit $u = f(x,y)$ sipas formulave (3) dhe fitojmë funksionin e përbërë:

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y),\ 0 \le t \le 1. \tag{4}$$

Është e qartë se:

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0). \tag{5}$$

Funksioni $F(t)$ në segmentin $[0,1]$ ka derivate të vazhdueshme deri te rendi $(n+1)$ së bashku me te. Formula e Tejlorit, për funksionin $F(t)$, me termin mbetës në formën e Lagranzhit në rrethinën e pikës $t = 0$, është:

$$F(t) - F(0) = F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + ... + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(\vartheta t)}{(n+1)!}t^{n+1}, \tag{6}$$

$0 \le \vartheta \le 1$. Duke ditë se (shih (3))

$$\frac{dx}{dt} = \Delta x,\ \frac{dy}{dt} = \Delta y,$$

marrim:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \left[f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\right]'_t = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \\ &= \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial y}\Delta y. \end{aligned}$$

Mëtej, duke marrë parasysh se vlera e derivateve të pjesshme nuk varet nga rendi i derivimit (teorema 2.4.6), gjejmë:

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\Big) f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \\ &= \frac{\partial^2 f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial x^2}\Delta x^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial y^2}\Delta y^2. \end{aligned}$$

Me induksion gjejmë se:

$$F^{(k)}(t) = \Big(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \tag{7}$$

$k = 1, 2, ..., n+1$. Kur në formulën (7) zëvendësojmë $t = 0$, për $k = 1, ..., n$, marrim:

$$\left.\begin{aligned} F'(0) &= \tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y, \\ F''(0) &= \Big(\Delta x \tfrac{\partial}{\partial x} + \Delta y \tfrac{\partial}{\partial y}\Big)^2 f(x_0, y_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{(n)}(0) &= \Big(\Delta x \tfrac{\partial}{\partial x} + \Delta y \tfrac{\partial}{\partial y}\Big)^n f(x_0, y_0). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Për $k = n + 1$ dhe duke zëvendësuar t me ϑt gjejmë:

$$F^{(n+1)}(\vartheta t) = \Big(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\Big)^{n+1} f(x_0 + \vartheta t \Delta x, y_0 + \vartheta t \Delta y). \tag{9}$$

Pasi të zëvendësojmë (8) e (9) në (5) fitojmë:

$$\Delta u = F(1) - F(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(k+1)}(\vartheta)}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\Big)^k f(x_0, y_0)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\Big(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\Big)^{(n+1)} f(x_0 + \vartheta \Delta x, y_0 + \vartheta \Delta y), 0 < \vartheta < 1.$$

Teorema u vërtetua.

Formulën (1) e quajmë **formula e Tejlorit**. Në rastin kur $(x_0, y_0) = (0, 0)$ atëherë atë e quajmë **formula e Maklorenit** .

Vërejtje. Duke e përdorë kuptimin e diferencialeve të rendeve të larta, formula e Tejlorit mund të shkruhet në një formë më elegante. Meqë:

$$d^k f(x, y) = \Big(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\Big)^k f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), \; k = 1, ..., n,$$

atëherë, nëse marrim $M_0(x_0, y_0)$ dhe $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, formula (1) merr trajtën:

$$f(M) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(M_0) + r_n(M). \tag{10}$$

Në mënyrë të ngjashme tregohet se formula e Tejlorit për funksionin me m ndryshore $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, i cili ka derivate të pjesshme të vazhdueshme deri te rendi $(n + 1)$ duke përfshirë edhe atë (pra është $(n + 1)-$ herë i diferencueshëm) në një $\delta-$rrethinë të pikës $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$, është:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x_1^0 + \Delta x_1, ..., x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\Big(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \Delta x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\Big)^k \cdot f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) + r_n(\Delta \boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

ku:

$$r_n(\Delta \boldsymbol{x}) = \frac{1}{(n+1)!}\big(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \Delta x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\big)^{(n+1)} f(x_1^0 + \vartheta \Delta x_1, , ..., x_m^0 + \vartheta \Delta x_m),$$

$0 < \vartheta < 1$, $\Delta \boldsymbol{x} = (\Delta x_1, ..., \Delta x_m)$.

2.6 EKSTREMUMET E FUNKSIONIT ME SHUMË NDRYSHORE

Së pari shqyrtojmë ekstremumet e funksioneve me dy ndryshore e mandej marrim rastin më të përgjithshëm ($m > 2$).

2.6.1 Ekstremumet e funksionit me dy ndryshore

Përkufizimi 2.6.1 *Le të jetë dhënë funksioni $u = f(x, y)$ i përcaktuar në një bashkësi $D \subset \mathbf{R}^2$ dhe le të jetë (x_0, y_0) pikë e brendshme e bashkësisë D. Thuhet se funksioni f ka në pikën (x_0, y_0)* **maksimum (minimum)** *në qoftë se ekziston një $\delta-$rrethinë e pikës (x_0, y_0) e tillë që për çdo (x, y) nga kjo rrethinë, të ndryshme nga (x_0, y_0), plotësohet pabarazimi (fig. 2.8):*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) \geq f(x_0, y_0)). \tag{1}$$

Nëse pabarazimi (1) është rigoroz thuhet se funksioni në pikën (x_0, y_0) ka **maksimum (minimum) rigoroz** .
Kështu pika në të cilën funksioni ka maksimum (minimum) karakterizohet me faktin që $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq 0$ ($\Delta f \geq 0$) për çdo (x, y) (të ndryshme nga (x_0, y_0)) nga $\Delta-$rrethina e pikës (x_0, y_0).

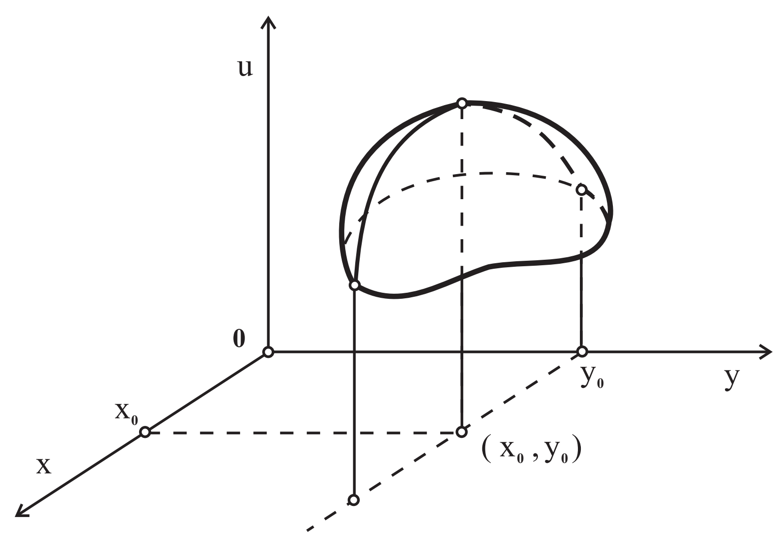


Fig. 2.8.

Së bashku maksimumi e minimumi i funksionit quhen **ekstremume** të tij. Është e qartë se ekatremumet e funksionit me dy ndryshore, ashtu si edhe ekstremumet e funksionit me një ndryshore, janë veti lokale të tij.

Teorema 2.6.1 *(kushtet e nevojshme të ekstremumit) Le të jetë dhënë funksioni $u = f(x, y)$ që ka në pikën e brendshme $(x_0, y_0) \in D$ ekstremum. Atëherë* *derivatet e pjesshme të këtij funksioni në këtë pikë, nëse ekzistojnë, anulohen, d.m.th.:*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

Vërtetimi. Sipas supozimit në një δ-rrethinë të pikës (x_0, y_0) plotësohet pabarazimi (1). Atëherë, funksioni $f(x, y_0)$ (i variablit x) plotëson këtë pabarazim (fig. 2.8) në një rrethinë të pikës x_0, d.m.th. ka ekstremum në këtë pikë. Këndej, sipas teoremës që jep kushtin e nevojshëm të ekstremumit të funksionit me një ndryshore, derivati i $f(x, y_0)$ në pikën x_0, nëse ekziston, është zero:

$$[f(x, y_0)]'_{x=x_0} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0.$$

Ngjashëm tregohet edhe barazimi i dytë i (2). Teorema u vërtetua.

Pikat ku derivatet e pjesshme anulohen njëkohësisht quhen **pika stacionare** të atij funksioni. Prandaj, nëse funksioni u ka derivate të pjesshme, ekstremumet e tij duhet të kërkohen në pikat e tij stacionare. Mirëpo çdo pikë stacionare nuk është pikë në të cilën funksioni ka ekstremum. P.sh. për funksionin $u = x^2 - y^2$ pika $(0, 0)$ është pikë stacionare, por në të funksioni nuk ka ekstremum (fig. 2.9). Me të vërtetë, për $y = 0$ dhe çdo $x \neq 0$ kemi $\Delta u > 0$, ndërsa për $x = 0$ dhe çdo $y \neq 0$ kemi $\Delta u < 0$. Kjo tregon se funksioni në shqyrtim nuk ka ekstremum në pikën $(0, 0)$.

Ky shembull tregon se kushtet (2) të teoremës 2.6.1 nuk janë të mjaftueshme që funksioni të ketë ekstremum në pikën (x_0, y_0).

Ekstremumet e funksionit $u = f(x, y)$ mund të kërkohen edhe në pikat në të cilat të paktën njëri nga derivatet e pjesshme nuk ekziston. Pikat stacionare së bashku me pikat në të cilat të paktën njëri nga derivatet e pjesshme nuk ekziston formojnë bashkësinë e pikave **kritike** të funksionit.

Rezultati në vijim jep kushte të mjaftueshme që pika stacionare të jetë pikë ekstremumi.

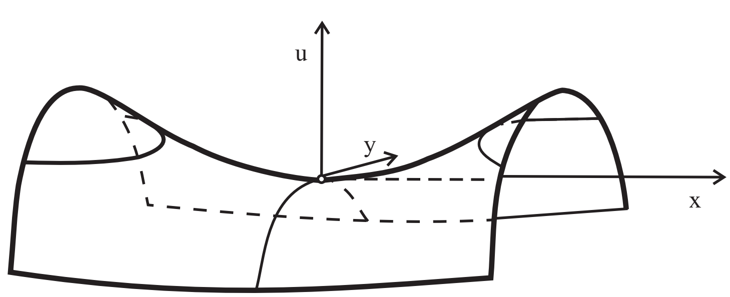


Fig. 2.9.

Teorema 2.6.2 *Le të jetë funksioni $f(x,y)$ i përkufizuar në $D \subset \mathbf{R}^2$ dhe le të ketë derivate të pjesshme të vazhdueshme të rendit të dytë në ndonjë rrethinë të pikës stacionare (x_0, y_0). Atëherë:*

a) funksioni f ka maksimum në pikën (x_0, y_0), nëse në atë pikë vlen:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \ \ dhe \ \ f_{xx} < 0;$$

b) funksioni ka minimum në pikën (x_0, y_0), nëse në atë pikë vlen:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \ \ dhe \ \ f_{xx} > 0;$$

c) funksioni f nuk ka ekstremum në pikën (x_0, y_0) nëse në atë pikë vlen:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy} < 0.$$

Vërtetimi. Formula e Tejlorit për funksionin $f(x_0, y_o)$ në pikën (x_0, y_0) është:

$$\left.\begin{aligned} \Delta f(x_0,y_0) &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \\ &= \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) + +r_1(\Delta x, \Delta y), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ku

$$r_1(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y) 0<\theta<1.$$

Duke marrë parasysh se $f_x = f_y = 0$ dhe nëse zëvendësojmë $\overline{P} = (x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$ atëherë barazimi (3) merr formën:

$$\Delta f(x_0,y_0) = r_1(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{2}[f_{xx}(\overline{P})\Delta x^2 + 2f_{xy}(\overline{P})\Delta x\Delta y + f_{yy}(\overline{P})\Delta y^2]. \quad (4)$$

Meqenëse derivatet e pjesshme janë të vazhdueshme në pikën $P_0(x_0, y_0)$, atëherë:

$$f_{xx}(\overline{P}) = f_{xx}(P_0) + \alpha_1 = A + \alpha_1,$$

$$f_{xy}(\overline{P}) = f_{xy}(P_0) + \alpha_2 = B + \alpha_2,$$

$$f_{yy}(\overline{P}) = f_{yy}(P_0) + \alpha_3 = C + \alpha_3,$$

ku $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tentojnë në zero kur $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$.

Duke zëvendësuar këto derivate të pjesshme në formulen (4) marrim

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0,y_0) &= \frac{1}{2}[f_{xx}(P_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(P_0)\Delta_x\Delta_y + f_{yy}(P_0)\Delta y^2 + 0(\rho^2)] \\ &= \frac{1}{2}[d^2 f(P_0) + 0(\rho^2)], \end{aligned}$$

sepse $\alpha_1\Delta x^2 + \alpha_2\Delta x^2\Delta y^2 + \alpha_3\Delta y^2$ është e formës $0(\rho^2)$ kur $\rho \to 0$ (trego!)

Tregojmë se për ρ mjaft të vogla, shenja e $\Delta f(x_0, y_0)$ përcaktohet nga kufiza e parë, d.m.th.:

$$\operatorname{sgn} \Delta f(P_0) = \operatorname{sgn} d^2 f(P_0),$$

kur $d^2 f(P_0)$, si funksion homogjen i rendit të dytë i shtesave Δx e Δy ruan shenjë të njëjtë pozitive (negative) ose merr, për Δx e Δy sado të vogla (në vlerë absolute), si vlera pozitive si dhe negative. Me të vërtetë, le të jetë ρ këndi në mes të drejtëzës P_0P, ku $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, dhe boshtit Ox (fig. 2.10). Atëherë, meqë $\Delta x = \rho\cos\alpha, \Delta y = \rho\sin\alpha$, fitojmë:

$$\left.\begin{aligned}\Delta f(P_0) \quad &= \frac{1}{2}[\rho^2(A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha) + 0(\rho^2)] = \\ &= \frac{1}{2}\rho^2\left[\psi(\alpha) + \frac{0(\rho^2)}{\rho^2}\right],\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ku $\psi(\alpha) = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha$.

Tregojmë se kur $\psi(\alpha)$ ruan shenjë në $[0, 2\pi]$, d.m.th. kur $d^2 f(P_0)$ ruan shenjë në një rrethinë të P_0 si funksion i shtesave Δx e Δy, atëherë edhe $\Delta f(P_0)$ ruan shenjë në këtë rrethinë. Le të jetë p.sh $\psi(\alpha) > 0$ në $[0, 2\pi]$. Atëherë, $\psi(\alpha)$, si funksion i vazhdueshëm në $[0, 2\pi]$ merr vlerën më të vogël $m > 0$. Shprehja $\Delta x(P_0)$, në bazë të (5), për ρ mjaft të vogla, për të cilat $\frac{|0(\rho^2)|}{\rho^2} < m$, ruan shenjën e $\rho(\alpha)$. Pra, $\Delta f(P_0) > 0$ dhe kjo tregon se funksioni ka minimum në pikën P_0. Në mënyrë analoge tregohet se $\Delta f(P_0)$ ruan shenjën negative në rrethinën e pikës P_0. Pra funksioni ka maksimum në këtë pikë.

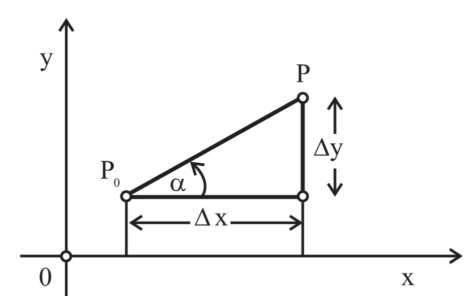


Fig. 2.10.

Shqyrtojmë tash rastin kur $\psi(\alpha)$ ndërron shenjë në $[0, 2\pi]$. Le të jetë $\psi(\alpha_1) > 0, \psi(\alpha_2) > 0$ për $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi]$. Kur $\psi \to 0$, nga formula (5) duket qartë se $\Delta(P_0) > 0$ për $\alpha = \alpha_1$ si dhe $\Delta(P_0) > 0$ për $\alpha = \alpha_2$. Pra, $\Delta f(P_0)$ nuk ruan shenjë në asnjë rrethinë të pikës P_0. Rrjedhimisht, pika stacionare P_0 nuk është pikë ekstremumi e funksionit.

Kështu shohim se problemi kthehet në studimin e shenjës së $d^2f(P_0)$ në rrethinën e pikës P_0, ose shqyrtimin e shenjës së funksionit $\psi(\alpha)$ në $[0,2\pi]$. Tash shqyrtojmë me radhë rastet a), b) e c).

a) Le të jetë $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 = AC-B^2 = \Delta > 0$ dhe $A<0$. Atëherë, $C\neq 0$ dhe në veçanti $C>0$. Kemi:

$$A\cdot\psi(\alpha) = (A\cos\alpha + B\sin\alpha)^2 + \Delta\cdot\sin^2\alpha, \tag{6}$$

prej nga shohim se $A\cdot\psi(\alpha)>0$ në $[0,2\pi]$, sepse të dy kufizat e anës së djathtë të (6) janë jonegative dhe nuk anulohen njëkohësisht (kufiza e parë anulohet për $\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{B}{A}\right)$, kurse e dyta për $\alpha=0$ ose $\alpha=\pi$ ose $\alpha=2\pi$).

Pra, $\psi(\alpha)$ në $[0,2\pi]$ ruan shenjën e A-së. Meqë $A<0$, atëherë $\psi(\alpha)<0$ kështu që nga sa thamë më lart, funksioni ka maksimum në pikën P_0.

b) Në mënyrë të ngjashme tregohet.

c) Le të jetë $\Delta = AC-B^2<0$. E zëmë në fillim se $A<0$. Atëherë, për $\alpha=0$ kufiza e parë e anës së djathtë të (6) është pozitive, kurse e dyta është zero. Prandaj $A\cdot\psi(\alpha)>0$. Mirëpo, për $\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{B}{a}\right)$ kufiza e parë bëhet zero kurse e dyta është negative (sepse $\Delta<0$.) Prandaj $A\cdot\psi(\alpha)>0$. Këndej rrjedh se $\psi(\alpha)$ nuk ruan shenjë në $[0,2\pi]$, d.m.th. P_0 nuk është pikë ekstremumi. Në këtë përfundim arrijmë edhe kur $A=0$. Me të vërtetë,

$$\psi(\alpha) = 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha = \sin\alpha(2B\cos\alpha+\sin\alpha) \tag{7}$$

dhe $B\neq 0$ sepse përndryshe do të ishte $\Delta=0$. Meqenëse $\lim\limits_{\alpha\to\pi}(2B\cos\alpha+\sin\alpha) = -2B$, për $\alpha\in(\pi-\delta,\pi+\delta)$ $(\delta>0)$, faktori i dytë i anës së djathtë të (7) ruan shenjën e kundërt të B-së, kurse faktori i parë $\sin\alpha$ ndryshon shenjë kur argumenti kalon nga $\alpha<\pi$ $(\sin\alpha>0)$ në $\alpha>\pi$ $(\sin\alpha<0)$, në rrethinën e pikës π. Pra $\psi(\alpha)$ ndryshon shenja në rrethinën e pikës π, d.m.th. pika P_0 nuk është pikë ekstreme e funksionit.

Teorema u vërtetua.

Vërejtje. Kur $\Delta = AC-B^2=0$, teorema nuk jep përgjigje për natyrën e pikës stacionare P_0, sepse mund të ndodhë që P_0 të jetë pikë ekstremumi, por mund të ndodhë që ajo të mos jetë e tillë. Në këtë rast, në qoftë se funksioni ka derivate të rendeve më të larta, duhet studiuar edhe kufizat të tjera të formulës së Tejlorit ose duhet shqyrtuar ekstremumi në rrugë të tjera.

Shembuj 2.6.1 1. Shqyrtojmë ekstremumet e funksionit:

$$u = 1-\sqrt{x^2+y^2}.$$

Shihet se funksioni i dhënë nuk ka pika stacionare. Por, në pikën (0,0) derivatet e tij të pjesshme nuk ekzistojnë, sepse shprehjet:

$$\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}, \frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y} = \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

nuk kanë limite kur $\Delta x \to 0$, përkatësisht $\Delta y \to 0$. Pra (0, 0) është pikë kritike.

Meqë $\Delta u = u(\Delta x, \Delta y) - u(0,0) = -\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < 0$, shohim se funksioni ka maksimum në pikën (0, 0) dhe se $u_{\max} = 1$.

2. Të shqyrtohen ekstremumet e funksionit $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Nga $f_x = 3x^2 - 3y$ e $f_y = 3y^2 - 3x$ shohim se funksioni në shqyrtim ka kudo derivate të pjesshme. Nga sistemi:

$$3x^2 - 3y = 0$$

$$3y^2 - 3x = 0,$$

shohim pikën (0, 0) dhe (1, 1) janë pika stacionare. Që të shqyrtohet natyra e tyre llogariten derivatet e dyta të funksionit:

$$f_{xx} = 6x, f_{xy} = -3, \ f_{yy} = 6y.$$

Në pikën (0, 0) kemi $\Delta = AC - B^2 = -9 < 0$, d.m.th. (sipas teoremës 2.6.2) në të funksioni nuk ka ekstremum. Ndërsa në pikën $(1, 1)$ vlen $\Delta = 27$ dhe $A = 6 > 0$. Pra funksioni ka minimum në atë pikë dhe $f_{\min} = -1$.

3. Të shqyrtohen ekstremumet e funksionit $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} - \frac{20}{y}$.

Nga $f_x = y - \frac{50}{x^2}$, $f_y = x + \frac{20}{y^2}$, shohim se funksioni në fushën e tij të përcaktimit $(R^2 \setminus \{(0, 0)\})$ ka kudo derivate të pjesshme. Nga sistemi:

$$y - \frac{50}{x^2} = 0,$$

$$x + \frac{20}{y^2} = 0,$$

shohim se pika $(-5, 2)$ është pikë e vetme stacionare. Meqenëse $f_{xx} = \frac{100}{x^3}$, $f_{xy} = 1, f_{yy} = -\frac{49}{y^3}$ në pikën stacionare kemi: $\Delta = 3 > 0$ dhe $A = -\frac{4}{5} < 0$. prandaj shohim se funksioni i dhënë në pikën stacionare ka maksimum dhe $f_{\max} = -30$.

2.6.2 Ekstremumet e funksionit me m $(m > 2)$ ndryshore

Ekstremumet përkufizohen në mënyrë analoge edhe për funksionin e m ndryshoreve $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$. Në të njëjtën mënyrë tregohet se derivatet e pjesshme të një funksioni té tillë, në qoftë se ekzistojnë, anulohen njëkohësisht në çdo pikë ekstremumi.

Që të shqyrtohen ekstremumet e funksionit me shumë ndryshore në pikat stacionare të tij na duhet kuptimi i formës kuadratike që jepet në algjebër.

Formë kuadratike quhet çdo polinom homogjen i rendit të dytë i ndryshoreve $x_1, x_2, ..., x_m$:

$$A(\boldsymbol{x}) = A(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j,$$

ku a_{ij} janë koeficientë konstantë. Ajo është **pozitivisht (negativisht)** e përcaktuar nëse $A(\boldsymbol{x}) > 0\,(A(\boldsymbol{x}) < 0)$ për çdo pikë $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$.

Forma kuadratike e cila merr vlera si pozitive ashtu edhe negative quhet e **pacaktuar**.

Tash do ta formulojmë, pa e vërtetuar, rezultatin analog me teoremën 2.6.2. për funksionet me m ndryshore.

Nëse funksioni $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ ka derivate të pjesshme të vazhdueshme deri te rendi i dytë në një rrethinë të pikës stacionare $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ atëherë natyra e pikës stacionare përcaktohet nga

$$d^2 f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j,$$

që paraqet një formë kuadratike të shtesave $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m$ të ndryshoreve të pavarura të funksionit f në pikën x_0. Pikërisht:

a) nëse $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ është formë kuadratike pozitivisht (negativisht) e përcaktuar atëherë funksioni f në pikën $\boldsymbol{x}_0$ ka minimum (maksimum);

b) nëse $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ është formë kuadratike e pacaktuar atëherë në pikën $\boldsymbol{x}_0$ funksioni f nuk ka ekstremum.

Siç shihet problemi i vetëm mbetet shqyrtimi i formës kuadratike $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$, d.m.th. kur ajo është pozitivisht e kur negativisht e përcaktuar. Për këtë shfrytëzojmë **kriterin e Silvestrit** (i cili vërtetohet në kursin e algjebrës):

Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që forma kuadratike:

$$A(\boldsymbol{x}) = A(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j, \tag{1}$$

të jetë pozitivisht e përcaktuar është që:

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0.$$

Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që forma (1) të jetë negativisht e përcaktuar është që:

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \cdots,$$

$$\cdots, (-1)^m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0.$$

Shembulli 2.6.1 Të shqyrtohen ekstremumet e funksionit:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

Zgjidhja: Nga sistemi:

$$u_x = 2x + 2$$

$$u_y = 2y + 4$$

$$u_z = 2z - 6,$$

shohim se pikë e vetme stacionare është pika (-1, -2, 3). Derivatet e dyta të pjesshme janë:

$$u_{xx} = 2,\ u_{yy} = 2,\ u_{xz} = 2,\ u_{xy} = u_{xz} = u_{yz} = 0.$$

Kështu:

$$u_{xx} = 2 > 0, \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{vmatrix} = 4 > 0, \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

d.m.th. diferenciali i dytë në pikën stacionare, sipas kriterit të Silvestrit është formë ku adratike pozitivisht e përcaktuar. Prandaj, funksioni në pikën (-1, -2, 3) ka minimum ($u_{\min} = -14$).

2.6.3 Vlera më e madhe dhe më e vogël

Le të jetë funksioni $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ i vazhdueshëm në bashkësinë e mbyllur e të kufizuar $D \subset \mathbf{R}^m$. Në bazë të teoremës së dytë të Vajershtrasit (teorema 2.3.6) ky funksion arrin në D vlerën më të madhe (më të vogël) në një pikë të bashkësisë D. Në qoftë se pika $\boldsymbol{x}_0$ ($\boldsymbol{x}_1$) është pikë e brendshme e bashkësisë D, atëherë është e qartë se funksioni ka maksimum (minimum) në të. Prandaj, që të gjendet vlera më e madhe e më e vogël e funksionit në D mjafton të gjenden pikat kritike të këtij funksioni, të llogariten vlerat e funksionit në këto pika, të krahasohen ato me vlerat në konturin e zonës D dhe më e madhja (vogla) midis tyre është vlera më e madhe (vogël) e funksionit f në D.

Shembulli 2.6.2 Të gjendet vlera më e madhe dhe vlera më e vogël e funksionit $u = x^2 - xy + y^2$ në bashkësinë $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$ (fig. 2. 11).

Zgjidhja: Kemi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x.$$

Pra, derivatet e pjesshme ekzistojnë kudo dhe anulohen në pikën (0, 0) dhe se $u(0, 0) = 0$.

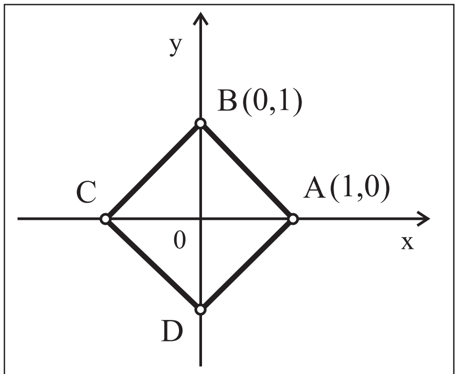


Fig. 2.11.

Shqyrtojmë vlerat e funksionit në konturin e bashkësisë D. Gjatë segmentit AB ekuacioni i të cilit është $y = 1 + x$ kemi:

$$u = 3x^2 - 3x + 1$$

në $[0, 1]$. Këndej rrjedh se $u' = 6x - 3$ dhe se derivati anulohet në pikën $x = \frac{1}{2}$. Në pikën $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ kemi $u = \frac{1}{4}$, kurse në skajet e segmentit është $u = 1$. Gjatë segmentit BC, ekuacioni i të cilit është $y = x - 1$, kemi $u = x^2 + x + 1$ në [-1, 0]. Këndej $u' = 2x + 1$, pra derivati anulohet në pikën $x = -\frac{1}{2}$. Në pikën $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ kemi $u = \frac{3}{4}$, kurse në skajet e segmentit: $u = 1$. Meqë funksioni $u = x^2 - xy + y^2$ nuk ndryshon po të zëvendësohet x me $-x$ e y me $-y$, njëkohësisht, atëherë nuk ka nevojë të shqyrtohet në segmentet CD e DA. Duke i krahasuar vlerat 0, $\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{4}$ shohim se vlerën më të vogël 0 funksioni e merr në pikën $(0, 0)$ kurse vlerën më të madhe 1 në pikat A, B, C e D.

2.6.4 Detyra për ushtrime

1. Të shkruhet formula e Tejlorit për funksionin $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ në rrethinën e pikës $(1, -2)$.

2. Të shkruhet formula e Tejlorit për funksionin $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ në rrethinën e pikës $(1, 1, 1)$.

3. Të shkruhet formula e Tejlorit e rendit të dytë për funksionin $f(x, y) = \cos x \sin y$ në rrethinën e pikës $(0, 0)$.

4. Të shkruhet formula e Maklorenit e rendit të katërt për funksionet:

   a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

   b) $f(x, y) = e^- y^2 + 2xy$;

   c) $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$;

   d) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

5. Të gjendet polinomi i shkallës së katërt i cili e përafron funksionin $f(x,y) = (x+y)^x$ në rrethinën e pikës $(0,1)$. Gjithashtu të llogaritet përafërsisht $(1,04)^{0,03}$ dhe vlera e gjetur të krahasohet me vlerën e cila fitohet duke marrë polinomin e Tejlorit të shkallës së katërt për funksionin $g(x,y) = y^x$ në rrethinën e pikës $(0,1)$.

6. Funksioni $F(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^2 f(x + r\sin t, y + r\sin t)\,dt$, ku f është dy herë i diferencueshëm në zonën përkatëse, të zbërthehet sipas shkallëve të r-it deri te rendi i dytë.

7. Të zbërthehet sipas formulës së Maklorenit të rendit të tretë funksioni:
$$f(x,y) = \int\limits_0^1 (1+y)^{xt^2}\,dt$$
(f ka derivate të pjesshme deri te rendi i katërt në ndonjë rrethinë të pikës $(0,\ 0)$).

8. Duke përdorur formulën e Maklorenit për funksionin me dy ndryshore dhe zbërthimin e njohur të funksionit me një ndryshore, të gjendet

   1) $\dfrac{\partial^{10} f(0,0)}{\partial x^6 \partial y^4}$, dhe 2) $\dfrac{\partial^{10} f(0,0)}{\partial x^4 \partial y^6}$,

   në qoftë se $f(x,y) = \sqrt{1 + y(1-x)}$.

9. Të shqyrtohen ektremumet e funksioneve:

   $a)$ $f(x,y) = x^2 + y^2$; $b)$ $f(x,y) = (x+y)^2$;

   $c)$ $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x + y$; $d)$ $f(x,y) = x^3 y$.

10. Të shqyrtohet ekzistenca e ekstremumeve dhe, në rastin kur ekzistojnë, të gjenden ato për funksionet:

    $a)$ $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;

    $b)$ $f(x,y) = 2(x-2y)^2 + x^3 - 2y^3 + 1$; $c)$ $f(x,y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

    $d)$ $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;

    $e)$ $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;

11. Të shqyrtohen ekstremumet e funksioneve:

    $a)$ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;

    $b)$ $f(x,y,z) = \frac{x^2}{y} - \frac{2}{x} + z + \frac{y^2}{4z}$, $(x,y,z \in (0,\infty))$;

c) $f(x,y,z) = x^2y^3z(7-2x-3y-z)$;

d) $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$, $(0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi,\ 0 \le z \le \pi)$;

e) $u = x_1^1 x_2^2 ... x_n^n (1 - x_1 - 2x_2 - ... - nx_n)$ $(x_1 > 0, x_2 > 0, ..., x_n > 0)$;

f) $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + ... + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}$; $(x_i > 0, i = 1, 2, ..., n)$.

12. Në rrafshin Oxy të caktohet pika M ashtu që shuma e largesave prej asaj pike nga drejtëzat:

    a) $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 10$;

    b) $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$,

    të jetë minimale.

13. Të shkruhet ekuacioni i rrafshit i cili kalon nëpër pikën e dhënë $A(a,b,c)$ dhe me rrafshet koordinative formon tetradrin me vëllim më të madh.

14. Numrin e dhënë pozitiv a zbërtheni:

    a) në tri pjesë ashtu që prodhimi i tyre të jetë më i madh;

    b) në tre faktorë pozitiv ashtu, që shuma e vlerave reciproke të tyre të jetë më e vogla

    c) në n mbledhësa ashtu që shuma e katrorëve të tyre të jetë minimale.

15. Në sferën e dhënë të brendashkruhet paralelepipedi kënddrejtë me vëllim sa më të madh.

16. Të gjendet vlera më e madhe dhe vlera më e vogël e funksioneve:

    a) $u = x^2 + y^2 - xy + x + y + 1$, në $D = \{(x,y) | x \le 0,\ y \le 0,\ x + y + 3 \ge 0\}$;

    b) $u = x + y$ në $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 4\}$;c) $u = x^2 - xy + y^2$ në $D = \{(x,y) || x| + |y| \le 1\}$;

    d) $u = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ në $D = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 < 100\}$;

    e) $u = \sin x \sin y \sin z$ në $D = \{(x,y,z) | x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y + z \le \frac{\pi}{2}\}$;

    f) $u = x + y + z$ në $D = \{(x,y,z) | y^2 + z^2 \le x \le 1\}$.

2.7 FUNKSIONET E PASHTJELLUARA

Në shumë raste funksioni u i ndryshoreve $x_1, x_2, ..., x_m$ jepet me ekuacionin funksional $F(u, x_1, x_2, ..., x_m) = 0$. Funksionin u të dhënë në këtë mënyrë e quajmë të **pashtjelluar.** Në mënyrë të natyrshme paraqitet problemi se nën cilat kushte ekuacioni funksional $F(u, x_1, x_2, ..., x_m) = 0$ përkufizon njëvlersisht funksionin e shtjelluar $u = \varphi(x_1, x_2, ..., x_m)$, si dhe nën cilat kushte ai funksion i shtjelluar është i vazhdueshëm dhe i diferencueshëm.

Problemet e lartcekura nuk janë të thjeshta. Marrim p.sh. ekuacionin:

$$F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$

i cili në hapësirë përkufizohet sferën S me rrezen 1 dhe me qendër në fillimin e koodinatave (fig. 2.12).

Është e qartë se ekuacioni $u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ në qarkun $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ përkufizon pa kufi shumë funksione të shtjelluara. Të tillë janë funksioni $u = +\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$, funksioni $u = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ dhe çdo funksioni i barabartë me $+\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$, në ndonjë nënbashkësi të qarkut $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, ose me $-\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ në ndonjë nënbashkësi tjetër të atij qarku.

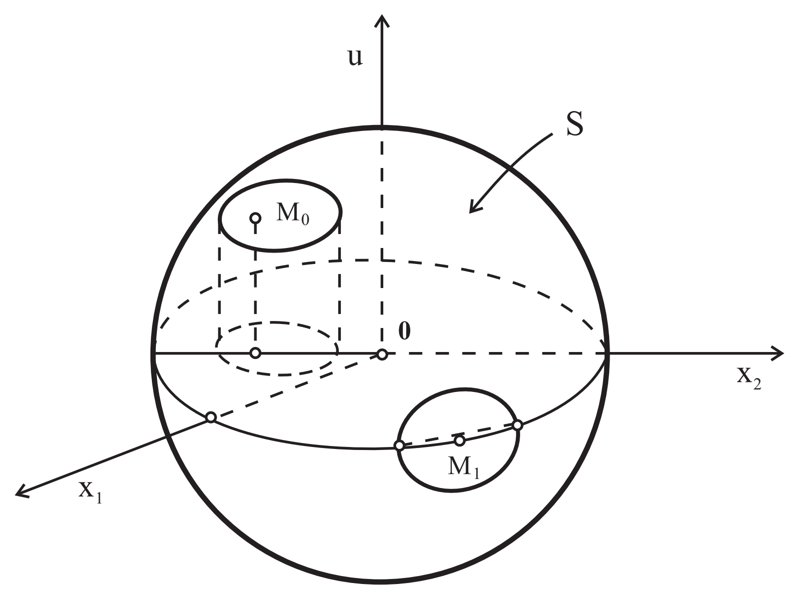


Fig. 2.12.

Në vazhdim të shohim për çfarë kushtesh ekziston funksioni i vetëm i shtjelluar i cili plotëson barazimin $F(u, x_1, x_2) = u^2 - x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$. Në sferën S fiksojmë pikën $M_0(u_0, x_1^0, x_2^0)$ e cila nuk gjendet në planin Ox_1x_2, d.m.th. të tillë që $u_0 \neq 0$. Po theksojmë se pjesa e sferës S e cila gjendet në një rrethinë sado të vogël të pikës M_0, njëvlersisht projektohet në planin Ox_1x_2 (shih fig. 2.12). Analitikisht kjo tregon se nëse shqyrtojmë funksionin $F(u, x_1, x_2) = u_2 + x_1^2 + x_2^2 - 1$ vetëm në rrethinën mjaft të vogël të pikës M_0, atëherë funksioni $F(u, x_1, x_2) = u_2 + x_1^2 + x_2^2 - 1$ përkufizon funksionin e njëvlershëm $u = +\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ për $u_0 > 0$ dhe $u = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$, për $u_0 < 0$.

Në qoftë se në sferën S marrim pikën $M_1(0, x_1, x_2)$ e cila gjendet në planin Ox_1x_2 (shih fig. 2.12), atëherë pjesa e sferës S e cila shtrihet në cilëndo rrethinë të pikës M_1, nuk projektohet njëvlerësisht në planin Ox_1x_2. Analitikisht kjo tregon se nëse shqyrtojmë funksionin $F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1$ në çdo rrethinë të pikës M_1, atëherë ekuacioni $F(u, x_1, x_2) = u_2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ nuk përkufizon funksion të njëvlershëm u të ndryshoreve x_1 e x_2.

Po vëmë në dukje se derivati i pjesshëm $\frac{\partial F}{\partial u} = 2u$ i funksionit në shqyrtim në pikën M_0 është i ndryshëm nga zero, ndërsa në pikën M_1 është i barabartë me zero. Më poshtë tregojmë se për të përkufizuar ekuacioni $F(u, x_1, x_2) = 0$ funksionin e njëvlerëshëm të shtjelluar në një rrethinë të pikës M_0 duhet, përveç tjerash, që derivati i pjesshëm në pikën M_0 të jetë i ndryshëm nga zero. Po ashtu do të shohim kushtin që funksioni i shtjelluar, i cili paraqet zgjidhjen e vetme të atij ekuacioni, të jetë i vazhdueshëm dhe i diferencueshëm. Rezultatet e fituara do të barten në rastin e funksioneve të pashtjelluara të përkufizuara me sistemin e ekuacioneve funksionale.

2.7.1 Ekzistenca dhe diferencueshmëroa

Në fillim kufizohemi në rastin e funksionit:

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

d.m.th. kur F varet nga dy ndryshore.

Teorema 2.7.1 *Le të jetë dhënë ekuacioni* (1), *ana e majtë e të cilit* $F(x, y)$ *plotëson këto kushte:*

1) *është funksion i vazhdueshëm në një* $\delta-$*rrethinë të pikës* (x_0, y_0);

2) *ka derivate të pjesshme* $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$ *të vazhdueshme në pikën* (x_0, y_0);

3) $F(x_0, y_0) = 0$, *dhe*

4) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Atëherë, ekziston një funksion i vetëm i vazhdueshëm $y = f(x)$ *i përcaktuar nga ekuacioni* (1) *në një segment* $\Delta\,(x_0 - a \leq x \leq x_0 + a)$, *që merr vlerën* y_0 *në pikën* x_0 *dhe që ka derivat të vazhdueshëm në* Δ.

Vërtetimi. (**a**) **Ekzistenca e funksionit** $y = f(x)$. Supozojmë se $F_y(x_0, y_0) > 0$. Meqë $F_y(x, y)$ është i vazhdueshëm në pikën $P_0(x_0, y_0)$, ekziston një rrethinë e kësaj pike:

$$\overline{U} : \begin{cases} x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha \\ y_0 - \beta \leq y \leq y_0 + \beta, \end{cases}$$

në të cilën $F_y(x,y) > 0$. Numrat α e β i marrim aq të vegjël sa që drejtkëndëshi $\overline{U}$ të përfshihet në $\delta-$rrethinën e pikës P_0 (fig. 2.13). Atëherë, në veçanti, kemi $F_y(x_0,y) > 0$ në segmentin $y_0 - \beta \leq y \leq y_0 + \beta$. Këndej shohim se funksioni $F(x_0,y)$ është monotono rritës në këtë segment. Tash, meqë $F(x_0,y_0) = 0$, kemi:

$$F(x_0, y_0 - \beta) < 0, \; F(x_0, y_0 + \beta) > 0. \tag{2}$$

Funksioni $F(x,y)$ është, sipas supozimit, i vazhdueshëm në pikat $P_1(x_0, y_0 - \beta)$ dhe $P_2(x_0, y_0 + \beta)$ prandaj ai është i vazhdueshëm si funksion i $x-$it në këto pika, d.m.th. janë të vazhdueshme funksionet:

$$F(x, y_0 - \beta) \text{ e } F(x, y_0 + \beta) \tag{3}$$

në pikën x_0. Funksionet e vazhdueshme (3), me qenë se janë të ndryshme nga zero në pikën x_0 (shih (2)), ruajnë shenjën e vlerës së tyre në një δ_1-rrethinë të kësaj pike. Pra ekziston një δ_1 i tillë që:

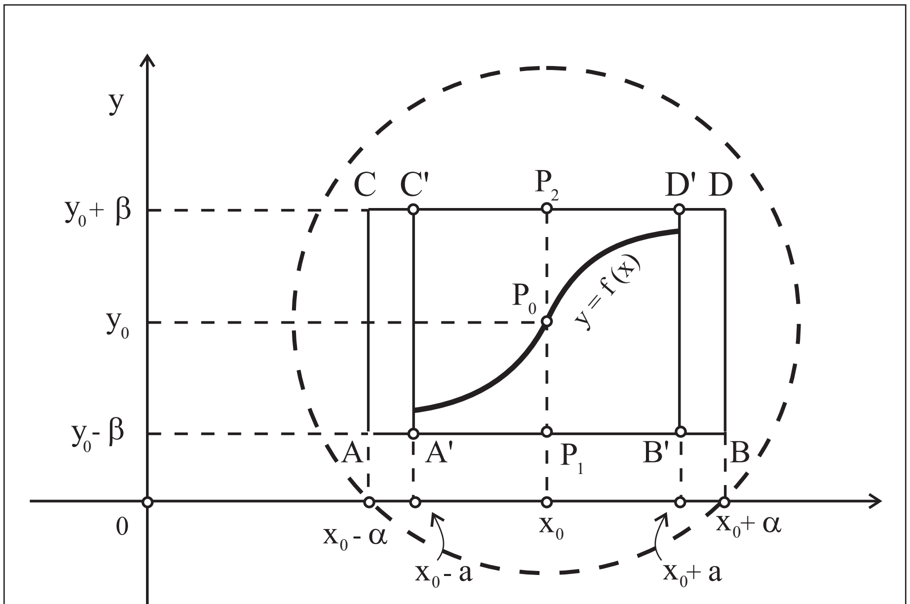


Fig. 2.13.

$$F(x, y_0 - \beta) < 0, F(x, y_0 + \beta) > 0, \tag{4}$$

për $x_0 - \delta_1 \leq x \leq x_0 + \delta_1$. Shënojmë me $a = \min\{\alpha, \delta_1\}$ dhe marrim parasysh drejtkëndëshin:

$$\overline{U'} : \begin{cases} x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \\ y_0 - \beta \leq y \leq y_0 + \beta, \end{cases}$$

i cili ka vetinë: $\overline{U'} \subset \overline{U}$. Prandaj, $F_y(x,y) > 0$ në $\overline{U'}$ dhe në $A'B'$ e $B'C'$ plotësohen pabarazimet (4). Le të jetë x një pikë e fiksuar (e çfarëdoshme) e segmentit $\Delta = [x_0 - a, x_0 + a]$. Shqyrtojmë funksionin $\varphi(y) = F(x, y)$ në segmentin $y_0 - \beta \leq y \leq y_0 + \beta$. Me qenë se $\varphi'(y) = F_y(x, y)$ në $(y_0 - \beta, y_0 + \beta)$, atëherë $\varphi(y)$ është funksion monotono-rritës i ndryshores y në atë segment. Tash:

$$\varphi(y_0 - \beta) = F(x, y_0 - \beta) < 0, \;\; \varphi(y_0 + \beta) = F(x, y_0 + \beta) > 0,$$

prej nga shohim se ekziston pikë e vetme e brendshme y^* e segmentit $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ me vetinë:

$$\varphi(y^*) = F(x, y^*) = 0. \tag{5}$$

Çdo pike $x \in \Delta$ i shoqërojmë numrin përkatës y^* nga intervali $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ që plotëson barazimin (5). Kështu përkufizuam funksionin $y = f(x)$ që plotëson identitetin

$$F(x, y^*) = F(x, f(x)) = 0 \tag{5'}$$

d.m.th. $y = f(x)$ është funksion i pashtjelluar i ndryshores x i përcaktuar nga ekuacioni (1) në segmentin Δ. Në veçanti, $f(x_0) = y_0$ sepse për $x = x_0$ vlera $y = y_0$ plotëson kushtet: $F(x_0, y_0) = 0$ dhe $y_0 \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$.

Kështu u tregua ekzistenca e funksionit të pashtjelluar $y = f(x)$ të përcaktuar nga ekuacioni (1) dhe që $f(x_o) = y_0$.

(**b**) **Vazhdueshmëria e funksionit** $y = f(x)$. Le të jetë $x_1 \in (x_0 - a, x_0 + a)$ pikë e çfarëdoshme dhe $\varepsilon > 0$ numër pozitiv. Shënojmë $y_1 = f(x_1)$. Është e qartë se $y_0 - \beta \leq y_1 \leq y_0 + \beta$. Me qenë se pika (x_1, y_1) është pikë e brendshme e katërkëndëshit $\overline{U'}$, atëherë ekziston katërkëndëshi:

$$\overline{U''} : \begin{cases} x_1 - \lambda \leq x \leq x_1 + \lambda \\ y_1 - \mu \leq y \leq y_1 + \mu, \end{cases}$$

i cili përmbahet në $\overline{U'}$ dhe, përveç kësaj, μ e marrim më të vogël se ε. Në çdo pikë të $\overline{U''}$ kemi $F_y(x, y) > 0$, pra edhe $F_y(x_1, y) > 0$ në segmentin $[y_1 - \mu, y_1 + \mu]$. Këndej shohim se $F_y(x_1, y)$ është monotono-rritës në këtë segment. Me qenë se $F(x_1, y_1) = 0$, atëherë:

$$F(x_1, y_1 - \mu) < 0, \;\; F(x_1, y_1 + \mu) > 0. \tag{2'}$$

Tash, nga vazhdueshmëria e funksioneve $F(x_1, y_1 - \mu)$ dhe $F(x_1, y_1 + \mu)$ si dhe nga fakti se ato në pikën $x = x_1$ janë të ndryshme nga zero ((2')), rrjedh ekzistenca e $\delta_1$rrethinës së pikës x_1 në të cilën:

$$F(x, y_1 - \mu) < 0, \;\; F(x, y_1 + \mu) > 0,$$

dhe, përveç kësaj, δ_1 e marrim më të vogël se λ.

Duke përsëritur arsyetimet që bëmë në pikën e mëparshme për funksionin $\varphi(y) = F(x, y)$, ku x është një pikë e çfarëdoshme nga $(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$ arrijmë në përfundim se për çdo x të tillë ekziston y^* i vetëm nga intervali $(y_1 - \mu, y_1 + \mu)$ i tillë që $F(x, y^*) = 0$. Përveç kësaj, meqë $\mu < \varepsilon$, kemi $y_1 - \varepsilon < y^* < y_1 + \varepsilon$. Nga ana tjetër, me qenë se $\overline{U''} \subset \overline{U'}$, intervali $(y_1 - \mu, y_1 + \mu)$, pra edhe numri y_1, përfshihen në $(y_0 - \beta, y_0 + \beta)$. Por në (a) ne treguam se në këtë interval ekziston një numër i vetëm $y = f(x)$ që plotëson ekuacionin $F(x, y) = 0$. Prandaj, për çdo $x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$ është $y^* = f(x)$ dhe rrjedhimisht, për çdo x të tillë vlen $y_1 - \varepsilon < f(x) < y_1 + \varepsilon$, gjë që tregon vazhdueshmërinë e funksionit $y = f(x)$ në pikën x_1. Me këtë u tregua vazhdueshmëria e funksionit $y = f(x)$ në Δ.

(**c**) **Uniciteti i funksionit** $y = f(x)$. Nëse funksioni $y = \varphi(x)$, i vazhdueshëm në segmentin Δ, plotëson kushtet:

$$\varphi(x_0) = y_0, \ F(x, \varphi(x)) = 0, \quad x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \tag{6}$$

dhe $y_0 - \beta \leq y \leq y_0 + \beta$ për çdo x nga segmenti Δ, atëherë në saje të (a) është e qartë se $\varphi(x) = f(x)$ në Δ. Mbetet të tregojmë se nuk ekziston funksion i vazhdueshëm $\varphi(x)$ që plotëson kushtet (6) dhe që merr vlera jashtë intervalit $(y_0 - \beta, y_0 + \beta)$ për x nga Δ. Supozojmë se ekziston $\overline{x} \in \Delta$ ashtu që $\varphi(\overline{x}) > y_0 + \beta$. Me qenë se $\varphi(x_0) = y_0 < y_0 + \beta$ dhe $\varphi(x)$ është i vazhdueshëm, ekziston një pikë e tillë x^* nga Δ në të cilën $\varphi(x^*) = y_0 + \beta$, ose sipas (6), $F(x^*, y_0 + \beta) = 0$, që është në kundërshtim me pabarazimin e dytë të (4). Në mënyrë analoge hidhet poshtë edhe mundësia e ekzistencës së një pike x' nga Δ ashtu që të jetë $\varphi(x') < y_0 - \beta$.

(**d**) **Ekzistenca dhe vazhdueshmëria e** $f'(x)$. Meqë $F(x, y)$ ka derivate të pjesshme të vazhdueshme në $\overline{U}$, pra edhe në $\overline{U'}$, funksioni i tillë është i diferencueshëm, d.m.th.:

$$\left.\begin{aligned} \Delta F \quad &= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F_x(x, y)\Delta x - \\ &-F_y(x, y)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ku α_1 e α_2 tentojnë në zero kur $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \delta y^2}$ tenton në zero, ndërsa pikat (x, y) e $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ janë të çfarëdoshme nga $\overline{U'}$.

Pikat e sipërpërmendura i caktojmë në atë mënyrë që:

$$y = f(x), \ y + \Delta y = f(x + \Delta x,)$$

ku x e $x + \Delta x$ merren nga segmenti Δ. Në bazë të $(5')$ marrim:

$$F(x, y) = F(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) = 0,$$

prej nga fitojmë $\Delta F = 0$. Tash nga (7) gjejmë:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x, y) + \alpha_1}{F_y(x, y) + \alpha_2}. \tag{8}$$

Supozojmë se $\Delta x \to 0$. Nga vazhdueshmëria e funksionit f, rrjedh se $\Delta y \to 0$, që do të thotë se kur $\Delta x \to 0$ edhe $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \delta y^2}$ tenton në zero. Veprojmë në (8) me limit kur $\Delta x \to 0$ dhe marrim:

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

Më në fund, vërejmë se $f'(x)$ është i vazhdueshëm si funksion i përbërë i funksioneve të vazhdueshme.

Teorema u vërtetua.

Kjo teoremë formulohet e vërtetohet në mënyrë analoge edhe për funksionet e pashtjelluara të m ndryshoreve.

Terema 2.8.1′ *Le të jetë dhënë ekuacioni:*

$$F(x_1, x_2, ...x_m, y) = 0, \tag{1'}$$

ana e majtë e të cilit plotëson këto kushte:

1) *është funksion i vazhdueshëm në një $\delta-$rrethinë të pikës $P_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, y^0)$;*

2) *ka derivate të pjesshme F_{x_i} $(i = 1, 2, ..., m)$, F_y të vazhdueshme në atë pikë;*

3) $F(P_0) = 0$ dhe

4) *$F_y(P_0) \neq 0$.*

Atëherë, ekziston një funksion i vetëm i vazhdueshëm $y = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ i përcaktuar nga ekuacioni (1') në një zonë rrethuese Δ $(x_i^0 - a_i \leq x_i \leq x_i^0 + a_i,\ i = 1, 2, ..., m)$ të pikës $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$, që merr vlerën y^0 në pikën M_0 dhe që ka derivate të pjesshme të vazhdueshme në Δ.

Po vëmë në dukje se formulat për gjetjen e derivateve të pjesshme të funksionit $y = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ janë:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

2.7.2 Funksionet e pashtjelluara të përcaktuara me sisteme ekuacionesh

Në këtë pikë do të shohim se për çfarë kushtesh sistemi i ekuacioneve:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, ..., x_m; y_1, y_2, ..., y_p) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_m; y_1, y_2, ..., y_p) &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ F_p(x_1, x_2, ..., x_m; y_1, y_2, ..., y_p) &= 0, \end{aligned}$$

mund të zgjidhet në mënyrë të vetme sipas $y_1, y_2, ..., y_p$ në ndonjë rrethinë të pikës $P_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0; y_1^0, y_2^0, ..., y_p^0)$ të bashkësisë me $m+p$ dimensione në të cilën $F_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0;\ y_1^0, y_2^0, ..., y_p^0) = 0,\ i = 1, 2, ..., p$. Në rastin kur këto funksione ekzistojnë shtrohet problemi i studimit të vetive të tyre si vazhdueshmëria, diferencueshmëria, etj.

Për lehtësi, në fillim kufizohemi në rastin më të thjesht, kur $m = 1$ dhe $p = 2$.

Le të jetë dhënë sistemi i ekuacioneve:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= 0 \\ F_2(x,y,z) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

anët e majta të të cilëve, si funksione të tri ndryshoreve, janë të vazhdueshme dhe kanë derivate të pjesshme të vazhdueshme në një $\delta-$rrethinë të pikës $P_0(x_0, y_0, z_0)$, kurse në pikën P_0 plotësohen këto barazime:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_0,y_0,z_0) &= 0 \\ F_2(x_0,y_0,z_0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Kërkohet të shqyrtohen kushtet tjera që sistemi (1) të përcaktoj një çift të vetëm funksionesh të vazhdueshme $y = f_1(x),\ y = f_2(x)$ të tilla që:

$$\left.\begin{aligned} F_1[x, f_1(x), f_2(x)] &= 0 \\ F_2[x, f_1(x), f_2(x)] &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1''}$$

në një rrethinë të pikës x_0 ashtu që të vlej:

$$f_1(x_0) = y_0, f_2(x_0) = z_0. \tag{2}$$

Përveç kësaj, kërkohet të shqyrtohet diferencueshmëria e këtyre funksioneve si dhe mënyra e llogaritjes së derivateve të tyre.

Supozojmë se të paktën njëri prej derivateve $\frac{\partial F_1}{\partial z}$ e $\frac{\partial F_2}{\partial z}$ është i ndryshëm nga zero në pikën P_0. Le të jetë $\frac{\partial F_1(P_0)}{\partial z} \neq 0$. Për ekuacionin $F_1(x,y,z) = 0$ në një rrethinë të pikës P_0 plotësohen kushtet e teoremës $2.8.1'$, prandaj ai përkufizon në një zonë Δ të pikës $M_0(x_0, y_0)$ funksionin $z = f(x,y)$, të vazhdueshme në Δ i cili ka derivate të pjesshme të vazhdueshme në pikën në shqyrtim dhe në te merr vlerën z_0, si dhe:

$$F_1[x, y, f(x,y)] = 0. \tag{$*$}$$

Shënojmë:

$$F_2[x, y, f(x,y)] = \Phi(x,y) \tag{3}$$

dhe shqyrtojmë ekuacionin:

$$\Phi(x,y) = 0. \tag{4}$$

Në qoftë se është e mundur që nga ky ekuacion y të përcaktohet si funksion i $x-$ it në rrethinën e pikës $x_0:\ y = f_1(x)$ pra që:

$$\Phi(x, f_1(x)) = 0,$$

dhe që $f_1(x_0) = y_0$, atëherë duke shënuar:

$$z = f[x, f_1(x)] = f_2(x) \tag{5}$$

lehtë shihet se çifti $y = f_1(x),\ z = f_2(x)$ plotëson të gjitha kërkesat e sipërshënuara. Përveç kësaj këto funksione janë të vazhdueshme. Pra problemi kthehet në zgjidhjen e ekuacionit (4) në lidhje me y në rrethinën e pikës x_0. Sipas teoremës 2.8.1, kërkesat për ekzistencën dhe vetitë e funksionit $y = f_1(x)$ do të ishin plotësuar nëse $\dfrac{\partial\Phi(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Sipas rregullave të derivimit të funksionit të përbërë nga (3) marrim:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} \tag{6}$$

kurse nga identiteti $(*)$ marrim:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

Tash, meqë $\frac{\partial F_1}{\partial z} \neq 0$. kemi:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial y}}{\frac{\partial F_1}{\partial z}}.$$

Duke e zëvendësuar këtë shprehje në anën e djathtë të barazimit (6) marrim:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial z}}\Big(\frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial z}\Big) = \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial z}}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Atëherë, kërkesa $\frac{\partial\Phi(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$ është ekuivalente me kërkesën që në pikën P_0 të kemi:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Përcaktori funksional që gjendet në anën e majtë të pabarazimit të mësipërm quhet **përcaktori i Jakobit** ose **jakobian** i funksioneve F_1 e F_2 në lidhje me argumentet x e y dhe shënohet me simbolin:

$$J = \frac{D(F_1, F_2)}{D(z, y)}.$$

Pra, arritëm në kërkesën që $\frac{D(F_1,F_2)}{D(z,y)}\Big|_{P_0} \neq 0$. Po vëmë në dukje se kërkesa që bëmë në fillim që të paktën një nga derivatet e pjesshme $\frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial z}$ të jetë i ndryshëm nga zero në pikën P_0, është rrjedhim i menjëhershëm i kërkesës së re, sepse nëse këto derivate anulohen atëherë jakobiani J do të kishte një shtyllë zero, pra do të ishte zero në pikën P_0. Në këtë mënyrë kur $J \neq 0$ atëherë ekzistenca dhe vazhdueshmëria e funksioneve të pashtjelluara të përcaktuara me sistemin (1), $y = f_1(x)$ e $z = f_2(x)$ u vërtetua. Po ashtu sipas teoremës 2.8.1. e 2.8.1$'$, kushtet e të cilave plotësohen, funksionet $y = f_1(x)$ e $z = f_2(x)$ janë të derivueshme në rrethinat e pikave x_0 e (x_0, y_0), përkatësisht, pra edhe funksioni $z = f_2(x) = f[x, f_1(x)]$ ka derivat të vazhdueshëm në rrethinën e pikës x_0.

Më në fund tregojmë se ky çift funksionesh është i vetëm.

Supozojmë se ekzistojnë funksionet $y = f_1^*(x)$ e $z = f_2^*(x)$ të vazhdueshme në rrethinën e pikës x_0 dhe në të plotësojnë identitetet:

$$F_1[x, f_1^*(x), f_2^*(x)] = 0, \; F_2[x, f_1^*(x), f_2^*(x)] = 0$$

dhe që $f_1^*(x_0) = y_0, \; f_2^*(x_0) = z_0$. Tregojmë se në këtë rrethinë $f_1^*(x) = f_1(x), \; f_2^*(x) = f_2(x)$.

Si u theksua më lartë, identiteti $(*)$ plotësohet për çdo (x, y) që gjendet në $\Delta-$rrethinën e pikës $M_0(x_0, y_0)$, prandaj ky identitet plotësohet edhe kur në vend të y zëvendësojmë një funksion të vazhdueshëm të x që merr vlerën y_0 në pikën x_0, si është funksioni $y = f_1^*(x)$. Kështu:

$$F_1\{x, f_1^*(x), [x, f_1^*(x)]\} = 0 \tag{9}$$

në rrethinën e pikës x_0. Nga ana tjetër, sipas (7), kemi:

$$F_1[x, f_1^*(x), f_2^*(x)] = 0 \tag{10}$$

dhe me qenë se $z = f(x, y)$ është zgjidhje e vetme e ekuacionit:

$$F_1(x, y, z) = 0,$$

që merr vlerën z_0 në pikën (x_0, y_0), atëherë nga (9) e (10) rrjedh se:

$$f[x, f_1^*(x)] = f_2^*(x). \tag{11}$$

Mirëpo nga (3), (11) dhe (7) rrjedh se në një rrethinë të pikës x_0 vlen:

$$\Phi[x, f_1^*(x)] = F_2\{x, f_1^*(x), f[x, f_1^*(x)]\} = F_2[x, f_1^*(x), f_2{}^*(x)] = 0. \tag{12}$$

Me qenë se funksioni $y = f_2(x)$, si u tregua më sipër, është e vetmja zgjidhje e ekuacionit (4) që merr vlerën y_0 në pikën x_0, atëherë nga (12) rrjedh se: $f_1^*(x) = f_1(x)$, në rrethinën e pikës x_0, prandaj sipas (5) e (11) kemi:

$$f_2(x) = f[x, f_1(x)] = f[x, f_1^*(x)] = f_2^*(x),$$

kështu që edhe uniciteti u tregua.

Në këtë mënyrë u tregua ky rezultat:

Teorema 2.7.2 *Le të jetë dhënë sistemi i ekuacioneve (1) anët e majta të të cilit, si funksione të tri ndryshoreve janë të vazhdueshme në një $\delta-$rrethinë të pikës $P_0(x_0, y_0, z_0)$ kurse në pikën P_0 :*

$$F_1(P_0) = 0, \; F_2(P_0) = 0, \; J(P_0) = \frac{D(F_1, F_2)}{D(z, y)}\bigg|_{P_0} \neq 0.$$

Atëherë në një rrethinë të pikës x_0 ekziston një çift i vetëm funksionesh të vazhdueshme $y = f_1(x), z = f_2(x)$ që plotësojnë ekuacionet (1), kurse në pikën x_0 kushtet $f_1(x_0) = y_0, f_2(x_0) = z_0$, dhe që kanë derivat të vazhdueshëm.

Kjo teoremë në mënyrë analoge mund të zgjerohet në rastin e ekuacioneve me p të panjohura $(m > p)$. Pra, ka vend ky rezultat:

Teorema 2.8.2′ *Le të jetë dhënë sistemi i ekuacioneve:*

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, ..., x_m; y_1, y_2, ..., y_p) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_m; y_1, y_2, ..., y_p) &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ F_p(x_1, x_2, ..., x_m; y_1, y_2, ..., y_p) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

anët e majta të ekuacioneve të të cilit si funksione të $m+p$ ndryshoreve janë të vazhdueshme dhe kanë derivate të pjesshme të vazhdueshme në një $\delta-$rrethinë të pikës $P_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0; y_1^0, y_2^0, ..., y_p^0)$ të hapësirës me $m+p$ dimensione, kurse në pikën P_0 :

$$F_i(P_0) = 0, \ (i = 1, 2, ..., p)$$

dhe jakobiani i funksioneve F_i (në lidhje me $y_1, y_2, ..., y_p$) është i ndryshëm nga zero, d.m.th.:

$$J(P_0) = \frac{D(F_1, F_2, ..., F_p)}{D(y_1, y_2, ..., y_p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_1}{\partial y_p} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_2}{\partial y_p} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ \frac{\partial F_p}{\partial y_1} & \frac{\partial F_p}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Atëherë, në një Δ rrethinë (të mbyllur) të pikës $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ ekziston një sistem i vetëm funksionesh

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, ..., x_m) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, ..., x_m) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_p &= f_p(x_1, x_2, ..., x_m), \end{aligned}$$

që plotësojnë identikisht ekuacionet e sistemit (13) *në Δ dhe që në pikën P_0 marrin përkatësisht vlerat $y_1^0, y_2^0, ..., y_p^0, f_i(P_0) = y_i(0)$ $(i = 0, 1, 2, ..., p)$. Këto funksione në Δ kanë derivate të vazhdueshme.*

Në fund të kësaj pike shqyrtojmë problemin e llogaritjes së derivateve të funksioneve f_i me ndihmën e derivateve të pjesshme të funksioneve F_i. Edhe këtu kufizohemi në rastin më të thjesht, d.m.th. në rastin që u shqyrtua në teoremën 2.8.2. Marrim parasysh identitetet:

$$\begin{aligned} F_1[x, f_1(x), f_2(x)] &= 0 \\ F_2[x, f_1(x), f_2(x)] &= 0, \end{aligned}$$

anët e majta të të cilëve kanë derivate të vazhdueshme. Atëherë, duke derivuar anë për anë marrim sistemin e ekuacioneve:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{df_1}{dx}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{df_2}{dx} &= 0\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{df_1}{dx}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{df_2}{dx} &= 0\end{aligned}$$

që është një sistem linear në lidhje me të panjohurat $\frac{df_1}{dx}$, $\frac{df_2}{dx}$. Përcaktori i këtij sistemi që është jakobiani:

$$J=\frac{D(F_1,F_2)}{D(z,y)},$$

meqë është funksion i vazhdueshëm dhe i ndryshëm nga zero në pikën P_0 do të jetë i tillë edhe në një rrethinë të kësaj pike që tregon se sistemi ka vetëm një zgjidhje:

$$\begin{aligned}\frac{df_1}{dx} &= \frac{1}{J}\Big(\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial z}\Big)\\ \frac{df_2}{dx} &= \frac{1}{J}\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial y}\Big).\end{aligned}$$

Në rastin e përgjithshëm, nisemi nga identitetet:

$$F_i[x_1,x_2,...,x_m,f_1(x_1,x_2,...,x_m),f_2(x_1,x_2,...,x_m),...,f_p(x_1,x_2,...,x_m)]=0,$$

i=1,2,...,m, dhe derivojmë në lidhje me x_i $(i=1,2,...m)$. Atëherë, fitohet sistemi i p ekuacioneve në lidhje me të panjohurat $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$, $k=1,2,...,p$ me përcaktorin e sistemit:

$$\frac{D(F_1,F_2,...,F_p)}{D(y_1,y_2,...,y_p)}\neq 0$$

në rrethinën e pikës P_0 dhe duke zgjidhur këtë sistem gjejmë derivatet $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$, $k=1,2,...,p$.

Vërejtje. Lehtë tregohet se kur funksionet F_i kanë derivate të pjesshme të vazhdueshme të rendit të dytë në rrethinën e pikës P_0, atëherë funksionet f_i kanë po ashtu derivate të rendit të dytë. E njëjta gjë vlen edhe për derivatet e rendeve të larta.

2.7.3 Kuptimi gjeometrik i Jakobianit

Në këtë pikë jepet kuptimi gjeometrik i Jakobianit që ka rëndësi të madhe praktike e teorike. Edhe këtu, për lehtësi do të kufizohemi në rastin $p=2$. Supozojmë se funksionet:

$$\left.\begin{aligned}u &= u(x,y)\\ v &= v(x,y),\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

janë të vazhdueshme dhe kanë derivate të pjesshme të vazhdueshme në një zonë D të planit Oxy në të cilën:

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} \neq 0. \tag{2}$$

Krahas planit Oxy marrim parasysh edhe planin $O'uv$. Mund të tregohet se sistemi i funksioneve (1) çdo pike $P(x,y)$ të zonës D i shoqëron pikën $P'(u,v)$ (ku $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$) të planit $O'(u,v)$, kurse bashkësinë D e transformon në bashkësinë D' të këtij plani. Në këtë rast çdo lakoreje të zonës D i përgjigjet një lakore e zonës D', çdo pike të brendshme të $D-$ së i përgjigjet një pikë e brendshme e D' si dhe pikës së konturit të D i përgjigjet pikë konturi e $D'-$tës.

Supozojmë se $A(a,b)$ është një pikë e brendshme e zonës D ndërsa h një numër pozitiv mjaft i vogël. Zonën D e ndajmë në zona katrore me brinjën h. Marrim në shqyrtim katrorin me kulme $A(a,b), B(a+h,b), C(a+h,b+h), D(a,b+h)$ (fig. 2.14). Sistemi (1) kulmet e katrorit $ABCD$ i pasqyron në pikat A', B', C', D' të planit $O'uv$ (fig. 2.15), me koordinata:

$$\begin{aligned}
&A'(u(a,b), v(a,b))\\
&B'(u(a+h,b), v(a+h,b))\\
&C'(u(a+h.b+h), v(a+h,v+h))\\
&D'(u(a,b+h), v(a,b+h)),
\end{aligned} \tag{3}$$

ndërsa vet katrorin në drejtkëndëshin vijëpërkulët $A'B'C'D'$. Në vazhdim shqyrtojmë lidhjen që ekziston në mes të syprinave të katrorit $ABCD$ dhe figurës $A'B'C'D'$. Për këtë qëllim llogarisim syprinën e figurës $A'B'C'D'$.

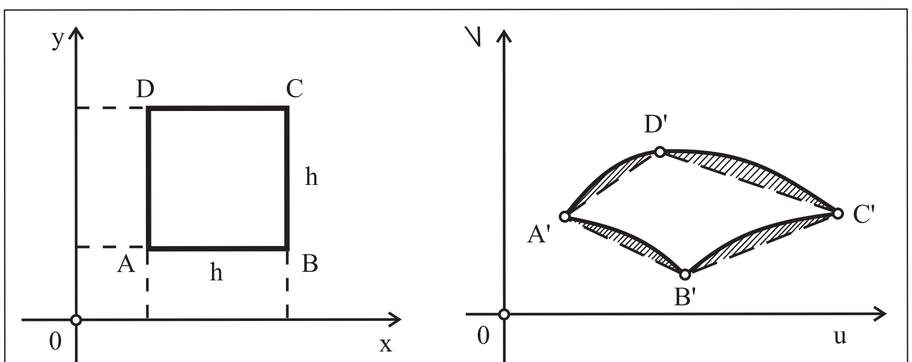


Fig. 2.14. Fig. 2.15.

Së pari llogarisim syprinën e katërkëndëshit $A'B'C'D'$ e cila është sa shuma e syprinave të trekëndëshave $A'B'C'$ dhe $A'C'B'$. Sikurse dihet nga gjeometria analitike, syprina e trekëndëshit me kulme $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)$ është e barabartë me gjysmën e vlerës absolute të përcaktorit:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 \\ u_3 - u_2 & v_3 - v_2 \end{vmatrix}.$$

Prandaj, syprina e trekëndëshit $A'B'C'$ jepet me:

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} u(a+h,b) - u(a,b) & v(a+h,b) - v(a,b) \\ u(a+h,b+h) - u(a+h,b) & v(a+h,b+h) - v(a+h,b) \end{vmatrix}$$

prej së cilës, kur përdorim teoremën e Lagranzhit, fitojmë:

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} u'_x(a+\vartheta_1\cdot h,b)\cdot h & v'_x(a+\vartheta_2\cdot h,b)\cdot h \\ u'_y(a+h,b+\vartheta_3\cdot h)\cdot h & v'_y(a+h,b+\vartheta_4\cdot h)\cdot h \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\frac{h^2}{2}\begin{vmatrix} u'_x(a+\vartheta_1\cdot h,b) & v'_x(a+\vartheta_2\cdot h,b) \\ u'_y(a+h,b+\vartheta_3\cdot h) & v'_y(a+h,b+\vartheta_4\cdot h) \end{vmatrix},$$

ku $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ janë numra midis 0 e 1. Me qenë se derivatet e pjesshme të funksioneve nga sistemi (1) janë të vazhdueshme në pikën $A(a,b)$, atëherë kur $h \to 0$ marrim:

$$J(a,b) = \begin{vmatrix} u'_x(a,b) & v'_x(a,b) \\ u'_y(a,b) & v'_y(a,b) \end{vmatrix},$$

d.m.th. jakobianin e sistemit (1) në pikën $A(a,b)$. Kështu, kur $h \to 0$ syprina e trekëndëshit $A'B'C'$ jepet me shprehjen:

$$\frac{h^2}{2}[|J(a,b)| + \alpha] = \frac{h^2}{2}[|J(a,b)| + o(h^2),$$

ku $\alpha \to 0$ kur $h \to 0$. Këndej rrjedh se syprina e katërkëndëshit $A'B'C'D'$ paraqitet me formulën:

$$h^2|J(a,b)| + o(h^2). \tag{4}$$

Kalojmë tash nga katërkëndëshi $A'B'C'D'$ në figurën $A'B'C'D'$. Është e qartë se diferenca e syprinave këtyre figurave nuk e kalon shumën e syprinave të katër henzave elementare të vizuara në fig. 2.15. Për të treguar se edhe syprina e katërkëndëshit vijëpërkulët $A'B'C'D'$ paraqitet me një shprehje të formës (4) mjafton të tregojmë se henzat elementare kanë syprina të formës $o(h^2)$ kur $h \to 0$. Tregojmë këtë p.sh. për harkun me kulme $A'B'$ (fig. 2.16). Koordinatat e pikave A' e B' i shënojmë me (u_0, v_0) përkatësisht me $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$.

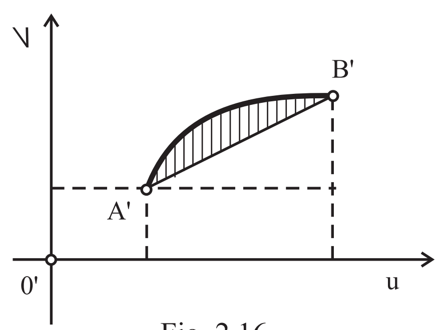


Fig. 2.16.

Me qenë se $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} \neq 0$ në zonën D atëherë $J(a,b) \neq 0$. Këndej shohim se të paktën njëri nga derivatet e pjesshme $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ është i ndryshëm nga zero. Le të jetë $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ në pikën $A(a,b)$. Atëherë, në saje të vazhdueshmërisë së tij, për h mjaftë të vegjël do të jetë $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ në të gjithë katrorin $ABCD$, pra edhe në brinjën AB të tij. Ekuacionet parametrike të harkut $\widehat{\text{A'B'}}$ janë:

$$\begin{aligned} u &= u(x,b) \\ v &= v(x,b), \end{aligned}$$

$a \leq x \leq a+h$. Me qenë se funksioni $u = u(x,b)$ është monotono rritës, ekziston funksioni invers $x = x(u)$ në $[u_0, u_0+\Delta u]$, i cili po ashtu është i vazhdueshëm si dhe ka derivat të vazhdueshëm. Pra, ekuacioni i harkut $\widehat{\text{A'B'}}$ mund të shkruhet në trajtën $v = v(x(u),b)$ në $[u_0, u_0+\Delta u]$, ose $v = f(u)$ në $[u_0, u_0+\Delta u]$, ku $f(u)$ ka derivat të vazhdueshëm në këtë segment si funksion i përbërë i funksioneve të tilla. Nga ana tjetër segmenti drejtvizor $A'B'$ jepet me ekuacionin:

$$v = v_0 + \frac{\Delta v}{\Delta u}(u-u_0) = f(u_0) + \frac{f(u_0+\Delta u) - f(u_0)}{\Delta u}(u-u_0)$$

në segmentin $[u_0, u_0+\Delta u]$. Pra, henza me kulme A' e B' ka syprinën S e cila jepet me formulën:

$$S = \int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u} \left| f(u) - f(u_0) - \frac{f(u_0+\Delta u) - f(u_0)}{\Delta u}(u-u_0) \right| du.$$

Duke marrë parasysh se:

$$\begin{aligned} f(u) - f(u_0) &= f'(u_1)(u-u_0), \\ f(u_0+\Delta u) - f(u_0) &= f'(u_2)\Delta u, \end{aligned}$$

marrim:

$$S = \int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u} (u-u_0)|f'(u_1) - f'(u_2)|du$$

ose:

$$S = |f'(u_1) - f'(u_2)| \int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u} (u - u_0)du,$$

prej nga gjejmë:

$$S = |f'(u_1) - f'(u_2)| \frac{\Delta^2 u}{2}. \tag{5}$$

Me qenë se $\Delta u = u(a+h, b) - u(a, b) = u'_x(a + \vartheta h, b) \cdot h$, ku $0 < \vartheta < 1$. atëherë $\Delta u \to 0$ kur $h \to 0$, prandaj nga (5) fitojmë:

$$S = o(\Delta^2 u) = o(h^2).$$

Kështu treguam se syprina e katërkëndëshit $A'B'C'D'$ jepet me formulën (4).

Me qenë se syprina e katrorit $ABCD$ është h^2, atëherë herësi i syprinës së zonës së pasqyruar e zonës fillestare është:

$$|J(a, b)| + \alpha \tag{6}$$

ku $\alpha \to 0$ kur $h \to 0$.

Në vend të katrorit $ABCD$ mund të merret një zonë e çfarëdoshme e thjesht që përmban pikën $A(a, b)$ dhe që ka diametrin madhësi pambarimisht të vogël. Edhe në këtë rast mund të tregohet se raporti i syprinave jepet me shprehje të trajtës (6).

Është e qartë se kur $h \to 0$ shprehja (6) tenton në $|J(a, b)|$. Prandaj **vlera absolute e jakobianit të sistemit (1) në pikën $A(a, b)$ është sa limiti i raportit të syprinës së zonës së pasqyruar dhe zonës fillestare (e cila përmban pikën $A(a, b)$) kur** $h \to 0$. Ky kuptim gjeometrik i jakobianit mund të zgjerohet në mënyrë analoge edhe në hapësirat me më shumë dimensione.

2.8 EKSTREMUMET E KUSHTËZUARA. METODA E LAGRANZHIT

Në pikën 2.6 shqyrtuam problemin e eksremumit të një funksioni me shumë ndryshore. Shpesh hasim probleme të ekstremumit të një funksioni argumentet e të cilit plotësojnë kushte suplementare. Ekstremumet e kësaj natyre do ti quajmë të **kushtëzuara**. Në këtë paragraf shqyrtojmë këto ekstremume.

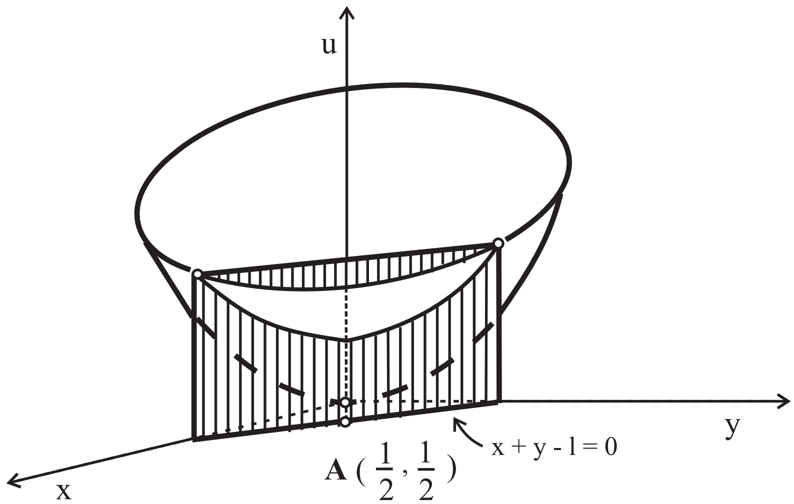


Fig. 2.17.

Marrim p.sh. funksionin:

$$u = x^2 + y^2.$$

Është e qartë se ky funksion ka minimum në pikën $O(0, 0)$ dhe se $u_{min}(0, 0) = 0$. Në qoftë se argumentet e tij plotësojnë kushtin

$$x + y - 1 = 0, \tag{1}$$

d.m.th. në qoftë se shqyrtojmë vetëm pikat që gjenden në drejtëzën e mësipërme (fig. 2.17), atëherë funksioni $u = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$ ka minimum në pikën $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dhe $u_{min}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Është e qartë se nëse në vend të (1) marrim ndonjë ekuacion tjetër edhe ekstremumi do të ndryshoj.

Pra, zgjidhja e problemit të mësipërm ndryshon në varësi të kushteve plotësuese të argumenteve. Këto kushte quhen **ekuacione të lidhjes.**

Në mënyrë të përgjithshme problemin, në analogji me shembullin e mësipërm, mund ta shtrojmë kështu: kërkohet të gjenden ekstremumet e funksionit $u = f(x, y)$ në pikat e drejtëzës me ekuacion $F(x, y) = 0$. Në këtë rast thuhet se $u = f(x, y)$ ka ekstremum të kushtëzuar në lidhje me drejtëzën $F(x, y) = 0$ në pikën $M_0(x_0, y_0)$ të saj, nëse ekziston rrethinë e kësaj pike e tillë që për çdo pikë $M(x, y)$ të asaj drejtëze që gjendet në atë rrethinë plotësohet pabarazimi $f(M) \leq f(M_0)$ ose $f(M) \geq f(M_0)$.

Në formën më të përgjithshme, problemi i ekstremumeve të kushtëzuara mund të shtrohet kështu: kërkohet të gjenden ekstremumet e funksionit $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ në pikën $P(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbf{R}^m$, koordinatat e të cilës plotësojnë ekuacionet e lidhjes:

$$F_i(x_1, x_2, ..., x_m) = 0, \; i = 1, 2, ..., n, \quad n < m. \tag{2}$$

Në këtë rast përkufizimi i ekstremumit jepet në mënyrë analoge si më sipër.

Problemi i ekstremumeve të kushtëzuara është i lidhur ngushtë me problemin e zgjidhjes së sistemit (2) në lidhje me n nga m ndryshoret $x_1, x_2, ..., x_m$, pra me teorinë e funksioneve të pashtjelluara që u shqyrtuan në paragrafin 2.7.

Për thjeshtësi do të kufizohemi në rastin e veçantë kur $m = 5$ dhe $n = 2$, d.m.th. do të shqyrtojmë ekstremumet e kushtëzuara të funksionit:

$$w = f(x, y, z, u, v) \tag{3}$$

argumentet e të cilit plotësojnë ekuacionet e lidhjes:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z, u, v) &= 0 \\ F_2(x, y, z, u, v) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Në fillim, si edhe te ekstremumet, shqyrtojmë kushtet e nevojshme. Supozojmë se funksioni (3) ka në pikën $P_0(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$, që vërteton sistemin (4), ekstremum të kushtëzuar në lidhje me këtë sistem. Për funksionin (3) supozojmë se është i diferencueshëm në pikën P_0, kurse për anët e majta të sistemit (4) që kanë derivate të pjesshme të vazhdueshme në rrethinën e pikës P_0 dhe që matrica funksionale:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix},$$

e ka rangun 2 në pikën P_0. Pra, një nga përcaktorët e rendit të dytë është i ndryshëm nga zero. Le të jetë:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

në pikën P_0. Atëherë, sipas teoremës $2.8.2'$, arrijmë në përfundim se në rrethinën e pikës $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ekziston sistemi i funksioneve

$$u = u(x, y, z), \ v = v(x, y, z), \tag{6}$$

i përcaktuar nga sistemi (4), si funksione të x, y e z. Ato plotësojnë identitetet:

$$\begin{aligned} F_1[x, y, z, u(x, y, z), v(x, y, z)] &= 0 \\ F_2[x, y, z, u(x, y, z), v(x, y, z)] &= 0 \end{aligned} \tag{4'}$$

në rrethinën e pikës M_0, ku funksionet (6) kanë derivate të vazhdueshme kurse në pikën M_0 marrin përkatësisht vlerat:

$$u(x_0, y_0, z_0) = u_0, \ v(x_0, y_0, z_0) = v_0.$$

Marrim funksionin ndihmës:

$$\varphi(x, y, z) = f[x, y, z, u(x, y, z), v(x, y, z)], \tag{3'}$$

Tregojmë se, nën kushtet e dhëna, ky funksion ka ekstremum të zakonshëm në pikën M_0. Me të vërtetë, për çdo pikë M që gjendet në rrethinën mjaft të vogël të pikës M_0, pika $P[x, y, z, u(x, y, z), v(x, y, z)]$, në saje të vazhdueshmërisë së funksioneve (6), do të jetë në një rrethinë të pikës P_0. Prandaj, sipas (4'), ajo vërteton sistemin (4). Meqenëse (3) ka ekstremum të kushtëzuar në lidhje me sistemin (4), plotësohen barazimet:

$$\varphi(M) = f[x, y, z, u(x, y, z), v(x, y, z)] \leq \varphi(M_0) = f(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0),$$

ose:

$$\varphi(M) = f[x, y, z, u(x, y, z), v(x, y, z)] \geq \varphi(M_0) = f(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0),$$

që tregon se $(3')$ ka ekstremum të zakonshëm në pikën M_0. Këndej rrjedh se plotësohen barazimet:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

që sipas $(3')$ dhe rregullave të derivimit të funksionit të përbërë, mund të rishkruhen kështu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Nga $(4')$ gjejmë $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ e $\frac{\partial v}{\partial z}$ dhe ato i zëvendësojmë në sistemin (7). Për këtë veprojmë kështu: duke derivuar identitetet e $(4')$. p.sh. në lidhje me x, fitojmë sistemin e ekuacioneve:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

në lidhje me të panjohurat $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$ me përcaktorin e sistemit $J \neq 0$ në pikën P_0.

Në mënyrë analoge, duke derivuar $(4')$ përkatësisht, në lidhje me y e z fitojmë dy sisteme analoge me (8), nga të cilat gjejmë katër derivatet e tjera të panjohura . Duke i zëvendësuar këto gjashtë derivate në anët e majta të (7), marrim një sistem prej tri ekuacionesh, anët e majta të të cilave mund të konsiderohen si funksione të dhëna të x, y e z. Duke bashkuar me to edhe sistemin (4) fitojmë një sistem prej pesë ekuacionesh, anët e majta të të cilave paraqesin funksione të njohura të x, y, z, u, v dhe që vërtetohet nga pika P_0. Pra atë që treguam më sipër mund të rrumbullakohet kështu: në qoftë se funksioni $\omega = f(x, y, z, u, v)$ ka ekstremum të kushtëzuar në lidhje me sistemin (4) në pikën P_0, atëherë koordinatat e kësaj pike vërtetojnë sistemin e pesë ekuacioneve që u theksua më lart (natyrisht në qoftëse plotësohen kushtet që u kërkuan për (3) e (4). Çdo pikë P që vërteton atë sistem quhet **pikë stacionare** e funksionit (3) në lidhje me sistemin (4). Kështu u tregua se pikat e eksremumit të kushtëzuar të (3) në lidhje me sistemin (4) përfshihen në bashkësinë e pikave stacionare. Mbetet të shqyrtohet problemi se kur pika stacionare është apo s'është pikë ekstremumi të kushtëzuar dhe nëse po, cila është natyra e këtij ekstremumi Para se të kalojmë në zgjidhjen e problemit të mësipërm do të gjejmë një metodë më praktike për përcaktimin e pikave stacionare të (3) ne lidhje me (4), Këtë metodë do ta quajmë **metoda e koeficientëve të përcaktuar të Lagranzhit**. Supozojmë se,siç u theksua më lart, funksioni (3) ka në pikën P_0 ekstremum të kushtëzuar në lidhje me (4) dhe f, F_1 e F_2 në rrethinën e pikës P_0 plotësojnë kërkesat që u dhanë më lart. Atëherë, sistemi i ekuacioneve:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial u} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial v} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial v} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial v} = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

ku të gjitha derivatet e pjesshme janë marrë në pikën P_0, ka zgjidhje të vetme në lidhje me të panjohurat λ_1 e λ_2. Tash, ekuacionet e sistemit (8) i shumëzojmë përkatësisht, me λ_1 e λ_2 dhe i mbledhim anë me të parin nga ekuacionet e sistemit (7). Sipas (9) arrijmë në përfundim se në pikën P_0 plotësohet relacioni:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0. \tag{10}$$

Në qoftë se përsëritet veprimi i mësipërm për sistemet ($8'$) e ($8''$), përkatësisht me ekuacionin e dytë e të tretë të (7) atëherë, sipas (9), fitojmë sistemin e ekuacioneve:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial z} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Sistemit të ekuacioneve nga (9), (10) e (11) i bashkojmë edhe dy ekuacionet e lidhjes (4) dhe kështu formohet sistemi i shtatë ekuacioneve me shtatë të panjohurat x, y, z, u, v, λ_1, λ_2, që vërtetohet nga kushtet e çdo pike stacionare të (3) në lidhje me (4). Sistemin e ekuacioneve që fitohen nga sistemet (9), (10) e (11) është lehtë ta shkruajmë e ta mbajmë në mend, në qoftë se ndërtojmë funksionin ndihmës që quhet **funksion i Lagranzhit:**

$$\Phi(x, y, z, u, v) = f + \lambda_1 F_2 + \lambda_2 F_2 \tag{12}$$

ku λ_1 e λ_2 janë koeficientë të panjohur. Sistemi (9) – (11) mund të rishkruhen kështu:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0, \tag{13}$$

që, në të vërtetë, fituam kushtet e nevojshme që funksioni Φ të ketë ekstremum të zakonshëm në pikën P_0. Pra metoda e Lagranzhit i redukton kushtet e pikave stacionare të f në lidhje me (4) në kushtet e zakonshme të pikave stacionare të Φ.

Natyrisht, që të gjenden të shtatë të panjohurat, sistemit (13) duhet t'i shtohen edhe dy ekuacionet e lidhjes. Në vazhdim shqyrtojmë natyrën e një pike stacionare. Në shumë raste natyra e saj duket e qartë nga natyra e problemit që shqyrtohet. Megjithatë ekzistojnë edhe kushte të mjaftueshme që një pikë stacionare të jetë pikë ekstremumi të kushtëzuar dhe pikërisht ato i shqyrtojmë në vijim. Supozojmë se funksionet $f, \quad F_1, \quad F_2$ kanë derivate të rendit të dytë në rrethinën e pikës stacionare P_0, ku plotësohen kushtet (13) e (4). Nga përkufizimi i funksionit të Lagranzhit është e qartë se, në bazë të kushteve (4), ekstremumet e kushtëzuar të funksionit (3) përputhen me ekstremumet e funksionit (12). Kjo rrjedh nga shkaku se në rrethinën mjaftë të vogël të pikës P_0 vlen $f(P) - f(P_0) = \Phi(P) - \Phi(P_0)$. Prandaj, në bazë të rezultateve nga pika 2.6, pika P_0 e funksionit Φ do të jetë pikë ekstremumi ose jo në qoftë se në të forma kuadratike $d^2\Phi$ do të jetë me shenjë të pandryshueshme (pozitivisht ose negativisht e përcaktuar) ose me shenjë të ndryshueshme . Kur $d^2\Phi(P_0) < 0$ ($d^2\Phi(P_0) > 0$), atëherë funksioni f në lidhje me kushtet (4), ka maksimum (minimum). Për të studiuar formën kuadratike $d^2\Phi$ (P_0) bëjmë këto vërejtje:

(a) Së pari $d^2\Phi$ (P_0) mund ta llogarisim, në saje të kushteve (13), si të gjitha argumentet e Φ të ishin ndryshore të pavarura. Në të vërtet, siç dihet, në rastin e përgjithshëm diferenciali i rendit të dytë i funksionit Φ nuk e gëzon vetinë e pavarësisë së formës dhe, duke marrë parasysh se u e v janë funksione të $x, \ y$ e z, jepet nga formula:

$$d^2\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz + \frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}dv\right)^2 \cdot \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial u}d^2u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}d^2v.$$

Por, meqë në pikën P_0 plotësohen kushtet $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} = 0$, atëherë $d^2\Phi$ jepet me formulën:

$$d^2\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz + \frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}dv\right)^2 \Phi \tag{14}$$

(b) Së dyti në formulën në formulën (14) diferencialet du e dv nuk janë ndryshore të pavarura, por funksione të $dx, \ dy, \ dz$ që gjenden duke zgjidhur sistemin që merret nga diferencimi i identiteteve (4′):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}\cdot dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot dz+\frac{\partial F_1}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial F_1}{\partial v}\cdot dv=0\\
&\frac{\partial F_2}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}\cdot dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}\cdot dz+\frac{\partial F_2}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial F_2}{\partial v}\cdot dv=0.
\end{aligned}\tag{15}$$

Duke marrë parasysh (5), sistemi (15) ka një zgjidhje të vetme me du e dv. Pasi të zëvendësojmë du e dv në (14) fitohet forma kuadratike e ndryshoreve të pavarura dx, dy, dz, me anën e së cilës mund të studiohet natyra e pikës stacionare P_0. Po theksojmë se shqyrtimi i ekstremumeve të kushtëzuara në rastin e përgjithshëm (rikujtojmë se deri tash kishim rastin kur $m=3,\quad n=2$) bëhet në mënyrë analoge.

Shembulli 2.8.1 Të gjenden ekstremumet e funksionit $f(x,y)=x\cdot y$ nëse ndryshoret x e y plotësojnë kushtin $x-y=0$.

Zgjidhja: Në këtë rast funksioni i Lagranzhit është:

$$\Phi(x,y)=x\cdot y+\lambda\cdot(x-y).$$

Meqenëse $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=y+\lambda$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=x-\lambda$, atëherë pikat stacionare i gjejmë nga sistemi:

$$\begin{aligned}
y+\lambda&=0,\\
x-\lambda&=0,\\
x-y&=0.
\end{aligned}$$

Lehtë shihet se $O(0,0)$ është pikë stacionare. Gjejmë diferencialin e dytë të funksionit $\Phi(x,y)$, duke marrë parasysh se plotësohet ekuacioni i lidhjes, d.m.th. $dx-dy=0$. Kemi:

$$d^2\cdot\Phi=2dx\cdot dy,$$

dhe meqë $dx-dy=0$ fitojmë:

$$d^2\Phi=2dx^2.$$

Prandaj, pika $O(0,\ 0)$ është pikë në të cilën funksioni i dhënë ka një minimum të kushtëzuar.

Shembulli 2.8.2 Të gjenden ekstremumet e kushtëzuara për funksionin $z=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$, ndryshoret e të cilit plotësojnë ekuacionin e lidhjes $x^2+y^2=1$.

Zgjidhja: Në rastin e dhënë funksioni i Lagranzhit është:

$$\Phi(x,\ y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\lambda(x^2+y^2-1),$$

prej nga shohim se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \frac{1}{a} + 2\lambda x \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \frac{1}{b} + 2\lambda y. \end{aligned}$$

Pikat stacionare i gjejmë duke e zgjidhur sistemin:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a} + 2\lambda x = 0 \\ &\frac{1}{b} + 2\lambda y = 0 \\ &x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Kemi $x = -\frac{1}{2\cdot\lambda\cdot a}$, $y = -\frac{1}{2\cdot\lambda\cdot b}$, $\lambda_{1/2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$. Kështu shohim se pikat stacionare të funksionit të dhënë janë pikat $P_1\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ dhe $P_2\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. Për të studiuar natyrën e pikës P_1 do të shqyrtojmë shenjën e $d^2\Phi$. Kemi $d^2\Phi = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$ dhe meqë duhet të plotësohet ekuacioni i lidhjes $x^2 + y^2 = 1$ atëherë, duke marrë parasysh se $dy = -\frac{x}{y}dx$ $(y \neq 0)$, fitojmë:

$$d^2\Phi = 2\lambda\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)\cdot dx^2.$$

Këndej shohim se funksioni i dhënë në pikën P_1 ka maksimum të kushtëzuar, ndërsa në pikën P_2 ka minimum të kushtëzuar.

2.8.1 Detyra për ushtrime

1. Është dhënë ekuacioni:

$$y^2 - x = 0.$$

a) A ekziston funksion i vazhdueshëm f në $[0,\ -\infty]$, ashtu që $y = f(x)$ e plotëson ekuacionin në rrethinën e pikës $A(x_0,\ y_0)$?

b) A ekziston funksion i vazhdueshëm g në $\mathbf{R}$. ashtu që $x = g(y)$ plotëson ekuacionin e dhënë në rrethin e pikës $A(x_0,\ y_0)$?

c) Të shqyrtohet diferencueshmëria e funksioneve f e g dhe të caktohen derivatet e diferencialet e tyre .

f) Të caktohen ekstremumet e funksioneve f e g.

2. Le të jetë dhënë ekuacioni:

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

dhe:

$$y = y(x)\ (-1 \leq x \leq 1) \tag{2}$$

le të jetë funksioni i njëvlershëm që plotëson (1).

a) Sa funksione të njëvlershme (2) plotësojnë ekuacionin (1)?

b) Sa funksione të njëvlershme e të vazhdueshme (2) plotësojnë ekuacionin (1)?

c) Sa funksione te njëvlershme e të vazhdueshme plotësojnë (1) nëse: 1) $y(0) = 1$; 2) $y(1) = 0$?

3. Le të jetë dhënë ekuacioni:

$$x^2 = y^2 \tag{1}$$

dhe:

$$y = y(x)\ (-\infty < x < +\infty) \tag{2}$$

le të jetë funksion i njëvlershëm që plotëson ekuacionin (1).

a) Sa funksione të njëvlershme (2) plotësojnë (1)?

b) Sa funksione të njëvlershme të vazhdueshme (2) plotësojnë (1)?

c) Sa funksione të njëvlershme të diferencueshme (2) plotësojnë ekuacionin (1)?

d) Sa funksione të njëvlershme të vazhdueshme $y = y(x)$ $(1-\delta < x < 1+\delta$ plotësojnë ekuacionin (1), nëse $y(1) = 1$ dhe δ mjaft i vogël ?

4. Le të jetë dhënë ekuacioni $x^2 - y^2 = 0$. Të tregohet se nuk është e mundshme të caktohet y si funksion i njëvlershëm i x vetëm në rrethinën e pikës $x = 0$. Të caktohet funksioni i vetëm i vazhdueshëm $y = f(x)$ i cili plotëson ekuacionin e dhënë dhe grafiku i tij kalon pikën $(x_0,\ y_0) = (1,\ -1)$.

5. Me shembullin $F(x,\ y) = x^7 + y^9 = 0$, të tregohet se kushtet e teoremës për ekzistencën dhe unicitetin e funksionit të pashtjelluar nuk janë të nevojshme (por vetëm të mjaftueshme).

6. Le të jetë dhënë ekuacioni:

$$x^2 - 2x = y^2 \tag{1}$$

dhe le të jetë:

$$y = y(x)\ \ (-\infty < x < +\infty), \tag{2}$$

funksioni i njëvlershëm i cili plotëson ekuacionin (1).

a) Sa funksione të njëvlershme (2) plotësojnë (1)?

b) Sa funksione të njëvlershme të vazhdueshme (2) plotësojnë (1)?

c) Sa funksione të njëvlershme të diferencueshme (2) plotësojnë (1)?

d) Sa funksione të njëvlershme dhe të vazhdueshme (2) plotësojnë (1) nëse: 1) $y(2) = 0$; 2) $y(1) = 1$?

7. Le të jetë $f(x)$ funksion i vazhdueshëm për $a < x < b$ dhe $\varphi(y)$ monotonorritës dhe i vazhdueshëm për $c < y < d$. Në cilin rast shprehja $\varphi(y) = f(x)$ përkufizon funksionin e njëvlershëm $y = \varphi^{-1}(f(x))$? Të shqyrtohen shembujt:

   a) $\sin y + \text{sh}y = x$;

   b) $e^{-y} = -\sin^2 x$.

8. Le të jetë:
$$x = y + \varphi(y) \tag{1}$$
ku $\varphi(0) = 0$ dhe $|\varphi'(y)| \leq k < 1$ për $-a < y < a$. Të tregohet se për $-\epsilon < x < \epsilon$ ekziston funksioni i vetëm i diferencueshëm $y = y(x)$ që plotëson (1) dhe që $y(0) = 0$.

9. Të tregohet se ekuacioni:
$$(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2), \quad a \neq 0 \tag{1}$$
në rrethinën e pikës $x = 0,\ y = 0$ përkufizon dy funksione të diferencueshme $y = y_1(x)$ dhe $y = y_2(x)$. Të gjendet $y_1'(0)$ dhe $y_2'(0)$.

10. Të gjendet $y',\ y$" e y''' për y të dhënë në mënyrë të pashtjelluar me ekuacionet:

    a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$;

    b) $x \cdot e^{2y} - y \cdot e^{2x} = 0$;

    c) $x^2 + xy + y^2 = 3$.

11. Të gjenden $y',\ y''$ e y''' për $x = 0,\ y = 1$, nëse:
$$x^2 - xy + y^2 + x - y - 1 = 0.$$

12. Të gjenden derivatet e pjesshme të rendit të parë dhe të dytë për funksionin $z = z(x,\ y)$, nëse:

    1. $z^3 - 3xyz = a^3$

    2. $z = \sqrt{x^2 - y^2} \tan \dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

13. Të gjendet dz e d^2z në qoftë se:

$$\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} - 1.$$

14. Të gjendet $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, nëse $F(x+y+z,\ u^2+y^2+z^2) = 0$.

15. Le të jetë:

$$u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0. \tag{1}$$

a) Të tregohet se në rrethinën e pikës $(0,\ 0,\ 1)$ ekziston funksioni i diferencueshëm $u = f(x,\ y,\ z)$ i cili plotëson ekuacionin (1) dhe kushtin $f(0,\ 0,\ 1) = -1$;

b) Të tregohet se vlen:

$$du(0,\ 0,\ 0) = dx + dy + dz.$$

16. Është dhënë sistemi i ekuacioneve:

$$x^2 + y^2 - y^2 = 0, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4 = 0.$$

Të tregohet se sistemi i dhënë përkufizon funksionet e diferencueshme $y = y(x)$ e $z = z(x)$ për të cilat vlen $y(1) = 0$ dhe $z(1) = 1$. Të caktohen $\dfrac{d^2y(1)}{dx^2}$ dhe $\dfrac{d^2z(1)}{dx^2}$.

17. Është dhënë sistemi i ekuacioneve:

$$x + y - u - v = 0,\ xy + yv - 1 = 0. \tag{1}$$

a) Të tregohet se sistemi (1) përkufizon funksionet e vetme të vazhdueshme:

$$u = f_1(x,\ y), \quad v = f_2(x,\ y),$$

të cilat plotësojnë (1) dhe se në pikën $A(1,\ 0)$ kemi $u(1,0) = 1,\ v(1,0) = 0$.

b) A janë funksionet f_1 e f_2 të diferencueshme në rrethinën e pikës $(1,\ 0)$?

c) Të gjenden $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

18. Është dhënë sistemi i ekuacioneve:

$$xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$

a) Të tregohet se sistemi i dhënë i ekuacioneve përkufizon funksionet e diferencueshme:

$$u = f_1(x,\ y) \quad \text{dhe} \quad v = f_2(x,\ y)$$

për të cilët $f_1(1,\ 2) = f_2(1,\ 2) = 0$.

b) Të tregohet se:

$$du(1,2) = -\frac{1}{3}dy \quad \text{dhe} \quad dv(1,2) = -dx + \frac{1}{3}dy.$$

19. Është dhënë sistemi i ekuacioneve:

$$u + v = x + y,\ \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{y}{x}.$$

Të gjenden:

a) $du(x,\ y)$ dhe $dv(x,\ y)$;

b) $d^2u(1,\ 0)$ dhe $d^2v(\frac{\pi}{2},\ 0)$.

20. Të tregohet se funksioni $z(x,\ y)$ i përkufizuar me:

$$F(x^2 + y^2 + z^2) = ax + by + cz,$$

ku F është funksion i çfarëdoshëm i diferencueshëm, plotëson barazimin:

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$$

ku $a,\ b$ e c janë konstante.

21. Funksioni $u = u(x,\ y,\ z)$ është i përkufizuar me ekuacionin:

$$F(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z},\ \frac{u}{z}) = 0,$$

ku F është funksion i diferencueshëm (në zonën përkatëse). Të tregohet se funksioni u plotëson ekuacionin:

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = u.$$

22. Të gjenden ekstremumet e kushtëzuara për funksionin $f(x,\ y) = xy$ nëse: a) $x + y - 1 = 0$; b) $x^2 + y^2 = 2$; c) $y + x = e^{\frac{y}{x}}$.

23. Të gjenden ekstremumet e kushtëzuara të funksioneve:

a) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ për $x + y = 2$;

b) $z = x + y$ për $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}$;

c) $u = xyz$ për $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0$;

d) $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$, nëse $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma = 0,\ (a > b > c > 0,\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$.

e) $u = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2$ për $\dfrac{x_1}{a_1} + \dfrac{x_2}{a_2} + ... + \dfrac{x_m}{a_m} = 1$ $(a_i > 0, i = 1,\ 2,\ ...,\ m)$.

f) $u = x_1^p + x_2^p + ... + x_m^p$ $(p > 1)$, nëse $x_1 + x_2 + ... + x_m = a (a > 0)$.

24. Të gjendet vlera më e madhe dhe ajo më e vogël e funksionit $z = xy$ në qarkun $K = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

25. Të gjendet largesa më e madhe dhe më e vogël e pikës $(0,\ 0)$ nga lakorja $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

Udhëzim: të gjenden ekstremet e kushtëzuara të funksionit $f(x, y) = x^2 + y^2$ duke marrë parasysh kushtin $g(x,\ y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$.

26. Në parabolën $y^2 = 4x$ të gjendet pika e cila është më e afërt me drejtëzën $x - y + 4 = 0$.

27. Të gjenden dimensionet e cilindrit me vëllim më të madh, nëse syprina e sipërfaqes së tij është $S = 6\pi dm^2$.

28. Në qoftë se shuma e brinjëve të paralelepipedit kënddrejtë është konstantë të caktohet:

a) paralelepipedi me vëllim më të madh;

b) paralelepipedi me syprinë më të madhe.

3

INTEGRALET PARAMETRIKE

Integralet të cilët janë funksione të një parametri ose disa parametrave kanë rëndësi të madhe në teorinë e gjasave, matematikën fizike, optikë, etj. Nga vetitë më të rëndësishme që do të shqyrtohen janë vazhdueshmëria, diferencueshmëria dhe integrueshmëria e integraleve të tillë. Rezultatet e arritura mundësojnë llogaritjen e disa integraleve të cilët me metodat e mirënjohura (si p.sh. metoda e zëvendësimit, ajo e integrimit me pjesë, etj) nuk mund të njehsohen.

3.1 NTEGRALET PARAMETRIKE TË ZAKONSHME

3.1.1 Përkufizimi dhe shembuj

Le të jetë $E = I \times \mathcal{J}$, ku $I = [a, b]$, $\mathcal{J} = (c, d), f : E \to \mathbf{R}-$funksion i integrueshëm sipas Rimanit për çdo $\alpha \in \mathcal{J}$ në I. Funksionin:

$$F(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha) dx,$$

e quajmë **integral i Rimanit që varet nga parametri** (ose **integral parametrik**).

P.sh. $\int\limits_0^1 e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha})$ është funksion në lidhje me parametrin α në $[0, 1]$.

Në rastin kur funksioni nënintegral varet nga parametrat $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, atëherë integrali $\int\limits_a^b f(x, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)\, dx$ paraqet një funksion prej $n-$ ndryshoresh.

P.sh. lehtë tregohet se:

$$\int_0^1 e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{e^{\alpha}(\alpha \sin \beta - \beta \cos \beta) + \beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \varphi(\alpha, \beta).$$

Për lehtësi ne do të marrim rastin më të thjeshtë kur funksioni nënintegral varet nga një parametër. Rezultatet e arritura dhe mënyrat e arsyetimit pa vështirësi mund të arsyetohen edhe për rastet tjera.

3.1.2 Vazhdueshmëria e funksionit F

Teorema 3.1.1 *Në qoftë se funksioni f është i vazhdueshëm në bashkësinë E, atëherë funksioni F i dhënë me barazimin:*

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx,$$

është i vazhdueshëm për çdo $\alpha \in \mathcal{J}$.

Vërtetimi. Le të jetë $\alpha_0 \in \mathcal{J}$ pikë e çfarëdoshme. Marrim në shqyrtim restriksionin e funksionit f në drejtkëndëshin e mbyllur $E' = I \times I'$, ku I' është segment i çfarëdoshëm që e përmban pikën α_0 dhe i tëri gjendet në $\mathcal{J}$. Ngushtimi i tillë është funksion uniformisht i vazhdueshëm në E', prandaj për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta > 0$ i tillë që për çdo dy pika $P'(x', \alpha')$, $P''(x'', \alpha'') \in E'$ nga $d(P', P'') < \delta$ rrjedh se $|f(x'', \alpha'') - f(x', \alpha')| < \varepsilon$. Vëmë $x' = x'' = x, \alpha' = \alpha_0, \alpha'' = \alpha_0 + h$. Nga jobarazimi $|h| < \delta$, rrjedh se:

$$|f(x, \alpha_0 + h) - f(x, \alpha_0)| < \frac{\varepsilon}{b - a}, \tag{1}$$

në qoftë se $\alpha_0 + h \in I'$. Nga (1) marrim:

$$|F(\alpha_0 + h) - F(\alpha_0)| = \left| \int_a^b [f(x, \alpha_0 + h) - f(x, \alpha_0)] dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x, \alpha_0 + h) - f(x, \alpha_0)| dx < \varepsilon. \tag{2}$$

Këndej rrjedh se funksioni F është i vazhdueshëm në pikën $\alpha_0 \in \mathcal{J}$. Meqenëse α_0 është pikë e çfarëdoshme nga $\mathcal{J}$, konstatojmë se funksioni F është i vazhdueshëm në $\mathcal{J}$.

Rrjedhimi 3.1.1 Nën kushtet e teoremës 10.1.1, vlen barazimi:

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(x, \alpha) dx. \tag{3}$$

Vërtetimi. Kemi

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^b f(x,\alpha)dx = \lim_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha) = F(\alpha_0) = \int_a^b f(x,\alpha_0)dx = \int_a^b \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)dx,$$

çka deshëm të tregojmë.

Shembulli 3.1.1 Të llogaritet $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx,\ -0,5<\alpha<0,5.$

Zgjidhja: Sipas rrjedhimit të mësipërm marrim:

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx = \int_{-1}^{1}\lim_{\alpha\to 0}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx = \int_{-1}^{1}|x|dx = 1.$$

Teorema 3.1.2 *Në qoftë se funksioni f është i vazhdueshëm në bashkësinë E kurse funksionet $\varphi,\psi:\mathcal{J}\to\mathbf{R}$ janë të vazhdueshme në bashkësinë $\mathcal{J}$ si dhe $\varphi(\mathcal{J})\subset I,\ \psi(\mathcal{J})\subset I,\ \varphi(\alpha)\le\psi(\alpha)$, për çdo $\alpha\in\mathcal{J}$, atëherë funksioni:*

$$\Phi(\alpha)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)dx,\quad \alpha\in\mathcal{J},$$

është i vazhdueshëm në $\mathcal{J}$.

Vërtetimi. Le të jetë $\alpha_0\in\mathcal{J}$ pikë e çfarëdoshme. Nga vetia aditive e integralit të caktuar marrim:

$$\Phi(\alpha)=\int_{\varphi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha_0)} f(x,\alpha)dx+\int_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)dx-\int_{\varphi(\alpha_0)}^{\varphi(\alpha)} f(x,\alpha)dx. \tag{4}$$

Nga rrjedhimi i teoremës 3.1.1. marrim:

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_{\varphi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha_0)} f(x,\alpha)dx=\int_{\varphi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha_0)} f(x,\alpha_0)dx. \tag{5}$$

Duke përdorur në integralin $\int\limits_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)dx$ teoremën mbi vlerën mesatare, fitojmë:

$$\int_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)dx=[\psi(\alpha)-\psi(\alpha_0)]f(\xi,\alpha), \tag{6}$$

ku $\xi = \psi(\alpha_0) + \vartheta[\psi(\alpha) - \psi(\alpha_0)],\ 0 < \vartheta < 1$. Në qoftë se $\alpha \to \alpha_0$ atëherë $\psi(\alpha) \to \psi(\alpha_0)$, d.m.th. $\xi \to \psi(\alpha_0)$, si dhe $f(\xi, \alpha) \to f[\psi(\alpha_0), \alpha_0]$, prandaj, sipas (6), marrim $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_{\psi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha) = 0$. Në mënyrë analoge tregohet se $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_{\varphi(\alpha_0)}^{\varphi(\alpha)} f(x,\alpha) = 0$.

Prandaj kemi:

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \Phi(\alpha) = \int\limits_{\varphi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha_0)} f(x,\alpha_0)dx = \Phi(\alpha_0),$$

që tregon se funksioni Φ është i vazhdueshëm në pikën α_0. Meqë pika α_0 është e çfarëdoshme nga $\mathcal{J}$, konstatojmë vazhdueshmërinë e funksionit Φ në atë bashkësi.

Shembulli 3.1.2 Të llogaritet:

$$\lim_{\alpha\to 0} \int\limits_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2},\ |\alpha| < 1.$$

Zgjidhja: Nga teorema 3.1.2. gjejmë:

$$\lim_{\alpha\to 0} \int\limits_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

3.1.3 Diferencueshmëria e integralit parametrik

Teorema 3.1.3 *Në qoftë se funksioni i vazhdueshëm $f : E \to \mathbf{R}$ në bashkësinë E ka derivat të pjesshëm të vazhdueshme $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}$, atëherë funksioni:*

$$F(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx,\quad \alpha \in \mathcal{J},$$

është i diferencueshëm në $\mathcal{J}$ dhe për çdo $\alpha \in \mathcal{J}$ derivati i tij llogaritet me formulën:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx,\ \alpha \in \mathcal{J}, \tag{1}$$

e cila quhet **formula e Laibnicit**.

Vërtetimi. Sipas teoremës 3.1.1. funksioni $\lambda(\alpha) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx,\ \alpha \in \mathcal{J}$, është i vazhdueshëm në $\mathcal{J}$. Duhet treguar se funksioni F është i diferencueshëm në $\mathcal{J}$

dhe se $F'(\alpha) = \lambda(\alpha), \forall \alpha \in \mathcal{J}$. Për këtë mjafton të tregojmë se për çdo $\alpha \in \mathcal{J}$ vlen relacioni:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} = \lambda(\alpha),$$

me kusht që $\alpha + h \in \mathcal{J}$, d.m.th.:

$$F(\alpha+h) - F(\alpha) - \lambda(\alpha)h = o(h), \tag{2}$$

kur $h \to 0$.

Le të jetë $E' = I \times I'$ si në pikën 3.1.2. Meqenëse funksioni $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ është i vazhdueshëm në bashkësinë E' shohim se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta > 0$ i tillë që për çdo $h \in \mathbf{R}$, për të cilin $|h| < \delta$, vlen pabarazimi:

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha+h) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\Big| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \tag{3}$$

ku α është i iksuar ndërsa $x \in I$ i çfarëdoshëm. Nga (3) dhe nga teorema e Lagranzhit shohim se për $|h| < \delta$, vlen pabarazimi:

$$\Big|f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)h\Big| = \Big|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\xi)h - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)h\Big| \leq$$

$$\leq \Big|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\xi) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\Big||h| < \frac{\varepsilon}{b-a}|h|,$$

ku $\xi = \alpha + \vartheta h,\ 0 < \vartheta < 1$. Prandaj, për $|h| < \delta$ vlen:

$$|F(\alpha+h) - F(\alpha) - \lambda(\alpha)h| = \Big|\int_a^b f(x,\alpha+h)\,dx - \int_a^b f(x,\alpha)\,dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)h\,dx\Big|$$

$$= \Big|\int_a^b \Big[f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)h\Big]\Big|dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \Big|f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)h\Big|dx < \varepsilon|h|,$$

çka deshëm të tregojmë.

Në vazhdim shqyrtojmë rastin kur kufijtë e integrimit janë funksione të variablit α.

Teorema 3.1.4 *Në qoftë se funksioni $f : E \to \mathbf{R}$ është i vazhdueshëm në bashkësinë E bashkë me derivatin e pjesshëm $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$, kurse funksionet $\varphi : \mathcal{J} \to \mathbf{R}, \psi : \mathcal{J} \to \mathbf{R}$ të diferencueshme në intervalin $\mathcal{J}$, si dhe $\varphi(\mathcal{J}) \subset I, \psi(\mathcal{J}) \subset I$, atëherë funksioni:*

$$\Phi(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)dx, \quad \alpha \in \mathcal{J},$$

është i diferencueshëm në $\mathcal{J}$ dhe derivati i tij llogaritet me formulën:

$$\Phi'(\alpha) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx + f[\psi(\alpha),\alpha]\cdot\psi'(\alpha) - f[\varphi(\alpha),\alpha]\varphi'(\alpha), \tag{4}$$

$\alpha \in \mathcal{J}$.

Vërtetimi. Le të jetë $\alpha \in \mathcal{J}-$pikë e çfarëdoshme dhe $h \in \mathbf{R}$ i tillë që $\alpha + h \in \mathcal{J}$. Shqyrtojmë shtesën e funksionit Φ në pikën α dhe çmojmë shprehjen $\Phi(\alpha+h) - \Phi(\alpha) - \lambda(\alpha)h$, ku:

$$\lambda(\alpha) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi\alpha} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx + f[\psi(\alpha),\alpha]\psi'(\alpha) - f[\varphi(\alpha),\alpha]\varphi'(\alpha).$$

Kemi:

$$\left.\begin{aligned}
&|\Phi(\alpha+h) - \Phi(\alpha) - \lambda(\alpha)h| \le \\
&\le \left|\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} [f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha) - \tfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)h]dx\right| + \\
&+ \left|\int\limits_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+h)} f(x,\alpha+h)dx - f[\psi(\alpha),\alpha]\psi'(\alpha)h\right| + \\
&+ \left|\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha+h)} f(x,\alpha+h)dx - f[\varphi(\alpha),\alpha]\varphi'(\alpha)h\right| + \\
&+ \left|\int\limits_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+h)} f(x,\alpha)dx\right| + \left|\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha+h)} f(x,\alpha)dx\right|.
\end{aligned}\right\} \tag{$*$}$$

Nga teorema 3.1.3. shohim se:

$$\left|\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} [f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha+h]dx\right| = o(|h|).$$

Meqenëse:

$$\int\limits_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+h)} f(x,\alpha+h)dx = [\psi(\alpha+h) - \psi(\alpha)]f(\xi,\alpha+h) = [\psi'(\alpha)h + \beta h]f(\xi,\alpha+h),$$

ku $\xi = \psi\alpha) + \vartheta_1[\psi(\alpha+h) - \psi(\alpha)],\ 0 < \vartheta_1 < 0,\ \beta \to 0$ kur $h \to 0$, gjejmë:

$$\left|\int\limits_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+h)} f(x,\alpha+h)dx - f[\psi(\alpha),\alpha]\,\psi'(\alpha)h\right| = o(|h|).$$

Ngjashëm gjejmë:

$$\left| \int\limits_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+h)} f(x, \alpha + h)dx - f[\varphi(\alpha), \alpha]\, \varphi'(\alpha)h \right| = o(|h|).$$

Lehtë shihet se (duke përdorur teoremën mbi të mesmen), dy mbledhësit e fundit të anës së djathtë të jobarazimit $(*)$ janë të formës $o(|h|)$.

Këndej gjejmë:

$$|\Phi(\alpha + h) - \Phi(\alpha) - \lambda(\alpha)h| = o(|h|),$$

prej nga rrjedh formula (4).

Shembulli 3.1.3 Të gjendet $\Phi'(\alpha)$, në qoftë se:

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Zgjidhje: Nga formula (4) gjejmë:

$$\Phi'(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \sqrt{1 - x^2} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}} dx - \sin\alpha\ e^{\alpha|\sin\alpha|} - \cos\alpha\ e^{\alpha|\cos\alpha|}.$$

3.1.4 Integrimi sipas parametrit

Le të jetë $I_1 = [a, b],\ I_2 = [c, d],\ E = I_1 \times I_2,\ f : E \to \mathbf{R}$ funksion i vazhdueshëm në drejtkëndëshin $E \in \mathbf{R^2}$. Sipas teoremës 3.1.1. funksionet:

$$F(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha)dx,\ \alpha \in I_2,\quad \Phi(x) = \int\limits_c^d f(x, \alpha)d\alpha,\ x \in I_1,$$

janë të vazhdueshme. Prandaj $F \in R[c, d],\ \Phi \in R[a, b]$.

Vëmë:

$$A = \int\limits_c^d F(\alpha)d\alpha = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, \alpha)dx \right] d\alpha,$$

$$B = \int\limits_a^b \Phi(x)dx = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x, \alpha)d\alpha \right] dx.$$

Integralet A e B quhen **integrale të përsëritura.** Zakonisht për shënimin e tyre nuk merren kllapat. Pra:

$$A = \int\limits_c^d d\alpha \int\limits_a^b f(x, \alpha)dx,\ B = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, \alpha)d\alpha.$$

Teorema 3.1.5 *Në qoftë se f është funksion i vazhdueshëm në drejtkëndëshin E, atëherë $A = B$.*

Vërtetimi. Marrim në shqyrtim funksionet:

$$\varphi(t) = \int_c^t d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)dx, \;\; c \le t \le d,$$

$$\psi(t) = \int_a^b dx \int_c^t f(x,\alpha)d\alpha, \quad c \le t \le d.$$

Qartazi, $\varphi(c) = \psi(c) = 0$. Meqenëse funksioni $F(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)dx$ është i vazhdueshëm në $[c,d]$, funksioni $\varphi(t)$ është i derivueshëm në lidhje me kufirin e sipërm variabël t si dhe:

$$\varphi'(t) = \left[\int_c^t F(\alpha)d\alpha\right]_t' = F(t) = \int_a^b f(x,t)dx.$$

Më tej, shënojmë $g(x,t) = \int\limits_c^t f(x,\alpha)d\alpha$. Meqenëse ${g_t}'(x,t) = f(x,t)$ është funksion i vazhdueshëm në zonën E, në bazë të formulës së Laibnicit kemi:

$$\psi'(t) = \left[\int_a^b g(x,t)dx\right]_t' = \int_a^b g_t'(x,t)dx = \int_a^b f(x,t)dx.$$

Prandaj $\varphi'(t) = \psi'(t), \forall t \in I_2$, prej nga gjejmë $\varphi(t) - \psi(t) = C$, C-konstantë, $c \le t \le d$. Nëse vëmë $t = c$, gjejmë $C = 0$. Rrjedhimisht $A = B$, dhe teorema u vërtetua.

Po vëmë në dukje se teoremat e mësipërme nuk janë kritere. Ato përmbajnë vetëm kushte të mjaftueshme.

Për shembull, marrim funksionin $f : I \times R \to \mathbf{R}$, $\mathbf{I} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, ku $f(x,\alpha) = \operatorname{sgn}(x-\alpha)$. Funksioni f ka këputje. Shqyrtojmë funksionin $F(\alpha) = \int\limits_0^1 f(x,\alpha)dx$. $\alpha \in \mathbf{R}$ dhe tregojmë se $F \in C(-\infty. + \infty)$ (d.m.th. se e kundërta e teoremës 3.1.1. nuk vlen).

Në qoftë se $\alpha < 0$, $\operatorname{sgn}(x-\alpha) = 1$, d.m.th. $\int\limits_0^1 f(x,\alpha)dx = 1$. Në qoftë se $0 \le \alpha \le 1$, kemi:

$$\operatorname{sgn}(x-\alpha) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < \alpha \\ 1, & \alpha < x \le 1 \\ 0, & x = \alpha, \end{cases}$$

prandaj $\int\limits_0^1 f(x,\alpha)dx = -\int\limits_0^\alpha dx + \int\limits_\alpha^1 dx = 1-2\alpha$. Në qoftë se $1 < \alpha < +\infty$, atëherë $\operatorname{sgn}(x-\alpha) = -1$, $\int\limits_0^1 f(x,\alpha)dx = -1$. Rrjedhimisht:

$$F(\alpha) = \begin{cases} 1, & -\infty < \alpha < 0 \\ 1-2\alpha, & 0 \le \alpha \le 1 \\ 0, & x = \alpha. \end{cases}$$

Shembulli 3.1.4 Të llogaritet:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^d - x^c}{\log x} dx.$$

Zgjidhja: Vërejmë se

$$\frac{x^d - x^c}{\log x} = \int\limits_c^d x^y dy,$$

prandaj:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^d - x^c}{\log x} dx = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_c^d x^y dy \right] dx = \int\limits_c^d \left[\int\limits_0^1 x^y dx \right] dy =$$

$$= \int\limits_c^d \frac{dy}{y+1} = \ln \left| \frac{d+1}{c+1} \right|.$$

3.2 INTEGRALET PARAMETRIKE JO TË VETA

Në këtë paragraf do të përkufizohen integralet jo të veta kur funksioni nënintegral varet nga një ose disa parametra dhe do të përgjithësohen rezultatet kryesore që u arritën në pikën 10.1.

3.2.1 Integralet prametrike jo të veta të llojit të parë

Le të jetë $I_1 = [a, +\infty)$, $I_2 = (c, d)$, $E = I_1 \times I_2$, $f : E \to \mathbf{R}-$ funksion i dhënë. Integralin:

$$F(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx, \quad \alpha \in I_2, \tag{1}$$

e quajmë **integral parametrik jo i vetë i llojit të parë**.

Përkufizimi 3.2.1 *Integrali $F(\alpha)$ quhet* **konvergjent** *në intervalin I_2 në qoftë se ai konvergjon për çdo $\alpha \in I_2$, d.m.th. për çdo $\alpha \in I_2$ të fiksuar ekziston:*

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t,\alpha)\,dt \quad (<+\infty).$$

Përkufizimi 3.2.2 *Integrali $F(\alpha)$, konvergjent në I_2, quhet* **uniformisht konvergjent në** *I_2 nëse për çdo $\varepsilon > 0$ dhe çdo $\alpha \in I_2$ ekziston $A_0 \geq a$, ashtu që për çdo $A \geq A_0$ vlen:*

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon.$$

Shembulli 3.2.1 Të tregohet se integrali

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$$

konvergjon uniformisht në $[0,+\infty)$.

Zgjidhja: Nga:

$$\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx = -e^{-\alpha x}\frac{\alpha\sin x + \cos x}{1+\alpha^2} + C = \Phi_\alpha(x) + C$$

shohim se ekziston konstanta K : $|\Phi_\alpha(x)| \leq K, \forall x \geq 0 \wedge \alpha \geq 0$. Le të jetë $\varepsilon > 0$ i çfarëdoshëm. Tregojmë ekzistencën e numrit A_0 i cili është "i mirë" për përkufizimin 2.2. Duke marr $u = \frac{1}{x},\ dv = e^{-\alpha x}\sin x dx, du = -\frac{1}{x^2}dx,\ v = \Phi_\alpha(x)$, fitojmë:

$$\left|\int_A^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| = \left|\frac{\Phi_\alpha(x)}{x}\Big|_A^{+\infty} + \int_A^{+\infty}\frac{\Phi_\alpha(x)}{x^2}dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{\Phi_\alpha(A)}{A}\right| + \int_A^{+\infty}\frac{|\Phi_\alpha(x)|}{x^2}dx \leq \frac{K}{A} + K\int_A^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = 2\frac{K}{A} < \varepsilon,$$

prej nga shohim se $A \geq \frac{2K}{\varepsilon} = A_0$.

Në vazhdim japim një përkufizim tjetër të konvergjencës uniforme të integralit (1).

Përkufizimi 3.2.2′ *Thuhet se integrali (1), konvergjent në I_2,* **konvergjon uniformisht në** *I_2 në qoftë se:*

$$\lim_{A\to+\infty}\sup_{\alpha\in I_2}\left|\int_A^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| = 0.$$

Lehtë tregohet se përkufizimet 3.2.2. e 3.2.2′ janë ekuivalent.

Shembulli 3.2.2 Të shqyrtohet konvergjenca uniforme e integralit:

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}, \quad 0 \leq \alpha < +\infty.$$

Zgjidhja: Marrim numrin $A > 0$ të çfarëdoshëm dhe në integralin $B(\alpha, A) = \int_A^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$ marrim zëvendësimin $x = \alpha + t$. Atëherë:

$$B(\alpha, A) = \int_{A-\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2} - \text{arctg }(A-\alpha).$$

Meqenëse $\sup\limits_{\alpha \in R^+} B(\alpha, A) = \frac{\pi}{2} > \varepsilon > 0, \forall \varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, konstatojmë se integrali $B(\alpha)$ konvergjon jouniformisht.

Shembulli 3.2.3 Të shqyrtohet konvergjenca uniforme e integralit:

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha \in [0, +\infty) = I_2.$$

Zgjidhja: Lehtë tregohet konvergjenca e integralit në I_2. Tregojmë konvergjencën uniforme të integralit në $[t, +\infty), \ t > 0$. Me të vërtetë kemi:

$$\lim_{A \to +\infty} \sup_{\alpha \in [t, +\infty)} \left| \int_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx \right| = \lim_{A \to +\infty} \sup_{\alpha \in [t, +\infty)} e^{-\alpha A} = \lim_{A \to +\infty} e^{-tA} = 0.$$

Në tërë gjysmëboshtin $[0, +\infty)$ integrali $F(\alpha)$ nuk konvergjon uniformisht. Me të vërtetë:

$$\lim_{A \to +\infty} \sup_{\alpha \in [t, +\infty)} \left| \int_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx \right| = \lim_{A \to +\infty} \sup_{\alpha \geq 0} e^{-A\alpha} = 1,$$

d.m.th. në I_2 nuk plotësohet përkufizimi $3.2.2'$.

Teorema 3.2.1 *(kriteri i Koshit) Kushtë i nevojshëm dhe e mjaftueshme që integrali $F(\alpha)$ të konvergjojë uniformisht sipas parametrit α në intervalin I_2, është që për çdo $\varepsilon > 0$ të ekzistoj $A_0 \geq a$ i tillë që për çdo $A_1 > A_0$ dhe çdo $A_2 > A_0$ si dhe për çdo $\alpha \in I_2$, plotësohet pabarazimi:*

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Vërtetimi. Kushti i nevojshëm. Supozojmë se integrali $F(\alpha)$ konvergjon uniformisht në intervalin I_2. Atëherë:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists A_0 \geq a)(\forall A_1 > A_0 \wedge \forall A_2 > A_0 \wedge \forall\alpha \in I_2)$$

plotësohen pabarazimet:

$$\left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \left|\int_{A_2}^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

prej nga gjejmë:

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)dx\right| = \left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,\alpha)dx - \int_{A_2}^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon.$$

Kushti i mjaftueshëm. Supozojmë se jobarazimi (2) plotësohet $\forall A_1 > A_0 \geq a \wedge \forall\alpha \in I_2$. Atëherë, kur $A_2 \to +\infty$ jobarazimi $\left|\int\limits_{A_1}^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| \leq \varepsilon$ plotësohet për çdo $\alpha \in I_2$. Ka mbetur të tregohet se integrali $F(\alpha)$ konvergjon në mënyrë të zakonshme në I_2.

Marrim $\varphi(\alpha,\eta) = \int\limits_a^{\eta} f(x,\alpha)dx, \ a \leq \eta < +\infty$. Sipas supozimit $(\forall\varepsilon > 0)(\exists A_0 \geq a)(\forall A_1 > A_0 \wedge \forall A_2 > A_0 \wedge \forall\alpha \in I_2)$ vlen pabarazimi $|\varphi(\alpha, A_2) - \varphi(\alpha, A_1)| < \varepsilon$. Kjo pikërisht tregon se ekziston limiti i funksionit në fjalë kur $\eta \to \infty$, d.m.th. integrali $F(\alpha)$ konvergjon në mënyrë të zakonshme në I_2.

Teorema 3.2.2 *(e Vajershtrasit). Integrali $F(\alpha)$ konvergjon uniformisht në I_2, në qoftë se ekziston numri $x_0 \geq a$ dhe funksioni $\varphi : [x_0, +\infty) \to \mathbf{R}$ që për çdo $\alpha \in I_2$ të plotësohet jobarazimi $|f(x,\alpha)| \leq |\varphi(x)|$ si dhe $\int\limits_{x_0}^{+\infty} |\varphi(x)|dx$ konvergjon.*

Vërtetimi. Qartazi, integrali $F(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ konvergjon në bashkësinë I_2. Nga konvergjenca (uniforme) e integralit $\int\limits_{x_0}^{+\infty} |\varphi(x)|dx$ rrjedh se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $A_0 \geq x_0$ i tillë që për çdo $A \geq A_0$ rrjedh se:

$$\int_A^{+\infty} |\varphi(x)|dx < \varepsilon.$$

Rrjedhimisht, për çdo $\alpha \in I_2$ vlen $\left|\int\limits_A^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| \leq \int\limits_A^{+\infty} |\varphi(x)|dx < \varepsilon$, prej nga rrjedh konvergjenca uniforme e integralit $F(\alpha)$.

Shembulli 3.2.4 Të shqyrtohet konvergjenca uniforme e integralit:

$$F(\alpha)=\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{\ln^{\alpha}x}{x\sqrt{x}}\,dx,\quad 0\le\alpha\le 10.$$

Zgjidhja: Kemi:

$$\frac{\ln^{\alpha}x}{x\sqrt{x}}\le\frac{\ln^{10}x}{x\sqrt{x}}=\Big(\frac{\ln^{10}x}{\sqrt[4]{x}}\Big)\cdot\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}=\frac{\ln^{10}x}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}.$$

Marrim $\varphi(x)=\frac{\ln^{10}x}{\sqrt[4]{x}}$. Atëherë:

$$\varphi'(x)=\frac{x^{\frac{1}{4}-1}(\ln^{9}x)(10-\frac{1}{4}\ln x)}{\sqrt[4]{x^2}}=0$$

nëse $x_1'=1\wedge x_2'=e^{40}$. Tregohet se funksioni në fjalë ka maksimum në pikën x_2'. Prandaj

$$\frac{\ln^{10}x}{\sqrt[4]{x}}=\Big(\frac{\ln x}{x}\Big)^{10}\cdot x^{\frac{39}{4}}\le\Big(\frac{\ln e^{40}}{e}\Big)^{10}=\Big(\frac{40}{e}\Big)^{10},$$

si dhe:

$$\frac{\ln^{\alpha}x}{x\sqrt{x}}\le\frac{\ln^{10}x}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}\le\Big(\frac{40}{e}\Big)^{10}\cdot\frac{1}{x\sqrt[4]{x}},$$

për $x\ge e$. Meqenëse $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[4]{x}}$ konvergjon, atëherë, sipas teoremës së Vajershtrasit, rrjedh konvergjenca uniforme e integralit $F(\alpha)$ në segmentin $[0,10]$.

Teorema 3.2.3 *(kriteri i Abelit) Në qoftë se integrali $F(\alpha)$ konvergjon uniformisht në I_2, ndërsa funksioni $\varphi\colon E\to\mathbf{R}$ është i kufizuar dhe monoton sipas x, atëherë integrali*

$$\Phi(\alpha)=\int\limits_{a}^{+\infty}f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)dx,\qquad\alpha\in I_2$$

konvergjon uniformisht në I_2,

Vërtetimi. Sipas kushtit, për çdo $\varepsilon>0$, ekziston $A_0>a$ i tillë që $\forall A_1>A_0\wedge\forall A_2>A_0\wedge\forall\xi>A_0\wedge\forall\alpha\in I_2$, vlejnë pabarazimet:

$$\Bigg|\int\limits_{A_1}^{\xi}f(x,\alpha)dx\Bigg|<\frac{\varepsilon}{2M},\quad\Bigg|\int\limits_{\xi}^{A_2}f(x,\alpha)dx\Bigg|<\frac{\varepsilon}{2M},\tag{3}$$

ku $M = \sup\limits_{(x,\alpha)\in E} |\varphi(x,\alpha)|$, $M \neq 0$. Pa prishur përgjithësimin, marrim $A_1 < A_2$. Meqenëse funksioni f është i integrueshëm në segmentin $[A_1, A_2]$, ndërsa funksioni φ i integrueshëm sipas x (sepse është monoton), duke përdorur teoremën e dytë mbi të mesmen, shohim se:

$$\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)dx = \varphi(A_1,\alpha)\int\limits_{A_1}^{\xi} f(x,\alpha)dx + \varphi(A_2,\alpha)\int\limits_{\xi}^{A_2} f(x,\alpha)dx,$$

ku $A_1 < \xi < A_2$. Këndej dhe nga (3) shohim se për $\forall\alpha \in I_2$ vlen:

$$\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)dx \leq$$

$$\leq |\varphi(A_1,\alpha)|\left|\int\limits_{A_1}^{\xi} f(x,\alpha)dx\right| + |\varphi(A_2,\alpha)|\left|\int\limits_{\xi}^{A_2} f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon.$$

Tash, nga teorema 3.2.1 rrjedh se integrali $\Phi(\alpha)$ konvergjon uniformisht.

Shembulli 3.2.5 Të shqyrtohet konvergjenca uniforme e integralit

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{\alpha x} dx, \qquad 0 \leq \alpha < +\infty.$$

Zgjidhje: Vëmë $f(x,\alpha) = \dfrac{\sin x}{x}$, $\varphi(x,\alpha) = e^{-\alpha x}$. Integrali $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$, nuk mvaret nga α dhe, sipas kriterit të Dirihlesë për konvergjencën e integraleve jo të vetë, konvergjon. Pra, ai konvergjon edhe uniformisht në I_2. Mëtej, $e^{-\alpha x} \leq 1$, tregon se funksioni φ është ikufizuar në $[\alpha, +\infty)$. Po ashtu, $(e^{-\alpha x})'_x = -\alpha e^{-\alpha x} \leq 0$, që tregon se funksioni φ është monoton sipas x. Shohim se janë të plotësuara të gjitha kushtet e teoremës së Abelit, prandaj $\Phi(\alpha)$ konvergjon uniformisht në $[0, +\infty)$.

Teorema 3.2.4 *(kriteri i Dirihlesë) Në qoftë se funksioni $\varphi\colon E \to \mathbf{R}$ është monoton sipas x në intervalin $I_1 = [a, +\infty)$ dhe $\varphi \rightrightarrows 0$ kur $x \to +\infty$, $\forall\alpha \in I_2 = (c, d)$, ndërsa primitiva*

$$\int\limits_{a}^{x} f(t,\alpha)dx, \ \alpha \in I_2$$

është e kufizuar me konstanten M e cila nuk varet nga x e α, atëhere integrali

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)dx, \qquad \alpha \in I_2,$$

konvergjon uniformisht në intervalin I_2.

Vërtetimi. Supozojmë se janë të plotësuara kushtet e teoremës. Duke përdorur teoremën e dytë mbi të mesmen në integralin

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)dx,\ \alpha \in I_2,,\ A_1, A_2 \in I_1, A_1 < A_2,$$

marrim:

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)dx\right| = \left|\varphi(A_1,\alpha)|\int_{A_1}^{\xi} f(x,\alpha)dx + \varphi(A_2,\alpha)\int_{\xi}^{A_2} f(x,\alpha)dx\right| \leq$$

$$\leq M(|\varphi(A_1,\alpha)| + |\varphi(A_2,\alpha)|).$$

Meqenëse $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x,\alpha) = 0$, $\forall\alpha \in I_2$, shohim se $\forall\varepsilon > 0\ \exists A_0 > a :\ |\varphi(A_1,\ \alpha)| < \frac{\varepsilon}{2M},\ |\varphi(A_2,\ \alpha)| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall\alpha \in I_2$, në qoftë se $A_1 > A_0 \wedge A_2 > A_0$. Kështu, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $A_0 > a$ ashtu që

$$\sup_{\alpha\in I_2}\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)\right| < \varepsilon,$$

kur $A_1 > A_0 \wedge A_2 > A_0$. Tash, sipas teoremës së Koshit rrjedh se $\Phi(\alpha)$ konvergjon uniformisht në I_2,

Shembulli 3.2.6 Të tregohet se integrali i Dirihlesë

$$\mathcal{D}(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} dx,$$

konvergjon uniformisht në çdo segment $[c, d]$, që nuk e përmban vlerën $\alpha = 0$.

Zgjidhje: Vëmë $\varphi(x) = \dfrac{1}{x},\ 0 < x < +\infty$. Shohim se φ është monoton, tenton në zero, kur $x \to +\infty$ si dhe kjo konvergjencë është uniforme (sepse φ nuk varet nga α). Primitiva

$$\int_{0}^{x} \sin\alpha t\, dt = \frac{1-\cos\alpha x}{\alpha},\ x \in I_1,$$

është funksion i kufizuar me $\dfrac{2}{M}$, ku $M = \min\{|c|, |d|\}$. Kështu, sipas teoremës 3.2.4, integrali $\mathcal{D}(\alpha)$ konvergjon uniformisht në çdo segment $[c, d]$ që nuk e përmban pikën $\alpha = 0$.

Teorema 3.2.5 *(kriteri i Dinit) Supozojmë se $E = I_1 \times I$, ku $I - [c, d]$, ndërsa $f \colon R \to \mathbf{R}$ është funksion i vazhdueshëm dhe jonegativ në E dhe integrali*

$$f(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx,$$

konvergjon për çdo $\alpha \in I$, ku f është funksion i vazhdueshëm në segmentin I. Atëhere, integrali $F(\alpha)$ konvergjon uniformisht në E.

Vërtetimi. Le të jetë $\{A_n\}$ varg i çfarëdoshëm, me vetinë $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = +\infty$. Vëmë $F_n(\alpha) = \int\limits_a^{A_n} f(x, \alpha) dx$. Meqenëse $F(\alpha)$ konvergjon për çdo $\alpha \in I$, marrim

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha) = F(\alpha),\ \forall\, \alpha \in I.$$

Nëse vëmë $A_n = a + n,\ n \in \mathbf{N}$ marrim vargun e funksioneve

$$F_n(\alpha) = \int_a^{a+n} f(x, \alpha) dx,\ \alpha \in I,\, n \in \mathbf{N}.$$

Sipas teoremës 3.1.1, funksionet $F_n(\alpha)$ janë të vazhdueshme për çdo $n \in \mathbf{N}$. Meqenëse f është jonegativ, vargu $\{F_n(\alpha)\}$ konvergjon kah funksioni i vazhdueshm̈ dhe monotono-rritës F. Sipas [ ], teorema I.2.8, vargu $F_n(\alpha)$ konvergjon uniformisht kah funksioni $F(\alpha), \forall\, \alpha \in I$. Pra,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall\, n > n_0 \wedge \forall\, \alpha \in I,$$

rrjedh

$$0 \le F(\alpha) - F_n(\alpha) = \int_{a+n}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx < \varepsilon.$$

Kështu për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $A_0 = a + n_0$, ashtu që për çdo $A > A_0$ dhe çdo $\alpha \in I$ vlen $0 \le \int\limits_A^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx < \varepsilon$. Rrjedhimisht, integrali $F(\alpha)$ konvergjon uniformisht në segmentin I.

Shembulli 3.2.7 Të shqyrtohet konvergjenca uniforme e integralit

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha\, e^{-\alpha x} dx,\ o < c \le \alpha \le d.$$

Zgjidhje: Funksioni nënintegral është pozitiv në bashkësinë $E = \{(x, \alpha) \in \mathbf{R}^2,\ 0 \le x < +\infty,\ c \le \alpha \le d\}$, ndërsa funksioni F është i vazhdueshëm (trego!) në $[c,\, d]$. Sipas teoremës 3.2.5, $F(\alpha)$ konvergjon uniformisht në atë segment.

3.2.2 Vetitë e integraleve parametrike jo të veta të llojit të parë

Le të jenë $I_1 = [a, +\infty),\ I_2 = (c, d),\ E = I_1 \times I_2,\ f : E \to \mathbf{R}$, si dhe:

$$F(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)dx, \quad \alpha \in I_2.$$

Teorema 3.2.6 *(vazhdueshmëria e funksionit $F(\alpha)$) Në qoftë se funksioni f është i vazhdueshëm në bashkësinë E dhe integrali $F(\alpha)$ konvergjon uniformisht në intervalin I_2, atëherë funksioni F është i vazhdueshëm në I_2.*

Vërtetimi. Qartazi, secili funksion nga vargu:

$$\{F_n(\alpha)\} = \left\{ \int_a^{a+n} f(x, \alpha)dx \right\}, \quad \alpha \in I_2,\ n \in \mathbf{N},$$

është i vazhdueshëm në I_2. Vargu $\{F_n(\alpha)\}$ konvergjon uniformisht në I_2 tek funksioni $F(\alpha)$.

Me të vërtetë:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A_0 \geq a)(\forall A > A_0 \land \forall \alpha \in I_2) \Longrightarrow \left| \int_A^{+\infty} f(x, \alpha)dx \right| < \varepsilon,$$

prej nga gjejmë:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists E(A_0) \geq a)(\forall E(A) > E(A_0) \land \forall \alpha \in I_2) \Longrightarrow \left| \int_{E(A)}^{+\infty} f(x, \alpha)dx \right| < \varepsilon,$$

ku, si zakonisht me $E(x)$ është shënuar pjesa e plotë e $x-$it. Shënojmë me $n_0 = E(A_0),\ n = E(A)$. Atëherë aq më parë vlen:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n > n_0 \land \forall \alpha \in I_2) \Longrightarrow \left| \int_{a+n}^{+\infty} f(x, \alpha)dx \right| < \varepsilon,$$

ose

$$\left| F(\alpha) - \int_a^{a+n} f(x, \alpha)dx \right| = |F_n(\alpha) - F(\alpha)| < \varepsilon, \quad \forall \alpha \in I_2.$$

Kjo pikërisht tregon konvergjencën uniforme të vargut $\{F_n(\alpha)\}$ në I_2 tek funksioni $F(\alpha)$.

Këndej dhe duke marrë në konsiderim [],teoremën I.2.7, shohim se funksioni F është i vazhdueshëm në I_2.

Rrjedhimi 3.2.1 Nën kushtet e teoremës 3.2.6, për çdo $\alpha \in I_2$ kemi:

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha) = F(\alpha_0) = \int_a^{+\infty} \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)dx.$$

Le të jenë $J=[a,+\infty),\ I=[c,d],\ E=J\times I,$ dhe $f: E\to \mathbf{R}$.

Teorema 3.2.7 *Në qoftë se funksioni f është i vazhdueshëm në bashkësinë E dhe integrali:*

$$F(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx,\ \ \alpha\in I$$

konvergjon uniformisht në segmentin I, atëherë $F\in R[c,d]$ si dhe:

$$\int_c^d F(\alpha)d\alpha = \int_c^d d\alpha \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,\alpha)d\alpha. \tag{1}$$

Vërtetimi. Sipas teoremës 3.2.6, funksioni F është i vazhdueshëm në segmentin I. Prandaj $F\in R[c,d]$. Nga kushti i teoremës shohim se për çdo $\varepsilon>0$ ekziston $A_0\ge a$ i tillë që për çdo $A>A_0$ vlen pabarazimi:

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}. \tag{2}$$

Nëse marrim $A>A_0$ gjejmë:

$$\left.\begin{aligned} \int_c^d F(\alpha)d\alpha &= \int_c^d \left[\int_a^A f(x,\alpha)dx + \int_A^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right] d\alpha = \\ &= \int_c^d d\alpha \int_a^A f(x,\alpha)dx + \int_c^d d\alpha \int_A^{+\infty} f(x,\alpha)dx. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Në integralin $\int_c^d d\alpha \int_a^A f(x,\alpha)dx$ mund të ndryshohet renditja e integrimit sepse janë të plotësuara të gjitha kushtet e teoremës 3.1.5. Prandaj barazimi (3) merr trajtën:

$$\int_c^d F(\alpha)d\alpha = \int_a^A dx \int_c^d f(x,\alpha)dx + \int_c^d d\alpha \int_A^{+\infty} f(x,\alpha)dx, \tag{4}$$

ose:

$$\int_c^d F(\alpha)d\alpha - \int_a^A dx \int_c^d f(x,\alpha)dx = \int_c^d d\alpha \int_A^{+\infty} f(x,\alpha)dx.$$

Këndej dhe nga (2) marrim:

$$\left|\int_c^d F(\alpha)d\alpha - \int_a^A dx \int_c^d f(x,\alpha)dx\right| = \left|\int_c^d d\alpha \int_A^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}\cdot(d-c) = \varepsilon.$$

për çdo $A > A_0$. Prandaj ekziston $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,\alpha)dx = \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A dx \int\limits_c^d f(x,\alpha)d\alpha$, i tillë që është i barabartë me integralin:

$$\int_c^d F(\alpha)d\alpha = \int_c^d d\alpha \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx,$$

dhe me këtë teorema u vërtetua.

Le të jenë $I_1 = [a,+\infty)$, $I_2 = [c,+\infty)$, $G = I_1 \times I_2, f\colon G \to \mathbf{R}$.

Teorema 3.2.8 *Në qoftë se funksioni f është i vazhdueshëm në bashkësinë G, kurse integralet:*

$$F(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx,\ \ \Phi(x) = \int_c^{+\infty} f(x,\alpha)d\alpha,$$

konvergjojnë, funksionet Φ e F janë të vazhdueshme në intervelet I_1 e I_2, përkatësisht, atëherë

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} f(x,\alpha)d\alpha\right]dx = \int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right]d\alpha. \tag{5}$$

duke supozuar se ekziston njëri nga integralet nga barazimi (5).

Vërtetimi. Supozojmë se p.sh. konvergjon integrali $\int\limits_c^{+\infty}\left[\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right]d\alpha = \int\limits_c^{+\infty} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$. Sipas kriterit të Dirihlesë, integrali $\int\limits_c^{+\infty} f(x,\alpha)\,d\alpha$ konvergjon uniformisht sipas x në çdo segment $[a,\, A]$. Nga teorema 3.2.7 marrim:

$$\int_a^A dx \int_c^{+\infty} f(x,\alpha)d\alpha = \int_c^{+\infty} d\alpha \int_a^A f(x,\alpha)dx. \tag{6}$$

Vëmë:

$$\gamma = \int\limits_{c}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)dx - \int\limits_{a}^{A} dx \int\limits_{c}^{+\infty} f(x,\alpha)d\alpha. \tag{6'}$$

Nga (6) marrim:

$$\begin{aligned} \gamma &= \int\limits_{c}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)dx - \int\limits_{c}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{a}^{A} f(x,\alpha)dx = \\ &= \int\limits_{c}^{+\infty} \left[\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)\, d\alpha - \int\limits_{a}^{A} f(x,\alpha)\, d\alpha \right] dx = \int\limits_{c}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{A}^{+\infty} f(x.\alpha)\, dx. \end{aligned} \tag{7}$$

Për çdo $B > c$, barazimi (7) mund të shkruhet në formën:

$$\gamma = \int\limits_{c}^{B} d\alpha \int\limits_{A}^{+\infty} f(x,\alpha)dx + \int\limits_{B}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{A}^{+\infty} f(x,\alpha)dx. \tag{8}$$

Meqenëse funksioni f është jonegativ dhe integrali $\int\limits_{c}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ konvergjon, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $B_0 \geq c$ ashtu që për çdo $B > B_0$ vlen:

$$0 < \int\limits_{B}^{+\infty} dx \int\limits_{A}^{+\infty} dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Duke marrë në mbledhësin e dytë të (8) $B > B_0$ të çfarëdoshëm dhe duke ditur se funsioni f është jonegativ, marrim:

$$0 < \int\limits_{B}^{+\infty} dx \int\limits_{A}^{+\infty} dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Meqenëse integrali $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ konvergjon në I_2 si dhe f është i vazhdueshëm, atëhere sipas kriterit të Dinit, ai integral konvergjon uniformisht në çdo segment $[c, B]$. Prandaj $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A_0 \geq a :\ \forall\, A > A_0$ vlen

$$0 < \int\limits_{A}^{+\infty} f(x,\alpha)dx < \frac{\varepsilon}{2(B-c)},\ \ \alpha \in [c, B], \tag{11}$$

ku $B > B_0$ është zgjedhur sikur në (10). Marrim $A > A_0$. Nga mbledhësi i parë i (8) si dhe nga (11) fitojmë:

$$0 < \int_c^B dx \int_A^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{12}$$

Nga (10) dhe (12) gjejmë $0 \leq \gamma < \varepsilon$. Këndej dhe nga (6′) shohim se integrali $\int\limits_a^A dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,\alpha)\,d\alpha$ ekziston dhe:

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A dx \int_c^{+\infty} f(x,\alpha)\,d\alpha = \int_c^{+\infty} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx,$$

çka edhe deshëm të tregojmë.

Në fund të kësaj pike shqyrtojmë diferencueshmërinë e integralit parametrik jo të vetë.

Teorema 3.2.9 *Le të jetë $f(x,\alpha)$ dhe derivati i tij i pjesshëm $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ të vazhdueshme në zonën $E = J \times I,\ J = [a,+\infty),\ I = [c,d]$, dhe le të konvergjojë integrali $F(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ në $[c,d]$, kurse për integralin $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$ supozojmë se konvergjon uniformisht në $[c,d]$. Atëherë, funksioni $F(\alpha)$ është i diferencueshëm në $[c,d]$ dhe vlen barazimi:*

$$F'(\alpha) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx, \forall\ \alpha \in [c,d].$$

Vërtetimi. Vëmë $\lambda(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$ dhe tregojmë se $F'(\alpha) = \lambda(\alpha)$ për çdo $\alpha \in [c,d]$. Sipas teoremës 3.2.7, kemi:

$$\int_c^\alpha \lambda(t)dt = \int_c^\alpha \left[\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx\right]dt = \int_a^{+\infty}\left[\int_c^\alpha \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt\right]dx =$$

$$= \int_a^{+\infty} [f(x,\alpha) - f(x,c)]dx = F(\alpha) - F(c).$$

Këndej dhe duke marrë parasysh se funksioni $\lambda(\alpha)$ është i vazhdueshëm në $[c,d]$ gjejmë $\lambda(\alpha) = F'(\alpha),\ \forall\alpha \in [c,d]$, çka edhe deshëm të tregojmë.

Shembulli 3.2.8 Të llogaritet:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \qquad (*)$$

Zgjidhja: Së pari, meqenëse integrali jo i vetë $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ konvergjon absolutisht (d.m.th. edhe në mënyrë të zakonshme) dhe meqenëse:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= -\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d(cosx) = -\frac{1}{x} \cos x\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \cos x d\Big(\frac{1}{x}\Big) = \\ &= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx, \end{aligned}$$

atëherë integrali $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ konvergjon.

Për të llogaritur integralin $(*)$ shqyrtojmë integralin parametrik:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin x}{x} dx,$$

për $\alpha \geq 0$. Integrali i sipërshënuar konvergjon uniformisht (shembulli 3.2.1) për $\alpha \geq 0$ dhe rrjedhimisht $\lim\limits_{\alpha \to +0} I(\alpha) = I(0) = I$. Vërejmë se:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial(e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin x}{x})}{\partial \alpha} dx = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx. \qquad (**)$$

Integrali $(**)$ konvergjon uniformisht në lidhje me α në çdo zonë $[\varepsilon, +\infty), \forall \varepsilon \geq 0$, sepse $|e^{-\alpha x} \sin x| \leq e^{-\varepsilon x.}$ Këndej, sipas teoremës 3.2.9, shohim se funksioni $I(\alpha)$ është i derivueshëm dhe:

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx = \frac{e^{-\alpha x}(\alpha \sin x + \cos x)}{1+\alpha^2}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Më tej vërejmë se $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = 0$. Me të vërtetë, nga $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$ shohim se:

$$0 \leq |I(\alpha)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Integrojmë anë për anë barazimin $I'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}$ në kufijtë nga α në $+\infty$ dhe gjejmë:

$$\int\limits_{\alpha}^{+\infty} I'(\alpha)d\alpha = -\int\limits_{\alpha}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1+\alpha^2},$$

ose $-I(\alpha) = -\frac{\pi}{2} + \arctan\alpha$. Prandaj, kur $\alpha \to +0$ gjejmë $I(0) = I = \frac{\pi}{2}$, kështu që $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

3.2.3 Integralet parametrike jo të veta të llojit të dytë

Le të jenë $I_1 = [a,b), I_2 = (c,d),\ E = I_1 \times I_2$ dhe $f : E \to \mathbf{R}$. Funksionin:

$$F(\alpha) = \int\limits_{a}^{b-0} f(x,\alpha)dx, \quad \alpha \in I_2,$$

e quajmë **integral parametrik jo i vetë i llojit të dytë.**

Përkufizimi 3.2.3 *Integrali $F(\alpha)$ quhet* **uniformisht konvergjent** *në I_2 në qoftë se ai konvergjon në I_2 dhe për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta > 0$ i tillë që: për çdo $\delta' < \delta$ dhe çdo $\alpha \in I_2$ vlen pabarazimi:*

$$\sup_{\alpha\in I_2}\left|\int\limits_{b-\delta'}^{b-0} f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon.$$

Meqenëse me zëvendësimet e përshtatshme në integralin jo të vetë të llojit të dytë ai kthehet në atë të llojit të parë, atëherë teoremat e dhëna më sipër 3.2.1-3.2.9, mund të formulohen e vërtetohen edhe për integralet parametrike të llojit të dytë. Prandaj, në vazhdim rezultatet jepen pa vërtetim.

Teorema 3.2.10 *(e Vajershtrasit). Që integrali $F(\alpha)$ të konvergjojë uniformisht në I_2 mjafton që të ekzistoj numri $\delta > 0$ dhe funksioni $\varphi : [b-\delta, b) \to \mathbf{R}$, ashtu që $|f(x,\alpha)| < |\varphi(x)|,\ \forall\alpha \in I_2$ dhe integrali $\int\limits_{b-\delta}^{b-0} |\varphi(x)|dx$ të konvergjojë.*

Teorema 3.2.11 *Në qoftë se funksioni f është i vazhdueshëm në bashkësinë E ndërsa integrali $F(\alpha)$ konvergjon uniformisht në I_2 atëherë funksioni F është i vazhdueshëm në I_2.*

Teorema 3.2.12 *Në qoftë se funksioni f së bashku me derivatin e pjesshëm $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ janë të vazhdueshme në bashkësinë E, integrali $F(\alpha)$ konvergjon ndërsa integrali:*

$$\lambda(\alpha) = \int\limits_{a}^{b-0} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx,\ \alpha \in I_2,$$

konvergjon uniformisht në I_2, atëherë funksioni F është i diferencueshëm në I_2 dhe $F'(\alpha) = \lambda(\alpha),\ \forall\alpha \in I_2$.

Teorema 3.2.13 *Le të jenë* $I_1 = [a, b), I = [c, d], E = I_1 \times I, f : E \to \mathbf{R}$. *Në qoftë se funksioni* f *është i vazhdueshëm në bashkësinë* E *dhe integrali* $F(\alpha)$ *konvergjon uniformisht në segmentin* I, *atëherë funksioni* F *është i integrueshëm në* I *dhe:*

$$\int_c^d d\alpha \int_a^{b-0} f(x, \alpha)dx = \int_a^{b-0} dx \int_c^d f(x, \alpha)d\alpha.$$

Shembulli 3.2.9 Të llogaritet:

$$A = \int_{+0}^{1-0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Zgjidhja: Vëmë:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

dhe kemi $A = \int_0^{1-0} f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Vërejmë se $f(x) = \int_0^1 \frac{d\alpha}{1+(\alpha x)^2}$, $0 \leq x \leq 1$. Prandaj

$$A = \int_0^{1-0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \int_0^1 \frac{d\alpha}{1 + (\alpha x)^2}.$$

Nga teorema 3.2.13, marrim:

$$A = \int_0^1 d\alpha \int_0^{1-0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\,(1 + \alpha^2 x^2)}.$$

Llogarisim integralin:

$$B(\alpha, \epsilon) = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\,(1 + \alpha^2 x^2)},\ 0 < \varepsilon < 1$$

duke marrë zëvendësimin $t = \arcsin x$. Kemi:

$$B(\alpha, \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \operatorname{arctg}[\sqrt{1 + \alpha^2}\ \operatorname{tg}(\arcsin(1 - \varepsilon))].$$

Rrjedhimisht:

$$\int_0^{1-0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}(1 + \alpha^2 x^2)} = \lim_{\varepsilon \to +0} B(\alpha, \varepsilon) = \frac{\pi}{2\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Përfundimisht:

$$A = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

3.2.4 Llogaritja e disa integraleve të rëndësishëm

1. Integrali Dirihle

Integrali i formës

$$\mathcal{D}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

quhet **integrali Dirihle**.

Për $\alpha \neq 0$, vëmë $\alpha x = t$ dhe lehtë shihet se, sipas kriterit Dirihle për konvergjencën e integraleve jo të vet, integrali $\mathcal{D}(\alpha)$ konvergjon. Për $\alpha = 0, \mathcal{D}(\alpha) = 0$. Pra, $\mathcal{D}(\alpha)$ ekziston për çdo $\alpha \in \mathbf{R}$.

Për të llogaritur $\mathcal{D}(\alpha)$, vëmë:

$$B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx, \quad \alpha \in \mathbf{R},\ \beta \in \mathbf{R}^+ = [0,\ +\infty).$$

Vërejmë se funksioni

$$f(x,\, \beta) = \begin{cases} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x}, & \text{nëse } x \neq 0, \\ \alpha, & \text{nëse } x = 0, \end{cases}$$

është i vazhdueshëm në bashkësinë $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$. Mëtej, sipas kriterit të Abelit, integrali $B(\alpha, \beta)$ konvergjon uniformisht për çdo $\beta \in \mathbf{R}^+$. Prandaj, funksioni B është i vazhdueshëm sipas parametrit β. Rrjedhimisht, $\mathcal{D}(\alpha) = B(\alpha,\, +0)$. Le të jetë $\beta > 0$. Qartazi, funksioni

$$(x,\, \alpha) \mapsto e^{-\beta x} \cos \alpha x, \quad (x, \alpha) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$$

është i vazhdueshëm. Meqenëse $|e^{-\beta x} \cos \alpha x| \leq e^{-\beta x},\ \forall\, \alpha \in \mathbf{R}^+$, dhe

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\beta} < +\infty,$$

atëherë, sipas kriterit të Vajershtrasit integrali

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x\, dx,$$

konvergjon uniformisht sipas parametrit α. Sipas teoremës 3.2.9, funksioni B është i diferencueshëm sipas parametrit α dhe

$$B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x\, dx, \alpha \in \mathbf{R},\ \beta > 0.$$

Pas integrimit, marrim $B(\alpha,\beta)=\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{\beta}$. Prandaj

$$\mathcal{D}(\alpha)=B(\alpha,+0)=\lim_{\beta\to+0}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha.$$

Le të vërejmë se funksioni $\alpha\mapsto\operatorname{sgn}\alpha,\ \alpha\in\mathbf{R}$, mund të shkruhet edhe në formën

$$\operatorname{sgn}\alpha=\frac{2}{\pi}\mathcal{D}(\alpha).$$

2. Integrali i Puassonit

Integrali i formës

$$P=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx, \tag{1}$$

quhet **integrali i Puassonit.** Roli i tij është shumë i rëndësishëm, sidomos në teorinë e gjasës.

Për ta llogaritur integralin (1) vëmë $x=\alpha t,\alpha>0$, dhe marrim

$$P=\alpha\int_0^{+\infty}e^{-\alpha^2t^2}dt.$$

Tash, duke shumëzuar të dy anët me $e^{-\alpha^2}$, marrim

$$P\,e^{-\alpha^2}=\alpha\ e^{-\alpha^2}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha^2t^2}dt.$$

Integrojmë sipas α në kufijtë $0\le\alpha<+\infty$:

$$P\int_0^{+\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=P^2=\int_0^{+\infty}\alpha\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha\int_0^{+\infty}e^{-\alpha^2t^2}dt. \tag{2}$$

Funksioni $(t,\alpha)\mapsto\alpha\,e^{-\alpha^2(1+t^2)},\ (t,\alpha)\in E=\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+$, është i vazhdueshëm dhe jonegativ në E. Qartazi, funksionet:

$$\begin{aligned}F(\alpha)&=e^{-\alpha^2}\int_0^{+\infty}e^{-(\alpha t)^2}\,d(\alpha t)=P\,e^{-\alpha^2},\ \alpha\in\mathbf{R}^+,\\ \Phi(t)&=\frac{1}{2(1+t^2)}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha^2(1+t^2)}\,d(\alpha^2(1+t^2))=\frac{1}{2(1+t^2)},\ t\in\mathbf{R}^+,\end{aligned}$$

janë të vazhdueshëm. Meqenëse, integralet

$$\int_0^{+\infty} F(\alpha)\, d\alpha \text{ dhe } \int_0^{+\infty} \Phi(t)\, dt$$

konvergjojnë, atëherë sipas teoremës 3.2.8, ata janë të barabartë. Pra:

$$\int_0^{+\infty} F(\alpha)\, d\alpha = P^2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Prandaj, $P = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$.

3. Integralet e Frenelit

Integralet e formës

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx \text{ dhe } I_2 = \int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx,$$

quhen **integralet e Frenelit.** Me zëvendësimin $x^2 = t$, ata transformohen në integralet

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt, \quad I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt,$$

Integralet e sipërshenuar, sipas kriterit të Dirihlesë, konvergjojnë. Llogarisim integralin I_1. Për $t > 0$, sipas integralit të Puassonit, vlen:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\,x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{t}x)} d(\sqrt{t}x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}.$$

Prandaj:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t\,x^2} dx, \tag{1}$$

prej nga gjejmë

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \sin t\, dt \int_0^{+\infty} e^{-t\,x^2} dx.$$

Meqë vlen (1), për $\beta \in \mathbf{R}^+$ marrim

$$\Phi(\beta) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\sin t\, dt \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\, dx.$$

Meqenëse për çdo $t \in \mathbf{R}^+$ dhe çdo $x \in \mathbf{R}^+$ vlen $|\, e^{-\beta t}e^{-tx^2}\sin t| \leq e^{-\beta t}$, si dhe meqë integrali $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,dt = \frac{1}{\beta},\ \forall\,\beta > 0$ konvergjon, konstatojmë se integralet

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta t}e^{-tx^2}|\sin t|\,dt,\quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta t}e^{-tx^2}|\sin t|\,dx,$$

konvergjojnë uniformisht sipas x e t, përkatësisht. Tash, sipas teoremës 3.2.8, mund të ndërrohet renditja e integrimit:

$$\begin{aligned}
\Phi(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\beta+x^2)t}\sin t\,dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(\beta+x^2)t}(\cos t + (\beta+x^2)\sin t)}{1+(\beta+x^2)^2}\Bigg|_{t=+\infty}^{t=0} dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(\beta+x^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Meqenëse për çdo $\beta \geq 0$ dhe çdo $t > 0$ vlen

$$\left| e^{-\beta t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{\sin t}{t},$$

dhe meqë integrali $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ konvergjon, shohim se integrali $\Phi(\beta)$ konvergjon uniformisht sipas parametrit β. Prandaj, funksioni Φ është i vazhdueshëm për $\beta \geq 0$. Rrjedhimisht, me limit mund të kalohet nën shenjën e integralit:

$$\begin{aligned}
&I_1 = \Phi(+0) = \lim_{\beta\to+0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(\beta+x^2)^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\lim_{\beta\to+0}\frac{dx}{1+(\beta+x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1))\right]\Bigg|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Pra, $I_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$

Ngjashëm shohim se

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\beta+x^2)t}\cos t\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(\beta+x^2)t}(\sin t-(\beta+x^2)\cos t)}{1+(\beta+x^2)^2}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\beta+x^2}{1+(\beta+x^2)^2}\,dx.$$

Prandaj:

$$I_2 = \Phi(+0) = \lim_{\beta\to+0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\beta+x^2}{1+(\beta+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\lim_{\beta\to+0}\frac{\beta+x^2}{1+(\beta+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1))\right]\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\operatorname{sgn}x + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right]\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Përfundimisht,

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

4. Integralet e Frulanit

Le të jetë funksioni $f\colon [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ i vazhdueshëm në fushën e vet të përcaktimit, ndërsa integrali $\int\limits_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx$ le të konvergjojë, për çdo $A > 0$. Vlen **formula e Frulanit**:

$$\int\limits_{+0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx))}{x} = f(0)\ \ln\frac{b}{a},\quad a>0,\ b>0. \tag{1}$$

Vërtetojmë formulën (1). Marrim funksionin:

$$F(x) = \int\limits_A^x \frac{f(t)}{t}\,dt,\quad A \le x < +\infty,$$

i cili, sipas kushtit, ka limit të fundëm $B = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Atëherë,

$$\begin{aligned}
\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}\,dx &= \int\limits_{aA}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = B - F(Aa), \\
\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\,dx &= \int\limits_{Ab}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = B - F(Ab), \\
\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx))}{x} &= F(Ab) - F(Aa) = \int\limits_{Aa}^{Ab} \frac{f(x)}{x}\,dx.
\end{aligned}$$

Nga teorema e parë mbi të mesmen për integralet e caktuara marrim

$$\int\limits_{Aa}^{Ab} \frac{f(x)}{x}\,dx = f(\xi)\,\ln x\Big|_{Aa}^{Ab} = f(\xi)\,\ln\frac{b}{a},$$

ku $\xi = Aa + \vartheta A(b-a)$, $0 < \vartheta < 1$. Meqenëse funksioni f është i vazhdueshëm, atëherë $\lim\limits_{A\to+\infty} f(\xi) = f(0)$. Rrjedhimisht marrim:

$$\exists \lim_{A\to+0} \int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx))}{x}\,dx = \int\limits_{+0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx))}{x} = f(0)\,\ln\frac{b}{a}.$$

çka edhe deshëm të tregojmë.

Shqyrtojmë në vazhdim rastin kur ekziston $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$, $f(+\infty) \in$ **R**. Atëherë, vlen formula e Frulanit:

$$\int\limits_{+0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx))}{x} = [f(0) - f(+\infty)]\,\ln\frac{b}{a}. \tag{2}$$

Tregojmë formulën (2). Duke integruar në segmentin $[A, B]$, $A > 0$, marrim:

$$\int\limits_A^B \frac{f(ax)}{x}\,dx = \int\limits_{aA}^{Ba} \frac{f(t)}{t}\,dt, \quad \int\limits_A^B \frac{f(bx)}{x}\,dx = \int\limits_{aB}^{Bb} \frac{f(t)}{t}\,dt,$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_A^B \frac{f(ax) - f(bx))}{x}\,dx &= \int\limits_{aA}^{Ba} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int\limits_{Ab}^{Bb} \frac{f(f)}{t}\,dt = \\
&= \int\limits_{aA}^{Ab} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int\limits_{Ba}^{Bb} \frac{f(t)}{t}\,dt = [f(\xi) - f(\eta)]\ln\frac{b}{a},
\end{aligned}$$

ku $\xi - A(a+\vartheta_1(b-a))$, $\eta = B(a+\vartheta_2(b-a))$, $0 < \vartheta_i < 1$, $i = 1, 2$. Me kalimin me limit kur $A \to +0$ dhe $B \to +\infty$, shohim se:

$$\exists \lim_{\substack{A\to+0\\ B\to+\infty}} \int\limits_A^B \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int\limits_{+0}^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} = [f(0)-f(+\infty)]\,\ln\frac{b}{a}.$$

Shembulli 3.2.10 Duke përdor formulën e Frulanit, të llogaritet integrali:

$$\Phi(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4\alpha x - \sin^4\beta x}{x}\,dx,\ \alpha\beta \neq 0.$$

Zgjidhja: Shprehjen $\sin^4\alpha x - \sin^4\beta x$ e transformojmë në formën:

$$\begin{aligned}\sin^4\alpha x - \sin^4\beta x &= \frac{1}{4}[(1-\cos 2\alpha x)^2 - (1-\cos 2\beta x)^2] = \\ &= \frac{1}{4}[f(|\beta|x) - f(|\alpha|x)],\end{aligned}$$

ku $f(x) = 2\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x$. Prandaj

$$\Phi(\alpha,\beta) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(|\beta|x) - f(|\alpha|x)]}{x}\,dx.$$

Lehtë shihet se funksioni f është i vazhdueshëm. Sipas kriterit të Dirihlesë për integralet jo të vetë, integrali $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ konvergjon për çdo $A > 0$.Tash, nag formula (1) marrim:

$$\Phi(\alpha,\beta) = \frac{1}{4} f(0)\,\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|.$$

3.2.5 Detyra për ushtrime

1. Të gjendet zona e konvergjencës së integraleve:

$$(a)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{1+x^2}\,dx\,; \qquad (b)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p + x^q}\,dx\,;$$

$$(c)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}\,dx\,; \qquad (\text{ç})\ \int\limits_0^{2} \frac{dx}{|\ln x|^p}\,dx\,;$$

$$(e)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,dx,\ \ (p>0)\,; \qquad (f)\ \int\limits_0^{1} \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}\,dx\,.$$

2. Të tregohet se nëse: 1) integrali $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\, y)\, dx$ konvergjon uniformisht në $(y_1,\, y_2)$ dhe 2) funksioni $\varphi(x,\, y)$ është i kufizuar sipas x, atëherë integrali:
$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,\, y)\varphi(x,\, y)\, dx$$
konvergjon uniformisht në $(y_1,\, y_2)$.

3. Të tregohet se integrali:
$$\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx,$$
(a) konvergjon uniformisht në çdo segment $0 < a \leq \alpha \leq b$;
(b) konvergjon jo uniformisht në segmentin $0 \leq \alpha \leq b$.

4. Të shqyrtohet konvergjenca uniforme e integraleve:
$$(a) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty)$$
$$(b) \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1} \quad (0 \leq \alpha < +\infty)$$
$$(c) \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\, dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty)$$
$$(d) \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^p}{x\sqrt{x}}\, dx \quad (0 \leq p \leq 10)\,.$$

5. Të tregohet se funksioni:
$$F(\alpha) = \int\limits_0^1 \sin \frac{\alpha}{x^\alpha}\, dx,$$
është i vazhdueshëm në intervalin $-\infty < \alpha < 2$.

6. Duke shfrytëzuar formulën $\int\limits_0^1 x^{n-1}\, dx = \dfrac{1}{n}$ $(n > 0)$, të llogaritet integrali
$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{n-1} \ln^m x\, dx, \quad \text{ku } m \in \mathbf{N}.$$

7. Duke shfrytëzuar formulën $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+a} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{a}}$ $(a > 0)$ të llogaritet integrali:

$$I_{n+1} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx,\ n \in \mathbf{N}.$$

8. Të llogariten integralet:

$$(a)\ I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0)\,;$$

$$(b)\ I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-px} - e^{qx}}{x} \sin \lambda x\,dx\,;$$

$$(c)\ I(\alpha) = \int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (|\alpha| \le 1)\,;$$

$$(d)\ I(\alpha) = \int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (|\alpha| \le 1)\,;$$

$$(e)\ I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx\,;$$

$$(f)\ I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,dx\,.$$

3.3 INTEGRALET E EULERIT

3.3.1 Integrali i Eulerit i llojit të parë

Shqyrtojmë integralin:

$$B(p,\,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \tag{1}$$

i cili varet nga dy parametra p dhe q dhe të cilin e quajmë **integrali i Eulerit i llojit të parë** ose **funksioni beta**.

Së pari sqarojmë se për çfarë vlerash të parametrave p dhe q ka kuptim relacioni (1) (d.m.th. konvergjon integrali (1)).

Po e zbërthejmë integralin (1) në dy integrale:

$$B(p,\,q)=\int\limits_0^{\frac12} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx+\int\limits_{\frac12}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Në pikën $x=0$, për $p-1<0$, funksioni nënintegral i integralit të parë është i pakufizuar, prandaj ai është integral jo i vet. Në mënyrë të ngjashme konstatohet për integralin e dytë, sepse funksioni nënintegral për $x=1$, $q-1<0$ është i pakufizuar. Në rrethinën e pikës 0 kemi $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\le x^{p-1}$. Integrali $\int\limits_0^{\frac12} x^{p-1}dx=\int\limits_0^{\frac12}\frac{dx}{x^{1-p}}$, konvergjon për $p>0$, ndërsa divergjon për $p<0$, prej nga rrjedh (nga kriteri i krahasimit për integralet jo të veta) se $\int\limits_0^{\frac12} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ konvergjon për $p>0$ ndërsa divergjon për $p<0$. Në mënyrë analoge, në rrethinën e pikës 1, $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\le(1-x)^{q-1}$. Integrali $\int\limits_{\frac12}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\int\limits_{\frac12}^{1}\frac{dx}{(1-x)^{1-q}}$ konvergjon për $q>0$ dhe divergjon për $q<0$.

Këndej rrjedh se funksioni beta është i përkufizuar në bashkësinë $D\subset\mathbf{R}^2$, ku

$$D=\{(p,\,q)\,|\,p>o,\,q>0\}.$$

Tregojmë se funksioni $B(p,\,q)$ është i vazhdueshëm në zonën D.

Së pari vërejmë se $B(p,\,q)$ konvergjon uniformisht në zonën $p\ge p_0$, $q\ge q_0$, për çdo $p_0>0$, $q_0>0$. Me të vërtetë, meqë:

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\le x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1},\ 0\le x\le 1$$

dhe meqë $B(p_0,\,q_0)$ konvergjon atëherë, sipas rezultatit analog me teoremën 3.2.2. për integralet jo të veta të llojit të dytë, rrjedh pohimi i mësipërm. Këndej dhe nga analogu i teoremës 3.2.6 për integralet jo të veta të llojit të dytë, rrjedh se $B(p,\,q)$ është i vazhdueshëm në D.

Po i vëmë në dukje tash disa veti të funksionit $B(p,\,q)$.

1° Për çdo $p>0$ dhe $q>0$

$$B(p,\,q)=B(q,\,p).$$

Për vërtetim mjafton të merret zëvendësimi $x=1-t$.

2° Për çdo $p>0$ dhe $q>0$ vlen:

$$B(p,\,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\,B(p,\,q-1). \tag{2}$$

Me të vërtetë, duke vërejtur se $x^p(1-x)^{q-2} = x^{p-1}(1-x)^{q-2} - x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ dhe duke përdorur metodën e integrimit parcial ($u = (1-x)^{q-1}$, $dv = x^{p-1}dx$) fitojmë:

$$B(p,\, q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx = \frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\Big|_0^1 + \frac{q-1}{p}\int\limits_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\, dx$$

$$= \frac{q-1}{p}\int\limits_0^1 [x^{p-1}(1-x)^{q-2} - x^{p-1}(1-x)^{q-1}]\, dx =$$

$$= \frac{q-1}{p}B(p,\, q-1) - \frac{q-1}{p}B(p,\, q),$$

prej nga rrjedh (2).

Sipas vetisë 1° shihet se për çdo $q > 0$, $p > 1$ kemi:

$$B(p,\, q) = \frac{p-1}{p+q-1}\, B(p-1,\, q).$$

3° Nëse $q = n$ është numër natyral dhe $p > 0$, atëherë:

$$B(p,\, n) = B(n,\, p) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1)}{p(p+1)\cdots(p+n-1)}\, .$$

Kjo formulë fitohet duke përdorur hap pas hapi formulën (2) dhe duke vërejtur se:

$$B(p,\, 1) = \int\limits_0^1 x^{p-1}\, dx = \frac{1}{p}\, .$$

Nëse edhe $p = m$ është numër natyral, atëherë:

$$B(m,\, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}\, .$$

4° $B(p,\, q) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p-q}}\, dx.$

Me të vërtetë, nëse marrim $x = \dfrac{y}{1+y}$ do të kemi:

$$B(p,\, q) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{1+y}\right)^{q-1}\frac{dy}{(1+y)^2} = \int\limits_0^\infty \frac{y^{p-1}dy}{(1+y)^{p+q}}\, .$$

Për $q = 1-p$ fitojmë:

$$B(p,\, 1-p) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{p-1}}{1+y}\, dy,$$

dhe p.sh. sipas ([ ], shembulli 7, fq. 321) fitojmë:

$$B(p,\,1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p},\quad 0<p<1\,.$$

Në veçanti, $B\Big(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\Big)=\pi\,.$

3.3.2 Integrali i Eulerit i llojit të dytë

Integralin:

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx \tag{1}$$

e quajmë **integral i Eulerit i llojit të dytë** ose **funksioni-gama.** Për të caktuar zonën e definimit të funksionit gama atë e paraqesim në formën:

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx+\int\limits_1^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx. \tag{2}$$

Integrali i dytë në anën e djathtë të (2) konvergjon për çdo p. Me të vërtetë, duke vërejtur se:

$$x^{p-1}e^{-x}=o(e^{-\frac{x}{2}}),\quad \text{kur } x\to+\infty$$

dhe se integrali $\int\limits_1^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ konvergjon, sipas kriterit të krahasimit të integraleve jo të vetë, del pohimi ynë.

Meqë në $[0,\,1]$, $x^{p-1}e^{-x}\le x^{p-1}$ dhe $\int\limits_0^1 x^{p-1}\,dx$ konvergjon për $p>0$ dhe divergjon për $p\ge 0$, përfundojmë se integrali i parë në (2) konvergjon për $p>0$ dhe divergjon për $p\le 0$.

Në vazhdim tregojmë konvergjencën uniforme të integralit (1) në çdo segment $[p_1,\,p_2]$, ku $0<p_1<p_2<+\infty$. Me të vërtetë, për $p_1\le p\le p_2$ dhe për $0\le x\le 1$, kemi:

$$x^{p-1}e^{-x}\le x^{p_1-1}e^{-x},$$

ndërsa për $x>1$,

$$x^{p-1}e^{-x}\le x^{p_2-1}e^{-x}.$$

Këndej dhe meqë integralet

$$\int\limits_0^1 x^{p_1-1}e^{-x}\,dx,\quad \int\limits_1^\infty x^{p_2-1}e^{-x}\,dx$$

konvergjojnë, sipas kriterit të Vajershtrasit (teorema 3.2.2) shohim se $\Gamma(p)$ konvergjon uniformisht në $[p_1,\,p_2]$. Tash, nga teorema 3.2.4, rrjedh se funksioni $\Gamma(p)$ është i vazhdueshëm në tërë fushën e vet të përcaktimit.

Po i përmendim disa veti të rëndësishme të funksionit gama.

1° $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$

Vërtetimi është i menjëhershëm nëse përdorim integrimin parcial.

Nëse përdorim $n-$herë formulën e sipërshënuar do të marrim:

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\cdots(p-n)\Gamma(p-n).$$

Në veçanti, për $p = n+1$ kemi:

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1).$$

Por $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, prandaj:

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

2° $\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(p,\,q), \quad p>0,\ q>0.$

Vërtetimi. Në integralin $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ marrim zëvendësimin $x = ty$. Atëherë:

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty (ty)^{p-1}e^{-ty}t\,dy = \int\limits_0^\infty t^p y^{p-1}e^{-ty}\,dy.$$

Nëse e shumëzojmë barazimin e fundit anë për anë me $t^{q-1}e^{-t}$, fitojmë:

$$t^{q-1}e^{-t}\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty (t)^{p+q-1}y^{p-1}e^{-t(y+1)}\,dy.$$

Integrojmë në lidhje me t në intervalin $[0,\,\infty)$:

$$\Gamma(p)\int\limits_0^\infty t^{q-1}e^{-t}\,dt = \int\limits_0^\infty [t^{p+q-1}y^{p-1}e^{-t(y+1)}\,dy]\,dt,$$

d.m.th.

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int\limits_0^\infty [y^{p-1}\int\limits_0^\infty t^{p+q-1}e^{-t(y+1)}\,dt]\,dy.$$

Tash marrim zëvendësimin:

$$t = \frac{u}{1+y},\ dy = \frac{du}{1+y}.$$

Kemi:

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int\limits_0^\infty \Big[y^{p-1}\int\limits_0^\infty \frac{u^{p+q-1}}{(1+y)^{p+q-1}}e^{-\frac{u}{1+y}(1+y)}\frac{du}{1+y}\Big]\,dy = \\ &= \int\limits_0^\infty \frac{y^{p-1}dy}{(1+y)^{p+q}}\int\limits_0^\infty e^u u^{p+q-1}\,du,\end{aligned}$$

d.m.th:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,\, q) \cdot \Gamma(p+q), .$$

prej nga gjejmë:

$$B(p,\, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

çka synuam të tregojmë.

Në qoftë se zëvendësojmë $q = 1 - p$ do të marrim:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = B(p,\, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}\,.$$

Në veçanti kemi:

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \pi, \text{ apo } \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}\,.$$

Nga ana tjetër

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx, \quad \text{d.m.th.} \quad \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Në qoftë se zëvendësojmë $x = t^2$, $dx = 2t\, dt$, do të marrim:

$$\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Shembulli 3.3.1 Duke zbatuar integralet e Eulerit të llogaritet:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\, dx.$$

Zgjidhja:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\, dx &= \int\limits_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}\, dx = \int\limits_0^= \infty \frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}}\, dx = B\Big(\frac{5}{4},\, \frac{3}{4}\Big) = \\
&= \frac{\Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{4}B\Big(\frac{1}{4},\, 1-\frac{1}{4}\Big) = \\
&= \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{\frac{2}{2}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

Shembulli 3.3.2 Të llogaritet:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x\, dx.$$

Zgjidhja: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x(1-\sin^2 x)^2\, dx$. Marrim zëvendësimin $\sin x = \sqrt{t}$. Kemi:

$$I \;=\; \int\limits_0^1 t^3(1-t^2)\,\frac{dt}{2(1-t)^{\frac{1}{2}}\cdot t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{2}{3}}\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{7}{2}-1}(1-t)^{\frac{5}{2}-1}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}B\Big(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\Big) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\Big(\frac{7}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{5}{2}\Big)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}\frac{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{5!} = \frac{45\pi}{2\cdot 8\cdot 4\cdot 24\cdot 5} = \frac{3\pi}{512}\,.$$

3.3.3 Detyra për ushtrime

1. Duke i zbatuar integralet e Eulerit të llogariten integralet:

$$a)\ \int_0^\infty x^3e^{-x}\,dx; \qquad b)\ \int_0^\infty x^6e^{-2x}\,dx;$$

$$\text{c)}\ \int_0^\infty x^5(1-x)^4\,dx; \qquad \text{ç)}\ \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ (a>0);$$

$$d)\ \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}\,dx; \qquad f)\ \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^m}\,dx,\quad (n>0);$$

$$e)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx; \qquad g)\ \int_0^1 \big(\ln\frac{1}{x}\big)^p\,dx\,.$$

2. Të caktohet zona e ekzistencës dhe të shprehet me anë të integraleve të Eulerit:

$$a)\ \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^2}\,dx; \qquad b)\ \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^2}\,dx\,.$$

3. Të llogaritet gjatësia e harkut të lakores $r^n = a^n\cos n\varphi,\quad (a>0, n\in\mathbf{N})$.

4. Të llogaritet syprina e figurës së kufizuar me lakoren:

$$|x|^n+|y|^n=a^n \quad (n>0,\ a>0)\,.$$

4

INTEGRALET E SHUMËFISHTA

Siç dihet në nocionin e integralit të caktuar të funksionit me një ndryshore arrihet duke shqyrtuar problemin e llogaritjes të syprinës së trapezit vijëpërkulët. Integralin e caktuar e quajmë edhe integral të njëfishtë. Për funksionet e shumë ndryshoreve merren probleme analoge që shpjegojnë nocionin e integralit të shumëfishtë.

Le të jetë dhënë një zonë e kufizuar D e rrafshit Oxy për të cilën supozojmë se mund t'i llogaritet syprina (d.m.th. sipas asaj që do të shohim në pikën 1.1. të §1, është e matshme). Në veçanti, D mund të jetë qarku, drejtkëndëshi, zona e kufizuar me elipsën etj. Supozojmë se në të është dhënë funksioni $z = f(x, y)$, i cili është i vazhdueshëm dhe jonegativ. Shqyrtojmë problemin e llogaritjes së vëllimit të trupit cilindrik të përkulët të kufizuar nga sipër me sipërfaqen $z = f(x, y)$, nga poshtë me zonën D, kurse anash me sipërfaqen cilindrike e cila kalon nëpër kufirin e zonës D dhe ka përftueset paralele me boshtin Oz.

Zonën D e ndajmë në një numër të fundmë zonash $D_0, D_1, \ . \ . \ . \ , D_{n-1}$, të cilat nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta dhe të cilave mund tu llogaritet syprina. Shënojmë përkatësisht me $mD_0, mD_1, \ . \ . \ . \ , mD_{n-1}$, syprinat e tyre. Konsiderojmë zonën e i-të D_i të ndarjes. Kësaj zone i korrespondon pjesa përkatëse e sipërfaqes $z = f(x, y)$, prandaj përfytyrojmë cilindrin e përkulët që ka si bazë këtë zonë. Le të jetë $P_i(\xi_i, \eta_i)$ pikë e çfarëdoshme e zonës D_i. Atëherë $v_i = f(\xi_i, \eta_i) \cdot mD_i$ paraqet vëllimin e cilindrit të drejtë me bazë D_i i cili e përafron cilindrin e përkulët me po atë bazë. Kështu veprojmë për çdo $i \in \{0, 1, \ . \ . \ . \ , n-1\}$ dhe fornojmë shumën:

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \cdot mD_i. \tag{1}$$

Është e qartë se shuma (1) varet nga mënyra e ndarjes së zonës D dhe nga mënyra e zgjedhjes së pikave P_i. Intuitivisht është e qartë se sa më e imtë të jetë ndarja, aq më tepër trupi i përbërë nga cilindrat e drejtë, do t'i afrohet cilindrit të përkulët. Le të jetë λ maksimumi i diametrave të zonave D_i. Atëherë, në mënyrë të natyrshme vëllimi i trupit përkufizohet si limit i shumës (1) kur $\lambda \to 0$:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \cdot mD_i, \tag{2}$$

nëse ai limit ekziston dhe nuk varet nga mënyra e ndarjes së zonës D e as nga mënyra e zgjedhjes së pikave P_i.

Problemi i shqyrtimit të vëllimit të trupit të përkulët çon deri te kuptimi i integralit të dyfishtë.

Në vazhdim shqyrtojmë një problem fizik që çon në nocionin e integralit të trefishtë.

Le të jetë dhënë në hapësirën tredimensionale në të cilën është marrë sistemi koordinativ kënddrejtë $Oxyz$ trupi i kufizuar Q, për të cilin supozojmë se mund t'i llogaritet vëllimi (d.m.th. është i matshëm). Të supozojmë se ai është i mbushur me lëndë, densiteti i së cilës në çdo pikë $M(x, y, z)$ është:

$$\mu = \mu(x, y, x) = \mu(M).$$

Që të përcaktojmë masën e lëndës së vendosur në këtë trup e ndajmë atë në n pjesë $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}$, të cilat nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta dhe të cilave mund t'u llogaritet vëllimi. Shënojmë përkatësisht me $mQ_0, mQ_1, ...,$ mQ_{n-1}, vëllimet e tyre. Le të jetë $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ pikë e çfarëdoshme e zonës Q_i, në të cilën konsiderojmë se densiteti është konstant. Atëherë masa e lëndës së vendosur në të do të ishte përafërsisht:

$$m_i = \mu(M_i) \cdot mQ_i.$$

Masa e tërë lëndës së shpërndarë në trup është e përafërt me:

$$m_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mu(M_i) \cdot mQ_i. \tag{3}$$

Kuptohet se është e natyrshme që masa e kërkuar të përkufizohet si limit i shumës (3) kur $\lambda = \max d(Q_i) \to 0$ dhe kur nuk varet nga mënyrat e ndarjes së zonës Q dhe zgjedhjes së pikave M_i. Pra:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot mQ_i. \tag{4}$$

Ky problem, si do të shohim, bëri të mundshëm studimin e shumave (3) si dhe të limiteve të tyre (4), d.m.th. të integraleve të trefishta.

Ngjashëm, duke i shqyrtuar limitet e tipit (2)((4)) për funksionet me n-ndryshore në zonën $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, për të cilën supozojmë se mund t'i llogaritet "syprina" (d.m.th. është e matshme), arrijmë te nocioni i integralit të n-fishtë.

Në teorinë e integraleve të shumëfishta paraqiten vështirësi të cilat nuk ekzistojnë te integralet e funksionit me një ndryshore (të njëfishta). Siç dihet, integralin e njëfishtë e përkufizojmë në bashkësi mjaft të thjesht - në segmentin $[a,b]$ të cilin e ndajmë në numër të fundmë segmentesh dhe se llogaritja e gjatësisë së segmentit $[a,b]$ si dhe e pjesëve të tij, nuk paraqet kurrfarë vështirësie. Mirëpo, në rastin e integralit të dyfishtë ose në përgjithësi të n-fishtë, zona e integrimit Ω ndahet në pjesë me kufij të vijëpërkultë dhe paraqitet problemi i llogaritjes së syprinës ose në përgjithësi masës së atyre pjesëve.

Këndej, së pari duhet të jepet kuptimi i masës së bashkësisë si dhe vetitë themelore të saj. Prandaj, këtë kapitull e fillojmë me shqyrtimin e teorisë së masës sipas Jordanit e pastaj jepet teoria e integraleve të shumëfishta. Në fillim do të jepet kjo teori për funksionet me dy ndryshore e pastaj do të shohim se lehtë mund ta përgjithësojmë për funksionet me më shumë ndryshore.

4.1 INTEGRALET E DYFISHTA

4.1.1 Bashkësitë e numrueshme sipas Jordanit

Në rrafshin $\mathbf{R^2}$ marrim sistemin kartezian Oxy të cilin e shënojmë me R.

Sistemin koordinativ kënddrejtë $O\xi\eta$, që fitohet me rrotullimin e boshteve të sistemit R për një kënd të caktuar e shënojmë me R'.

Drejtkëndëshin (i cili është bashkësi e mbyllur) $\triangle \subset \mathbf{R^2}$ e quajmë **bashkësi të thjeshtë në $\mathbf{R^2}$**. Analitikisht atë mund ta definojmë kështu: ekziston sistemi koordinativ kënddrejtë R', në të cilin $\triangle$ është bashkësi e pikave (ξ,η) që i plotësojnë kushtet:

$$a_1 \le \xi \le a_2,\ b_1 \le \eta \le b_2$$

ku $a_1 < a_2,\ b_1 < b_2$. Shihet se sistemi R' ka atë veti që brinjët e drejtkëndëshit $\triangle$ janë paralele me boshtet e sistemit R'. Që të shënohet se $\triangle$ ka brinjë paralele me boshtet e sistemit R' shkruajmë $\triangle = \triangle_{R'}$.

Përkufizimi 4.1.1 *Bashkësinë $\sigma \subset \mathbf{R^2}$ e quajmë* **figurë elementare,** *nëse ajo është union i një numri të fundmë drejtkëndëshash $\triangle \subset \mathbf{R^2}$ të cilët nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta (d.m.th. mund të priten vetëm sipas pjesëve të kufijve).*

Është e qartë se syprina e figurës së rrafshët σ, të cilën e shënojmë me $|\sigma|$, është sa shuma e syprinave të drejtkëndëshave $\triangle$, prej të cilëve formohet σ.

Ka shumë mënyra që figura σ të paraqitet si union i një numri të fundmë drejtkëndëshash $\triangle$. Me metodat e gjeometrisë elementare lehtë tregohet se syprina $|\sigma|$ nuk varet nga mënyra e paraqitjes së figurës σ.

Bashkësinë e zbrazët e konsiderojmë figurë me "syprinën" (masën) zero.

Nga figurat σ marrim ato të cilat kanë vetitë që të gjithë drejtkëndëshat $\triangle$ nga të cilët ata formohen plotësojnë kushtin $\triangle = \triangle_R$. Figurat e tilla i shënojmë me σ_R. Në vazhdim japim një varg vetish të figurave σ vërtetimi i të cilave është i thjeshtë.

1. Nëse $\sigma_1 \subset \sigma_2$ atëherë $|\sigma_1| \leq |\sigma_2|$;

2. Unioni i dy figurave σ'_R e σ''_R është figura σ_R dhe ka vend pabarazimi:

$$|\sigma_R| = |\sigma'_R \cup \sigma''_R| \leq |\sigma'_R| + |\sigma''_R|,$$

i cili kthehet në barazim nëse ato priten më së shumti vetëm sipas pjesëve të kufijve të tyre;

3. Ndryshimi i dy figurave σ'_R e σ''_R s'është domosdo bashkësi e mbyllur, prandaj ajo s'është domosdo figurë. Ajo mund të jetë figurë (mund të jetë e zbrazët) vetëm nëse $\sigma'_R \subset \sigma''_R$ ose kur $\sigma'_R \cap \sigma''_R = \emptyset$. Por mbyllja $\overline{\sigma'_R \setminus \sigma''_R}$ është gjithmonë figurë dhe ka vend relacioni:

$$|\overline{\sigma'_R \setminus \sigma''_R}| \geq |\sigma'_R| - |\sigma''_R|,$$

i cili kthehet në barazim kur $\sigma''_R \subset \sigma'_R$.

4. Nëse figurën σ_R e ndajmë me drejtëzën e cila është paralele me njërin nga boshtet koordinative, atëherë ajo ndahet në dy figura σ'_R e σ''_R.

Vetia që pason bazohet në kuptimin e rrjetës.

Le të jetë n një numër natyral i fiksuar. Konstruktojmë familjen e drejtëzave: $x = kh$ e $y = \ell h$ $\left(h = \frac{1}{2^n},\ k,\ \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$. Këto dy familje definojnë rrjetën drejtkëndëshe S_n, e cila e dekompozon rrafshin $\mathbf{R^2}$ në katrorët $\triangle^h$ me gjatësi të brinjëve h të cilat janë paralele me boshtet e koordinatave. Është e qartë se rrjeta S_{n+1} formohet nga rrjeta S_n kur secili katror i rrjetit S_n ndahet në katër katror

Le të jetë $G \subset \mathbf{R^2}$ bashkësi e çfarëdoshme joboshe dhe e kufizuar. Me $\underline{\omega}_n(G) = \underline{\omega}_n$ shënojmë figurën e cila formohet nga katrorët $\triangle^h$ të rrjetës S_n të cilët gjenden të tërë në G (d.m.th. pikat e $\triangle^h$ janë pika të brendshme të bashkësisë G), kurse me $\overline{\omega}_n(G) = \overline{\omega}_n$ - figurën e cila përbëhet nga katrorët $\triangle^h$ të rrjetës S_n ashtu që secili përmban bile një pikë të bashkësisë G (fig. 4.1). Në veçanti ndodh që $\underline{\omega}_n$ të jetë bashkësi e zbrazët, por ne edhe këtë e kemi quajtur figurë (me masën zero). Është e qartë se:

$$\begin{aligned} &\underline{\omega}_1 \subset \underline{\omega}_2 \subset \ldots, \\ &\overline{\omega}_1 \supset \overline{\omega}_2 \supset \ldots, \\ &\underline{\omega}_n(G) \subset G \subset \overline{\omega}_{n'}(G), \end{aligned}$$

ku n e n' janë çfarëdo dy numra natyral. Këndej dhe nga vetia 1. shohim se bashkësia $\{|\underline{\omega}_n|\}$ $(|\{\overline{\omega}_n|\})$ është monotono-rritëse (zvogëluese) dhe e kufizuar nga (sipër) poshtë. Prandaj, ekzistojnë limitet e fundme $m_iG = \lim\limits_{n\to\infty} |\underline{\omega}_n|$, $m_eG = \lim\limits_{n\to\infty} |\overline{\omega}_n|$, si dhe $m_iG \leq m_eG$.

Numri m_iG quhet **masë e brendshme dydimensionale** e Jordanit për bashkësinë G, ndërsa numri m_eG quhet **masë e jashtme dydimensionale** e Jordanit për bashkësinë G. Në vazhdim m_iG (m_eG) e quajmë vetëm masë të brendshme (të jashtme) të bashkësisë G.

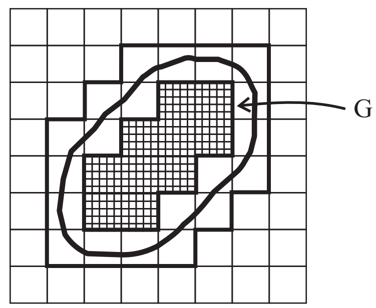


Fig. 4.1.

Bashkësia e çfarëdoshme e kufizuar $G \subset \mathbf{R^2}$ ka masë të brendshme m_iG dhe masë të jashtme m_eG të cilat e plotësojnë pabarazimin $m_iG \leq m_eG$.

Përkufizimi 4.1.2 *Nëse për bashkësinë $G \subset \mathbf{R^2}$ vlen $m_iG = m_eG = mG$, atëherë G quhet bashkësi e* **matshme sipas Jordanit,** *kurse numri mG quhet* **masë dydimensionale e Jordanit** *e bashkësisë G.*

Bashkësinë e matshme G e quajmë edhe bashkësi të **kuadrueshme.**

Tash formulojmë këtë veti të rëndësishme të figurës σ.

5. Figura $\sigma \subset \mathbf{R^2}$ (e cila përbëhet nga drejtkëndëshat me brinjë paralele me boshtet koordinative) është bashkësi e matshme sipas Jordanit.

Vërtetimi është i menjëhershëm nëse marrim parasysh se syprina e figurës σ mund të llogaritet me integralin e caktuar.

Në vazhdim do të vërtetojmë disa barazime që paraqesin përkufizime ekuivalente të masës së brendshme dhe asaj të jashtme të bashkësisë së kufizuar G.

6. $(a) m_iG = \lim_{N\to\infty} |\underline{\omega}_N(G)| = \sup_N |\underline{\omega}_N(G)| = \sup_{\sigma_R \subset G} |\sigma_R| = \sup_{\sigma \subset G} |\sigma|$;
$(b) \quad m_eG = \lim_{N\to\infty} |\overline{\omega}_N(G)| = \inf_N |\overline{\omega}_N(G)| = \inf_{\sigma_R \supset G} |\sigma_R| = \inf_{\sigma \supset G} |\sigma|$.

Tregojmë vetëm barazimet (a), sepse ato (b) tregohen në mënyrë analoge. Barazimi i parë në (a) është vetë përkufizimi i masës m_iG. Meqë vargu $\{|\underline{\omega}_N(G)|\}$ është rritës marrim $\lim\limits_{N\to\infty} |\underline{\omega}_N(G)| = \sup\limits_N |\underline{\omega}_N(G)|$, d.m.th. u tregua edhe barazimi i dytë.

Bashkësia $\underline{\omega}_N(G)$ është njëherësh ndonjë figurë σ_R, kurse σ_R është ndonjë σ, prandaj:

$$\sup_N |\underline{\omega}_N(G)| \leq \sup_{\sigma_R \subset G} |\sigma_R| \leq \sup_{\sigma \subset G} |\sigma|. \tag{1}$$

Nga ana tjetër, nëse $\sigma \subset G$ është figurë e çfarëdoshme dhe $\varepsilon > 0$, atëherë nga matshmëria e figurës σ dhe dy barazimet e para të (a) gjejmë:

$$|\sigma| = m_i(\sigma) = \sup_N |\underline{\omega}_N(\sigma)|\,.$$

Këndej rrjedh se ekziston N ashtu që:

$$|\underline{\omega}_N(\sigma)| > |\sigma| - \varepsilon,$$

ose:

$$|\sigma| < |\underline{\omega}_N(\sigma)| + \varepsilon \leq |\underline{\omega}_N(G)| + \varepsilon \leq m_i G + \varepsilon.$$

Prandaj:

$$\sup_{\sigma \subset G} |\sigma| \leq m_i G + \varepsilon$$

dhe, meqë ε është i çfarëdoshëm, gjejmë:

$$\sup_{\sigma \subset G} |\sigma| \leq m_i G. \tag{2}$$

Nga (1) dhe (2) rrjedh se vërtetimi i relacionit (a) u kompletua.

Barazimi i fundit i (a) tregon se **masa e brendshme** $m_i G$ është invariante ndaj çdo sistemi të koordinatave, d.m.th. ajo nuk varet nga sistemi koordinativ në të cilin shqyrtohet.

Tash japim një rrjedhim të relacioneve (a) e (b).

Lema 4.1.1 *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që bashkësia G të jetë e matshme është që për çdo $\varepsilon > 0$ të ekzistojnë figurat $\underline{\sigma}$ e $\overline{\sigma}$ ($\underline{\sigma} \subset G \subset \overline{\sigma}$) të tilla që $|\overline{\sigma}| - |\underline{\sigma}| < \varepsilon$.*

Vërtetimi. Supozojmë së pari se bashkësia G është e matshme dhe R sistemi i dhënë koordinativ. Nga përkufizimi i masës së bashkësisë G ($mG = \sup\limits_{\sigma_R \subset G} |\sigma_R| = \inf\limits_{\sigma_R \supset G} |\sigma_R|$) rrjedh ekzistenca e figurave $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_R \subset G$ dhe $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}_R \supset G$, ashtu që:

$$mG - \frac{\varepsilon}{2} < |\underline{\sigma}| \leq |\overline{\sigma}| < mG + \frac{\varepsilon}{2},$$

d.m.th. $|\overline{\sigma}| - |\underline{\sigma}| < \varepsilon$, ku ε është i çfarëdoshëm.

Anasjelltas, nga supozimi se $\underline{\sigma} \subset G \subset \overline{\sigma}$ rrjedh se:

$$|\underline{\sigma}| \leq m_i G \leq m_e G \leq |\overline{\sigma}|.$$

Këndej dhe nga fakti se $|\overline{\sigma}| - |\underline{\sigma}| < \varepsilon$, fitojmë:

$$m_e G - m_i G < \varepsilon.$$

Tash, meqë ε është i çfarëdoshëm, fitojmë:

$$m_e G = m_i G.$$

Lema u vërtetua.

Nga lema 4.1.1 rrjedh se bashkësia e matshme është e kufizuar.

Lema 4.1.2 *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që bashkësia G të jetë e matshme sipas Jordanit është që kufiri i saj ∂G të ketë masën plane të Jordanit të barabartë me zero, d.m.th. për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet figura σ_0 e cila përfshin kufirin ∂G, që ka masën $|\sigma_0| < \varepsilon$.*

Vërtetimi. Supozojmë se bashkësia G është e matshme. Atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ (shih fig. 4.1.) gjenden dy figura $\sigma' = \sigma'_R$ dhe $\sigma'' = \sigma''_R$, të tilla që $\sigma' \subset G \subset \sigma''$ dhe $|\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon$. Mund të konsiderohet që pikat e kufirit të bashkësisë G nuk gjenden ne kufirin e σ'' e as të σ'. Në të kundërtën, figura σ'' rritet kurse σ' zvogëlohet në drejtim të boshteve Ox e Oy ashtu që pabarazimi i mësipërm të mbetet i vërtetë. Atëherë është e qartë se:

$$\partial G \subset \sigma'' - \sigma' \subset \overline{\sigma'' - \sigma'} = \sigma_0$$

dhe:

$$|\sigma_0| = |\overline{\sigma'' - \sigma'}| = |\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon,$$

d.m.th. gjetëm figurën σ_0 të ∂G që ka syprinën më të vogël se ε.

Anasjelltas, supozojmë se për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet figura $\sigma_0 = \sigma_R^0$ e cila mbulon kufirin ∂G (shih fig. 4.1), ashtu që $|\sigma_0| < \varepsilon$. Pa kufizim përgjithësimi mund të supozohet se $\partial G \cap \partial\sigma_0 = \emptyset$.

Shënojmë $\sigma'' = G \cup \sigma_0$ dhe $\sigma' = \overline{G - \sigma_0}$. Atëherë shohim se σ' e σ'' janë figura (shih fig. 4.1.) dhe se $\sigma' = \sigma'_R$, $\sigma'' = \sigma''_R$, $\sigma' \subset G \subset \sigma''$, $\overline{\sigma'' - \sigma'} = \sigma_0$ dhe $|\sigma''| - |\sigma'| = |\sigma_0| < \varepsilon$. Këndej, sipas lemës 4.1.1 rrjedh se bashkësia G është e matshme.

Lema 4.1.3 *Në qoftë se G është bashkësi me vetinë $mG = 0$ dhe nëse $G_1 \subset G$ atëherë $mG_1 = 0$.*

Vërtetimi. Nga $mG = m_e G = \lim_{N\to\infty} |\overline{\omega}_N(G)| = 0$, rrjedh se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri N_0, d.m.th. figura $\overline{\omega}_{N_0}(G) = \sigma_R \supset G$, ashtu që $|\sigma_R| < \varepsilon$. Këndej dhe nga supozimi se $G_1 \subset G$ rrjedh se $mG_1 = 0$.

Lema 4.1.4 *Në qoftë se $mG_1 = 0$, $mG_2 = 0$ atëherë $m(G_1 \cup G_2) = 0$, ku G_1 e G_2 janë dy bashkësi (rrafshe) të çfarëdoshme.*

Vërtetimi. Nga $mG_1 = 0$, $mG_2 = 0$, rrjedh se për çdo $\varepsilon > 0$ ekzistojnë figurat σ'_R e σ''_R të tilla që $\sigma'_R \supset G_1$, $\sigma''_R \supset G_2$ dhe që $|\sigma'_R| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\sigma''_R| < \frac{\varepsilon}{2}$. Atëherë, sipas vetisë 2, për figurën $\sigma_R = \sigma'_R \cup \sigma''_R$ vlen:

$$|\sigma_R| \le |\sigma'_R| + |\sigma''_R| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d.m.th. $m\sigma_R = 0$. Tash, sipas lemës 4.1.3, dhe meqë $\sigma_R \supset G_1 \cup G_2$, fitojmë:

$$m(G_1 \cup G_2) = 0.$$

Teorema 4.1.1 *Le të jenë bashkësitë G_1 e G_2 të matshme sipas Jordanit. Atëherë edhe unioni, prerja e ndryshimi i tyre janë bashkësi të matshme sipas Jordanit.*

Vërtetimi. Lehtë tregohet se:

$$\begin{aligned} &\partial(G_1 \cup G_2) \subset \partial G_1 \cup \partial G_2, \\ &\partial(G_1 \cap G_2) \subset \partial G_1 \cup \partial G_2, \\ &\partial(G_1 \setminus G_2) \subset \partial G_1 \cup \partial G_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Meqenëse G_1 e G_2 janë të matshme, atëherë sipas lemës 1.2. rrjedh se $m\partial G_1 = 0, m\partial G_2 = 0$. Tash, nga relacionet (3) dhe nga lemat 4.1.3 e 4.1.4, shohim se $m\partial(G_1 \cup G_2) = 0,\ m\partial(G_1 \cap G_2) = 0$ dhe $m\partial(G_1 \backslash G_2) = 0$. Duke përdorur sërish lemën 4.1.2 fitojmë pohimin e teoremës 4.1.1.

Vërejtje. Teorema 4.1.1 mbetet e vërtetë për union e prerje edhe në rastin kur kemi numër të fundmë bashkësish.

Lema 4.1.5 *Në qoftë se bashkësinë G, të matshme sipas Jordanit, e ndajmë me lakoren (në veçanti me drejtëzën) L e cila ka masën e Jordanit zero, në dy pjesë G_1 e G_2, atëherë secila pjesë ndarëse është e matshme sipas Jordanit.*

Vërtetimi. Është e qartë se:

$$\partial(G_1) \subset \partial(G) \cup L,\ \partial(G_2) \subset \partial(G) \cup L.$$

Tash nga fakti se $m\partial G = 0,\ mL = 0$ dhe nga lemat 4.1.3 e 4.1.4, rrjedh se $m\partial(G_1) = 0,\ m\partial(G_2) = 0$, që, sipas lemës 4.1.2, konstatojmë se G_1 e G_2 janë të matshme.

Vërejtje. Nga lema 4.1.5 rrjedh se nëse G është bashkësi e matshme sipas Jordanit, atëherë cilado rrjetë S_N (e lidhur me cilindo nga sistemet koordinative R) e ndan bashkësinë e matshme G në pjesë të cilat janë të matshme sipas Jordanit.

Japim në fund edhe një veti evidente të figurës σ.

6. Me translatimin ose rrotullimin e figurës σ në $\mathbf{R^2}$ fitojmë figurën σ_* dhe $|\sigma| = |\sigma_*|$.

Lema 4.1.6 *Në qoftë se G_* është bashkësi e fituar nga bashkësia e matshme $G \subset \mathbf{R^2}$ me translatimin ose rrotullimin e saj në $\mathbf{R^2}$, atëherë G_* është e matshme dhe $mG = mG_*$.*

Vërtetimi. Tregojmë së pari se G_* është e matshme. Meqë G është e matshme, atëherë sipas lemës 1.1, rrjedh se ekzistojnë figurat σ' e σ'' ashtu që $\sigma' \subset G \subset \sigma''$ dhe $|\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon$. Tash duke marrë parasysh vetinë 6. dhe faktin se relacioni i përfshirjes së bashkësive ruhet pas translatimit ose rrotullimit të tyre, fitojmë:

$$\sigma'_* \subset G_* \subset \sigma''_* \text{ e } |\sigma'_*| - |\sigma''_*| < \varepsilon,$$

(σ'_* e σ''_* janë figurat e fituara përkatësisht nga σ' e σ'' pas translatimit ose rrotullimit). Kjo tregon se (lema 4.1.1) G_* është e matshme.

Që të tregohet pjesa e dytë e lemës merret parasysh barazimi $mG = m_eG = \inf\limits_{\sigma \supset G} |\sigma|$. Tash meqë $|\sigma| = |\sigma_*|$ dhe $\sigma_* \supset G_*$ fitojmë $mG = mG_*$.

Në vazhdim tregojmë vetinë aditive të masës së Jordanit.

Teorema 4.1.2 *Në qoftë se bashkësitë G_1 e G_2 janë të matshme sipas Jordanit dhe nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta atëherë:*

$$m(G_1 \cup G_2) = mG_1 + mG_2. \tag{4}$$

Vërtetimi. Sipas Teoremës 4.1.1 shohim se $G_1 \cup G_2$ është bashkësi e matshme sipas Jordanit.

Le të jetë $\varepsilon > 0$. Sipas supozimit dhe barazimeve (a) e (b) të 6. ekzistojnë figurat $\sigma_1' = \sigma_{1,\ R}'$, $\sigma_1'' = \sigma_{1,R}''$, $\sigma_2' = \sigma_{2,R}'$, $\sigma_2'' = \sigma_{2,R}''$, ashtu që:

$$\sigma_1' \subset G_1 \subset \sigma_1'',\ \sigma_2' \subset G_2 \subset \sigma_2'',$$

$$mG_1 - \varepsilon < |\sigma_1'| < |\sigma_1''| < mG_1 + \varepsilon,\ mG_2 - \varepsilon < |\sigma_2'| < |\sigma_2''| < mG_2 + \varepsilon. \quad (5)$$

Shënojmë $\sigma' = \sigma_1' \cup \sigma_2'$, $\sigma'' = \sigma_1'' \cup \sigma_2''$. Është evidente se σ' dhe σ'' janë figura dhe se

$$\sigma' \subset G_1 \cup G_2 \subset \sigma'',$$

si dhe:

$$|\sigma''| \leq |\sigma_1''| + |\sigma_2''|,\ |\sigma'| = |\sigma_1'| + |\sigma_2'|. \quad (6)$$

Në shprehjen e dytë të (6) është shenja baras, sepse, meqë G_1 e G_2 nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta, atëherë edhe σ_1' e σ_2' kanë këtë veti.

Tash nga relacionet (5) e (6) dhe nga fakti se $m_iX \leq m_eX$ për çdo bashkësi X, fitojmë:

$$(mG_1 - \varepsilon) + (mG_2 - \varepsilon) < |\sigma_1'| + |\sigma_2'| = |\sigma'| \leq m_i(G_1 \cup G_2) \leq$$

$$\leq m_e(G_1 \cup G_2) \leq |\sigma''| \leq |\sigma_1''| + |\sigma_2''| < (mG_1 + \varepsilon) + (mG_2 + \varepsilon),$$

prej nga, në saje të arbitrarizmit të numrit ε, shohim se ka vend barazimi (4).

Vërejtje. Teorema 4.1.2. mbetet e vërtetë edhe kur kemi numër të fundmë bashkësish të matshme të cilat nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta.

Teorema 4.1.3 *Në qoftë se G_1 dhe G_2 janë të matshme sipas Jordanit dhe $G_1 \subset G_2$ atëherë:*

$$m(G_2 \backslash G_1) = mG_2 - mG_1. \quad (7)$$

Vërtetimi. Matshmëria e bashkësisë $G_2 \backslash G_1$ u tregua në teoremën 4.1.1. Tash $G_2 = G_1 \cup (G_2 \backslash G_1)$, dhe meqë $G_1 \cap (G_2 \backslash G_1) = \emptyset$, sipas teoremës 4.1.2, fitojmë:

$$mG_2 = m(G_1 \cup (G_2 \backslash G_1)) = mG_1 + m(G_2 \backslash G_1),$$

prej nga marrim barazimin (7).

4.1.2 Shembuj të rëndësishëm të bashkësive të kuadrueshme sipas Jordanit

Le të jetë $f(x)$ funksioni jonegativ dhe i integrueshëm në segmentin $[a, b]$. Me Ω shënojmë sipërfaqen trapeze vijëpërkulët të kufizuar me drejtëzat $x = a, x = b, y = 0$ dhe grafikun e funksionit $f(x)$.

Teorema 4.1.4 *Bashkësia Ω është e matshme dhe masa e saj (rrafshe) është:*

$$m\Omega = \int_a^b f(x)dx = I. \tag{1}$$

Vërtetimi. Le të jenë:

$$s(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \triangle x_i, \quad S(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \triangle x_i$$

shuma e poshtme përkatësisht e sipërme e Darbus, që i përgjigjen një ndarjeje të segmentit $[a, b]$. Meqë f është i integrueshëm në $[a, b]$ atëherë:

$$\sup_{s^*(f)\subset\Omega}\{s(f)\} = \inf_{S^*(f)\supset\Omega}\{S(f)\} = I,$$

ku $s^*(f)$ e $S^*(f)$ janë "figura të shkallëzuara" masa e të cilave është $s(f)$ përkatësisht $S(f)$. Prandaj, sipas përkufizimit (shih (a) e (b) të 6) të masës kemi:

$$m_i\Omega = m_e\Omega = m\Omega = I.$$

d.m.th. u tregua relacioni (1).

Teorema 4.1.5 *Lakorja (rrafshe) e vazhdueshme Γ në rrafshin Oxy e cila projektohet në mënyrë biunivoke në segmentin $[a, b]$ të ndonjë drejtëze L, është bashkësi pikash që ka masën dydimensionale zero.*

Vërtetimi. Mund të marrim që lakorja Γ gjendet në njërën anë të drejtëzës L (sepse nëse nuk është ashtu atëherë marrim drejtëzën tjetër paralele me L që plotëson kushtin në fjalë). Vizatojmë sistemin koordinativ kënddrejtë Oxy ashtu që boshti Ox përputhet me drejtëzën L. Atëherë Γ do të jetë grafiku i ndonjë funksioni të njëvlershëm $f(x)$ në segmentin $[a, b]$.

Bashkësia Ω e përkufizuar si në teoremën 4.1.4 (në lidhje me funksionin f) është e matshme prandaj (shih lemën 4.1.2) $m\partial(\Omega) = 0$. Meqë $\Gamma \subset \partial(\Omega)$ atëherë (sipas lemës 4.1.3) fitojmë $m\Gamma = 0$.

Teorema 4.1.6 *Në qoftë se konturi i një bashkësie rrafshe të kufizuar G ndahet në një numër të fundmë pjesësh, që u përkasin lakoreve të vazhdueshme, dhe të cilat projektohen në boshtet koordinative në mënyrë biunivoke, atëherë G është e matshme.*

Vërtetimi. Meqë konturi i bashkësisë G përbëhet nga një numër i fundmë lakoresh që kanë masën zero atëherë $m\partial(G) = 0$, d.m.th. G është e matshme.

Nuk duhet menduar se çdo lakore rrafshe e vazhdueshme ka masën zero. Nga Peano është treguar se mund të përkufizohen funksione të vazhdueshme:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{2}$$

ashtu që me rritjen e vazhdueshme të parametrit t nga $t = 0$ në $t = 1$ pika $(\varphi(t), \psi(t))$ përshkruan të gjitha pikat e katrorit $0 \leq x,\ y \leq 1$, duke filluar nga pika (0, 0) e duke mbaruar në pikën $(1, 1)$. Është e qartë se lakorja e cila paraqitet me ekuacionet e tilla (2) nuk e ka masën dydimensionale zero.

Ka vend ky rezultat:

Teorema 4.1.7 *Çdo lakore rrafshe e rektifikueshme ka masën zero.*

Vërtetimi. Le të jetë Γ lakore rrafshe e rektifikueshme dhe le të jetë S gjatësia e saj. Pastaj, le të jetë:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a, b],$$

ekuacioni i lakores Γ në trajtë parametrike. Lakoren Γ e ndajmë ne anë të pikave $(\varphi(t_i), \psi(t_i))$, $t_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $t_0 = a$, $t_m = b$, në m pjesë me gjatësi të barabarta. Atëherë, pjesa e i-të e ndarjes Γ_i paraqitet me:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [t_{i-1}, t_i],\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

dhe ka gjatësinë $\dfrac{S}{m}$.

Me K_i shënojmë qarkun e mbyllur me qendër në pikën $(\varphi(t_{i-1}),\ \psi(t_{i-1}))$ e me rreze $\frac{S}{m}$. Shohim se $\Gamma_i \subset K_i$, $i = 1, \ldots, m$, prandaj vlen përfshirja:

$$\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{m} K_i.$$

Këndej dhe sipas Vërejtjes pas teoremës 4.1.1:

$$m\Gamma \leq \sum_{i=1}^{m} mK_i. \tag{3}$$

Por $mK_i = \pi \left(\dfrac{S}{m}\right)^2$, prandaj, nga (3), fitojmë:

$$m\Gamma \leq \pi \frac{S^2}{m^2} \cdot m = \pi \frac{S^2}{m}. \tag{4}$$

Meqë ana e majtë e pabarazimit (4) nuk varet nga m kurse e djathta tenton në zero kur $m \to \infty$, fitojmë $m\Gamma = 0$. Teorema u vërtetua.

Duke marrë parasysh se lakorja e lëmueshme (pra edhe pjesë-pjesë e lëmueshme) $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$, ku $\varphi'(t)$ e $\psi'(t)$ janë të vazhdueshme në $[a, b]$ dhe $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$, është e rektifikueshme (shih teoremën 1. fq. 249, [10](1)) si dhe teoremën 4.1.7, fitojmë këtë rezultat:

Rrjedhimi 4.1.1 Lakorja rrafshe e lëmueshme (pjesë-pjesë e lëmueshme) ka masën zero.

4.1.3 Përkufizimi i integralit të dyfishtë

Le të jenë $D \subset \mathbf{R^2}$ një zonë e matshme, masën e të cilës po e shënojmë me $\triangle$. Zonën D e ndajmë në n zona të matshme $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$, të cilat nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta. Atëherë (shih vërejtjen pas teoremës 1.2.) kemi $m\triangle = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \triangle_i$ ku $\triangle_i = mD_i,\ i = 0, \ldots, n-1$. Sistemin $\{D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}\}$ të cilin e shënojmë me $\tau = \{D_i\}_{i=0}^{n-1}$ do ta quajmë **ndarje** të bashkësisë D.

Për thjeshtësi shkrimi shpesh në vend $\{D_i\}_{i=0}^{n-1}$ do të shkruajmë vetëm $\{D_i\}$.

Për ndarjen $\tau' = \{D'_j\}$ të bashkësisë së matshme D thuhet se është **më fine** se ndarja $\tau = \{D_i\}$ e po asaj bashkësie nëse për çdo element $D'_j \in \tau'$ ekziston elementi $D_i \in \tau$ ashtu që $D'_j \subset D_i$. Në këtë rast shkruajmë $\tau' \succ \tau$ ose $\tau \prec \tau'$.

Lehtë shihet se për ndarjet vlejnë këto veti:

1. Në qoftë se $\tau \prec \tau'$ dhe $\tau' \prec \tau''$ atëherë $\tau \prec \tau''$.

2. Për çdo dy ndarje τ' e τ'' të zonës së matshme D ekziston ndarja e saj τ ashtu që $\tau \succ \tau'$ dhe $\tau \succ \tau''$.

Përkufizimi 4.1.3 *Le të jetë $f : D \to \mathbf{R}$, $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R^2}$, funksion i përkufizuar në zonën e matshme D dhe $\tau = \{D_i\}_{i=0}^{n-1}$ një ndarje e asaj zone. Çdo shumë të formës:*

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f;\ \xi,\ \eta) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\triangle_i,$$

ku $(\xi_i, \eta_i) \in D_i,\ i = 0, \ldots, n-1$, quhet **shumë integrale** *e funksionit f.*

Përkufizimi 4.1.4 *Thuhet se funksioni f është i* **integrueshëm** *në zonën e matshme $D \subset \mathbf{R^2}$, nëse ekziston limiti i fundmë:*

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau, \tag{$*$}$$

ku λ_τ është më i madhi nga diametrat e zonave D_i, d.m.th. $\lambda_\tau = \max\limits_i \{d(D_i)\}$.

Limiti $(*)$ quhet **integral i dyfishtë** *i funksionit f në zonën D dhe shënohet:*

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy \text{ ose } \iint\limits_D f(x, y)dD.$$

Bashkësia D quhet **zona e integrimit,** kurse f **funksion nënintegral.**

Limitin (1), në këtë formë, e hasim për herë të parë prandaj, në vazhdim, japim përkufizimin e përpiktë të tij.

Përkufizimi 4.1.5 *Numri $I(= \lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau)$ quhet* **integral i dyfishtë** *i funksionit f sipas zonës së matshme D në qoftë se për çdo varg $\{\tau_m\}$ të ndarjeve të asaj* *bashkësie, të tillë që* $\lambda_{\tau_m} \to 0$ *kur* $m \to \infty$ *dhe çdo pikë* $(\xi_i^m,\ \eta_i^m) \in D_i^m,\ m = 1, 2, \ldots,$ *vlen barazimi:*

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_{\tau_m}(f;\ \xi^m, \eta^m) = I.$$

Si limiti i funksionit që jepet me dy përkufizime ekuivalente (me "gjuhën e vargjeve " dhe me "gjuhën $(\varepsilon - \delta)$") po ashtu edhe për integralin e dyfishtë mund të marrim edhe këtë përkufizim:

Përkufizimi 4.1.6 *Numri* I *quhet* **integral i dyfishtë** *i funksionit* f *sipas zonës së matshme* D*, në qoftë se për çdo* $\varepsilon > 0$ *ekziston numri* $\delta(\varepsilon) > 0$ *i tillë që për çdo ndarje* $\tau = \{D_i\}$ *të zonës* D *me vetinë* $\lambda_\tau < \delta$ *dhe çdo pikë* $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ *të vlej pabarazimi* $|\,\sigma_\tau - I\,| < \varepsilon$.

Detyrë. Të tregohet se përkufizimet 4.1.5 e 4.1.6 janë ekuivalente.

Zgjidhja: Tregojmë së pari se nga $P.4.1.6 \Rightarrow P.4.1.5$.

Le të jetë $\{\tau'_m\}$ varg i çfarëdoshëm i ndarjeve të zonës D që ka vetinë $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_{\tau'_m} = 0$. Tregojmë se $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_{\tau'_m}(f; \xi^m, \eta^m) = I$. Nga $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_{\tau'_m} = 0$ shohim se për $\delta > 0$ (që figuron në $P.1.6$) ekziston numri natyral m_0 ashtu që $\lambda_{\tau'_m} < \delta,\ \ \forall m > m_0$. Le të jetë $(\xi_i^m, \eta_i^m) \in D_i^m$ pikë e çfarëdoshme e zonës D_i^m d.m.th. zonës së i-të që i takon ndarjeve nga vargu $\{\tau'_m\}$. Formojmë shumën:

$$\sigma_{\tau'_m}(f; \xi^m, \eta^m) = \sum_{i=1}^{n-1} (f; \xi^m, \eta^m)\Delta_i^m,$$

ku $\Delta_i^m = mD_i^m$. Atëherë, nga $P.1.6$, rrjedh $|\sigma_{\tau'_m} - I| < \varepsilon,\ m > m_0$, çka synuam të tregojmë.

Tash tregojmë $P.4.1.5 \Rightarrow P.4.1.6$.

Supozojmë të kundërtën, d.m.th.:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists\, \tau = \{D_i\}_{i=0}^{n-1};\ \ \lambda_\tau < \delta \Rightarrow |\,\sigma_\tau - I\,| \geq \varepsilon_0.$$

Le të jetë $\delta = \frac{1}{m}$. Atëherë:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{për } m = 1 & \exists \tau_1 = \{D_i^1\}_{i=0}^{n-1}; & \lambda_{\tau_1} < 1 \Rightarrow |\sigma_{\tau_1} - I| \geq \varepsilon_0; \\
\text{për } m = 2 & \exists \tau_2 = \{D_i^2\}_{i=0}^{n-1}; & \lambda_{\tau_2} < \frac{1}{2} \Rightarrow |\sigma_{\tau_2} - I| \geq \varepsilon_0; \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{për } m = (= m) & \exists \tau_2 = \{D_i^m\}_{i=0}^{n-1}; & \lambda_{\tau_2} < \frac{1}{m} \Rightarrow |\sigma_{\tau_m} - I| \geq \varepsilon_0; \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right\} \quad (*)$$

Vërejmë se $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_{\tau_m} = 0$. Atëherë, sipas $P.1.5$, rrjedh se për çdo $(\xi_i^m, \eta_i^m) \in D_i^m,\ m = 1, 2, \cdots$, vlen $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_{\lambda_{\tau_m}} = I$. Prandaj:

$$\varepsilon_0 > 0\ \ \exists\, m_0\ \ \forall m > m_0 \Rightarrow |\,\sigma_{\tau_m} - I\,| < \varepsilon_0$$

që është në kundërshtim me pohimin e mësipërm ($*$).

Vërejtje 1. Duke marrë parasysh atë që u tha në fillim të këtij kapitulli, në rastin kur $f(x,y) \geq 0$, integrali i dyfishtë (nëse ekziston) i atij funksioni është i barabartë me vëllimin e trupit cilindrik që ka bazën D, ,,bazën" e sipërme $z = f(x,y)$ dhe përftueset paralele me boshtin Oz.

Vërejtje 2. Nga përkufizimi i integralit të dyfishtë rrjedh se

$$\iint\limits_D dx\,dy = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i = \Delta = m\,D.$$

4.1.4 Shumat e sipërme dhe të poshtme integrale. Ekzistenca e integralit të dyfishtë

Teorema 4.1.8 *Funksioni $f(x,y)$ i integrueshëm në zonën e matshme $D \subset \mathbf{R^2}$ është i kufizuar në të.*

Vërtetimi është krejtësisht analog si te teorema përkatëse në rastin njëdimensional.

Në vazhdim të kësaj pike supozojmë që funksioni $f(x,y)$ është i kufizuar në zonën e matshme D. Atëherë, si edhe në rastin njëdimensional, ka kuptim të shqyrtohen shumat e sipërme S_τ dhe të poshtme s_τ integrale (të Darbus), përkufizimi i të cilave është:

Përkufizimi 4.1.7 *Le të jetë $\tau = \{D_i\}_{i=0}^{n-1}$ një ndarje e zonës D,*

$$m_i = \inf_{(x,y)\in D_i} \{f(x,y)\},$$

dhe

$$M_i = \sup_{(x,y)\in D_i} \{f(x,y)\}.$$

Shumat:

$$s_\tau = \sum_{i-0}^{n=1} m_i \cdot \Delta_i, \quad S_\tau = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot \Delta_i, \quad (\Delta_i = mD_i),$$

quhen, përkatësisht, **shuma e poshtme dhe e sipërme integrale** *(ose të* **Darbus***) për funksionin $f(x,y)$.*

Për çdo pikë $P_i(x_i,y_i) \in D_i \in \tau$ vlen relacioni $m_i \leq f(x_i,y_i) \leq M_i$, $i = 0,\cdots,n-1$. Prandaj, meqë $\Delta_i \geq 0$ kemi:

$$m_i\Delta_i \leq f(x_i,y_i)\Delta_i \leq M_i\Delta_i,$$

prej nga, duke shumuar për $i = 0,\cdots,n-1$, gjejmë:

$$s_\tau \leq \sigma_\tau \leq S_\tau.$$

Kështu u vërtetua:

Vetia 1. Çdo shumë integrale (pavarësisht nga zgjedhja e pikave $P_i(x_i, y_i)$) e funksionit $f(x, y)$ që i përgjigjet ndarjes τ, gjendet në mes të shumës së poshtme dhe asaj të sipërme të atij funksioni të cilat u korrespondojnë po asaj ndarjeje.

Në mënyrë analoge, si në rastin njëdimensional, mund të vërtetohen këto pohime:

Vetia 2. Në qoftë se ndarja τ' është më fine se ndarje τ (d.m.th. $\tau' > \tau$) atëherë kanë vend pabarazimet:

$$s_\tau \leq s_{\tau'}, \; S_{\tau'} \leq S_\tau$$

Vetia 3. Çdo shumë e poshtme është jo më e madhe se çdo shumë e sipërme, pavarësisht se ato mund t'u përkasin ndarjeve të ndryshme.

Meqenëse shumat e poshtme formojnë bashkësi të kufizuar nga sipër, e të sipërmet bashkësi të kufizuar nga poshtë, si në rastin e funksionit me një ndryshore, përcaktohen:

$$\underline{I} = \sup_{\tau}\{s_\tau\}, \quad \overline{I} = \inf_{\tau}\{S_\tau\}$$

për të cilat ka vend pabarazimi:

$$\underline{I} \leq \overline{I}.$$

Numrat $\underline{I}$ e $\overline{I}$ quhen **integrali i poshtëm** përkatësisht **i sipërm** për funksionin $f(x, y)$ në D.

Prandaj, mund të konstatohet se për funksionin e kufizuar në D ekziston integrali i sipërm dhe ai i poshtëm në D.

Më në fund theksojmë se ka vend teorema:

Teorema 4.1.9 *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që funksioni $z = f(x, y)$, i kufizuar në zonën e matshme D, të jetë i integrueshëm në të është që:*

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{1}$$

Nëse plotësohen këto kushte atëherë:

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

Kushti (1) është ekuivalent me kushtin:

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} \omega(f; D_i)\Delta_i = 0 \tag{2}$$

ku $\omega(f;D_i)$ është luhatja e funksionit f në zonën D_i që i përket ndarjes τ të bashkësisë D, d.m.th.:

$$\omega\,(f;D_i) = \sup_{(x,y)\in D_i}\{f(x,y)\} - \inf_{(x,y)\in D_i}\{f(x,y)\} = \sup_{(x',y'),(x'',y'')\in D_i}\{|f(x',y') - f(x'',y'')|\}$$

Vërtetimi i teoremës 4.1.9 (teoremës mbi ekzistencën e integralit të funksionit me dy ndryshore) bëhet në mënyrë analoge si në rastin njëdimensional.

Detyrë. Të jepet përkufizimi i limiteve (1) e (2).

Në vazhdim, duke përdorur teoremën 4.1.9, tregojmë integrueshmërinë e disa klasave të rëndësishme të funksioneve.

Teorema 4.1.10 *Funksioni $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subseteq \mathbf{R^2}$, i vazhdueshëm në zonën e mbyllur e të matshme D është i integrueshëm në D.*

Vërtetimi. Meqë D është e matshme, atëherë (lema 4.1.1) ajo është e kufizuar. Këndej dhe nga fakti se D është e mbyllur shohim se f është uniformisht i vazhdueshëm në D. Prandaj (rrjedhimi i teoremës II. 3.8) për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet numri $\delta > 0$ që për çdo ndarje $\tau = \{D_i\}$ të zonës D të tillë që $\lambda_\tau < \delta$, luhatja $\omega(f;D)$ e funksionit f në zonën D_i, $i = 0,\cdots,n-1$, bëhet më e vogël se ε. Këndej kemi:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\omega\,(f;D_i)\,\Delta_i < \varepsilon\sum_{i=1}^{n-1}\Delta_i = \varepsilon\cdot\Delta,$$

për $\lambda_\tau < \delta$, gjë që vërteton teoremën.

Teorema 4.1.11 *Funksioni $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R^2}$ i kufizuar në bashkësinë e mbyllur e të matshme D dhe i vazhdueshëm në D, me përjashtim të një bashkësie C me masë zero, është i integrueshëm në D.*

P.sh. nëse funksioni $f(x,y)$ i kufizuar në zonën rrafshe D e cila ka konturin e lëmueshëm (shih fig. 4.2) dhe përveç kësaj është i vazhdueshëm në D, me përjashtim në pikën e izoluar Q dhe harkun e lëmueshëm γ, atëherë f është i integrueshëm në D.

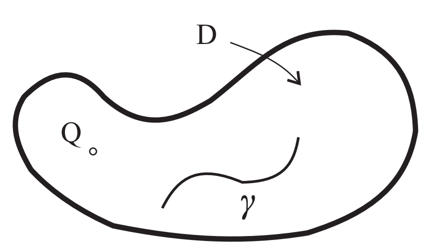


Fig. 4.2.

Vërtetimi. Le të jetë $\varepsilon > 0$ një numër i çfarëdoshëm. Meqë $mC = 0$, do të gjendet figura e hapur $\sigma \subset C$ ashtu që $|\sigma| = m\sigma < \varepsilon$. Atëherë $D\backslash\sigma$ është bashkësi e matshme (teorema 4.1.1) e mbyllur në të cilën f është funksion i vazhdueshëm, rrjedhimisht i integrueshëm. Le të jetë $\tau' = \{D_i\}_{i=0}^{n_0}$ ndarje e bashkësisë $D\backslash\sigma$ e tillë që:

$$S_{\tau'} - s_{\tau'} < \varepsilon,$$

ndërsa $\tau = \{D_i\}_{i=0}^{n_0+1}$ ndarje e bashkësisë D e tillë që $D_{n_0+1} = \overline{\sigma} \cap D$. Atëherë:

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=0}^{n_0+1} \omega\,(f; D_i)\Delta_i = \sum_{i=0}^{n_0} \omega\,(f; D_i) m(D\backslash\sigma) + \omega\,(f; D_{n_0+1}) \cdot m\,(f; D_{n_0+1}) =$$

$$= S'_\tau - s'_\tau + \omega\,(f; \overline{\sigma} \cap D)\, m\,(\overline{\sigma} \cap D),$$

d.m.th:

$$S_\tau - s_\tau = S_{\tau'} - s_{\tau'} + \omega(f; \overline{\sigma} \cap D)\, m\,(\overline{\sigma} \cap D.) \tag{3}$$

Meqë f është i kufizuar në D, ekziston konstanta K ashtu që $|f(x,y)| \leq K$ për çdo $(x,y) \in D$. Prandaj:

$$\overline{\sigma} \cap D = \sup\{\, |\, f(x',y') - f(x'',y'')\, |\, (x',y'), (x'',y'') \in \overline{\sigma} \cap D\} \leq 2K \tag{4}$$

Kështu nga $\overline{\sigma} \cap D \subset \overline{\sigma}$, shohim se :

$$m\,(f, \overline{\sigma} \cap D) \leq m\overline{\sigma} = |\, \overline{\sigma}\, | < \varepsilon. \tag{5}$$

Tash nga (3), (4) e (5) gjejmë:

$$S_\tau - s_\tau \leq S_{\tau'} - s_{\tau'} + 2Km(\overline{\sigma} \cap D) < \varepsilon + 2K\varepsilon = \eta,$$

ku η mund të merret sipas dëshirës i vogël. Kjo tregon, sipas teoremës 1.9, se f është i integrueshëm në D.

4.1.5 Vetitë e integraleve të dyfishta

Vetitë e integraleve të dyfishta formulohen njësoj me ato të integraleve të caktuar për funksionet e një ndryshoreje, prandaj ne shumicën vetëm do t'i përmendim.

1. *Në qoftë se funksionet $f(x,y)$ e $g(x,y)$ janë të integrueshëm në zonën e matshme D kurse c- konstante, atëherë funksionet:*

$$f \pm g,\ \ c \cdot f,\ \ |f|,\ \ \frac{1}{f},$$

ku $|f(x,y)| > d > 0$, janë të integrueshëm në D dhe vlejnë barazimet:

$$\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\, dx\, dy = \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)\, dx\, dy,$$

$$\iint\limits_D c\, f(x,y)\, dxdy = c \iint\limits_D f(x,y)\, dx\, dy.$$

2. *Nëse funksioni $f(x,y)$ është i integrueshëm në zonën (e matshme) $D = D_1 \cup D_2$ ku D_1 e D_2 janë të matshme dhe nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta, atëherë ai është i integrueshëm edhe në D_1 e D_2, dhe anasjelltas. Në këtë rast:*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

Kjo veti quhet **vetia aditive** e integralit.

Vërtetimi. Le të jetë $\{\tau_m\}$, $m = 1, 2, \cdots$, varg i tillë i ndarjeve të bashkësisë D ashtu që zonat D_i të mos kenë pika të brendshme të përbashkëta me konturet e zonave D_1 e D_2. Vargu i tillë i ndarjeve indukon në D_1 e D_2 vargjet e ndarjeve $\{\tau_m^1\}$ e $\{\tau_m^2\}$, përkatësisht dhe ka vend barazimi:

$$S_{\tau_m} - s_{\tau_m} = (S_{\tau_m^1} - s_{\tau_m^1}) + (S_{\tau_m^2} - s_{\tau_m^2}). \tag{2}$$

Tash nëse f është i integrueshëm në D, sipas teoremës 4.1.9. ana e majtë e barazimit (2) tenton në zero kur $m \to \infty$.Këndej, edhe secili prej mbledhësve të anës së djathtë të (2) tenton në zero. Kjo tregon, sipas po asaj teoreme, se f është i integrueshëm në D_1 e D_2. Prandaj, nga barazimi evident:

$$\sigma_{\tau_m} = \sigma_{\tau_m^1} + \sigma_{\tau_m^2},$$

pas kalimit me limit kur $m \to \infty$, fitohet barazimi (1).

Anasjelltas, le të ekzistojnë integralet e funksionit $f(x,y)$ në D_1 e D_2. Marrim vargjet e çfarëdoshme të ndarjeve $\{\tau_m^1\}(\tau_m^1 = \{D_i^{1m}\})$ e $\{\tau_m^2\}(\tau_m^2 = \{D_i^{2m}\})$ të zonave D_1 e D_2, përkatësisht, të tilla që $\lambda_{\tau_m^1} \to 0$, $\lambda_{\tau_m^2} \to 0$, kur $m \to \infty$. Le të jetë $\lambda_{\tau_m} = \max\{\lambda_{\tau_m^1},\ \lambda_{\tau_m^2}\}$. Atëherë $\{\tau_m\}$, ku $\tau_m = \{D_i^{1m}, D_i^{2m}\}$, është varg i ndarjeve të zonës D me vetinë $\lambda_{\tau_m} \to 0$ kur $m \to \infty$. Sipas supozimit kemi:

$$\lim_{m\to\infty}(S_{\tau_m^1} - s_{\tau_m^1}) = 0,\ \lim_{m\to\infty}(S_{\tau_m^2} - s_{\tau_m^2}) = 0.$$

Këndej dhe nga (2) gjejmë:

$$\lim_{m\to\infty}(S_{\tau_m} - s_{\tau_m}) = 0,$$

që tregon se f është i integrueshëm në D.

3. *Në qoftë se funksionit $f(x,y)$ të integrueshëm në D i ndryshohen vlerat në pikat e një bashkësie $E \subseteq D$ me masë zero, me kusht që ai përsëri të mbetet i kufizuar, funksioni i ri f_1 është i integrueshëm në D dhe*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f_1(x,y)\,dx\,dy.$$

Vërtetimi. Sipas kushteve edhe bashkësia $D \setminus E$ është e matshme. Prandaj f është i integrueshëm në $D \setminus E$ (vetia 2). Mirëpo, kur dihet se integrali i dyfishtë i një funksioni në zonën me masë zero është zero, gjejmë:

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_E f_1(x,y)\,dx\,dy = 0,$$

që tregon se f_1 është i integrueshëm në E. Këndej dhe meqë $f = f_1$ në $D\backslash E$, shohim se f_1 është i integrueshëm edhe në D (vetia 2), dhe:

$$\iint\limits_D f_1(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{D\backslash E}\int f_1(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_E f_1(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{D\backslash E}\int f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$$

4. *Në qoftë se $f(x,y)$ është i integrueshëm në bashkësinë e matshme D dhe $f(x,y) \geq 0$ në D, atëherë:*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0.$$

Rrjedhimi 4.1.2 Në qoftë se $f(x,y)$ dhe $g(x,y)$ janë të integrueshme në bashkësinë e matshme D dhe $f(x,y) \leq g(x,y)$ në D, atëherë:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

Kjo veti quhet **vetia e monotonisë** së integralit.

5. *Në qoftë se f është i integrueshëm në bashkësinë e matshme D, atëherë vlen pabarazimi:*

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\,dx\,dy,$$

6. *Nëse funksioni $f(x,y)$ është i integrueshëm në zonën e matshme D, dhe:*

$$m \leq f(x,y) \leq M$$

për çdo $(x,y) \in D$, atëherë:

$$m \cdot \Delta \leq \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \leq M \cdot \Delta,$$

ku Δ është masë e D.

7. *(teorema e parë mbi të mesmen). Në qoftë se funksioni $f(x,y)$ është i vazhdueshëm në bashkësinë e mbyllur, të matshme dhe të lidhur D, atëherë gjendet një pikë $(\xi,\eta)\in D$ e tillë që $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\cdot\Delta$,* ku $\Delta = m\,D$.

Vërtetimi. Meqë zona D është e kufizuar (sepse është e matshme) dhe e mbyllur, sipas teoremës së dytë të Vajershtrasit (teorema 2.3.6) funksioni f në D arrin vlerën më të madhe M dhe atë më të vogël m, d.m.th. $m \le f(x,y) \le M$, për çdo $(x,y)\in D$. Këndej, sipas vetisë 6, kemi:

$$m \le \frac{1}{\Delta}\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \le M.$$

Mirëpo, meqë D është e lidhur dhe f i vazhdueshëm në D shohim se (rrjedhimi pas teoremës II.3.7) ekziston pika $P(\xi,\eta)$ e zonës D e tillë që:

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\Delta}\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

çka synuam të tregojmë.

7'. *(teorema e dytë mbi të mesmen). Në qoftë se përveq kushteve të vetisë 7. funksioni $g(x,y)$ është i integrueshëm dhe nuk ndryshon shenjë në D, atëherë ekziston $\mu\in[m,M]$ ashtu që:*

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy = \mu\iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy,$$

ku m e M janë kufijtë e funksionit f në D.

8. *Në qoftë se funksioni $f(x,y)$ është i integrueshëm në zonën e matshme D, ka vend relacioni:*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\lambda_\tau\to 0}\sum\nolimits_b f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta_i,$$

ku simboli $\sum_b$ tregon se shumimi bëhet sipas zonave të brendshme për D (d.m.th. zonave $D_i\in\tau$ për të cilat $D_i\cap\partial D=\emptyset$).

Vërtetimi. Meqë funksioni $f(x,y)$ është i integrueshëm në zonën e matshme D atëherë për vargun $\{\tau_m\}$ të ndarjeve $\tau_m = \{D_i^m\}$ të zonës D me vetinë $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_m = 0$ vlen:

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_{\tau_m} = \iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

ku:

$$\sigma_{\tau_m} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i^m, \eta_i^m) \cdot \Delta_i^m, \;\; \Delta_i^m = mD_i^m,$$

është shuma integrale e funksionit $f(x,y)$. Elementet e ndarjes τ_m i ndajmë në të brendshëm dhe kufitare, ku D_i është e brendshme nëse $D_i \cap \partial D = \emptyset$, kurse kufitare kur $D_i \cap \partial D \neq \emptyset$. Atëherë:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i^m, \eta_i^m)\Delta_i^m = \sum\nolimits_b f(\xi_i^m, \eta_i^m) \cdot \Delta_i^m + \sum\nolimits_k f(\xi_i^m, \eta_i^m) \cdot \Delta_i^m,$$

ku $\sum_k$ tregon se shumimi bëhet sipas zonave kufitare. Pastaj, shohim se:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i^m = \sum\nolimits_b \Delta_i^m + \sum\nolimits_k \Delta_i^m$$

Duke shënuar me $\mu = \sup\{|f(x,y)|\}$ në D kemi:

$$\left|\sum\nolimits_k f(\xi_i, \eta_i)\Delta_i^m\right| \leq \mu \sum\nolimits_k \Delta_i^m = \mu \left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i^m - \sum\nolimits_b \Delta_i^m\right). \qquad (3)$$

Meqë:

$$mD = m_i D = \lim_{\lambda_{\tau_n} \to 0} \sum\nolimits_b \Delta_i^m = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i^m$$

fitojmë:

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i^m - \sum\nolimits_b \Delta_i^m\right) = 0$$

prandaj nga (3) fitojmë:

$$\lim_{m\to\infty} \sum\nolimits_k f(\xi_i^m, \eta_i^m)\Delta_i^m = 0$$

Rrjedhimisht:

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i^m, \eta_i^m)\Delta_i^m = \lim_{m\to\infty} \sum\nolimits_b f(\xi_i^m, \eta_i^m)\Delta_i^m.$$

4.1.6 Llogaritja e integralit të dyfishtë

Përkufizimi i integralit të dyfishtë në të njëjtën kohë tregon edhe rrugën e llogaritjes së tij e cila shpeshherë është mjaft e gjatë dhe e lidhur me llogaritje të ndërlikuara. Në këtë pikë paraqesim rrugët më racionale të llogaritjes së integralit të dyfishtë, duke gjetur lidhjet me integralin e zakonshëm.

a. Rasti kur zona e integrimit është drejtkëndshe

Teorema 4.1.12 *Në qoftë se për funksionin $z = f(x,y)$, të përcaktuar në drejtkëndëshin:*

$$D : \begin{cases} a \le x \le b \\ \alpha \le y \le \beta \end{cases},$$

ekziston integrali i dyfishtë:

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dy, \tag{1}$$

dhe për çdo x të fiksuar nga $[a,b]$ ekziston integrali i zakonshëm:

$$I(x) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dy, \tag{2}$$

atëherë ekziston edhe integrali:

$$\int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dy\Big]\,dx \tag{3}$$

dhe ka vend barazimi:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dy\Big]\,dx \tag{4}$$

Po cekim se shprehjen që figuron në anën e djathtë të barazimit (3) e quajmë **integral të përsëritur** të funksionit $f(x,y)$ në bashkësinë D.

Vërtetimi. Me ndihmën e pikave:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b,$$

$$\alpha = y_0 < y_1 < \ldots < y_j < \ldots < y_m = \beta$$

ndajmë segmentet $[a,b]$ e $[\alpha,\beta]$ në n, përkatësisht m pjesë. Këto ndarje indukojnë ndarjen $\tau = \{D_{ij}\}$ $(i = 0,\ldots,n-1, j = 0,\ldots,m-1)$ ku:

$$D_{ij} : \begin{cases} x_i \le x \le x_{i+1} \\ y_j \le y \le y_{j+1}, \end{cases}$$

janë pjesët ndarëse të drejtkëndëshit D (fig. 4.3).

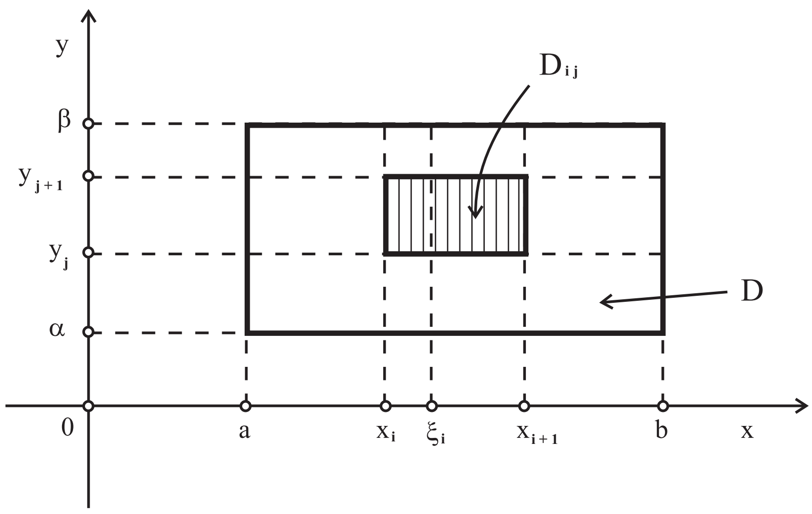


Fig. 4.3.

Le të jenë $M_{ij} = \sup\limits_{(x,y)\in D_{ij}} \{f(x,y)\}$, $m_{ij} = \inf\limits_{(x,y)\in D_{ij}} \{f(x.y)\}$, (të cilët ekzistojnë sepse f është i integrueshëm në D). Atëherë:

$$m_{ij} \leq f(x,y) \leq M_{ij},\ (x,y) \in D_{ij}.$$

Fiksojmë $x = \xi_i$ nga segmenti $[x_i, x_{i+1}]$ dhe meqë, sipas supozimit, integrali në lidhje me y ekziston kudo në $[\alpha, \beta]$, pra edhe në $[y_i, y_{i+1}]$, fitojmë:

$$m_{ij} \cdot \Delta_{y_j} \leq \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)dy \leq M_{ij} \cdot \Delta y_i \tag{5}$$

ku $\Delta y_i = y_{j+1} - y_j$. Duke shumuar (5) për j nga 0 në $m-1$ marrim:

$$\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\Delta y_j \leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\xi_i, y)dy \leq \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta y_j.$$

Pasi të humëzojmë relacionin e mësipërm me $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, shumojmë në lidhje me i nga 0 në $n-1$, dhe do të kemi:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\Delta y_j \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta y_j. \tag{6}$$

Shprehja në mes të relacionit (6) është shuma integrale e funksionit $I(x)$ në segmentin $[a,b]$ kurse shumat anësore janë shuma integrale (Darbu) për funksionin $f(x,y)$ në D në lidhje me ndarjen τ.

Me të vërtetë, nëse shënojmë $mD_{ij} = \Delta_{ij}$ kemi $\Delta x_i \cdot \Delta y_i = \Delta_{ij}$, prandaj:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_j \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij} \Delta y_j = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij} \Delta_{ij} = s_\tau$$

$$S_\tau = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij} \Delta_{ij}.$$

Kështu:

$$s_\tau \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leq S_\tau$$

dhe duke vepruar me limit kur $\lambda_\tau \to 0$ (atëherë edhe $\lambda_1 = \max\{\Delta x_i\} \to 0$) marrim:

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau = I = \lim_{\lambda_1 \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i.$$

Kjo tregon se funksioni $I(x)$ është i integrueshëm në $[a, b]$ dhe vlen barazimi (4). Teorema u vërtetua.

Vërejtje. Nëse ndryshojmë rolet e ndryshoreve dhe modifikojmë kushtet e teoremës 4.1.12 në trajtën e duhur, do të vlej barazimi:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \left[\int\limits_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Kuptohet po ashtu se kur krahas integralit (1) ekzistojnë edhe dy integralet:

$$I(x) = \int\limits_\alpha^\beta f(x, y)\, dy,\ I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$$

në $[a, b]$, $[\alpha, \beta]$, përkatësisht, ka vend formula:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \left[\int\limits_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_\alpha^\beta f(x, y) dy \right] dx. \qquad (6')$$

Kur funksioni $z = f(x, y)$ është i vazhdueshëm në D, ekzistenca e integralit (1) sigurohet nga teorema 4.1.10, ekzistenca e integraleve $I(x)$ e $I(y)$ është e qartë kurse vazhdueshmëria e tyre është treguar te integralet parametrike, prandaj në këtë rast relacioni (6') është i vërtetë.

Për lehtësi shpesh integrali i përsëritur:

$$\int\limits_a^b \left[\int\limits_\alpha^\beta f(x, y) dy \right] dx$$

shënohet:

$$\int_a^b \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dxdy$$

ose:

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy,$$

kur renditja e diferencialeve përcakton rendin e integrimit.

Shembulli 4.1.1 Të llogaritet integrali:

$$\iint_D (x+y^2)\,dxdy$$

ku $D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3\}$.

Zgjidhje:

$$I = \iint_D (x+y^2)\,dxdy = \int_0^2 dx \int_1^3 (x+y^2)\,dy.$$

Kur llogaritet $\int_1^3 (x+y^2)\,dy$ merret që x është konstante, d.m.th.:

$$\int_1^3 (x+y^2)\,dy = \left[\, xy + \frac{y^3}{3} \,\right]\Bigg|_1^3 = 2x + \frac{26}{3}.$$

Këndej kemi:

$$\iint_D (x+y^2)\,dxdy = \int_0^2 \left(2x + \frac{26}{3}\right) dx = \frac{64}{3}.$$

b. Rasti kur zona e integrimit është vijëpërkulët

Le të jetë bashkësia D e kufizuar me lakoret e vazhdueshme e të njëvlershme $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ në $[a,b]$ ($\varphi(x) \le \psi(x)$ në $[a,b]$) dhe nga drejtëzat $x = a$ e $x = b$.

Kjo bashkësi (shih fig. 4.4.) quhet **normale (e rregullt)** ndaj boshtit Ox.

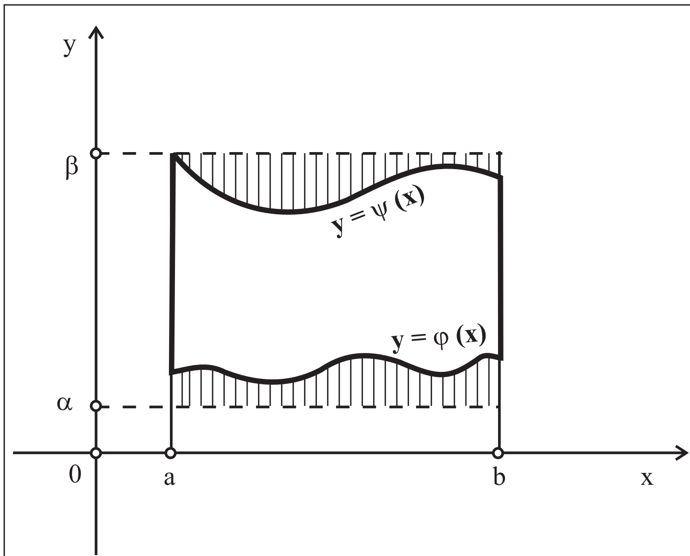


Fig. 4.4.

Teorema 4.1.13 *Në qoftë se për funksionin $f(x,y)$, të përcaktuar në zonën D, ekziston integrali i dyfishtë:*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$$

dhe për çdo $x \in [a,b]$ ekziston:

$$I(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy,$$

atëherë ekziston edhe integrali i përsëritur:

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

dhe ka vend barazimi:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\Big]\,dx. \tag{7}$$

Vërtetimi. Vërtetimi bëhet duke e kthyer këtë rast në të mëparshmin.

Marrim drejtkëndëshin:

$$K = \{(x,y)|\, a \le x \le b,\, \alpha \le y \le \beta\}$$

ku $\alpha \le \varphi(x)$ për $a \le x \le b$ dhe $\beta \ge \psi(x)$ për $a \le x \le b$ (dy numra të tillë α e β ekzistojnë, sepse funksionet $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ janë të vazhdueshme në $[a,b]$).

Ndërtojmë funksionin $f^*(x,y)$ në K si vijon:

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{për } (x,y) \in D \\ 0, & \text{për } (x,y) \in K \backslash D. \end{cases}$$

Në bashkësinë K ky funksion plotëson kushtet e teoremës 1.12. Me të vërtetë, ai është i integrueshëm në K sepse në D është i integrueshëm sipas supozimit, kurse në pjesën tjetër është zero.

Kështu:

$$\iint\limits_K f^*(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \tag{8}$$

sepse:

$$\iint\limits_K f^*(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f^*(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{K\backslash D} f^*(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

Për x të fiksuar në $[a,b]$ ekziston integrali:

$$\int\limits_\alpha^\beta f^*(x,y)dy = \int\limits_\alpha^{\varphi(x)} f^*(x,y)dy + \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^*(x,y)dy + \int\limits_{\psi(x)}^{\beta} f^*(x,y)dy,$$

sepse ekzistojnë të tria integralet e anës së djathtë. I pari dhe i treti janë zero sepse për çdo x të fiksuar nga $[a,b]$, $f^*(x,y) = 0$ për $y \in [\alpha, \varphi(x)]$ dhe $y \in [\psi(x), \beta]$. Meqë $f^*[x,y) = f(x,y)$ për $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$ kemi:

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^*(x,y)dy = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy,$$

prandaj:

$$\int\limits_\alpha^\beta f^*(x,y)dy = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \tag{9}$$

Tash, nga teorema 4.1.12 dhe nga (9) fitojmë:

$$\iint\limits_K f^*(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_\alpha^\beta f^*(x,y)dy\Big]\,dx = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\Big]\,dx.$$

Më në fund, në saje të formulës (8), fitojmë barazimin (7). Teorema u vërtetua.

Nëse bashkësia D është e formës:

$$D: \begin{cases} \alpha \leq y \leq \beta \\ \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y), \end{cases}$$

ku $\varphi_1(y)$ e $\psi_1(y)$ janë funksione të vazhdueshme e të njëvlershme në $[\alpha, \beta]$, d.m.th. zona është normale ndaj boshtit Oy (fig. 4.5), formula analoge e (7) shkruhet në formën:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \Big[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} f(x,y)dx\Big]\,dy = \int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx, \qquad (10)$$

me kusht që për çdo y të ekzistoj integrali i brendshëm i anës së djathtë të relacionit (10) në lidhje me x.

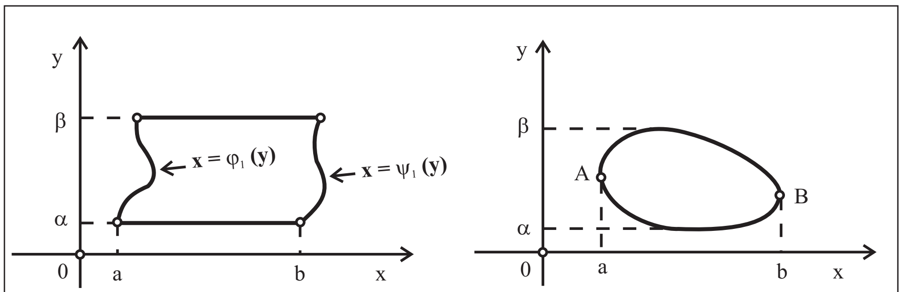


Fig. 4.5. Fig. 4.6.

Vërejtje. Në rast se drejtëzat paralele me boshtet koordinative e presin konturin e zonës D jo më shumë se në dy pika (fig. 4.6), pra bashkësia është normale ndaj dy boshteve koordinative, duke supozuar se plotësohen kushtet e tjera, kanë vend njëkohësisht formulat (7) e (10). Duke i krahasuar ato del formula:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} f(x,y)\,dx.$$

Vërejtje. Kur D nuk është normale ndaj asnjërit prej boshteve koordinative (shih fig. 4.7), e kthejmë atë në një numër të fundmë bashkësish normale për të cilat zbatohet kalimi prej integralit të dyfishtë në integral të përsëritur.

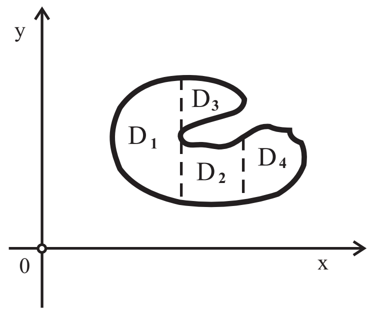


Fig. 4.7.

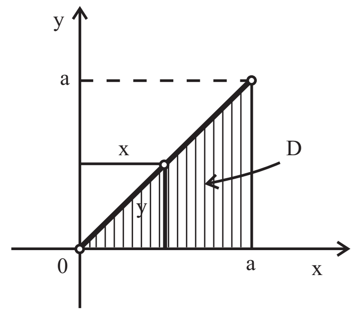


Fig. 4.8.

Shembulli 4.1.2 Të llogaritet:

$$I = \iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dxdy,$$

ku $D = \{(x,y)\,|0 \le x \le a,\, 0 \le y \le x\}$ (fig. 4.8).

Zgjidhja:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x \frac{x^2 dy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^a \left[x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right]\Big|_0^x dx = \frac{\pi}{4} \int\limits_0^a x dx = \frac{a^2\pi}{8}.$$

Integrali mund të llogaritet edhe duke e konsideruar bashkësinë D normale ndaj boshtit Oy. Kështu:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dxdy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a \frac{x^2}{x^2+y^2} dx.$$

$$\int\limits_y^a \frac{x^2}{x^2+y^2} dx = \int\limits_y^a \frac{x^2+y^2-y^2}{x^2+y^2} dx = \int\limits_y^a dx \; - \int\limits_y^a \frac{y^2}{x^2+y^2} dx =$$

$$= (a-y) - \left[y \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right]_y^a = (a-y) - y \operatorname{arctg} \frac{a}{y} + \frac{\pi}{4} y;$$

$$\int\limits_0^a dy \int\limits_y^a \frac{x^2}{x^2+y^2} dx = \frac{a^2}{2} + \frac{\pi}{8} a^2 - \int\limits_0^a y \operatorname{arctg} \frac{a}{y} dy. \tag{11}$$

$$\int\limits_0^a y \operatorname{arctg} \frac{a}{y} dy = \left[u = y, dv = \operatorname{arctg} \frac{a}{y} dy \right] = \left[y^2 \operatorname{arctg} \frac{a}{y} + \frac{a}{2} y \ln(y^2+a^2) \right]\Big|_0^a -$$

$$-\int_0^a y \operatorname{arctg}\frac{a}{y}dy - \frac{a}{2}\int_0^a \ln(a^2+y^2)\,dy, \text{d.m.th.}$$

$$\int_0^a y \operatorname{arctg}\frac{a}{y}dy = \frac{a^2\pi}{8} + \frac{a^2\ln(2a^2)}{4} - \frac{a}{4}\int_0^a \ln(a^2+y^2)\,dy. \tag{12}$$

$$\int_0^a \ln(a^2+y^2)\,dy = [u=\ln(y^2+a^2), dv = dy] = [y\ln(y^2+a^2)\Big|_0^a - 2\int_0^a \frac{y^2}{y^2+a^2}dy =$$

$$= a\,\ln(2a^2) - 2a + \frac{2\pi}{2}. \tag{13}$$

Nga (10), (12) e (13) fitojmë:

$$\int_0^a dy \int_y^a \frac{x^2}{x^2+y^2}dx = \frac{a^2\pi}{8}.$$

Prandaj:

$$\int_0^a dy \int_0^n \frac{x^2 dy}{x^2+y^2 dx} = \int_0^a dy \int_y^a \frac{x^2}{x^2+y^2 dx}.$$

Shembulli 4.1.3 Të gjendet vëllimi i elipsoidit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Zgjidhje: Meqenëse elipsoidi është simetrik ndaj rrafsheve koordinative mjafton të llogaritet vëllimi i pjesës që ndodhet në oktantin e parë.

Ekuacioni i sipërfaqes në këtë rast është:

$$z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

kurse zona D është $D = \left\{(x,y)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$. Duke e konsideruar zonën D normale sipas boshtit Ox dhe duke marrë parasysh kuptimin gjeometrik të integralit të dyfishtë, fitojmë:

$$V = 8c\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = 8c\int_0^a dx \int_0^{b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy.$$

Llogarisim integralin e brendshëm:

$$I(x) = \int_0^{b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy = \frac{1}{b}\int_0^{b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2}\,dy.$$

Duke marrë parasysh formulën:

$$\int \sqrt{a^2 - y^2}dy = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y}{a} - \frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2},$$

fitojmë:

$$I(x) = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{2}b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\arcsin\frac{y}{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}\right]\Bigg|_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} -$$

$$-\frac{y}{2}\sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}\,\Bigg|_0^{b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} =$$

$$= \frac{b}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\arcsin 1 = \frac{\pi b}{4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Këndej:

$$V = 8c\int\limits_0^a I(x)dx = 2\pi bc\int\limits_0^a\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2bc\pi\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_o^a = \frac{4abc\pi}{3}.$$

4.1.7 Zëvendësimi i ndryshoreve në integralin e dyfishtë

Le të jetë dhënë funksioni $f(x, y)$ i vazhdueshëm në bashkësinë e mbyllur dhe të matshme D. Dihet se në këtë rast ekziston:

$$I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy\,. \tag{1}$$

Krahas sistemit koordinativ kënddrejtë $0xy$ marrim edhe një sistem tjetër kënddrejtë në të cilin jepet bashkësia D dhe në të cilin këtë e shënojmë me D'. Le të jetë F pasqyrimi i dhënë me çiftin e funksioneve:

$$x = x(u, v), y = y(u, v) \tag{2}$$

të cilat janë të përcaktuara dhe të vazhdueshme së bashku me derivatet e tyre të pjesshme ne D'. Supozojmë se transformimi F pasqyron zonën D' në zonën D dhe se ky pasqyrim është biunivok. Atëherë ekziston edhe pasqyrimi i anasjelltë F^{-1} i dhënë me funksionet:

$$u = u(x, y), v = v(x, y). \tag{3}$$

Këto lloje pasqyrimesh janë shqyrtuar hollësisht në §7 të kapitullit 2. Është konstatuar se nëse:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0 \tag{4}$$

atëherë funksionet (2) pikat e brendshme të zonës D' i pasqyrojnë në pikat e brendshme të zonës D, lakoret e vazhdueshme të bashkësisë D' në lakore të vazhdueshme të zonës D, konturin e zonës D' në kontur të $D(\partial D = \partial F(D') = F(\partial D'))$. Mund të tregohet (shih [10] (2), pika 41.6) se kur funksionet (3) janë të vazhdueshme së bashku me derivatet e tyre të pjesshme në D, ka vend relacioni:

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = 1 \tag{5}$$

që tregon se të dy jokobianët janë të ndryshëm nga zero në zonat përkatëse.

Në vazhdim do të shohim se si mund të shprehet integrali (1) me integralin e dyfishtë të llogaritur për zonën D'. Për këtë qëllim zonën D' e ndajmë me ndihmën e dy familjeve drejtëzash paralele me boshtet koordinative dhe me distancë h midis drejtëzave të njëpasnjëshme për të dy familjet (fig. 4.9).

Kështu fitojmë ndarjen $\tau' = \{D'_i\}$ të bashkësisë D'. Kësaj ndarjeje i korrespondon ndarja $\tau = \{D_i\}$ e zonës D, ku bashkësitë D_i, në rastin e përgjithshëm, janë zona vijëpërkulta (fig. 4. 10).

Le të jetë $D' \in \tau'$ ashtu që $D_i{}' \cap \partial D' = \emptyset$, kulmet e së cilës janë pikat:

$$A'(u_i, v_i), B'(u_i + h, v_i), C'(u_i + h, v_i + h), E'(u_i, v_i + h).$$

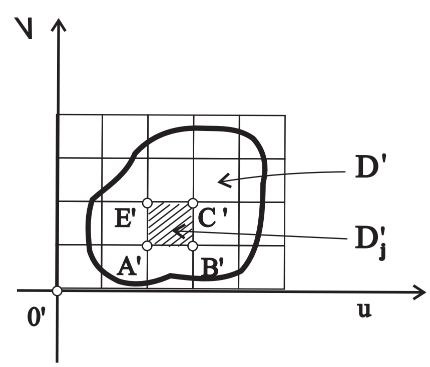


Fig. 4.9.

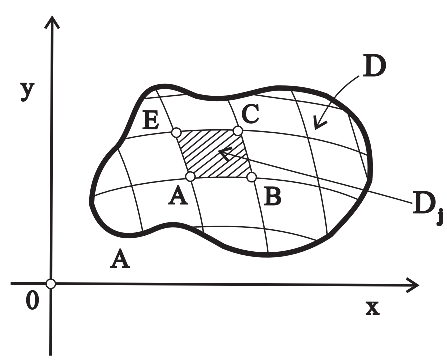


Fig. 4.10.

Funksioni F (funksionet (2)) pasqyron zonën D'_i në zonën $D_i \in \tau$. Tregojmë së pari se zona e tillë D_i është e matshme. Për këtë arsye japim këtë lemë :

Lema 4.1.7 *Në qoftë se γ është lakore pjesë-pjesë e lëmueshme që shtrihet në D' atëherë fytyra e saj $\gamma^* = F(\gamma)$ sipas pasqyrimit F është po ashtu pjesë - pjesë e lëmueshme.*

Vërtetimi. Së pari marrim që γ është lakore e lëmueshme, d.m.th. lakore me derivat të vazhdueshëm (funksioni, grafiku i të cilit është γ, ka derivat të vazhdueshëm), pa pika të veçanta (d.m.th. pika në të cilat γ nuk ka tangjente). Le të jetë:

$$u = u(t), v = v(t), a \leq t \leq b,$$

një paraqitje e lakores γ. Atëherë në $[a,b]$ funksionet $u(t)$ e $v(t)$ kanë derivat të vazhdueshëm dhe:

$$u'^2(t)+v'^2(t)>0.$$

Lakorja $\gamma^*=F(\gamma)$ paraqitet me çiftin e funksioneve:

$$x=x(u(t),v(t)),y=y(u(t),v(t)),a\le t\le b\,,$$

të cilat kanë derivate të vazhdueshme (si kompozime të funksioneve të tilla). Tregojmë se lakorja γ^* po ashtu nuk ka pika të veçanta. Me të vërtetë, meqë:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{du}{dt},\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{du}{dt},\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

duke e konsideruar (6) si sistem të ekuacioneve lineare ndaj $\frac{du}{dt}$ e $\frac{dv}{dt}$, shohim se nëse në ndonjë pikë plotësohen barazimet:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=0\,(\text{d.m.th.}\,x'^2(t)+y'^2(t)=0)$$

atëherë meqenëse jakobiani:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\ne 0,$$

sistemi në fjalë ka zgjidhje të vetme të barabartë me zero, d.m.th. në atë pikë t plotësohen barazimet:

$$\frac{du}{dt}=\frac{dv}{dt}=0\ \text{ d.m.th. }\ u'^2(t)+v'^2(t)=0)$$

dhe kjo tregon se po ajo pikë është e veçantë për lakoren γ, që është e pamundur.

Lema u vërtetua kur γ është e lëmueshme. Meqë lakorja pjesë-pjesë e lëmueshme është unioni i një numri të fundmë lakoresh të lëmueshme, konstatojmë se edhe fytyra e një lakoreje të tillë sipas funksionit F është pjesë-pjesë e lëmueshme. Lema u vërtetua.

Meqenëse konturi i zonës D' është lakore pjesë-pjesë e lëmueshme atëherë, sipas lemës 4.1.7, edhe konturi i zonës D_i do të jetë i tillë dhe për pasoj ka masën zero (shih rrjedhimin pas teoremës 1.7). Prandaj, (lema 4.1.2) zona D_i është e matshme.

Kalojmë tash në gjetjen e raportit midis masave të zonave korresponduese të ndarjeve τ e τ'. Si zakonisht marrim $mD_i=\Delta_i$ dhe $mD_i{}'=\Delta_i{}'$. Nga § 7 pika 3. e kapitullit 2. dihet se limiti i raportit të syprinës së zonës së pasqyruar me syprinën e zonës fillestare është (u_i, v_i), d.m.th.:

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \frac{\Delta_i}{\Delta_i'} = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| \Bigg|_{v=v_i}^{u=u_i} \tag{7}$$

ku $\lambda_\tau' = \max\limits_i\{d(D_i')\} = \sqrt{2}h$. Po shënojmë $\lambda_\tau = \max\limits_i\{d(D_i)\}$ dhe tregojmë se $\lambda_{\tau'} \to 0$. Po e theksojmë se vlen edhe e anasjellta.

Le të jenë $M_1(x_1, y_1) \in D_i, M_2(x_2, y_2) \in D_i$. Atëherë ekzistojnë pikat $M_1^{'} \in D_i^{'}, M_2^{'} \in D_i^i$, ashtu që $F(M_1') = M_1,\ F(M_2') = M_2$ si dhe $d(M_1', M_2') < \lambda_{\tau'}$. Shohim se:

$$x_1 = x(u_1, v_1),\ y_1 = y(u_1, v_1)$$

$$x_2 = x(u_2, v_2),\ y_2 = y(u_2, v_2).$$

Tash kemi:

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{[x(u_2, v_2) - x(u_1, v_1)]^2 + [y(u_2, v_2) - y(u_1, v_1)]^2},$$

dhe meqë funksionet $x = x(u, v), y = y(u, v)$ janë të vazhdueshme pra edhe uniformisht të vazhdueshme në D_i, atëherë për cdo $\varepsilon > 0$, pra për $\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)^2$ ekziston $\delta(\leq \lambda_{\tau'})$ ashtu që për $d(M_1', M_2') < \delta$ vlen:

$$|x(u_2, v_2) - x(u_1, v_1)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}},\ |y(u_2, v_2) - y(u_1, v_1)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}},$$

që tregon se: $d(M_1, M_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Këndej rrjedh se $d(D_i) = \sup\limits_{M_1, M_2 \in D_i}\{d(M_1, M_2)\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, dhe rrjedhimisht $\lambda_\tau = \max\limits_i\{d(D_i)\} < \varepsilon$, d.m.th. $\lambda_\tau \to 0$.

Le të jetë $\tau' = \tau_1'$. Marrim ndarjen τ_2' të zonës D' të fituar me familjet e drejtëzave paralele me boshtet koordinative, të cilat janë të larguara ndërmjet veti për distancën $\frac{h}{2.}$ Shohim se τ_2' është më fine se $\tau_1'(\tau_2' > \tau_1')$ dhe se $\lambda_{\tau_2'} = \frac{\lambda_{\tau_1'}}{2} = \frac{\sqrt{2}h}{2}$. Duke e vazhduar këtë proces fitojmë vargun $\{\tau_m'\}$ të ndarjeve $\tau_m' = \{D'^m_i\}$ të zonës D'. Meqë $\lambda_{\tau_m'} = \frac{\sqrt{2}h}{2^{m-1}}$ atëherë $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_{\tau_m'} = 0$

Nga ndarja $\tau_m', m = 1, 2, ...$ marrim zonat e brendshme të bashkësisë D', d.m.th. katrorët $D_i'^m$ që kanë vetinë $D_i'^m \cap \partial D' = \emptyset$. Po e shënojmë atë me $\tau_m'(\partial D')$, d.m.th.: $\tau_m'(\partial D') = \{D_i'^m | D_i'^m \in \tau'_m,\ D_i'^m \cap \partial D' = \emptyset\}$
Funksioni F (funksionet (2)) indukon në zonën D ndarjen τ. Si më sipër le të jetë: $\tau_m(\partial D) = \{D_i^m | D_i^m \in \tau_m, D_i \cap \partial D = \emptyset\}$

Sipas asaj që u tha më sipër $D_i'^m \in \tau_m'(\partial D')$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $D_i^m \in \tau_m(\partial D)$.

Marrim shumën integrale:

$$\sigma_{\tau_m(\partial D)} = \sum_{D_i^m \in \tau_m(\partial D)} f(\xi_i, \eta_i)\Delta_i^m = \sum\nolimits_b f(\xi_i, \eta_i)\Delta_i^m,$$

ku $\Delta_i^m = mD_i^m$ dhe $(\xi_i, \eta_i) \in D_i^m \in \tau_m(\partial D)$ është pikë e cila është fytyrë e ndonjë pike (u_i, v_i) të zonës përkatëse $D_i'^m \in \tau_m'(\partial D_i')$:

$$\xi_i = x(u_i, v_i), \eta = y(u_i, v_i). \tag{8}$$

Duke marrë parasysh se funksioni $f(x, y)$ është i integrueshëm në zonën D dhe duke marrë parasysh vetinë 8. të integraleve të dyfishta, kemi:

$$\lim_{\lambda_{\tau_m} \to 0} \sigma_{\tau_m(\partial D)} = \lim_{\lambda_{\tau_m} \to 0} \sum bf(\xi_i, \eta_i)\Delta_i^m = \iint\limits_D f(x, y)dxdy. \tag{9}$$

Nga barazimi (6), duke marrë parasysh zonën $D_i^m \in \tau_m(\partial D)$, fitojmë relacionin:

$$\Delta_i^m = |J(u_i, v_i)|\Delta_i' + \alpha\Delta_i'^m$$

ku α_i (shih §7 i kapitullit 2) tenton uniformisht në zero kur $\lambda_\tau' \to 0$, të cilin pasi ta shumëzojmë me $f(\xi_i, \eta_i)$ gjejmë se:

$$f(\xi_i, \eta_i)\Delta_i^m = f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]|J(u_i, v_i)|\Delta_i'^m +$$

$$+\alpha_i \cdot f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\Delta_i'^m.$$

Këndej, kur dihet se $D_i^m \in \tau_m(\partial D)$, rrjedh që $D_i'^m \in \tau_m'(\partial D)$, prandaj:

$$\sigma_{\tau_m(\partial D)} = \sum_{D_i'^m \in r_m'(\partial D')} f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)] \cdot |J(u_i, v_i)|\Delta_i'^m +$$

$$+ \sum_{D_i'^m \in \tau_m'(\partial D')} \alpha_i f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\Delta_i'^m, \tag{10}$$

Në barazimin (10) veprojmë me limit kur $\lambda_{\tau_m'} \to 0$. Meqë $\alpha_i \to 0$ kur $\lambda_{\tau_m'} \to 0$, $\lim\limits_{m \to \infty} \lambda_{\tau_m} = 0$, pastaj funksioni $f[x(u, v), y(u, v)] \cdot |J(u, v)|$ është i integrueshëm (d.m.th i integrueshëm në D'), dhe në fund duke përdorur vetinë 8, të integraleve të dyfishta, fitojmë:

$$\lim_{\lambda_{\tau_m} \to 0} \sigma_{\tau_m(\partial D)} = \lim_{\lambda_{\tau_m'} \to 0} \sum_b f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]|J(u_i, v_i)|\Delta_i'^m =$$

$$= \lim_{\lambda_{\tau_m'} \to 0} \sigma_{\tau_m'(\partial D)} = \iint\limits_{D'} f[x(u, v), y(u, v)]|J(u, v)|dudv,$$

sepse sumandi i dytë në (9) tenton ne zero kur $\lambda_{\tau_m} \to 0$. Tash duke marrë parasysh barazimin (8), fitojmë:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]|J(u,v)|dudv\,. \tag{11}$$

Kështu u vërtetua se vlen:

Teorema 4.1.14 *(formula e zëvendësimit të ndryshoreve në integralin e dyfishtë). Nëse funksioni $f(x,y)$ është i vazhdueshëm në zonën e matshme e të mbyllur D dhe me ndihmën e funksioneve të vazhdueshme së bashku me derivatet e tyre të pjesshme $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ zona e matshme dhe e mbyllur D' pasqyrohet në mënyrë biunivoke në D, kurse $J(u,v) \neq 0$ brenda zonës D', atëherë ka vend formula* (11).

Si edhe te formula e zëvendësimit të ndryshoreve te integrali i zakonshëm, formula (11), duke i zgjedhur zëvendësimet (2) në mënyrë të përshtatshme, bën të mundshme kalimin nga integrali më i ndërlikuar në më të thjesht. Përveç kësaj, shpeshherë duke ndryshuar ndryshoret thjeshtohet edhe zona e integrimit, gjë që lehtësohen mjaft llogaritjet. Si do të shohim edhe me shembuj, ndonjëherë pranohet edhe një ndërlikim i funksionit nënintegral me ndryshoret e reja për qëllim të thjeshtimit të zonës së integrimit.

Ndër zëvendësimet më të rëndomta të ndryshoreve në integralin e dyfishtë është kalimi nga koordinatat karteziane (x,y) në koordinata polare (ρ,φ). Dihet se ky kalim bëhet me formulat:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

Jokobiani i këtij transformimi është:

$$J(\rho,\varphi) = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Prandaj formula (11) merr trajën:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi. \tag{12}$$

Në fig. 4.11. është bërë interpretimi gjeometrik i kalimit në koordinata polare. Zona D e rrafshit xOy e kufizuar me rrathët $\rho = \rho_1, \rho = \rho_2$ dhe me gjysmëdrejtëzat $\theta = \theta_1$ dhe $\theta = \theta_2$ pasqyrohet në zonën D' të rrafshit $\rho 0'\theta$ të kufizuar me drejtëzat $\rho = \rho_1, \rho = \rho_2, \theta = \theta_1$ dhe $\theta = \theta_2$.

Shembulli 4.1.4 Të llogaritet integrali:

$$\iint\limits_{D} dxdy,$$

ku D është zona e kufizuar me elipsën $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Zgjidhje: Marrim:

$$x = a\rho\cos\varphi, y = b\rho\sin\varphi,$$

dhe le të vërejmë se $D' = \{(\rho,\varphi)|\, 0\le\rho\le 1,\, 0\le\varphi\le 2\pi\}$. Meqë:

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\varphi} \end{vmatrix} = ab\rho,$$

sipas formulës (11) gjejmë:

$$\iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D'} ab\rho d\rho d\varphi = ab\int\limits_0^1 d\rho\int\limits_0^{2\pi}\rho d\varphi = 2\pi ab\int\limits_0^1 \rho d\varphi = \pi ab.$$

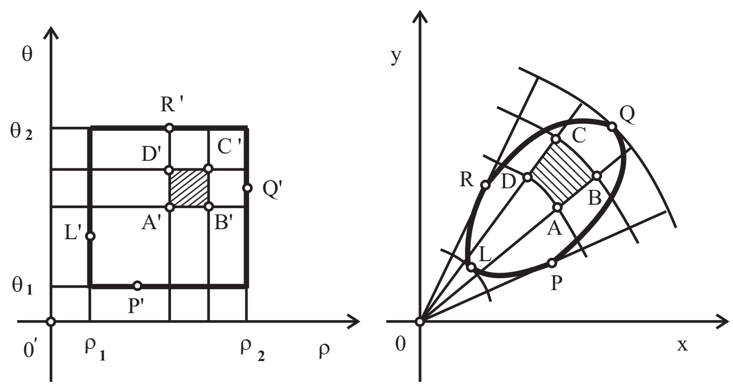


Fig. 4.11.

Shembulli 4.1.5 Të llogaritet vëllimi i elipsoidit:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$$

Zgjidhje: Vëllimin e elipsoidit ne e llogaritëm në shembullin 2. të pikës së mëparshme. Kishim:

$$V = 8c\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$$

ku D është pjesa e elipsës në kuadrantin e parë (fig. 4.12). Marrim zëvendësimin si në shembullin 1:

$$x = a\rho\cos\varphi,\; y = b\rho\sin\varphi,$$

dhe shohim se $D' = \{(\rho,\varphi)|0 \le \rho \le 1, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}$ (fig. 4.13). $J(\rho,\varphi) = ab\rho$, kurse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \rho^2$, prandaj kemi:

$$V = 8abc \iint\limits_{D'} \sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho d\varphi = 8abc \int\limits_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{4}{3}\pi abc.$$

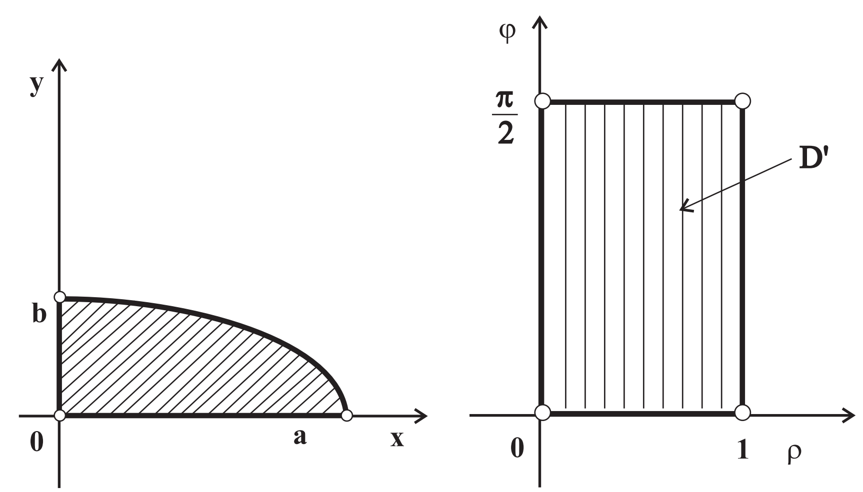


Fig. 4.12. Fig. 4.13.

Shembulli 4.1.6 Të llogaritet:

$$\iint\limits_D (y-x)dxdy,$$

në qoftë se zona D kufizohet me drejtëzat:

$$y = x+1,\ y = x-3,\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3},\ y = -\frac{1}{3}x + 5.$$

Zgjidhje: Marrim zëvendësimet:

$$u = y - x, v = y + \frac{1}{3}x. \tag{$*$}$$

Atëherë drejtëzat $y = x+1$ e $y = x-3$ transformohen në drejtëzat:

$$u = 1,\ u = -3,$$

të planit $0'uv$ (fig. 1.14), ndërsa drejtëzat $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3},\ y = -\frac{1}{3}x + 5$ kalojnë në drejtëzat:

$$v = \frac{7}{3}, v = 5$$

Prandaj zona D kthehet, me anë të transformimit $(*)$, në zonën D' (fig. 4. 14).

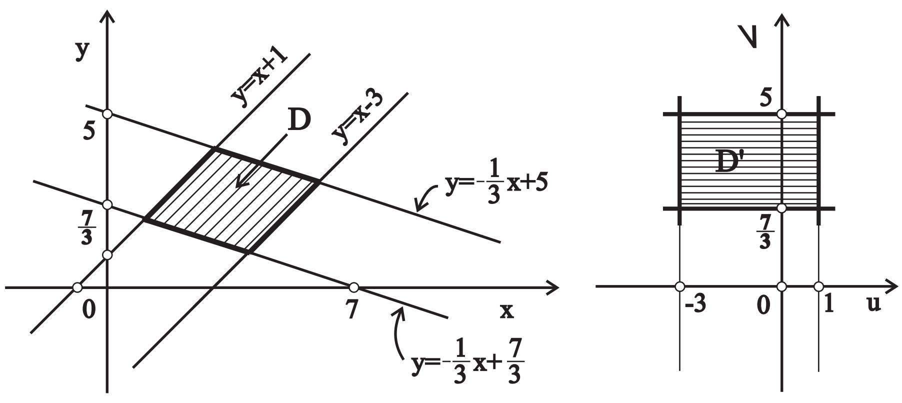


Fig. 4.14.

Shohim se:

$$J(u,v)=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix},$$

dhe duke marrë parasysh që $x=-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v, y=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v$ fitojmë $J(u,v)=-\frac{3}{4}$.

Kështu:

$$\iint\limits_{D}(y-x)dxdy=\iint\limits_{D'}\left[\left(\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v\right)-\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v\right)\right]\cdot\frac{3}{4}dudv$$

$$=\int\limits_{\frac{7}{3}}^{5}\int\limits_{-3}^{1}\frac{3}{4}ududv=-8.$$

4.1.8 Detyra për ushtrime

1. Të llogaritet sipas përkufizimit

$$\iint\limits_{D}xy\,dx\,dy,$$

ku $D=\{(x,y)|\,0\leq x\leq a,\,0\leq y\leq b\}$.

2. Të llogaritet sipas përkufizimit:

$$\iint\limits_{D}e^{x}ydx\,dy,$$

ku $D=\{(x,y)|\,0\leq x\leq 1,\,1\leq y\leq 3\}$.

3. Të çmohet vlera e integralit:

$$I=\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{\cos^2 x+\cos^2 y+1},$$

ku $D=\{(x,y)|\,0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi\}$.

4. Le te jetë $\tau=\{D_i\}_i^{n-1}$ ndarje e zonës $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ e tillë qe diametri maksimal i pjesëve ndarëse λ_τ të jetë me i vogël se numri δ. Për çfarë vlere të δ vlen pabarazimi:

$$\left|\iint\limits_{D}\sin(x+y)dxdy-\sum_{i=1}^{n}\sin(\xi_i-\eta_i)\Delta_i\right|<0.001,$$

ku Δ_i është masa e zonës $D_i,(\xi_i,\eta_i)\in D_i$.

5. Të llogariten integralet:

1^o $\displaystyle\iint\limits_{D}(x+y^2)dxdy,\ D=\{(x,y)|\,0\le x\le 2,\ 1\le y\le 3\}$,

2^o $\displaystyle\iint\limits_{D}\sin(x+y)dxdy,\ D=\left\{\ (x,y)|\,0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\ \right\}$;

3^o $\displaystyle\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{(x+y)^2},\ D=\{(x,y)|3\le x\le 4,\ 1\le y\le 2\}$.

6. Të paraqitet grafikisht zona sipas të cilës është marrë integrali:

$$I=\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a}dx\int\limits_{x}^{a}\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy,\ (a>0).$$

7. Të ndërrohet renditja e integrimit për integralet:

$$\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy;$$

$$\int\limits_{0}^{2a}dx\int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)dy,\ (a>0).$$

8. Të llogaritet integrali:

$$I=\iint\limits_{D}\frac{x^2}{x^2+y^2}dxdy,$$

ku

$$D=\{(x,y)|\,0\le x\le a,\ 0\le y\le x\}.$$

9. Të llogaritet:
$$\iint\limits_D \mathrm{sgn}(\mathrm{x}+\mathrm{y}-2)\mathrm{dxdy},$$
nëse D është zona e kufizuar me lakoren $y = 4 - x^2$ dhe drejtëzën $y = 0$.

10. Të llogaritet:
$$\iint\limits_D (x+y)dxdy,$$
ku D është zona e kufizuar me lakoren $y = 4 - x^2$ dhe drejtëzën $y = 2 - x$.

11. Të llogaritet:
$$\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy,$$
ku $D = \{(x,y)||x| \leq 1,\, 0 \leq y \leq 2\}$.

12. Të llogaritet:
$$\iint\limits_D [x+y]dxdy,$$
nëse $D = \{(x,y)|0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq 2\}$.

Udhëzim: Zona D të ndahet në katër zona të mbyllura me ndihmën e drejtëzave $x + y = j\,(j = 1, 2, 3)$.

13. Të llogaritet:
$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,$$
ku D është zona e kufizuar me rrethin $x^2 + y^2 = 1$.

14. Të llogaritet:
$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)(1+\sqrt[4]{x^2+y^2}\,)},$$
ku
$$D = \{(x,y)|x^2 - y^2 < 0,\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Rezultati: $2\pi \ln \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

15. Të llogaritet integrali:
$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
në qoftë se $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, ku:
$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y)| -2 \leq x \leq 1,\, -x \leq y \leq 2\}, \\ D_2 &= \{(x,y)| -1 \leq x \leq 1,\, 1 \leq y \leq 2\}, \\ D_3 &= \{(x,y)|\, 1 \leq x \leq 2,\, x \leq y \leq 2\}. \end{aligned}$$

16. Të llogaritet integrali:

$$\iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy,$$

ku D është zona e kufizuar me elipsën $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Udhëzim: të merret zëvendësimi $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$.

17. Të llogaritet integrali:

$$\iint\limits_D \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$$

ku zona D është zona e kufizuar me rrathët $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 2x$ si dhe drejtëzën $y = 0$.

18. Të llogaritet integrali:

$$\iint\limits_D \cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2}dxdy,$$

ku D është zona e kufizuar me rrethin $x^2 + y^2 = 1$ dhe drejtëzat $y = x\tan\alpha, y = x\tan\beta\,(0 \le \alpha \le \beta \le 2\pi)$.

19. Të llogaritet integrali:

$$\iint\limits_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dxdy,$$

ku zona D është e kufizuar me lakoren $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ dhe boshtet koordinative.

Udhëzim: të merret zëvendësimi $x = \rho\cos^4\varphi,\ y = \rho\sin^4\varphi$.

20. Të llogaritet integrali:

$$\iint\limits_D \cos\frac{\pi xy}{(ab)^2}dxdy,$$

nëse D është zona e kufizuar me lakoret $xy = b^2,\ xy = a^2\,(0 < a < b)$ dhe drejtëzat $y = \alpha x, y = \beta x\,(0 < \alpha < \beta, x > 0)$.

Udhëzim: të merret zëvendësimi $y = ux, xy = v$.

21. Duke marrë zëvendësimet përkatëse të kthehet integrali i dyfishtë:

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

ku D është zona e kufizuar me lakoret $xy = 1, xy = 2, y = x, y = 4x\ \ (x > 0, y > 0)$, në të njëfishtë (caktuar).

22. Të llogaritet:
$$\iint_D (x^2 - y^2)dxdy,$$
ku D është zona e kufizuar me drejtëzat $x + y = 1,\ 2x - y = 2,\ x + y = 3,\ 2x - y = -1$.

23. Të tregohet se:
$$\iint_D (xy)^{xy}dxdy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n},$$
ku $D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Udhëzim: Të merret zëvendësimi $x = u, y = \frac{v}{u}$.

24. Të vërtetohet pabarazimi:
$$I(k) \leq \iint_D e^{-k^2x^2-\frac{y^2}{k^2}}dxdy \leq \pi(1 - e^{-1}), \quad k > 0,$$
nëse D është zona e kufizuar me rrethin $x^2 + y^2 \leq 1$.

25. Të tregohet se:
$$\iint_D \sin(x^2 + y^2)dxdy = \iint_{D'} \sin(x^2 + y^2)dxdy,$$
ku:
$$D = \{(x, y)|0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\},$$
$$D = \{(x, y)|x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq a\sqrt{2}\}, a\ > 0.$$

4.2 INTEGRALET E TREFISHTA E TË n-FISHTA

4.2.1 Matshmëria sipas Jordanit e hapësirve me tri e n-dimensione

Teoria e masës për bashkësitë rrafshe pa vështirësi mund të përgjithësohet në rastin kur $n = 3, 4, \ldots$.

Shqyrtojmë së pari, pa i analizuar hollësitë, rastin kur $n = 3$. Në këtë rast figurat e thjeshta në $\mathbf{R}^3$, të cilat i shënojmë me Δ, do të jenë praralelepipedët (e mbyllur) kënddrejtë. Me $|\Delta|$ shenojmë vëllimin e paralelepipedit Δ.

Bashkësinë $\sigma \subset \mathbf{R}^3$ e quajmë **figurë elementare** nëse ajo është unioni i një numri të fundmë paralelepipedësh Δ të cilët mund të priten vetëm sipas pjesëve të kufireve.

Vëllimi $|\sigma|$ i figurës σ përkufizohet si shumë e vëllimeve $|\Delta|$ të paralelepipedëve Δ nga të cilët formohet ajo. Bashkësinë e zbrazët e konsiderojmë figurë me vëllim të barabartë me zero.

Në qoftë se R' është cilido sistem koordinativ kënddrejtë, atëherë paralelepipedët dhe figurat me brinjë paralele me boshtet e R' i shënojmë edhe me $\Delta_{R'}$ dhe $\sigma_{R'}$ përkatësisht. Në $\mathbf{R}^3$, për çdo numër natyral n marrim rrjetën S_n e cila formohet nga familjet e rrafsheve:

$$x = k \cdot h, y = l \cdot h,\ z = m \cdot h\ \left(\ h = \frac{1}{2^n}, k, l, m = 0, \pm 1, \pm 2, ...\ \right).$$

Rrjeta S_n e **dekompozon hapsirën $\mathbf{R}^3$** në kube Δ^h me brinjë paralele me boshtet koordinative dhe me gjatësi h. Për çdo bashkësi të kufizuar $G \subset \mathbf{R}^3$ përkufizojmë bashkësinë $\underline{\omega}_n(G)$ si union i kubeve Δ^h që gjenden në G dhe që $\Delta^h \cap \partial G = \emptyset$ për çdo Δ^h, dhe bashkësinë $\overline{\omega}_n(G)$ si union të kubeve Δ^h secili nga të cilët përmbajnë bile një pikë të bashkësisë G.

Në mënyrë analoge si në 4.1.1 përkufizojmë **masën e brendshme** dhe atë **të jashtme** të bashkësisë G si limite të vargjeve monotone $\{|\overline{\omega}_n(G)|\}$ e $\{|\underline{\omega}_n(G)|\}$, d.m.th.:

$$m_e = \lim_{n\to\infty} |\overline{\omega}_n(G)|,\ m_i = \lim_{n\to\infty} |\underline{\omega}_n(G)|.$$

Bashkësinë G e quajmë të **matshme sipas Jordanit** në kuptim tredimensional nëse:

$$m_i G = m_e G = mG.$$

Numrin mG e quajmë **masë tredimensionale** për bashkësinë G.

Vetitë e masës tredimensionale janë krejtësisht analoge me ato të masës dydimensionale që i shqyrtuam në paragrafin 4.1. Përveç kësaj, edhe rezultatet e dhëna në atë paragraf mund të formulohen e vërtetohen edhe për rastin tredimensional, përveç lemës 4. 1.5, e cila në rastin tonë formulohet kështu:

Lema 4.2.1 *Në qoftë se bashkësia e matshme $G \subset \mathbf{R}^3$ ndahet në dy pjesë me ndihmën e sipërfaqes e cila ka masën (tredimensionale) zero, atëherë pjesët ndarëse do të jenë të matshme (në kuptim tredimensional).*

Teoria e shqyrtuar në mënyrë analoge jepet edhe për rastin m-dimensional. Me:

$$\Delta = \{(x_1, x_2, ..., x_m) | a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1, 2, ..., m\}$$

shënojmë paralelepipedin n-dimensional **vëllimi n-dimensional** i të cilit është:

$$|\Delta| = \prod_{j=1}^{m} (b_j - a_j).$$

Figura elementare $\sigma \subset \mathbf{R^n}$ përkufizohet si union i një numri të fundmë bashkësishë Δ, të cilat nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta, kurse masa e saj si numri $|\sigma|$ i cili është sa shuma e masave të figurave në fjalë.

Për bashkësinë e zbrazët në $\mathbf{R^m}$ do të themi se ka masën zero.

Si edhe në rastet $m = 2, 3$ me S_n e shënojmë rrjetën e cila formohet nga familjet e rrafsheve:

$$x_i = k_i \cdot h \ (i = 1, 2, ..., m; h = 2^{-n}, k_i = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

e cila e dekompozon hapësirën $\mathbf{R^m}$ në kubet Δ^h me gjatësi të brinjës h :

$$\Delta^h = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) | k_i \cdot h \leq x_i \leq (k_i + 1)h\}$$

Në qoftë se G është bashkësi e kufizuar në $\mathbf{R}^m$, atëherë me $\underline{\omega}_n(G)$ shënojmë unionin e kubeve $\Delta^h \subset G$ që gjendet në G dhe që $\Delta^h \cap \partial G = \emptyset$ kurse me $\overline{\omega}_n(G)$ unionin e kubeve Δ^h që kanë vetinë që secili përmban bile një pikë të bashkësisë G. Është evidente se ekzistojnë limitet e vargjeve monotone:

$$\lim_{n \to \infty} |\underline{\omega}_n(G)| = m_i G, \lim_{n \to \infty} |\overline{\omega}_n(G)| = m_e G$$

të cilët quhen **masa e brendshme** përkatësisht **e jashtme n-dimensionale e bashkësisë G sipas Jordanit.**

Në qoftë se $m_i G = m_e G = mG$ atëherë thuhet se G **është e matshme sipas Jordanit** në kuptimin n-dimensional. Numrin mG e quajmë **masa n-dimensionale e bashkësisë G sipas Jordanit.**

Me modifikimet përkatëse rezultatet e paragrafit 4.1, mund të formulohen e vërtetohen edhe për rastin n-dimensional.

Në vazhdim japim rezultatin i cili përgjithëson teoremën 4.1.4.

Teorema 4.2.1 *Sipërfaqja S :*

$$x_n = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = f(Q) \ (Q = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \Lambda) \qquad (I)$$

në hapësirën n-dimensionale, ku f është funksion i vazhdueshëm dhe i njëvlershëm në bashkësinë e kufizuar dhe të mbyllur Λ, ka masën n-dimensionale zero.

Vërtetimi. Meqenëse funksioni f është uniformisht i vazhdueshëm në Λ, për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet $\delta > 0$ ashtu që për $Q, Q' \in \Lambda, |Q - Q'| < \delta$ vlen $|f(Q) - f(Q')| < \varepsilon$. Hapësirën $\mathbf{R}^n$ e ndajmë me rrafshet:

$$x_i = \alpha_i h, \ \alpha_i = 0, \pm 1, \pm 2, ...; \ i = 1, ..., n - 1,$$

$$x_n = k\varepsilon, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Pjesët ndarëse (fig. 4.15) do të jenë paralelepipedët lartësia e të cilëve është ε e bazat e të cilëve Δ' janë kubet ($\Delta' = \text{prej}_{R^{n-1}} \Delta$) me brinjë h të zgjedhura në atë mënyrë që diametri i tyre të jetë më i vogël se $\delta (d(\Delta^{'}) < \delta)$.

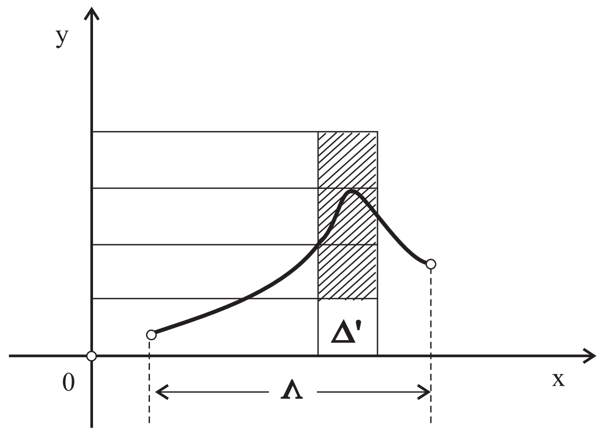


Fig. 4.15.

Meqenëse Λ është e kufizuar atëherë ajo përmbahet në një kub $(n-1)$ -dimensional Q^* dhe masa e unionit të kubeve (çdo dy prej të cilëve nuk kanë pika të brendëshme të përbashkëta) që kanë pika të bashkësisë Λ nuk e kalon një numër $M(M = mQ^*)$. Le të jetë Δ' njëri nga ata kube. Prej paralelepipedëve Δ të cilët projektohen në Δ' më së shumti tre prej tyre kanë pika të sipërfaqes S. Shuma e vëllimeve të tyre nuk e kalon numrin $3\varepsilon|\Delta'|$, ku $|\Delta^{'}| = m\Delta^{'}$. Po e shënojmë me G unionin e të gjithë paralelepipedëve Δ që kanë pika të sipërfaqes Q. Atëherë $G \supset S$ mbulon sipërfaqen S dhe:

$$mG \leq 3\varepsilon \cdot M,$$

që duke marrë parasysh se ε është i çfarëdoshëm, shohim se masa e figurës G është më e vogël se numri i çfarëdoshëm sado i vogël. Këndej rrjedh se $mS = 0$. Teorema u vërtetua.

Shembulli 4.2.1 Le të jetë $\Delta \subset \mathbf{R}^n$ paralelepiped kënddrejtë me faqet të cilat nuk janë paralele me planet koordinative, dhe S' njëra faqe e tij. Me $\mathbf{R}^{n-1}$ shënojmë rrafshin në të cilin ajo projektohet në mënyrë biunivoke kurse $\Lambda = \text{proj}_{\mathbf{R}^{n-1}}\mathrm{S}'$ dhe:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i,$$

ekuacionin e sipërfaqes S'. Meqenëse Λ është e kufizuar dhe e mbyllur atëherë, sipas teoremës 4.2.1, $mS' = 0$. Meqë S ka numër të fundmë faqesh konstatojmë se $m(\partial\Delta) = 0$ që tregon se Δ është e matshme.

Nga teorema 4.2.1. del se ky rezultat :

Rrjedhimi 4.2.1 Në qoftë se konturi i bashkësisë $G \subset \mathbf{R}^3$ ndahet në një numër të fundmë pjesësh secila e paraqitur me ekuacion të formës (1) atëherë G është e matshme në kuptimin m-dimensional.

Rezultati në vijim e marrim pa e vërtetuar (shih [16], fq. 21).

Teorema 2.1′. *Sipërfaqja* S :

$$x_i = \varphi_i(\mathbf{u}) = \varphi_i(u_i, u_i, ..., u_{n-1}), \ (i = 1, ..., n; \ \mathbf{u} \in \Omega)$$

ku φ_i *janë të njëvlershme, të vazhdueshme dhe të gjitha derivatet e pjesshme i kanë të vazhdueshme në* Ω, *ka masën n-dimensionale zero.*

Në rastin kur sipërfaqja S është pjesë-pjesë e lëmueshme, d.m.th. përbëhet nga një numër i fundmë sipërfaqesh të lëmueshme përveç ndoshta në disa pika (si në rastin me kulmin e sipërfaqes konike) ose në disa lakore (si p.sh. gjatë brinjës së një sipërfaqeje prizmatike), atëherë nga teorema (2.1), rrjedh ky rezultat:

Rrjedhimi 4.2.2 *Në qoftë se konturi i bashkësisë* $G \subset \mathbf{R}^m$ *ndahet në një numër të fundmë pjesësh të lëmueshme (pra kufizohet me një sipërfaqe pjesë-pjesë të lëmueshme), atëherë* G *është e matshme në kuptimin m-dimensional.*

4.2.2 Přkufizimi, ekzistenca dhe vetitë e integralit të trefishtë

Meqenëse ekziston analogji e plotë mes teorisë së integraleve të dyfishta dhe atyretë trefishta, këtë të fundit do ta japim duke i abstrakuar hollësitë.

Le të jetë $V \subset \mathbf{R}^3$ një bashkësi e matshme, masën e së cilës po e shënojmë, si edhe në rastin e zonës rrafshe, me Δ. Le të jetë $\tau = \{V_i\}_{i=0}^{n-1}$ një ndarje e çfarëdoshme e bashkësisë V në zona të matshme. Jepet funksioni $u = f(x, y, z)$ në V dhe $M_i(\xi_i, \eta_i, \varphi_i)$ le të jetë një pikë e çfarëdoshme e bashkësisë $V_i, i = 0, ..., n-1$. Ndërtojmë shumën integrale:

$$\sigma_\tau = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta_i. \tag{1}$$

ku $\Delta_i = mV_i$.

Me përkufizim limitin I të kësaj shume, në qoftë se ai ekziston, kur diametri maksimal λ_τ i pjesëve ndarëse tenton në zero, do të quajmë **integral të trefishtë** të funksionit $f(x, y, z)$ në zonës V dhe do ta shënojmë:

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz. \tag{2}$$

Limiti (2), si në rastin e integralit të dyfishtë kuptohet kështu:

Për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta > 0$ që për çdo ndarje $\tau = \{V_i\}$ të zonës V me vetinë $\lambda_\tau < \delta$, dhe çdo pikë $(\xi_i, \eta_i, \rho_i) \in V_i$, vlen pabarazimi:

$$|\sigma_\tau - I| < \varepsilon.$$

Përkufizimi i limitit (2) mund të jepet edhe në gjuhën e vargjeve dhe tregohet pa vështirësi se ai është ekuivalent me të mësipërmin.

Vërejtja 1. Duke marrë parasysh relacionin (4) para §1, shohim se masa e lëndës së shpërndarë në trupin V me densitet $\mu = \mu(x, y, z)$ do të jepet me formulën:

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z) dxdydz.$$

Vërejtja 2. Nga përkufizimi i integralit të trefishtë rrjedh se:

$$\iiint_V dxdydz = \Delta = mV.$$

Problemi i integrueshmërisë së funksionit me tri ndryshore zgjidhet me ndihmën e shumave Darbu (këtu supozohet se funksioni është i kufizuar) të cilat përcaktohen si për rastin e funksionit me dy ndryshore:

$$s_\tau = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta_i, \; S_\tau = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta_i.$$

Teorema 4.2.2 *(mbi ekzistencën e integralit të trefishtë). Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që funksioni $u = f(x, y, z)$, i kufizuar në zonën e matshme V, të jetë i integrueshëm në V është që:*

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f; V_i) \Delta_i = 0,$$

ku $\omega_i(f; V_i)$ është luhatja e funksionit në pjesën V_i.

Me ndihmën e kësaj teoreme mund të tregohet se:

a. Çdo funksion i vazhdueshëm në zonën e matshme V është i integrueshëm në këtë zonë.

b. Funksioni $f : V \to \mathbf{R}, V \subset \mathbf{R}^3$, i kufizuar në bashkësinë e mbyllur e të matshme V dhe i vazhdueshëm në V, me përjashtim të një bashkësie më masë zero, është i integrueshëm në V.

Në vazhdim vetëm vihen në dukje vetitë e integraleve të trefishta.

1. Në qoftë se funksioni $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ janë të integrueshëm në zonën e matshme V kurse c-konstante, atëherë funksionet:

$$f \pm g, \; |f|, \; f \cdot g, \; \frac{1}{f},$$

ku $|f(x, y)| > d > 0$, janë të integrueshëm në V dhe vlejnë barazimet:

$$\iiint_V [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dxdydz = \iiint_V f(x, y, z) dxdydz + \iiint_V g(x, y, z) dxdydz.$$

$$\iiint\limits_V cf(x,y,z)dxdydz = c\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

2. Nëse funksioni $f(x,y,z)$ është i integrueshëm në zonën e matshme $V = V_1 \cup V_2$, ku V_1 e V_2 janë të matshme dhe nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta, atëherë ai është i integrueshëm në V_1 e V_2 dhe anasjelltas. Në këtë rast

$$\iiint\limits_V f(x.y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x.y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x.y,z)dxdydz.$$

3. Në qoftë se funksionit $f(x,y,z)$ të integrueshëm në V i ndryshohen vlerat në pikat e një bashkësie $E \subset V$ me masë zero me kusht që ai përsëri të mbetet i kufizuar, funksioni i ri f_1 është i integrueshëm në V dhe:

$$\iiint\limits_V f(x.y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f_1(x.y,z)dxdydz$$

4. Nëse funksioni $f(x,y,z)$ është i integrueshëm në bashkësinë e matshme V dhe $f(x,y,z) \geq 0$ në V, atëherë:

$$\iiint\limits_V f(x.y,z)dxdydz \geq 0$$

Rrjedhimi 4.2.3 Në qoftë se $f(x,y,z)$ dhe $g(x,y,z)$ janë të integrueshëm në bashkësinë e matshme V dhe

$$f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$$

në V, atëherë:

$$\iiint\limits_V f(x.y,z)dxdydz \leq \iiint\limits_V g(x.y,z)dxdydz.$$

5. Nën kushtet e vetisë 1. vlen pabarazimi:

$$\Big|\iiint\limits_V f(x.y,z)dxdydz\Big| \leq \iiint\limits_V |f(x.y,z)|dxdydz.$$

6. Në qoftë se $f(x,y,z)$ është i integrueshëm në zonën e matshme V, dhe:

$$m \leq f(x,y,z) \leq M,$$

për çdo $(x,y,z) \in V$, atëherë:

$$m \cdot \triangle \leq \iiint\limits_V f(x.y,z)dxdydz \leq M \cdot \triangle,$$

ku $\triangle$ është masa e V.

7. *(Teorema mbi të mesmen).*Në qoftë se funksioni është i vazhdueshëm në bashkësinë e mbyllur dhe të lidhur V, atëherë gjendet pika $(\xi, \eta, \rho) \in V$ e tillë që:

$$\iiint\limits_V f(x.y,z)dxdydz = f(\xi,\eta,\rho)\cdot\triangle,$$

8. Për funksionin $f(x, y, z)$, të integrueshëm në zonën e matshme V ka vend relacioni:

$$\iiint\limits_V f(x.y,z)dxdydz = \lim_{\lambda_\tau\to 0}\sum\nolimits_b f(\xi_i,\eta_i,\varphi_i)\triangle_i,$$

ku simboli $\sum_b$ tregon se shumimi bëhet sipas zonave të brendshme për V (d.m.th. sipas zonave $V_i \in \tau, V_i \cap \partial V = \phi$).

4.2.3 Llogaritja e integralit të trefishtë

Në këtë pikë shqyrtojmë problemin e llogaritjes së integralit të trefishtë. Edhe në këtë rast rruga e llogaritjes është ajo e kthimit të tij në integral të përsëritur.

Marrim në fillim rastin kur zona e integrimit është një paralelepiped kënddrejtë:

$$V = \{(x,y,z)|a \le x \le b, \alpha \le y \le \beta, c \le z \le d\}.$$

Bashkësia:

$$D = \{(y,z)|\alpha \le y \le \beta, c \le z \le d\}$$

do të jetë projeksioni i zonës V në rrafshin Oyz.

Teorema 4.2.3 *Në qoftë se për funksionin $f(x, y, z)$, ekziston integrali:*

$$I = \iiint\limits_V f(x.y,z)dxdydz$$

dhe për çdo x të fiksuar nga $[a, b]$ ekziston integrali:

$$I(x) = \iint\limits_D f(x,y,z)dydz,$$

atëherë do të ekzistojë edhe:

$$\int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \iint\limits_D f(x,y,z)\,dydz$$

dhe ka vend barazimi:

$$I = \iiint\limits_V f(x.y,z)dxdydz = \int_a^b dx \iint\limits_D f(x,y,z)dydz. \tag{1}$$

Vërejtja 1. Nëse për çdo x nga [a,b] dhe për çdo y nga $[\alpha, \beta]$ ekziston integrali:

$$\int_c^d f(x,y,z)dz,$$

integrali i brendshëm në anën e djathtë të formulës (1), sipas teoremës 4.1.12, kthehet në integral të përsëritur kështu që:

$$\iiint_V f(x.y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy \int_c^d f(x,y,z)dz \tag{2}$$

Vërejtja 2. Në formulat (1) e (2) mund të ndryshojë roli i ndryshoreve dhe në to të bëhen modifikimet gjegjëse.

Vërejtja 3. Në qoftë se funksioni $f(x,y,z)$ është i vazhdueshëm në zonën e matshme V dhe ekzistojnë të gjitha integralet që figurojnë në formulat (1) e (2), atëherë ato (formulat) janë të vërteta.

Teorema 4.2.4 *Në qoftë se funksioni $f(x,y,z)$ është i integrueshëm në zonën e matshme V dhe për çdo y e z të fiksuar përkatësisht nga segmentet $[\alpha,\beta], [c,d]$ ekziston integrali:*

$$I(y,z) = \int_a^b f(x,y,z)dx,$$

atëherë ekziston edhe:

$$\iint_D I(y,z)dydz = \iint_D dydz \int_a^b f(x,y,z)dx,$$

dhe ka vend formula:

$$\iiint_V f(x.y,z)dxdydz = \iint_D dydz \int_a^b f(x,y,z)dx.$$

Detyrë. Të vërtetohet teorema 2.4.

Edhe për teoremën 2.4. vlejnë Vërejtjet 1-3.

Në vazhdim shqyrtojmë rastin kur zona V nuk është paralelepiped kënddrejt.

Teorema 4.2.5 *Në qoftë se funksioni $f(x,y,z)$ është i integrueshëm në zonën e matshme V dhe për çdo x të fiksuar nga një segment $[a,b]$ ekziston integrali:*

$$I(x) = \iint_{P_x} f(x,y,z)dydz,$$

ku P_x është prerja e trupit V me rrafshin $x = X$ (fig.4.16), atëherë ekziston edhe integrali

$$\int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \iint_{P_x} f(x, y, z)dydz,$$

dhe vlen barazimi:

$$\iiint_V f(x.y, z)dxdydz = \int_a^b dx \iint_{P_x} f(x, y, z)dydz$$

Vërtetimi është analog me atë të teoremës 4.1.13. Vetëm po cekim se marrim funksionin:

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in V \\ 0, & (x, y, z) \text{ jashtë } V \end{cases}$$

në një paralelepiped kënddrejtë që përfshin zonën V dhe pastaj zbatohet teorema 4.2.3.

Në rastin kur trupi V është **normal** ndaj rrafshit Oxy, d.m.th. kur kufizohet me sipërfaqet $z = \varphi(x, y)$ dhe $z = \psi(x, y)$ ku φ dhe ψ janë funksione të vazhdueshme dhe të njëvlershme në zonën $D = \text{proj}_{\text{Oxy}}V$, dhe sipërfaqen cilindrike me përftuese drejtvizore paralele me boshtin Oz (fig. 4.17), vlen ky rezultat:

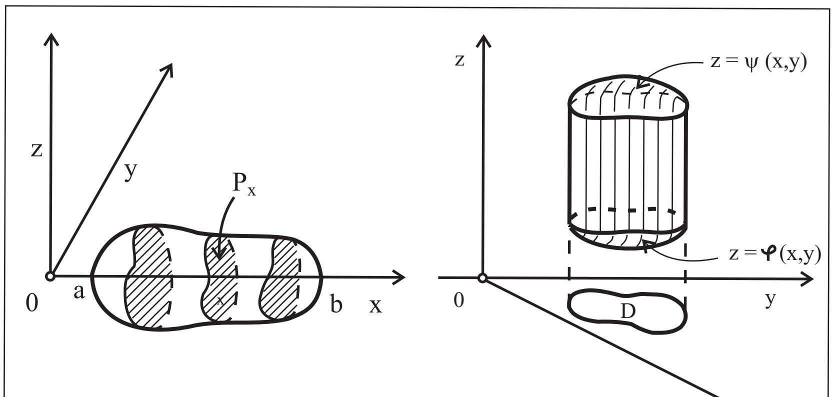


Fig. 4.16. Fig. 4.17.

Teorema 4.2.6 *Në qoftë se funksioni $f(x, y, z)$ është i integrueshëm në zonën e matshme V, normale ndaj rrafshit Oxy që projektohet në rrafshin Oxy në zonën e matshme D, pra:*

$$V = \{(x, y, z)|(x, y) \in D,\, \varphi(x, y) \le z \le \psi\,(x, y)\},$$

ku $\varphi(x,y)$ e $\psi(x,y)$ janë funksione të vazhdueshme dhe të njëvlershme në D dhe në qoftë se për çdo (x,y) të fiksuar në D ekziston integrali:

$$\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

atëherë ekziston edhe:

$$\iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

dhe vlen barazimi:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{3}$$

Detyrë. Të vërtetohet teorema 4.2.6.

Në qoftë se zona $D = \{(x,y)|a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ dhe plotësohen kushtet e tjera të teoremës 2.6, atëherë formula (3) merr trajtën:

$$\iiint\limits_{V} f(x.y,z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_2(x)}^{y_1(x)} dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{4}$$

Kur zona V nuk është normale ndaj asnjërit prej rrafsheve koordinative e ndajmë atë në pjesë që janë normale dhe për secilën veprojmë sipas rregullave që u parashtruan më sipër.

Shembulli 4.2.2 Të llogaritet integrali:

$$I = \iiint\limits_{V} (x+y+z)dxdydz$$

nëse

$$V = \{(x,y,z)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Zgjidhja: Duke kaluar në integral të përsëritur kemi:

$$I = \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x+y+z)dz =$$
$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left[\frac{(x+y+z)^2}{2}\right]_0^1 dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left[\frac{(x+y+1)^2}{2} - \frac{(x+y)^2}{2}\right] dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[\frac{(x+y+1)^3}{3} - \frac{(x+y)^3}{3}\right]_0^1 dx =$$
$$= \frac{1}{6}\int\limits_0^1 [(x+2)^3 - (x+1)^3 - (x+1)^3 + x^3] dx =$$
$$= \frac{1}{6}\left[\frac{(x+2)^4}{4} - \frac{2(x+1)^4}{4} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Shembulli 4.2.3 Të llogaritet integrali:

$$I = \iiint\limits_V (1-x)yzdxdydz,$$

nëse zona V është e kufizuar me rrafshet $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z - 1 = 0$.

Zgjidhja: Në qoftë se bashkësinë V e projektojmë në rrafshin Oxy, fitojmë bashkësinë (fig.4.18).

$$D = D_{xy} = \{(x, y)|0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

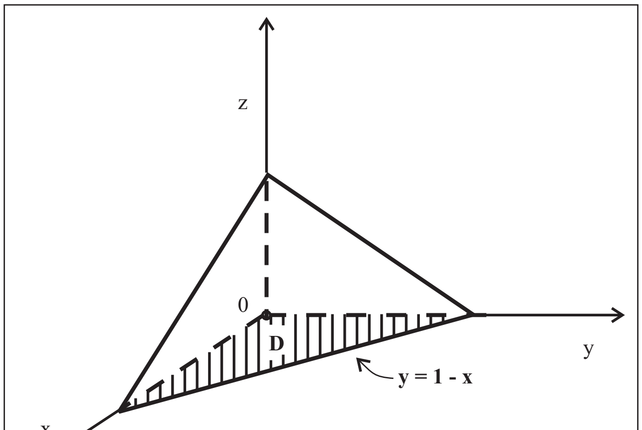


Fig. 4.18.

Sipas formulës (4) kemi:

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_V (1-x)yzdxdydz = \int\limits_0^1 (1-x)dx \int\limits_0^{1-x} ydy \int\limits_0^{1-x-y} zdz = \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)dx \int\limits_0^{1-x} y[z^2]\Big|_0^{1-x-y} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)dx \int\limits_0^{1-x} y(1-x-y)^2 dy = \\
&= \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)dx \int\limits_0^{1-x} [(1-x)^2y - 2(1-x)y^2 + y^3]dy = \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)\left[\frac{(1-x)^2}{2}y^2 - \frac{2(1-x)}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4\right]\Big|_0^{1-x} dx = \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)\left[\frac{(1-x)^4}{2} - \frac{2(1-x)^4}{3} + \frac{(1-x)^4}{4}\right] dx = \frac{1}{24}\int\limits_0^1 (1-x)^5 dx = \\
&= \frac{1}{144}.
\end{aligned}
$$

Në qoftë se zonën V e projektojmë në rrafshin Oyz fitojmë:

$$D' = D_{yz} = \{(y,z)|0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1-y\}.$$

Tash kemi:

$$I = \iiint\limits_V (1-x)yzdxdydz = \int\limits_0^1 ydy \int\limits_0^{1-y} zdz \int\limits_0^{1-y-z} (1-x)dx = -\frac{1}{144}.$$

Shembulli 4.2.4 Të llogaritet integrali:

$$I = \iiint\limits_V zdxdydz$$

ku V është gjysma e sipërme e elipsoidit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1.$$

Zgjidhja: Zbatojmë përsëri formulën (4). Drejtëzat paralele me boshtin Oz ndërprejnë sipërfaqet

$$\varphi(x,y) = 0, \psi(x,y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

në dy pika. Projeksioni i elipsoidit në rrafshin Oxy është:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,$$

prandaj kemi:

$$D = \left\{ (x, y) | -a \leq x \leq a, -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\}.$$

Këndej:

$$I = \iiint\limits_V zdxdydz = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2}}} dy \int\limits_{0}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} zdz =$$

$$= \frac{c^2}{2} \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{2bc^2}{3a^2} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{\pi}{4} abc^2\,.$$

Zgjidhja e detyrës mund të bëhet edhe në një rrugë tjetër, bile më të thjeshtë. Zbatojmë teoremën 2.5, duke ua ndryshuar rolet ndryshoreve x e z. Me P_z shënojmë ndërprerjen e elipsoidit me rrafshin normal me boshtin Oz, dhe duke theksuar se në gjysmën e sipërme të elipsës kemi $z \in [0, c]$, del:

$$I = \int\limits_{0}^{c} dz \iint\limits_{P_z} zdxdy = \int\limits_{0}^{c} zdz \iint\limits_{P_z} dxdy.$$

P_z është zona me kontur:

$$\frac{x^2}{a^2(1 - \frac{z^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 - \frac{z^2}{c^2})} = 1.$$

Meqenëse gjysmëboshtet e saj janë:

$$a' = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}},\ b' = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}},$$

syprina e zonës P_z, sipas shembullit 4.1.4, është $mP_z = \pi a'b' = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$. Prandaj:

$$\iint\limits_{P_z} dxdy = mP_z = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

kështu që:

$$I = \pi ab \int\limits_{0}^{c} z\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{\pi}{4} abc^2.$$

4.2.4 Zëvendësimi i ndryshoreve në integralin e trefishtë

Problemi i zëvendësimit të ndryshoreve në integralin e trefishtë është analog me rastin e integralit të dyfishtë, prandaj ne këtu do të paraqesim formulimin e rezultateve që mund të arrihen me rrugën që u ndoq në pikën 4.1.7.

Le të jetë dhënë zona e matshme $V \subset \mathbf{R}^3$ në sistemin $Oxyz$ dhe zona e matshme $V' \subset \mathbf{R}^3$ në sistemin $O'uvw$. Supozojmë se këto dy zona kufizohen nga sipërfaqe pjesë-pjesë të lëmueshme d.m.th. (sipas rrjedhimit 4.1.1) janë të matshme. E zëmë se midis pikave të këtyre zonave është vendosur një korrespondencë biunivoke dhe se kjo korrespondencë paraqitet me relacionet:

$$x = x(u, v, w),\ \ y = y(u, v, w),\ \ z = z(u, v, w), \tag{1}$$

ose me relacionet e anasjellta të tyre:

$$u = u(x, y, z),\ \ v = v(x, y, z),\ \ w = w(x, y, z). \tag{2}$$

Le të jenë funksionet (1) e (2) të vazhdueshme së bashku me derivatet e tyre të pjesshme në zonat përkatëse. Atëherë ekzistojnë dhe janë të vazhdueshëm Jakobianët:

$$J(u, v, w) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)},\ \ J'(x, y, z) = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$$

dhe, nëse ata janë të ndryshëm nga zero, kemi:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \cdot \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = 1 \tag{3}$$

Si edhe te zonat rrafshe tregohet se relacionet (1) e (2) që plotësojnë kushtin (3) pikat e brendshme të zonës V' i transformon në pika të brendshme të zonës V, pikat e konturit në pika të konturit.

Supozojmë tash se në zonën V është dhënë funksioni $f(x, y, z)$. Tregohet se vlen:

Teorema 4.2.7 *Në kushtet e mësipërme vlen barazimi:*

$$\iiint\limits_{V} f(x.y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]|J(u, v, w)|dudvdw, \tag{4}$$

ku:

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Formula (4) është formula e zëvendësimit të ndryshoreve në integralin e trefishtë. Ajo mbetet e vërtetë edhe për funksionet e kufizuara $f(x, y, z)$ që kanë këputje në një bashkësi pikash me masë (tredimensionale) zero.

Ndër zëvendësimet më të rëndësishme në integralin e trefishtë janë kalimi në koordinata cilindrike dhe sferike.

a. Koordinatat cilindrike

Pozita e një pike M në hapësirë përcaktohet me këto tri madhësi: aplikata z dhe koordinatat polare ρ e φ të projeksionit M' të kësaj pike në rrafshin Oxy (fig. 4.19).

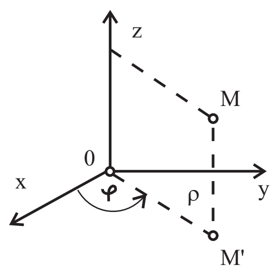


Fig. 4.19.

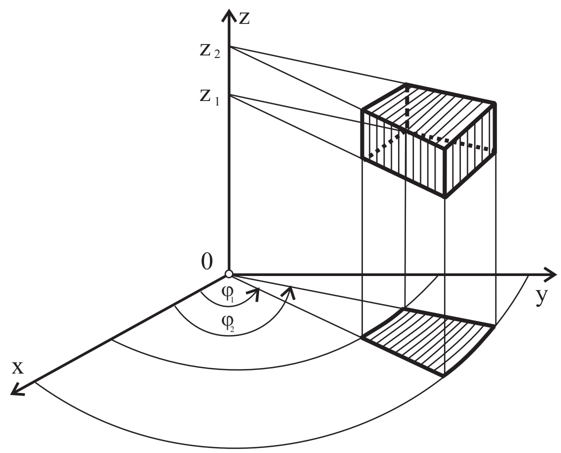


Fig. 4.20.

Madhësitë ρ, φ, z, quhen **koordinatat cilindrike** të pikës M. Nga figura është e qartë se lidhja midis koordinatave karteziane x, y, z dhe koordinatave cilindrike jepet me formulat:

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z. \tag{5}$$

Sipërfaqet koordinative që u korrespondohen koordinatave cilindrike janë:

1) Cilindrat $\rho =$ konst. me bosht Oz $(0 \le \rho < +\infty)$.

2) Gjysmë rrafshet vertikale $\varphi =$ konst. $(O \le \varphi \le 2\pi)$

3) Rrafshet horizontale $z =$ konst. $(-\infty < z < +\infty)$.

Kështu bashkësia V me sipërfaqet 1)-3) ndahet në zona elementare. Në fig. 4.20, shihet se duket një zonë e tillë.

Jakobiani i transformimit (5) është:

$$J(\rho,\varphi,z) = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Formulat (5), siç u tha më lart, japin lidhjen midis koordinatave karteziane e cilindrike. Pra, çdo pike nga bashkësia:

$$\{(\rho,\varphi,z) | 0 \le \rho < +\infty, 0 \le \varphi \le 2\pi, -\infty < z < +\infty\} \tag{6}$$

i korrespondon pika $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ku x, y e z janë koordinatat karteziane të saj. Ndërkaq pika $(0, 0, z_0)$ në zonën (6) pasqyrohet në gjysmë segmentin $(-\infty, z_0)$ kur $z_0 > 0$ ose $(z_0, +\infty)$ kur $z_0 < 0$. Kjo tregon se në pikat e boshtit $0z$ pasqyrimi nuk është biunivok. Mirëpo, formula (4) mbetet e vërtetë sepse masa tredimensionale e gjysmëdrejtëzës është zero.

b. Koordinatat sferike

Pozitën e pikës M në hapësirë e përcaktojmë edhe me ndihmën e këtyre madhësive:

1) distanca ρ ndërmjet origjinës së koordinatave dhe pikës M; 2) këndit θ ndërmjet pjesës pozitive të boshtit Oz dhe vektorit **OM**;

3) këndit φ ndërmjet pjesës pozitive të boshtit Ox dhe projeksionit $\overline{OM'}$ të vektorit **OM** në rrafshin Oxy (fig. 4.21).

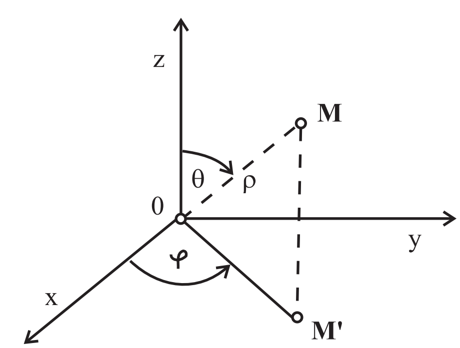


Fig. 4.21.

Madhësitë ρ, θ, φ quhen **koordinata sferike** të pikës M dhe lidhja e tyre me ato karteziane jepet me formulat:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z &= \rho \cos\theta. \end{aligned} \tag{7}$$

Koordinatave sferike u korrespondojnë këto tri familje sipërfaqesh:

1) sferat ρ =konst. $(0 \le \varphi \le 2\pi)$;

2) gjysmëkonat $\theta =$ konst. $(0 \le \theta \le \pi)$;

3) gjysmërrafshet vertikale $\varphi =$ konst. $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

Kështu zona V me sipërfaqet 1) $-$ 3) ndahet në zona elementare. Në fig. 4.22, shihet si duket një zonë e tillë.

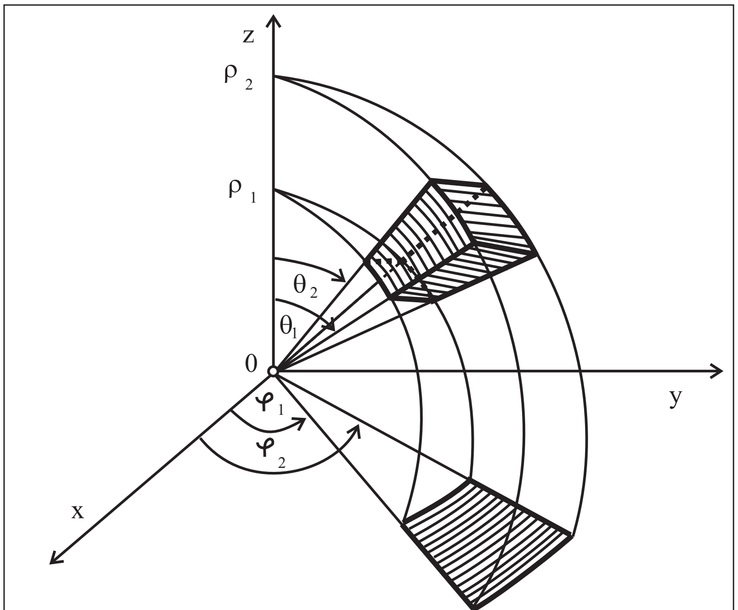


Fig. 4.22.

Jakobiani i transformimit (7) është:

$$J(\rho,\theta,\varphi)=\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=\rho^2\sin\theta$$

Formulat (7) realizojnë pasqyrimin e zonës $\{(\rho,\theta,\varphi)|\ 0\le\rho<+\infty,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$ në tërë hapësirën $Oxyz$. Ky pasqyrim, si ai në koordinata cilindrike është kudo biunivok, me përjashtim të pikave që ndodhen në boshtin Oz. Çdo pike të tillë $(0,0,z_0)$ i korrespondon një segment $\rho=z_0,\ \theta=0,\ 0\le\varphi\le 2\pi$ (ose $\theta=\pi$ për $z_0<0$), kurse pikës (0,0,0) i korrespondon drejtkëndëshi:

$$\{(\rho,\theta,\varphi)|\ \rho=0,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}.$$

Por, formula (4) mbetet e vërtetë kur marrim zëvendësimet (7), sepse masa tredimensionale e segmentit dhe e drejtkëndëshit është zero.

Shembuj 4.2.1 1. Të llogaritet:

$$I=\iiint\limits_V z\sqrt{z^2-x^2-y^2}dx\,dy\,dz,$$

ku V është trupi i kufizuar me planet $z=R$ e $z=2R$ dhe sipërfaqen cilindrike $x^2+y^2=R^2$.

Zgjidhja: Nga formulat (5) shihet se zona V është pasqyrim i zonës

$$V'=\{(\rho,\varphi,z)|0\le\rho\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ R\le z\le 2R\}.$$

Funksioni nënintegral në ndryshoret e reja bëhet:

$$z \cdot \sqrt{z^2 - x^2 - y^2} = z\sqrt{z^2 - \rho^2}.$$

Meqenëse jakobiani është $J = \rho$ kemi:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_R^{2R} z dz \int\limits_0^R \rho\sqrt{z^2 - \rho^2} d\rho.$$

Këndej:

$$I = \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_R^{2R} z[z^3 - (z^2 - R)^{3/2}]dz = \frac{2\pi R^5}{15}(31 - 9\sqrt{3}).$$

2. Të llogaritet:

$$I = \iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dxdydz,$$

ku zona V kufizohet me elipsoidin:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Zgjidhje: Projeksioni i zonës V në planin Oxy është zona:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Marrim zëvendësimet:

$$x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi,\ z = cu.$$

Atëherë zona V pasqyrohet në zonën:

$$V' = \{(\rho, \varphi, u)|\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ -\sqrt{1-\rho^2} \leq u \leq \sqrt{1-\rho^2}\}.$$

Meqë J= abc ρ, fitojmë:

$$\begin{aligned} I \quad &= abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} (\rho^2 + u^2)du = \\ &= 4\pi abc\int_0^1 \left(\rho^2\sqrt{1-\rho^2} + \tfrac{(1-\rho^2)\sqrt{1-\rho^2}}{3} \right) \rho d\rho = [1 - \rho^2 = t^2] = \\ &= 4\pi abc\int_0^1 \left[(1-t^2)t^2 + \tfrac{t^4}{3}\right] dt = \tfrac{4abc\pi}{5}. \end{aligned}$$

3. Të llogaritet:

$$I = \iiint\limits_V x^2 dxdydz,$$

nëse zona V kufizohet me sferën:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Zgjidhje: Kalojmë në koordinata sferike:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\theta \end{aligned}$$

dhe shohim se zona V kalon në zonën:

$$V' = \{(\rho, \theta, \varphi) \,|\, 0 \leq \rho \leq R,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Prandaj:

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_V x^2 dxdydz = \iiint\limits_{V'} \rho^4 \sin^3\theta \cos^2\varphi d\rho d\theta d\varphi = \\ &= \int\limits_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^R \rho^4 d\rho = \frac{R^5}{2\cdot 5} \int\limits_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} (1+\cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{R^5\pi}{5} \int\limits_0^\pi (cos^2\theta - 1) d(\cos\theta) = \frac{4R^5\pi}{15}. \end{aligned}$$

4. Të llogaritet:

$$I = \iiint\limits_V (x+y)^2 dxdydz,$$

ku V është zona e kufizuar nga sipërfaqet:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq z$$

Zgjidhje: Ekuacioni i sferës $x^2+y^2+z^2 = 2$ në koordinata sferike është $\rho = \sqrt{2}$, kurse ekuacioni i paraboloidit $x^2 + y^2 = z$ është $\rho = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

Prerja e këtyre sipërfaqeve është:

$$\sqrt{2} = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta},\ \sqrt{2}\sin^2\theta = \cos\theta,$$

$$\sqrt{2}\cos^2\theta + \cos\theta - 2 = 0,$$

d.m.th.:

$$cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \theta = \frac{\pi}{4}$$

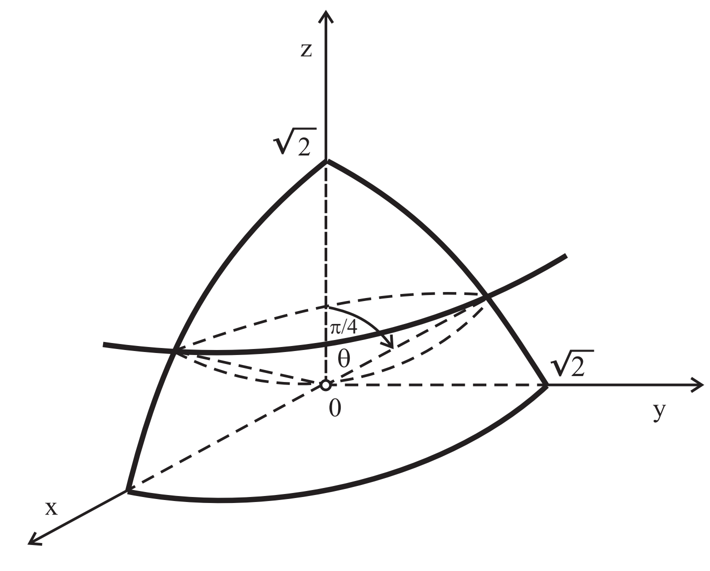


Fig. 4.23.

Bashkësia V pasqyrohet në bashkësinë $V_1 \cup V_2$ (fig. 4.23) ku:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \left\{(\rho,\theta,\varphi)\,|\,0 \le \rho \le \sqrt{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\},\\
V_2 &= \left\{(\rho,\theta,\varphi)\,|\,0 \le \rho \le \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta},\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}.
\end{aligned}$$

Prandaj:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_V (x+y)^2 dxdydz =\\
&= \iiint\limits_{V_1} \rho^4 \sin^3\theta(\cos\varphi+\sin\varphi)^2 d\rho d\theta d\varphi + \iiint\limits_{V_2} \rho^4 \sin^3\theta(\cos\varphi+\sin\varphi)^2 d\rho d\theta d\varphi\\
&= \int\limits_0^{2\pi}(1+\sin 2\rho)d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta d\theta \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho^4 d\rho + \int\limits_0^{2\pi}(1+\sin 2\varphi)d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta \int\limits_0^{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} \rho^4 d\rho\\
&= \frac{8\sqrt{2}\pi}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta d\theta + \frac{2\pi}{5}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5\theta}{\sin^7\theta} d\theta;
\end{aligned}$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta d\theta \quad = \quad \int\limits_0 \frac{\pi}{4}(1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta d(\cos\theta) =$$

$$= \quad -[\cos\theta]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{3}[\cos^3\theta]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12};$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5\theta}{\sin^7\theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin^2\theta)^2\cos\theta}{\sin^7\theta} d\theta = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{(1-t^2)^2}{t^7} dt = \frac{1}{6}.$$

Këndej:

$$\iiint_V (x+y)^2 dxdydz = \frac{\pi}{16}(16\sqrt{2} - 19).$$

4.2.5 Zbatimi gjeometrik i integralit të dyfishtë e të trefishtë

Në këtë pikë shohim cili është zbatimi gjeometrik i integralit të dyfishtë e të trefishtë, një pjesë të të cilit e njohim nga shqyrtimet e mëparme.

a. Syprina e figurave të rrafshta

Dihet se kur zona D është rrafshe dhe e matshme, atëherë:

$$mD = \Delta = \iint_D dxdy. \tag{1}$$

Kur zona e matshme:

$$D = \begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \end{cases}$$

është normale ndaj boshtit Ox, atëherë formula (1) merr trajtën:

$$\Delta = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy = \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]dx. \tag{2}$$

Për zonën D që është sektor polar, d.m.th.:

$$D = \{(\rho,\varphi) \,|\, \alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le \rho \le \rho(\varphi)\},$$

duke marrë formulën për zëvendësimin e ndryshoreve gjejmë:

$$\Delta = \iint_D dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \rho d\rho = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi. \tag{3}$$

Vërejmë se formulat (2) e (3) i njohim nga zbatimet gjeometrike të integralit të caktuar (i njëfishtë).

Shembulli 4.2.5 Të llogaritet syprina e figurës që kufizohet me lakoren:

$$(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$$

Zgjidhje: Vërejmë se lakorja është simetrike ndaj boshtit Ox dhe se $x \geq 0$. Vija e pret boshtin Ox në pikat $x=0$ e $x=2a$. përveç kësaj lakorja është e kufizuar, sepse $x^4 \leq 2ax^3$, d.m.th. $x \leq 2a$ dhe $y^4 \leq 2ax^3 \leq 16a^4$, prej nga del se $|y| \leq 2a$. Prandaj, lakorja duket si në fig. 4 .24.

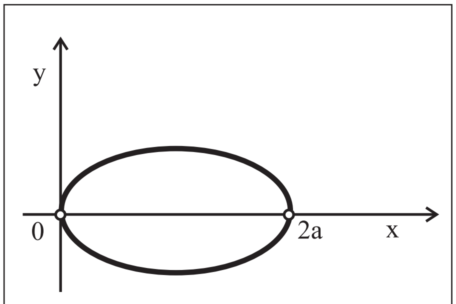


Fig. 4.24.

Ekuacioni i lakores në koordinata polare është $\rho = 2a\cos^3\varphi$, ku $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Në saje të simetrisë kemi:

$$\Delta = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos^3\varphi} \rho d\rho = 4a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi d\varphi = \frac{5}{8}\pi a^2$$

Shembulli 4.2.6 Të llogaritet syprina e figurës së kufizuar me lakoren:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2} \quad (x>0, y>0).$$

Zgjidhje: Marrim zëvendësimin:

$$x = a\,\rho\cos^2\varphi,\ y = b\,\rho\sin^2\varphi.$$

Kemi $J = 2ab\rho\cos\varphi\sin\varphi$, kurse ekuacioni i vijës bëhet:

$$\rho = \sqrt{\frac{a^2\cos^4\varphi}{h^2}+\frac{b^2\sin^4\varphi}{k^2}},\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

prandaj:

$$\Delta \;=\; \iint\limits_D dxdy = 2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\frac{a^2\cos^4\varphi}{h^2}+\frac{b^2\sin^4\varphi}{k^2}}} \rho d\rho =$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^2\cos^5\varphi\sin\varphi}{h^2}+\frac{b^2\sin^5\varphi\cos\varphi}{k^2}\right)d\varphi = \\
&= \quad \frac{ab}{6}\left[\frac{a^2}{h^2}\cos^6\varphi-\frac{b^2}{k^2}\sin^6\varphi\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).
\end{aligned}
$$

b. Vëllimi i trupave

Në vërejtjen 1. të pikës 4.1.3, konstatuam se vëllimi i trupit cilindrik me sipërfaqe anësore paralele me boshtin Oz dhe të kufizuar nga rrafshi Oxy dhe sipërfaqja $z=f(x,y)\geq 0$ e cila projektohet në zonën D, jepet me formulën:

$$V=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \tag{4}$$

(funksioni $f(x,y)$ konsiderohet i vazhdueshëm, kurse zona D e matshme).

Përveç kësaj, në pikën 1.2. pamë se vëllimi i trupit të matshëm V jepet me formulën:

$$mV=\Delta=\iiint\limits_{V} dxdydz. \tag{5}$$

Nga kjo formulë nxirren formula të tjera të njohura.

P.sh. formula (4) nxirret nga (5) me ndihmën e teoremave për kalimin nga integrali i trefishtë në integral të përsëritur:

$$mV=\iiint\limits_{V} dzdydz=\iint\limits_{D} dxdy\int\limits_{0}^{f(x,y)} dz=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$$

Kur njihet prerja P_x e trupit V me rrafshe normale me boshtin Ox fitojmë:

$$mV=\iiint\limits_{V} dxdydz=\int\limits_{a}^{b} dx\iint\limits_{P_x} dy\,dz=\int\limits_{a}^{b} mP_x dx.$$

Vëllimi i trupit cilindrik me përftuese drejtvizore paralele me boshtin Oz që projektohet në D dhe kufizohet nga poshtë e lart me sipërfaqet $\varphi(x,y)\leq\psi(x,y)$ jepet me formulën:

$$mV=\iint\limits_{D}[\psi(x,y)-\varphi(x,y)]dxdy,$$

e cila fitohet nga (5) (duke supozuar se $\varphi(x,y)$ e $\psi(x,y)$ janë funksione të vazhdueshme në zonën e matshme D). Me të vërtetë:

$$mV=\iiint\limits_{V} dxdydz=\iint\limits_{D} dxdy\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz=\iint\limits_{D}[\psi(x,y)-\varphi(x,y)]dxdy.$$

Shembulli 4.2.7 Të llogaritet vëllimi i trupit të kufizuar me cilindrin $x^2+y^2=Rx$ dhe pjesën e sferës $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Zgjidhje: Projeksioni i ndërprerjes së dy sipërfaqeve në rrafshin Oxy është rrethi $x^2+y^2=Rx$. Zona e integrimit (fig. 4.25) është:

$$D=\{(x,y)|\ 0\le x\le R,\ -\sqrt{Rx-x^2}\le y\le \sqrt{Rx-x^2}\ \}.$$

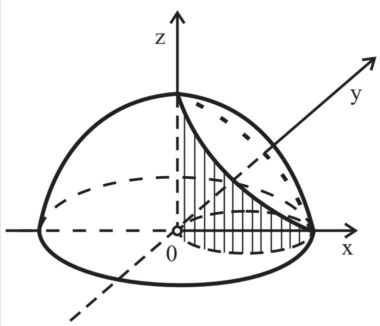


Fig. 4.25.

Meqenëse trupi është simetrik ndaj rrafshit Oxy fitojmë:

$$mV=2\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy.$$

Më tej, meqë trupi i dhënë është simetrik edhe ndaj rrafshit Oxz, pas marrjes së koordinatave polare fitojmë:

$$\frac{mV}{4}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=-\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[R^2-\rho^2]^{\frac{3}{2}}|_0^{R\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{R^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1\sin^3\varphi)d\varphi=\frac{R^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi+\frac{R^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)d(\cos\varphi)=$$

$$=\frac{R^3}{3}[\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{R^3}{3}\left[\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Prandaj:

$$mV=\frac{4R^3}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}).$$

c. Llogaritja e syprinave të sipërfaqeve

Le të jetë dhënë sipërfaqja $\sum$ me ekuacion $z=f(x,y)$, ku funksioni $f(x,y)$ është i përcaktuar në bashkësinë e matshme D të rrafshit Oxy (fig. 4.26).

Së pari japim përkufizimin e syprinës së zonës $\sum$ e pastaj do të shohim si e llogarisim atë. Për këtë qëllim supozojmë se $f(x,y)$ në bashkësinë D është i vazhdueshëm së bashku me derivatet e tij të pjesshme $f'_x(x,y)$ dhe $f'_y(x,y)$. Atëherë sipërfaqja $\sum$ në çdo pikë të saj ka rrafsh tangjent jo paralel me boshtin Oz. Ekuacioni i këtij rrafshi në pikën $P_0(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ është (pika 4.2.2):

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

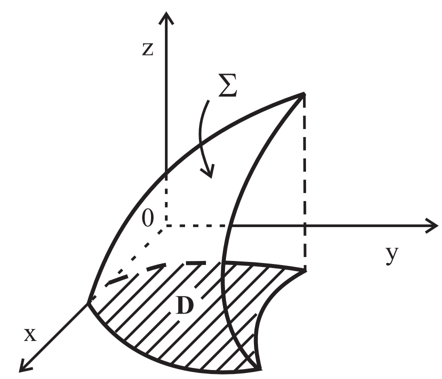


Fig. 4.26.

Le të jetë $\tau = \{D_i\}_{i=0}^{n-1}$ një ndarje e zonës D me anë të dy familjeve të drejtëzave paralele ashtu që distanca midis dy drejtëzave fqinje të të njëjtës familje është konstante.

Le të jetë $D_i \in \tau$ zonë e brendshme e ndarjes τ, d.m.th. e tillë që $D_i \cap \partial D = \emptyset$. D_i është e matshme dhe masën e saj e shënojmë me $\triangle_i$. Le të jetë $M_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ pikë e çfarëdoshme e zonës D_i dhe në pikën përkatëse $P_i(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i) = \zeta_i)$ të sipërfaqes $\sum$, konstruktojmë rrafshin tangjent i cili si theksuam, ekziston. Konsiderojmë atë pjesë të rrafshit tangjent që projektohet në D_i. Në përgjithësi edhe ajo zonë është (fig. 4.27) katërkëndësh, prandaj është e matshme. E shënojmë atë me S_i^* kurse masën e sajë me S_i. Këtë proces e zgjerojmë për të gjitha pjesët e ndarjes dhe formojmë shumën:

$$\sigma_\tau = \sum_{i=0}^{n-1} S_i \tag{6}$$

Limitin e shumës (6), nëse ekziston, kur $\lambda_\tau \to 0$ (λ_τ është diametri maksimal i zonave të ndarjes) e quajmë syprinë të zonës sipërfaqësore $\sum$. Pra nëse me S shënojmë syprinën e $\sum$ kemi:

$$S = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} S_i. \tag{7}$$

Transformojmë shumën (7). Për këtë qëllim gjejmë lidhjet midis $\triangle_i$ dhe S_i. Me γ_i shënojmë këndin që përfshinë rrafshi tangjent me rrafshin Oxy.

Meqenëse $\triangle_i$ është projeksion i sipërfaqes S_i në rrafshin Oxy, shohim se $\triangle_i = S_i \cdot \cos\gamma_i$, ose:

$$S_i = \frac{\triangle_i}{\cos\gamma_i}.$$

γ_i është njëkohësisht kënd në mes të boshtit Oz dhe normales së rrafshit tangjent të konstruktuar në pikën $P_i(\xi_i, \eta_i, \varphi_i)$:

$$z - z_i = f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i).$$

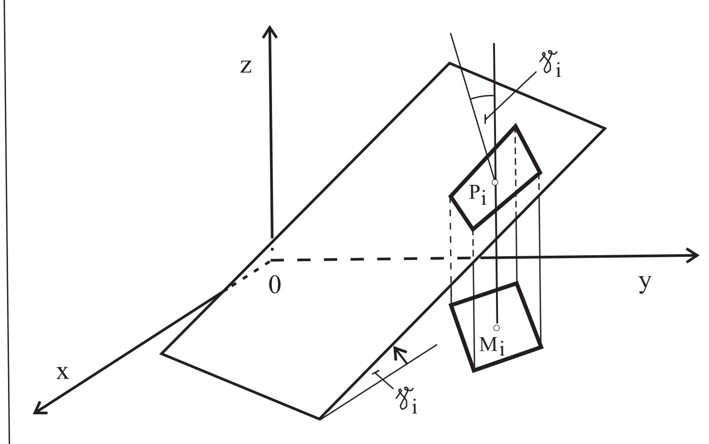


Fig. 4.27.

Meqenëse:

$$cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}}$$

atëherë:

$$S_i = \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)} \cdot \triangle_i.$$

Pasi të zëvendësojmë këtë shprehje në formulën (7) fitojmë

$$S = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)} \cdot \triangle_i. \tag{8}$$

σ_τ është një shumë integrale e funksionit $\sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}$ të vazhdueshëm në D, prandaj ajo ka limit kur $\lambda_\tau \to 0$ integralin e dyfishtë në D, kështu që limiti (8) ekziston (sipas vetisë 8 të integraleve të caktuara) dhe ka vend formula:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}dxdy. \tag{9}$$

Kështu vërtetuam këtë rezultat:

Teorema 4.2.8 *Syprina e sipërfaqes $\sum$ e dhënë me ekuacionin $z = f(x, y)$, ku $f(x, y)$ bashkë me derivatet e veta të pjesshme është i vazhdueshëm në zonën e matshme D, llogaritet me formulën* (9).

Vërejtja 1. Në mënyrë analoge përcaktohet syprina e sipërfaqes së dhënë me ekuacione të formës $x = \varphi(y, z)$ në D' ose $y = \psi(x, z)$ në D'' ku D' e D'' janë zona të matshme rrafshe në Oyz përkatësisht Oxz.
Vërejtja 2. Po theksojmë (pa vërtetim) se nocioni dhe vlera e syprinës së një sipërfaqeje është invariante në lidhje me sistemin e koordinatave, d.m.th është po ajo për të gjithë sistemet koordinative që i marrim.

Shembulli 4.2.8 Të gjendet syprina e asaj pjese të sipërfaqes së cilindrit $x^2 + y^2 = a^2$ të cilën e ndërprenë cilindri $x^2 + z^2 = a^2$.

Zgjidhja: Në fig. 4.28. është marrë $\frac{1}{8}$ e sipërfaqes, syprina e së cilës kërkohet. Projeksioni i asaj zone sipërfaqësore në rrafshin Oxz është zona:

$$D'' = \{(x, y) | x^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, z \geq 0\},$$

Nga $x^2 + y^2 = a^2$ kemi $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, prandaj:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

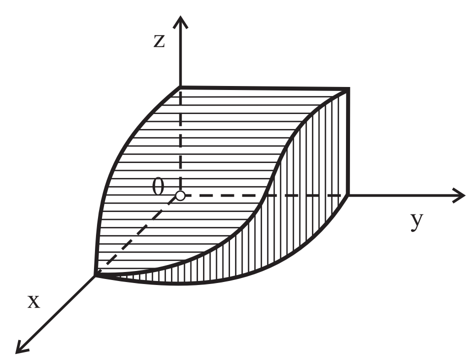


Fig. 4.28.

Tash:

$$\frac{1}{8}S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dxdz = \iint\limits_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dxdz =$$

$$= \int\limits_0^a \left[\int\limits_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dz \right] dx = a \int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int\limits_0^{\sqrt{a^3 - x^2}} dz = a^2,$$

prandaj:

$$S = 8a^2.$$

4.2.6 * Zbatime fizike të integraleve të dyfishta dhe të trefishta

Në këtë pikë shohim zbatimet më të rëndësishme të integraleve të dyfishta e të trefishta në fizikë.

a. Masa e një pllake

Marrim një pllakë materiale në trajtë trupi cilindrik me bazë D dhe me trashësi $h = 1$. Supozojmë se zona D është e matshme dhe që pllaka nuk është uniforme, d.m.th. densiteti është funksion i pikës M. Sistemin koordinativ kënddrejtë në hapësirë e marrim ashtu që në rrafshim Oxy të shtrihet baza e pllakës. Le të jetë densiteti $\rho = \rho(x, y)$ funksion i vazhdueshëm i këtyre dy ndryshoreve. Për të përcaktuar masën e pllakës e marrim një ndarje $\tau = \{D_i\}$ të zonës rrafshe D, ku $D_i,\ i = 1, 2, ..., n-1$, është zonë e matshme dhe masën e saj e shënojmë me $\triangle_i$. Le të jetë $M_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ pikë e çfarëdoshme e zonës D_i dhe supozojmë se densiteti i pllakës së i-të është $\rho_i = \rho(\xi_i, \eta_i)$. Masa m_i e lëndës së shpërndarë në këtë pllakë është: $m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i)\triangle_i$. Pasi të shumojmë për $i = 0, 1, ..., n-1$, kemi:

$$\sigma_\tau = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i(\xi_i, \eta_i) \cdot \triangle_i \tag{1}$$

Është e natyrshme që masa e pllakës të përkufizohet si limit i shumës (1), në qoftë se ky limit ekziston, kur $\lambda_\tau = \max\{d(D_i)\} \to 0$. Shuma (1) është shumë integrale e funksionit të vazhdueshëm $\rho(x, y)$ në D, prandaj:

$$m = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = \iint\limits_D \rho(x, y)dxdy. \tag{2}$$

b. Masa e një trupi të cilit i dihet densiteti

Në vërejtjen 1. te integralet e trefishta ne pamë se masa e një trupi V me densitet të ndryshueshëm $\rho(x, y, z)$ të vazhdueshëm në V, është:

$$m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz.$$

c. Momentet statike dhe qendra e rëndesës së një pllake

Le të jetë dhënë pllaka D me densitet $\rho = \rho(x, y)$, të vazhdueshëm si në a). Kërkohet përcaktimi dhe llogaritja e momenteve statike dhe qendrës së rëndesës së kësaj pllake. Sistemin koordinativ $Oxyz$ e marrim si në pikën a). Le të jetë

$\tau = \{D_i\}$ një ndarje e zonës D dhe konsiderojmë zonën e i-të, e në të një pikë të çfarëdoshme $P_i(\xi_i, \eta_i)$. Supozojmë se në D_i densiteti është konstant dhe se masa e përafërt e pllakës është përqendruar në këtë pikë. Me $M_x^{(i)}$ e $M_y^{(i)}$ shënojmë momentet statike të pikës P_i ndaj boshteve koordinative. Kemi:

$$M_x^{(i)} = \rho(P_i)\,\eta_i\,\triangle_i, \quad M_y^{(i)} = \rho(P_i)\,\xi_i\,\triangle_i.$$

Pasi të shumojmë për $i = 0, ..., n-1$ dhe të kalojmë në limit për $\lambda_\tau \to 0$, kur ky limit ekziston, fitojmë:

$$M_x = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(P_i)\eta_i \triangle_i = \iint\limits_D \rho(x,y) y dx dy, \tag{3}$$

$$M_x = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(P_i)\xi_i \triangle_i = \iint\limits_D \rho(x,y) x dx dy, \tag{4}$$

ku M_x është momenti statik i pllakës ndaj boshtit Ox kurse M_y momenti statik ndaj boshtit Oy.

Në rastin kur zona D është normale ndaj boshtit Ox, d.m.th.:

$$D = \{(x,y) | a \le x \le b, \ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

ku $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ janë të njëvlershme dhe të vazhdueshme në $[a,b]$, formulat (4) dhe (5) bëhen, përkatësisht:

$$M_x = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} y\rho(x,y)dy, M_y = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} x\rho(x,y)dy$$

Në rastin kur $\rho(x,y) = 1$, fitojmë formulat:

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b [\psi^2(x) - \varphi^2(x)]dx,$$

$$M_y = \int\limits_a^b x[\psi(x) - \varphi(x)]dx.$$

Si dihet nga fizika qendër e rëndesës të pllakës D quhet pika $P(\xi, \eta)$ e tillë që:

$$M_x = m \cdot \eta, \ M_y = m \cdot \xi,$$

ku m është masa e pllakës. Tash duke pasur parasysh (2), (3) e (4) fitojmë

$$\xi = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy}$$

,

$$\eta = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy}.$$

d. Momentet statike dhe qendra e rëndesës së një trupi

Supozojmë se trupi V është i matshëm dhe ka densitet $\rho = \rho(x,y,z)$ të vazhdueshëm në V. Duke vepruar në analogji siç u veprua në c. fitojmë:

I. Për momentet statike ndaj rrafsheve koordinative:

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dxdydz.$$

Qendra e rëndesës është pika $P(\xi,\eta,\rho)$, ashtu që:

$$\xi = \frac{M_{yz}}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz},$$

$$\eta = \frac{M_{xx}}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz},$$

$$\zeta = \frac{M_{xy}}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz}.$$

Shembulli 4.2.9 Të gjendet qendra e rëndesës e trupit homogjen me densitet $\rho = 1$ të kufizuar me sipërfaqet $x^2 + z^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$.

Zgjidhje: Pjesa e katërt e trupit të dhënë shihet në fig. 4.29. Meqenëse trupi është simetrik ndaj boshtit Oz, qendra e rëndesës do të gjendet në boshtin Oxy, prandaj $\xi = 0, \eta = 0$. Pjesa e tretë e trupit projektohet në rrafshin Oxy në trekëndëshin e mbyllur $D = \{(x,y)|0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x\}$ prandaj vëllimi i trupit është:

$$mV = 8\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz = 8\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x \sqrt{a^2-x^2}dy = \frac{8}{3}a^3;$$

Tash:

$$\xi = \frac{M_{yz}}{\iiint\limits_V dxdydz} = \frac{8}{\frac{8}{3}a^2}\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} zdz = \frac{3}{2a^3}\int\limits_0^a (a^2-x^2)dx = \frac{8}{3}a,$$

dhe kështu shohim se qendra e rëndesës të trupit është pika $P\Big(0, 0, \dfrac{3}{8}a\Big)$.

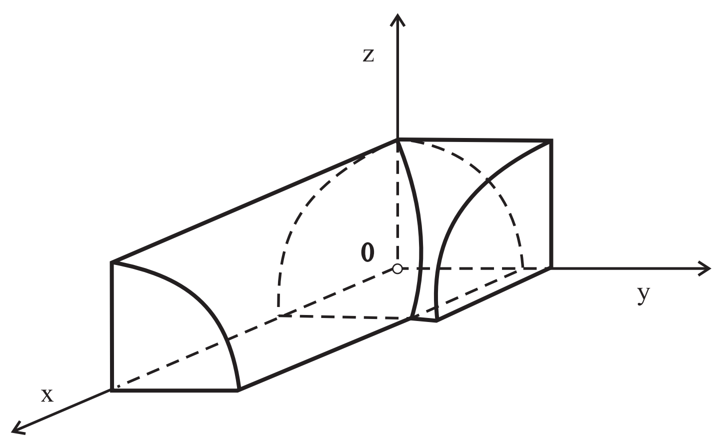


Fig. 4.29.

ç. Momenti i inercisë së një pllake

Që të përcaktohet momenti i inercisë ndaj një boshti Ox merret një ndarje e çfarëdoshme $\tau = \{D_i\}$ të zonës (pllakës) D. Në pjesën e i-të merret pika $P_i(\xi_i, \eta_i)$. Nëse me $I_x^{(i)}$ shënohet momenti i inercisë së zonës D shohim se:

$$I_x^{(i)} \approx \eta_1^2 \cdot \rho(\xi_i, \eta_i)\triangle_i.$$

Shumojmë për $i = 0, ..., n-1$ dhe limitin, nëse ekziston, të shprehjes:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \eta_1^2 \cdot (\xi_i, \eta_i)\triangle_i$$

kur $\lambda_\tau \to 0(\lambda_\tau = \max\{\mathrm{d|D_i}\})$, e quajmë moment i inercisë ndaj boshtit Ox dhe e shënojmë me I_x. Pra:

$$I_x = \lim_{\lambda_\tau\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i^2\rho(\xi_i, \eta_i)\triangle_i = \iint\limits_D y^2\rho(x, y)dxdy.$$

Ngjashëm gjejmë:

$$I_y = \lim_{\lambda_\tau\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^2\rho(\xi_i, \eta_i)\triangle_i = \iint\limits_D x^2\rho(x, y)dxdy.$$

Momenti i inercisë ndaj fillimit të koordinatave është:

$$I_0 = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\rho(\xi_i, \eta_i)\triangle_i = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy.$$

d. Momenti i inercisë së një trupi

Le të jetë V si në pikën b. Në analogji me rastin e pllakës, për momentet e inercisë ndaj boshteve koordinative do të kemi:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz,$$

dhe ngjashëm gjejmë I_y e I_z. Për momentet e inercisë ndaj rrafsheve koordinative kemi:

$$I_{xy} = \iiint_V z^2(x, y, z)\rho dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint_V x^2(x, y, z)\rho dxdydz,$$

$$I_{xz} = \iiint_V y^2(x, y, z)\rho dxdydz.$$

Momenti i inercisë ndaj origjinës së koordinatave është:

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz,$$

Shembulli 4.2.10 Të gjenden momentet e inercisë ndaj rrafsheve koordinative për trupin homogjen V me densitet $\rho = 1$, të kufizuar me sipërfaqet:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,\ y = 0,\ z = 0 \quad (a, b, c > 0).$$

Zgjidhje: Kemi p.sh.:

$$I_{xy} = \iiint_V z^2 dxdydz,$$

ku:

$$V = \Big\{(x, y, z) |\, 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\Big(1 - \frac{x}{a}\Big),\ 0 \le z \le c\Big(1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\Big)\Big\}.$$

Marrim zëvendësimet:

$$x = a\rho\cos^2\varphi,\ \ y = b\varphi\sin^2\varphi,\ \ z = z.$$

Atëherë:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq z \leq c(1-\rho),\ y = 2ab\,\rho \sin\varphi \cos\varphi,$$

dhe:

$$I_{xy} = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{e(1-\rho)} z^2 dz = \frac{2}{3} abc^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi\ d\varphi.$$

$$\int_0^1 \rho\ (1-\rho)^3\ d\rho = \frac{1}{3}\ abc^3 \int_0^1 \rho(1-3\rho+3\rho^2-\rho^3) d\rho = \frac{abc^3}{60}.$$

Ngjashëm gjejmë:

$$I_{yz} = \frac{a^3bc}{60}, \quad I_{yz} = \frac{ab^3c}{60}.$$

4.2.7 Integralet e n-fishta

Në këtë pikë përgjithësohen rezultatet e dhëna për integralet e dyfishtë dhe të trefishtë.

Le të jetë $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ një bashkësi n-dimensionale e matshme ((shih pikën 4.2.1), masën e së cilës, si zakonisht, e shënojmë me Δ, ndërsa $\tau = \{\Omega\}_{i=0}^{n-1}$ një ndarje e zonës Ω në zona të matshme. Le të jetë $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksion i definuar në zonën Ω. Në pjesën Ω_i marrim në mënyrë të çfarëdoshme pikën $M_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n(i))$ dhe ndërtojmë shumën:

$$\sigma_\tau = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}) \cdot \Delta_i, \tag{1}$$

ku $\Delta_i = m\Omega i$.

Limitin I të shumës (1), nëse ekziston, kur $\lambda_\tau \to 0$ (λ_τ është diametri maksimal i zonave te ndarjes) e quajmë **integral të n-fishtë** të funksionit u= $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ në zonën Ω dhe e shënojmë:

$$I = \overbrace{\int\!\!\int_{\Omega} \cdots \int}^{\text{n-herë}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \tag{2}$$

Pa ndonjë vështirësi për integralin n-fishtë (2) mund të formulohen e vërtetohen rezultatet analoge me ato të integralit të dyfishtë e të trefishtë. P.sh. kur zona Ω është drejtkëndëshe d.m.th:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

dhe funksioni f i vazhdueshëm në Ω, vlen formula për kalimin në integral të përsëritur:

$$\overbrace{\int\int_{\Omega}\cdots\int}^{\text{n-herë}} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n=\int_{a_1}^{b_1}dx_1\int_{a_2}^{b_2}dx_2\ldots\int_{a_n}^{b_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_n.$$

Ndërsa, në rastin kur:

$$\Omega=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid a\le x_1\le b,\ \varphi_1(x_1)\le x_2\le\psi_1(x_1),\ldots,$$
$$\ldots,\ \varphi_{n-1}\ (x_1,x_2,\ \ldots,x_{n-1})\le x_n\le\psi_{n-1}\ (x_1,x_2,\ldots,\ x_{n-1})\}:$$

ku funksionet $\varphi_i,\psi_i, i=1,\ldots n-1$, janë të vazhdueshme, ka vend formula:

$$I=\int_a^b dx_1\int_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)}dx_2\ldots\int_{\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})}f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_n. \tag{3}$$

Vetëm po cekim se edhe për integralet e n-fishta mund të fitohen formulat e ngjashme me ato të fituara për integralet e trefishta që lejojnë kalimin nga integrali i n-fishtë në integrale të shumëfishiteteve të tillë që të gjithë se bashku japin n.

Formula për zëvendësimin e ndryshoreve për integralin e n-fishtë është analoge me formulat përkatëse të fituara për integralet e dyfishta e të trefishta. Konkretisht në qoftë se funksionet që pasqyrojnë në mënyrë buinivoke zonën Ω' në zonën Ω :

$$x_i=x_i(y_1,y_2,..,y_n),\ i=1,2,\ldots,n,$$

plotësojnë kushtet përkatëse të vazhdueshmërisë dhe të derivueshmërisë atëherë vlen formula:

$$I_n=\overbrace{\int\ \int_{\Omega}\cdots\int}^{\text{n-herë}} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ dx_1\ dx_2,\ldots dx_n,$$

$$=\overbrace{\int\ \int_{\Omega'}\cdots\int}^{\text{n-herë}} f[x_1(y_1,y_2,\ldots,y_n),\ldots,x_n(y_1,y_2,\ldots,y_n)]\mid J(y_1,y_2,\ldots,y_n|\,dy_1$$
$$\cdot dy_2\ldots dy_n,$$

ku:

$$J\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial x_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1}\,\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial x_2}{\partial y_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1}\,\frac{\partial x_n}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial x_n:}{\partial y_n}\end{vmatrix}$$

Shembulli 4.2.11 Të llogaritet integrali:

$$I = \overbrace{\int\int_{\Omega}\cdots\int}^{\text{n-herë}} dx_1\ dx_2, \dots dx_n,$$

ku zona Ω është e përcaktuar nga pabarazimet:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0,\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1.$$

Zgjidhja: Që të përdoret formula (3) duhet të shohim kufijtë në të cilët do të lëvizin ndryshoret përkatëse.

Për x_n kemi:

$$0 \leq x_n \leq 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1},$$

ndërsa që t'i gjejmë kufijtë e ndryshores x_{n-1} marrim prerjen me $x_n = 0$ dhe kemi:

$$0 \leq x_{n-1} \leq 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-2}.$$

Duke e vazhduar këtë proces gjejmë:

$$0 \leq x_1 \leq 1.$$

Prandaj:

$$I = \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^{1-x_1} dx_2 \int\limits_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \dots \int\limits_0^{1-x_1-x_2-\dots-x_{n-1}} dx_n =$$

$$\int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^{1-x_1} dx_2 \dots \int\limits_0^{1-x_1-\dots-x_{n-2}} (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}) dx_{n-1} =$$

$$\int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^{1-x_1} dx_2 \dots \int\limits_0^{1-x_1-\dots-x_{n-3}} \frac{(1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-2})^2}{2!} dx_{n-2} = \dots = \frac{1}{n!}.$$

Shembulli 4.2.12 Të llogaritet integrali:

$$I_n = \overbrace{\int\int_{\Omega}\cdots\int}^{\text{n-herë}} dx_1\ dx_2, \dots dx_n :$$

ku Ω është rruzulli i mbyllur n-dimensional me qendër në fillimin e koordinatave e me rreze a, d.m.th.:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,|\, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2\}.$$

Zgjidhja: Marrim zëvendësimet:

$$x_1 = ay_1,\ x_2 = ay_2, \ldots, x_n = ay_n.$$

Jakobiani i këtij transformimi është:

$$J(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} a & o \ldots 0 \\ 0 & a \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \ldots \\ 0 & 0 \ldots a \end{vmatrix} = a^n,$$

ndërsa zona Ω pasqyrohet në zonën:

$$\Omega' = \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \,|\, y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \leq 1\}.$$

Prandaj:

$$I_n = a^n \overbrace{\int \int_{\Omega} \cdots \int}^{\text{n-herë}} dx_1\ dx_2, \ldots dx_n :$$

dhe nëse shënojmë:

$$K_n = \overbrace{\int \int_{\Omega'} \cdots \int}^{\text{n-herë}} dy_1\ dy_2, \ldots dy_n,$$

marrim:

$$I_n = a^n \cdot K_n. \tag{4}$$

Integralin K_n që e kërkojmë e shkruajmë në këtë mënyrë:

$$K_n = \int_{-1}^{1} dy_n \overbrace{\int \int_{\Omega_1'} \cdots \int}^{\text{n-herë}} dy_1\ dy_2, \ldots dy_{n-1},$$

ku:

$$\Omega_1' = \{(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \,|\, y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \leq 1 - y_n^2\}.$$

Duke e përdorur formulën (4) kur për a marrim numrin $\sqrt{1 - y_2^2}$ gjejmë:

$$\overbrace{\int \int_{\Omega_1'} \cdots \int}^{\text{(n-1) herë}} dy_1 dy_2 dy_{n-1} = \sqrt{(1 - y_n^2)^{n-1}} \overbrace{\int \int_{\Omega_1''} \cdots \int}^{\text{(n-1) herë}} dz_1\ dz_2 \ldots dz_{n-1}$$

$$= (1 - y_n)^{\frac{n-1}{2}} \cdot K_{n-1},$$

ku:

$$y_1=\sqrt{1-y_n^2}z_1,\ldots,y_{n-1}=\sqrt{1-y_n^2}\cdot z_{n-1},$$

dhe:

$$\Omega_1''=\{(z_1,z_2,\ldots,y_{n-1}^2)\,|\,z_1^2+z_2^2+\ldots+z_{n-1}^2\leq 1\}.$$

Prandaj:

$$K_n=K_{n-1}\int\limits_{-1}^{1}(1-y_n^2)^{\frac{n-1}{2}}dy_n.$$

Pasi të marrim zëvendësimin $y_n=\cos t$, fitojmë:

$$K_n=2K_{n-1}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt.$$

Këndej, meqë $K_1=\int\limits_{-1}^{1}dy_1=2$ (sepse rruzulli i mbyllur me rreze 1 në hapësirën $\mathbf{R}^1$ është segmenti $[-1,1]$) mund të gjejmë në mënyrë suksesive $K_2,K_3,\ldots,$ dhe nga formula (4) të llogarisim I_n.

4.2.8 Detyra për ushtrime

1. Sipas përkufizimit të llogaritet $I=\iiint\limits_D xyzdxdydz$, në qoftë se:

$$V=\{(x,y,z)\,|\,0\leq x\leq a,\ 0\leq y\leq b,\ 0\leq z\leq c\}.$$

2. Të llogaritet $I=\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$, ku V është bashkësia e kufizuar me rrafshet:

$$x=1,\ x=3,\ y=0,\ y=4;\ z=2,\ z=5.$$

3. Të llogaritet:

$$I=\iiint\limits_V\frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^2},$$

ku V është bashkësia e kufizuar me rrafshet:

$$x=0,\ y=0,\ z=0 \text{ dhe } x=y+z=1.$$

4. Të llogaritet $I=\iiint\limits_D |x|\,dxdydz$, në qoftë se V është bashkësia e kufizuar me sipërfaqet $x^2+y^2=1,\ z=x^2+y^2$ dhe rrafshin $z=0$.

5. Të llogaritet:

$$I=\iiint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz,$$

nëse V është bashkësia e mbyllur kufiri i së cilës është $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

6. Të llogaritet $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, ku V është bashkësia e mbyllur $x^2+y^2+z^2 \le z$.

7. Të llogaritet $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, ku zona e integrimit V kufizohet me sipërfaqet $x^2+y^2=2z,\ z=2$.

8. Të llogaritet $F'(t)$ nëse:

   a) $F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$ ku f është funksion i vazhdueshëm;

   b) $F(t) = \int\limits_{0\le x\le t}\int\limits_{0\le y\le t}\int\limits_{0\le z\le t} f(x,y,z)dxdydx$, ku f është funksion i diferencueshëm.

9. Të llogaritet $I = \iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, nëse zona V është e kufizuar me cilindrin $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ dhe rrafshet $y=0,\ y=b\,(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

   Udhëzim: të merret zëvendësimi: $x=a\,\rho\cos\varphi,\ z=c\,\rho\sin\varphi,\ y=y$.

10. Të llogaritet integrali $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, nëse V kufizohet me cilindrin $x^2+y^2=1$ dhe rrafshet $z=-1$ e $z=1$.

    Udhëzim: të merret zëvendësimi: $x=\rho\cos\varphi,\ z=\rho\sin\varphi,\ z=z$.

11. Të llogaritet $I = \iiint\limits_V \sqrt{1+(x^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\ dxdydz$, nëse V është rruzulli

$$x^2+y^2+z^2 \le 1.$$

12. Të llogaritet integrali i Dirihles:

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r\,(1-x-y-z)^s\,dxdydz$$

    $(p>0,\ q>0,\ r>0,\ s>0)$, ku

$$V = \{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y\}.$$

    Udhëzim: të merret zëvendësimi:

$$x+y+z=\xi,\ y+z=\xi\eta,\ z=\xi\eta\rho.$$

13. Duke përdorur integralin e dyfishtë të gjendet syprina e figurës rrafshe të kufizuar me lakoret:

    a) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2),\ x^2+y^2 = a^2\ \ (x^2+y^2 \geq a^2)$;

    b) $(x^3+y^3)^2 = x^2+y^2,\ x=0,\ y=0\ (x \geq,\ y \geq 0)$.

    c) $(x^2+y^2)^2 = 8a^2xy\ (x-a)^2+(y-a)^2 = a^2\ \ (a>0;\ (x-a)^2+(y-a)^2 \leq a^2)$.

14. Duke përdorur integralin e dyfishtë të gjendet syprina e figurës rrafshe të kufizuar me lakoret (parametrat konsiderohen pozitiv):

    a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h}+\frac{y}{k}$;

    b) $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3} = \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2};\ x=0,\ y=0$;

    c) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}(x>0,\ y>0)$;

    ç) $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1;\ x=0,\ y=0$;

    d) $x^2 = ay,\ x^2 = by,\ x^3 = dy^2\ (0<a<b,\ 0<c<d)$.

15. Të llogaritet syprina e sipërfaqes qe formohet me ndërprerjen e sipërfaqes $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 0$ me rrafshin $z = 1-2(x+y)$.

16. Duke përdorur integralin e dyfishtë të llogaritet vëllimi i trupit të kufizuar me sipërfaqet:

    a) $z = x^2+y^2,\ y = x^2,\ y=1,\ z=0$;

    b) $x=-4,\ x=4,\ z=3,\ z=3,\ y=0$ dhe $y = x^2+z^2+1$.

    c) $z = xy,\ x+y+z = 1,\ z=0$;

    ç) $z = x+y,\ (x^2+y^2)^2 = 2xy,\ z=0\ \ (x>0,\ y>0)$;

    d) $x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x^2+y^2 \geq a\,|x|\ \ (a>0)$.

    dh) $z = c\cdot\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a},\ z=0,\ \ y = x\tan\alpha, y = x\tan\beta\ \ (a>0,\ c>0,\ 0\leq\beta\leq 2\pi)$.

    e) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1,\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}\ \ \ (z>0)$. 0.3 cm

17. Të llogaritet syprina e pjesës së sferës $x^2+y^2+z^2 = a^2$ që gjendet brenda cilindrit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1\ (b \leq a)$.

18. Të gjendet syprina e pjesës së sipërfaqes $z^2 = 2xy$, që e ndërpresin rrafshet $x+y=1,\ x=0,\ y=0$.

19. Të gjendet syprina e pjesës së sipërfaqes $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ që gjendet brenda cilindrit $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$.

20. Të gjendet syprina e paraboloidit $x^2+y^2 = 2az$, që gjendet brenda cilindrit $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

21. **21.** Duke përdorur integralin e trefishtë të llogaritet vëllimi i trupit të kufizuar më këto sipërfaqe (parametrat konsiderohen pozitivë):

    a) $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,$

    b) $z = 2x^2 + 2y^2,\ z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 1;$

    c) $z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x,\ y = x^2;$

    ç) $az = x^2 + y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2};$

    d) $z = 6 - x^2 - y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2};$

    dh) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$

    e) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$

22. Të gjendet vëllimi dhe syprina e sipërfaqes së trupit të kufizuar me sipërfaqet:
$$x^2 + y^2 = ax,\ \ z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}\ (a > 0).$$

23. Sipërfaqja, $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ e ndan rruzullin $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4az$ në dy trupa. Të gjendet raporti i vëllimeve të tyre.

24. Duke përdorur integralin e dyfishtë të gjenden koordinatat e qendrës së gravitetit të pllakës homogjene të kufizuar me vijat:

    a) $ay = x^2,\ x + y = 2a\ \ (a > 0);$

    b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x = a,\ y = 0;$

    c) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\quad (x \geq 0,\ y \geq 0);$

    ç) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy\,(x \geq 0, y \geq 0).$

    e) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\,(0 \leq t \leq 2\pi),\ y = 0.$

25. Duke përdorur integralin e dyfishtë të llogariten momentet e inercisë, ndaj boshteve koordinative Ox e Oy të pllakës homogjene të kufizuar me vijat:

    a) $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1,\ \frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1,\ \ y = 0\,(b_1 > 0,\ b_2 > 0,\ h > 0);$

    b) $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2,\ x = 0,\ y = 0\ \ (0 \leq x \leq a).$

26. Duke përdorur integralin e trefishtë të llogaritet masa e trupit:

$$V = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \geq 1\}$$

nëse densiteti i trupit jepet me formulën $\rho(x,y,z) = \rho_0 \ e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ku $\rho_0 > 0$ dhe $h > 0$ janë konstante.

27. Duke përdorur integralin e trefishtë të gjenden koordinatat e qendrës së rëndesës të trupave homogjen, të kufizuar me sipërfaqet:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = c;$

b) $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

28. Duke përdorur integralin e trefishtë të caktohen momentet e inercisë ndaj rrafsheve koordinative të trupave homogjen, të kufizuar me sipërfaqet (parametrat konsiderohen pozitiv):

a) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

29. Të gjendet momenti i inercisë së rruzullit johomogjen $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ me masë m, ndaj diametrit të vet, nëse rruzulli në pikën $P(x,y,z)$ është proporcional me distancën e asaj pike nga qendra e rruzullit.

30. Të gjendet momenti i inercisë ndaj fillimit të koordinatave i trupit homogjen V' me densitet ρ_0, i cili kufizohet me sipërfaqen $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2)$.

4.3 INTEGRALET E SHUMËFISHTA JO TË VETA

Në kursin e Analizës matematike II jepet teoria e integraleve jo të vet të llojit të parë e të llojit të dytë për funksionet me një ndryshore. Siç dihet për të arritur te integrali jo i vet i llojit të parë segmenti i integrimit merret i pa kufizuar, ndërsa integrali i llojit të dytë përcaktohej në rastet kur funksioni është i pa kufizuar në rrethinën e ndonjë ose të disa pikave të segmentit.

Në këtë paragraf do të japim përgjithësimin e këtyre nocioneve për funksionet me shumë ndryshore. Për thjeshtësi do të kufizohemi vetëm në rastin e dy ndryshoreve, duke theksuar, atje ku është rasti, modifikimet që kërkohen për të kaluar në më shumë se dy ndryshore.

4.3.1 * Integralet jo të veta të llojit të parë

Le të jetë $D \subset \mathbf{R}^2$ zonë e pakufizuar si dhe $\{D_n\}$ varg zonash të matshme që i plotëson kushtet:

$$\begin{cases} 1) \ D_n \subset D_{n+1}, \ n = 0, 1, 2 \ldots \\ 2) \ \cup_{n=1}^{\infty} = D \end{cases} \tag{1}$$

Supozojmë se në D është dhënë funksioni $f(x, y)$ i cili është i integrueshëm në kuptimin e zakonshëm në çdo zonë D_n, d.m.th. ekziston integrali:

$$\iint_{D_n} f(x, y) \ dxdy$$

për çdo $n \in N$.

Përkufizimi 4.3.1 *Funksioni $f(x, y)$ quhet i integrueshëm në kuptimin* **jo të vet** *në bashkësinë e lidhur e të pakufizuar D, në qoftë se për çdo varg $\{D_n\}$ të zonave të matshme, që i plotëson kushtet (1) ekziston limiti:*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y) \ dxdy$$

i cili nuk varet nga zgjedhja e vargut $\{D_n\}$. Ky limit quhet **integral jo i vetë i llojit të parë** për funksionin $f(x, y)$ dhe shënohet:

$$\iint_{D} f(x, y) dxdy.$$

Pra:

$$I = \iint_{D} f(x, y) dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y) dxdy \tag{2}$$

Nëse $I = \iint\limits_D f(x, y) dxdy$ ekziston atëherë po ashtu thuhet se integrali (2) **konvergjon**, ndërsa në rastin e kundërt – **divergjon**. Tash të theksojmë se përkufizimi i limitit (1) në gjuhen "$\varepsilon - N$" formulohet kështu:

Për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston numri natyral $N(\varepsilon)$ ashtu që për $n > N(\varepsilon)$ vlen pabarazimi:

$$\Big| \iint_{D_n} f(x, y) dxdy - I \Big| < \varepsilon.$$

Pa ndonjë vështirësi mund të tregohet se edhe për integralet e tipit (2) vlejnë vetitë që i kemi dhënë për integralet e zakonshme.

P.sh. në qoftë se funksionet e vazhdueshme:

$$x = x(u, v), \ y = y(u, v),$$

të cilat kanë derivate të pjesshme të vazhdueshme në një zonë $D^{'} \subset R^2$, në mënyrë biunivoke pasqyrojnë zonën $D^{'}$ në zonën $D \subset R^2$ dhe jakobiani $J(u,v)$ nuk anulohet në $D^{'}$, atëherë:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]|J(u,v)|dudv.$$

Teorema 4.3.1 *Në qoftë se për funksionin jonegativ $f(x,y)$ të përkufizuar në zonën e pakufizuar D dhe për çdo varg $\{D_n\}$ që i plotëson kushtet* (1) *ekziston:*

$$I = \sup_{n} \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy \tag{3}$$

atëherë integrali (2) *konvergjon.*

Vërtetimi. Le të jetë $\{D_n\}$ varg i çfarëdoshëm që i plotëson kushtet e teoremës. Nga përkufizimi i supremumit rrjedh se:

1) $\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy \leq I, n = 1,2,...$ (4)

2) për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston një n_0 i tillë që:

$$\iint\limits_{D_{n_0}} f(x,y)dxdy > I - \varepsilon.$$

Meqë për $n > n_0, D_n \supset D_{n_0}$ kemi:

$$\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_{D_{n_0}} f(x,y)dxdy,$$

dhe aq më parë do të jetë:

$$\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy > I - \varepsilon. \tag{5}$$

Nga (4) e (5) rrjedh se:

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy = I,$$

d.m.th. integrali (2) konvergjon dhe vlera e tij është I. Teorema u vërtetua.

Detyrë. Të tregohet se kur $I = \infty$ integrali (2) divergjon.

Duke marrë parasysh se vargu $\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy$ është monotono-rritës, d.m.th. ekziston supremumi i tij, teorema 3.1. mund të riformulohet në këtë mënyrë:

Teorema 4.3.1′. *Le të jetë $f(x,y)$ jonegativ dhe i përkufizuar në zonën e pakufizuar D dhe D_n vargu i çfarëdoshëm që i plotëson kushtet (1). Atëherë ekziston:*

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy \tag{6}$$

i cili është i fundmë ose i pafundmë. Nëse ai është i fundmë integrali $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ konvergjon dhe, rrjedhimisht, limiti (6) është i barabartë me atë integral, ndërsa kur limiti (6) është i pafundmë integrali $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ divergjon.

Shembulli 4.3.1 Të llogaritet integrali:

$$\iint\limits_{\mathbf{R^2}} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

Zgjidhja: Shënojmë:

$$D_n=\{(x,y)|x^2+y^2\le n^2\},\ n=1,2,....$$

Atëherë vargu D_n është varg i bashkësive të matshme (në këtë rast rrathëve), i cili i plotëson kushtet (1). Le të jetë:

$$I_n=\iint\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

Me kalimin në koordinata polare fitojmë:

$$I_n=\iint\limits_{G_n} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{n}e^{-\rho^2}\rho d\rho=2\pi\frac{e^{-p^2}}{2}\Big|_0^n=\pi(1-e^{-n^2}).$$

Këndej, nga përkufizimi 3.1. gjejmë $I=\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\pi$.

Teorema 4.3.2 *(kriteri i krahasimit). Supozojmë se në zonën e lidhur e të pakufizuar D plotësohen pabarazimet:*

$$0\le f(x,y)\le g(x,y)\ ,\ (x,y)\in D. \tag{7}$$

Atëherë, nga konvergjenca e integralit $\iint\limits_{D} g(x,y)dxd\dot{y}$ rrjedh konvergjenca e integralit $\iint\limits_{D} g(x,y)dxdy$, ndërsa nga divergjenca e të dytit rrjedh divergjenca e të parit.

Vërtetimi. Supozojmë se konvergjon integrali:

$$\iint\limits_{D} g(x,y)dxdy. \tag{8}$$

Marrim vargun e çfarëdoshëm $\{D_n\}$ të zonave të matshme $D_n \subset D$ që i plotëson kushtet (1). Atëherë, nga (7), kemi:

$$0 \leq \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_{D_n} g(x,y)dxdy. \tag{9}$$

Meqenëse bashkësia e integraleve të djathtë është e kufizuar, e tillë do të jetë edhe bashkësia e integraleve të majta, prandaj ekziston dhe është i fundmë numri:

$$I = \sup_n \left\{ \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy \right\}.$$

Këndej dhe nga teorema 3.1. shohim se konvergjon integrali:

$$\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy. \tag{10}$$

Tash supozojmë që integrali (10) divergjon. Kjo do të thotë që bashkësia:

$$\left\{ \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \right\}$$

është e pakufizuar nga sipër, d.m.th, duke marrë parasysh (9), është e pakufizuar nga sipër edhe bashkësia e integraleve që figurojnë në anën e djathtë të (9). Kjo tregon se integrali (8) divergjon. Teorema u vërtetua.

Konvergjenca absolute e integraleve të dyfishta jo të vet përcaktohet njëlloj si për integrale jo të vet të zakonshëm.

Me përkufizim integrali (2) quhet **absolutisht** konvergjent në D në qoftë se konvergjon integrali:

$$\iint\limits_{D} |f(x,y)|dxdy. \tag{11}$$

Teorema 4.3.3 *Në qoftë se integrali* (11) *konvergjon atëherë konvergjon edhe integrali* (2).

Vërtetimi. Le të jetë:

$$f_+(x,y) = \begin{cases} f(x,y), \text{ nëse } f(x,y) \geq 0 \\ 0, \quad \text{nëse } f(x,y) < 0. \end{cases}$$

$$f_-(x,y) = \begin{cases} -f(x,y), \text{ nëse } f(x,y) \leq 0, \\ 0, \quad \text{nëse } f(x,y) > 0. \end{cases}$$

Lehtë shihet se:

$$f_+ = \frac{|f| + f}{2}, f_- = \frac{|f| - f}{2},$$

$$0 \leq f_+(x,y) \leq |f(x,y)|, 0 \leq f_-(x,y) \leq |f(x,y)|.$$

Këndej dhe nga supozimi se $|f(x,y)|$ është i integrueshëm si dhe nga teorema 3.2, rrjedh konvergjenca e integraleve të funksioneve $f_+(x,y)$ e $f_-(x,y)$ në D. Mirëpo:

$$f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y).$$

Prandaj, nga vetia e aditivitetit të integralit jo të vet shohim se $f(x,y)$ është i integrueshëm në kuptimin jo të vet dhe ka vend barazimi:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f_+(x,y)dxdy - \iint\limits_D f_-(x,y)dxdy,$$

çka synuam të tregojmë.

Në vazhdim japim një rezultat i cili për integralet e zakonshme jo të veta nuk është i vërtetë.

Teorema 4.3.4 *Nëse integrali:*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

konvergjon atëherë ai konvergjon absolutisht.

Vërtetimi. Supozojmë të kundërtën d.m.th. se integrali (11) divergjon. Atëherë, për çdo varg $\{D_n\}$ të zonave që e plotësojnë kushtin (1) vlen:

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} |f(x,y)|dxdy = +\infty.$$

Pa kufizim përgjithësimi marrim që vargu $\{D_n\}$ është i tillë që për çdo n të vlej pabarazimi:

$$\int\limits_{D_{n+1}} |f(x,y)|dxdy > 3 \iint\limits_{D_n} |f(x,y)|dxdy + 2n. \qquad (12)$$

Nëse vëmë $C_n = D_{n+1} \backslash D_n$ atëherë C_n është e matshme dhe nga relacioni (12) fitojmë:

$$\iint\limits_{C_n} |f(x,y)|dxdy > 2 \iint\limits_{D_n} |f(x,y)|dxdy + 2n. \qquad (13)$$

Nga: $|f(x,y)| = f_+(x,y) + f_-(x,y)$ fitojmë:

$$\iint\limits_{C_n} |f(x,y)|dxdy = \iint\limits_{C_n} f_+(x,y)dxdy + \iint\limits_{C_n} f_-(x,y)dxdy.$$

Prandaj nga (13) marrim:

$$\iint\limits_{C_n} f_+(x,y)dxdy + \iint\limits_{C_n} f_-(x,y)dxdy > 2\iint\limits_{C_n} |f(x,y)|dxdy + 2n.$$

Supozojmë se:

$$\iint\limits_{C_n} f_+(x,y)dxdy \geq \iint\limits_{C_n} f_-(x,y)dxdy,$$

atëherë:

$$2\iint\limits_{C_n} f_+(x,y)dxdy > \iint\limits_{C_n} f+(x,y)dxdy + \iint\limits_{C_n} f_-(x,y)dxdy$$

$$> 2\iint\limits_{Dn} |f(x,y)|dxdy + 2n,$$

rrjedhimisht:

$$\iint\limits_{C_n} f_+(x,y)dxdy > \iint\limits_{C_n} |f(x,y)|dxdy + n. \tag{14}$$

Le të jetë $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{k}$ një ndarje e zonës C_n e tillë që shuma e poshtme Darbu të ndryshojë aq pak nga integrali $\iint\limits_{D_n} |f(x,y)|dxdy$ sa që të ketë vend pabarazimi:

$$\sum_{i \to 0}^{k-1} m_i \triangle_i > \iint\limits_{D_n} |f(x,y)|dxdy + n, \tag{15}$$

ku, si zakonisht me m_i kemi shënuar infimumin e bashkësisë $\{|f(x,y)|\}$ në zonën E_i kurse me $\triangle_i$ syprinën e kësaj zone.

Funksioni $|f(x,y)|$ është jonegativ, prandaj edhe $m_i \geq 0$. Në këtë shumë marrim vetëm ato kufiza të cilave u përgjigjen numrat $m_i > 0$. Le të jetë $\tau^* = \{E_i^*\} \subset \tau$ ashtu që në E_i^* është $m_i > 0$. Atëherë:

$$\sum{}' m_i \triangle_i \geq \sum_{i-0}^{k-1} m_i \triangle_i \tag{16}$$

ku $\sum{}'$ tregon se shumimi bëhet sipas kufizave të familjes τ^*. Shënojmë $C_n^* = \cup' E_i^*$. Është evidente se C_n^* është bashkësi e matshme dhe τ^* është ndarje e zonës C_n^*.

Meqë në C_n^* kemi $f(x,y) > 0$, fitojmë:

$$\iint\limits_{C_n^*} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{C_n^*} f(x,y)dxdy \geq \sum{}' m_i \triangle_i,$$

prandaj, nga (15) e (16), gjejmë:

$$\iint\limits_{C_n^*} f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_{Dn} |f(x,y)|dxdy + n. \tag{17}$$

Shënojmë $D_n^{'} = D_n \cup C_n^*$. Meqë $f \geq -|f|$, kemi:

$$\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy \geq -\iint\limits_{D_n} |f(x,y)|dxdy,$$

prandaj, duke mbledhur me (17), fitojmë:

$$\iint\limits_{D_n'} f(x,y)dxdy > n \tag{18}$$

(sepse $D_n \cap C_n^* =\emptyset$, d.m.th. ato nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta).

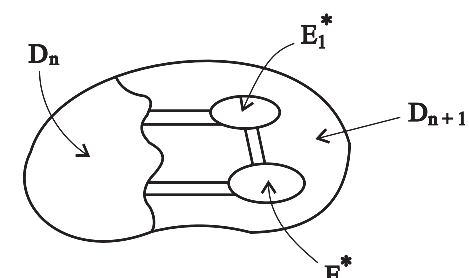


Fig. 4.30.

Bashkësia $D_n^{'}$ nuk është e lidhur (fig. 4.30). Me ,,shirita" me masë sado të vogël bashkojmë bashkësitë e ,,ndara" dhe zonën e re, të lidhur e shënojmë me $D_n^{''}$. Meqë $D_n^{''}$ është e matshme dhe $D_n^{''} \supset D_n^{'}$ kemi:

$$\iint\limits_{D_n''} f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_{D_n'} f(x,y)dxdy.$$

Këndej dhe nga (18) fitojmë:

$$\iint\limits_{D_n''} f(x,y)dxdy > n$$

prej nga gjejmë:

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n''} f(x,y)dxdy = +\infty.$$

Nga fakti se $D_n \subset D_n^{'} \subset D_{n+1}$, kemi $D_n \subset D_n^{''} \subset D_{n+1}$, prandaj vargu $\{D_n^{''}\}$, $D_n^{''} \subset D$ plotëson kushtet (1).

Kështu treguam se $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ divergjon. Kontradiksioni i fituar vërteton teoremën.

Teorema 4.3.4. bën të mundshme që në përgjithësi problemi i konvergjencës së integralit jo të vet të një funksioni f të kthehet në problem të studimit të konvergjencës së integralit të funksionit $|f|$.

Në vazhdim shohim si kthehen integralet jo të veta të dyfishta në integrale të përsëritura. Në fillim supozojmë se $f(x,y) \geq 0$. Për thjeshtësi do të supozojmë se zona e pakufizuar D ka trajtë drejtkëndëshe, d.m.th.:

$$D = \{(x,y) | a \leq x \leq b, c \leq y < \infty\}.$$

Në të kundërtën, si në rastin e zakonshëm, $f(x,y)$ konsiderohet 0 jashtë zonës ,,vijëpërkulët" D që shtrihet në drejtkëndëshin D.

Le të jetë $f(x,y)$ i integrueshëm në kuptimin e zakonshëm në çdo drejtkëndësh:

$$\{(x,y) | a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}.$$

Atëherë vlen formula:

$$\iint\limits_{\substack{a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq d}} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy,$$

me kusht që për çdo $x \in [a,b]$ ekziston integrali i brendshëm i anës së djathtë.

Për të zgjeruar këtë formulë dhe për integralet jo të veta, d.m.th. për rastin kur $d \to \infty$, supozojmë se ekziston integrali i përsëritur:

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^\infty f(x,y).$$

Le të jetë $d > c$. Atëherë:

$$\iint\limits_{\substack{a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq d}} f(x,y)dxdy \leq I,$$

prandaj, sipas teoremës 3.1. ekziston integrali:

$$\iint\limits_{\substack{a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq \infty}} f(x,y)dxdy = \lim_{d\to\infty} \iint\limits_{\substack{a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq d}} f(x,y)dxdy = \lim_{d\to\infty} \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)dxdy. \quad (19)$$

vlera e të cilit nuk është më madhe se I. Tregojmë se ai është i barabartë me I. Me të vërtetë, $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ është funksion i vazhdueshëm i kufirit të sipërm d, prandaj (teorema III. 1.1.) në lidhje me d lejohet kalimi nën shenjën e integralit në segmentin $[a,b]$, d.m.th.:

$$\lim_{d\to\infty}\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_a^b\left[\lim_{d\to\infty}\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^\infty f(x,y)dy = I.$$

Këndej dhe nga (19) shohim se:

$$\iint\limits_{\substack{a\le x\le b\\ c\le y\le\infty}} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^\infty f(x,y)dy. \tag{20}$$

Tash shqyrtojmë rastin kur zona D është e formës $D=\{(x,y)|a\le x<\infty, c\le y<\infty\}$. Supozojmë se në çdo drejtkëndësh $\{(x,y)|a\le x\le b, c\le y\le d\}$ ekziston integrali i dyfishtë i funksionit $f(x,y)\ge 0$ si dhe $\int\limits_a^\infty f(x,y)dy$, për çdo $x\in[a,\infty)$.

Do të tregojmë se nëse konvergjon integrali i përsëritur:

$$I=\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty f(x,y)dy \tag{21}$$

atëherë konvergjon edhe integrali i dyfishtë:

$$\iint\limits_{\substack{a\le x<\infty\\ c\le y<\infty}} f(x,y)dxdy \tag{22}$$

dhe ka vend barazimi:

$$\int\limits_{\substack{a\le x<\infty\\ c\le y<\to}} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty f(x,y)dy. \tag{23}$$

Së pari vërejmë se vlen barazimi (20). Barazimi (21) mund ta shkruajmë në formën:

$$I=\lim_{d\to\infty}\int\limits_a^b dx\int\limits_c^\infty f(x,y)dy. \tag{24}$$

Tash meqë $f(x,y))\ge 0$, nga (20) e (24), shohim se ekziston integrali (22). Duke kaluar me limit në (20) gjejmë barazimin (23).

Kështu vërtetuam këtë rezultat:

Teorema 4.3.5 *Supozojmë se $f(x,y) \geq 0$ i përkufizuar në zonën:*

$$D = \{x,y)|a \leq x \leq \infty,\ c \leq y \leq \infty\},$$

si dhe ekziston:

$$\int_a^\infty f(x,y)dy$$

për çdo x të fiksuar nga $[a,+\infty)$. Në qoftë se integrali (21) *konvergjon, konvergjon edhe integrali i dyfishtë jo i vet në zonën D dhe ka vend formulën* (23).

Tash të shohim se çfarë kushtesh duhet të plotësohen ashtu që formula (20) të vlejë edhe kur $f(x,y)$ nuk ruan shenjë. Duke ruajtur kushtet për të cilat është e vërtetë formula (20) krahas konvergjencës së integralit të përsëritur:

$$\int_a^b dx \int_c^\infty f(x,y)dy$$

supozohet edhe konvergjenca e integralit:

$$\int_a^b dx \int_c^\infty |f(x,y)|dy.$$

Në këto kushte integralet e përsëritura të funksioneve $f_-(x,y)$ dhe $f_+(x,y)$:

$$\int_a^b dx \int_c^\infty f_-(x,y)dy, \int_a^b dx \int_c^\infty f_+(x,y)dy$$

do të jenë konvergjente (sepse $0 \leq f_+(x,y) \leq |f(x,y)|$ dhe $0 \leq f_-(x,y) \leq |f(x,y)|$) Prandaj për funksionet $f_+(x,y)$ dhe $f_-(x,y)$ ka vend formula (20). Meqenëse:

$$f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y)$$

atëherë shohim se formula (20) është e vërtetë edhe për funksionin $f(x,y)$.

Shembulli 4.3.2 Të shqyrtohet konvergjenca e integralit:

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}})^\alpha,$$

ku D është:

$$D = \{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \geq 1\}.$$

Zgjidhja: Le të jetë $B(M_0;\rho)$ rruzulli me qendër në $M_0(x_0,y_0)$ e rreze ρ i tillë që $B(M_0;\rho)\cap D$ të jetë bashkësi jo e zbrazët. Marrim vargun $\{G_n\}$ të tillë që:

$$G_m = \{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \geq R_n > 1\},\ n = 1,2,3,\ldots.$$

Atëherë vargu $\{D_n = D \backslash G_n\}$ ka vetitë që

$$1)\ \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$$
$$2)\ D_1 \subset D_2 \subset \ldots$$

dhe D_n janë të matshme për çdo n. Shënojmë:

$$C_n = D_n \cup \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq 1\}$$

dhe, meqenëse $D_n \subset C_n \backslash B(M_0; \rho)$, kemi:

$$\iint_{D_n} \frac{dxdy}{(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\ )^\alpha} \leq \int_{C_n \backslash B(M_0:\rho)} \frac{dxdy}{(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\ )^\alpha} \tag{25}$$

Kalojmë në koordinata polare me pol në pikën $M_0(x - x_0 = \text{rcos}\ \varphi, y - y_0 = \text{rsin}\ \varphi)$ dhe kemi:

$$\begin{aligned}\int_{C_n \backslash B(M_0,\rho)} \frac{dxdy}{(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\ )^\alpha} &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_\rho^{R_n} \frac{rdr}{r^\alpha} \\ &= \frac{2\pi}{\alpha - 2}\left(\frac{1}{\rho^{\alpha-2}} - \frac{1}{R_n^{\alpha-2}}\right).\end{aligned}$$

Ky integral ka limit të fundmë kur $R_n \to \infty$, d.m.th. $n \to \infty$, në rastin kur $\alpha > 2$. Prandaj, për $\alpha > 2$ në bazë të (25) dhe teoremës së krahasimit shohim se konvergjon integrali I, ndërsa për $\alpha \leq 2$ divergjon.

Në analogji me integralet jo të veta të llojit të parë të funksionit me një ndryshore, mbi bazën e këtij shembulli mund të formulohet kriteri i konvergjencës për integralet e dyfishta jo të veta:

Teorema 4.3.6 *Nëse për pika të zonës:*

$$D = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \geq 1\}$$

vlen pabarazimi:

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{r^\alpha},$$

dhe $\alpha > 2$, atëherë integrali:

$$\iint_D f(x, y) dxdy$$

konvergjon.

Vërtetimi është rrjedhim i menjëhershëm i teoremave 4.3.2. e 4.3.4.

4.3.2 * Integralet jo të veta të llojit të dytë

Le të jetë $f(x, y)$ funksion i pakufizuar në pikën $M_0(x_0, y_0)$ të zonës së matshme e të kufizuar D, ndërsa $B = B(M_0; \delta)$ qarku me qendër në pikën M_0 e rreze δ (fig. 4.31).

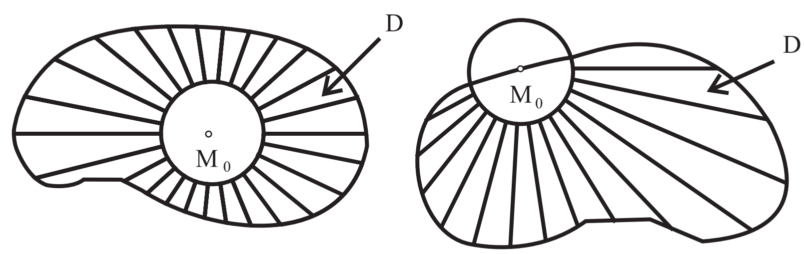


Fig. 4.31.

Supozojmë se në bashkësinë e matshme $D \backslash B$ funksioni $f(x, y)$ është i integrueshëm në kuptimin e zakonshëm, d.m.th. ekziston integrali:

$$\int_{D \backslash B} f(x, y)dxdy.$$

Përkufizimi 4.3.2 *Funksioni $f(x, y)$ quhet* **i integrueshëm në kuptimin jo të vet** *në zonën D nëse ekziston limiti:*

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{D \backslash B} f(x, y)dxdy = I \tag{1}$$

i cili nuk varet nga zgjidhja e qarkut B.

Ky limit quhet **integral jo i vet i llojit të dytë** për funksionin $f(x, y)$ dhe shënohet:

$$\iint_D f(x, y)dxdy. \tag{2}$$

Në rastin kur I është numër i fundmë thuhet se integrali (2) **konvergjon,** ndërsa kur I është i pafundmë thuhet se (2) divergjon.

Të cekim se limiti (1) përkufizohet kështu:

Thuhet se vlen (1) nëse për çdo varg $\{B_n = B_n(M_0; \delta_n)\}$ qarqesh që shtrëngohen në pikën M_0 (d.m.th. për $n \to \infty$, $\delta_n \to 0$) vargu i integraleve përkatëse:

$$\left\{ \iint_{D \backslash B_n} f(x, y)dxdy \right\} \tag{3}$$

konvergjon tek i njëjti numër I.

Le të jetë ω_δ zonë e çfarëdoshme e matshme me diametër δ dhe që pikën M_0 e ka të brendshme dhe le të jetë $f(x,y)$ i integrueshëm në zonën $D\backslash\omega_\delta$.

Përkufizimi 4.3.2′ *Integral jo të vet të llojit të dytë të funksionit* $f(x,y)$ *në* D *quajmë limitin:*

$$\lim_{\delta\to 0}\iint\limits_{D\backslash\omega_\delta} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$$

Detyrë: Të tregohet se përkufizimet 4.3.2 e 4.3.2′ janë ekuivalente.

Vërejmë se natyra e integralit (2) është e njëjtë me atë të integralit:

$$\iint\limits_{D^*} f(x,y)dxdy,$$

ku zona D^* është pjesë e zonës D e tillë që përmban pikën M_0 si pikë të brendshme ose si pikë konturi. Kjo ndodh sepse integrali i funksionit $f(x,y)$ në zonën $D\backslash D^*$ është integral i zakonshëm zbritja e të cilit nga integrali (2) nuk e ndryshon ekzistencën e limitit.

Në rastin kur $f(x,y)$ është i pakufizuar në dy ose më shumë pika atëherë, duke e ndarë zonën D në mënyrë të përshtatshme, problemi kthehet në atë që shqyrtuam më sipër.

Teorema 4.3.7 *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që integrali* (2) *i funksionit* $f(x,y)\geq 0$ *të jetë konvergjent, është që për çdo varg rruzujsh* $\{B_n\}$ *me qendër në pikën* M_0 *që shtrëngohet në pikë, vargu* (3) *i integraleve përkatëse të jetë i kufizuar nga sipër.*

Vërtetimi. Supozojmë se integrali (2) konvergjon. Atëherë:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \sup\Big\{\iint\limits_{D\backslash B_n} f(x,y)dxdy\Big\} < +\infty,$$

d.m.th. vargu (3) është i kufizuar nga sipër. Anasjelltas, supozojmë se vargu (3) është i kufizuar nga sipër. Këndej dhe meqë vargu (3) është monotonojozvogëlues del se ekziston limiti i fundmë i tij, pra:

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D\backslash B_n} f(x,y)dxdy = I.$$

Pohimi se limiti I nuk varet nga mënyra e zgjedhjes së vargut $\{B_n\}$ është evident. Teorema u vërtetua.

Teorema 4.3.8 *Nëse funksioni $f(x,y)$ që figuron në integralin (2) është jonegativ dhe në qoftë se për një varg të çfarëdoshëm bashkësish të matshme $\{\omega_{\delta_n}\}$ që shtrëngohet në pikën M_0 vargu i integraleve:*

$$\left\{\iint\limits_{D\backslash\omega_{\delta_n}} f(x,y)dxdy\right\},$$

është i kufizuar nga sipër, integrali (2) konvergjon.

Vërtetimi. Sipas teoremës 3.7, mjafton të tregohet se për një varg të çfarëdoshëm qarqesh $\{B_n\}$ të tillë që shtrëngohen në mënyrë monotone në pikën M_0 vargu korrespondues i integraleve:

$$\iint\limits_{D\backslash B_n} f(x,y)dxdy$$

është i kufizuar nga sipër. Le të jetë $\{\omega_{\delta_m}\}$ varg që i plotëson kushtet e teoremës, ashtu që:

$$\iint\limits_{D\backslash\omega_{\delta_n}} f(x,y)dxdy \leq C = konst. \tag{4}$$

Supozojmë se $\{B_n = B_n(M_0; r_n)\}$ është njëvarg i çfarëdoshëm qarqesh që shtrëngohen në pikën M_0. Atëherë për çdo n i tillë që të vlejë relacioni $B \supset \omega_{\delta_m}$ nga i cili rrjedh:

$$D\backslash B_n \supset D\backslash\omega_{\delta_m}.$$

Këndej, meqenëse $f(x,y) \geq 0$, rrjedh pabarazimi:

$$\iint\limits_{D\backslash B_n} f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_{D\backslash\omega_{\delta_n}} f(x,y)dxdy,$$

prandaj, sipas (4), kemi:

$$\iint\limits_{D\backslash B_n} f(x,y)dxdy \leq C.$$

Teorema u vërtetua.

Për integralet e llojit të dytë në mënyrë analoge, si për ato të llojit të parë, formulohen dhe vërtetohen teoremat 4.3.2 –4.3.4.

Që të kemi një kriter konkret krahasimi shqyrtojmë funksionin:

$$f(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\ )^\alpha} = \frac{1}{r^\alpha},$$

në një zonë të matshme D që e përmban pikën $M_0(x_0, y_0)$. tregojmë se integrali:

$$\iint_D \frac{1}{r^\alpha} dxdy$$

konvergjon për $\alpha < 2$ dhe divergjon për $\alpha \geq 2$.

Meqë funksioni $f(x,y)$ nuk është i kufizuar në pikën $M_0(x_0, y_0)$ marrim qarkun $B = B[M_0; \rho]$. Siç kemi theksuar, natyra e integralit në këtë zonë është e njëjtë me atë në tërë zonën D.

Shqyrtojmë pra integralin:

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \iint_B \frac{1}{r^\alpha} dxdy.$$

Për këtë qëllim marrim vargun $\{R_n = R_n(M_0; \delta_n)\}$ të rrathëve që gjenden në B dhe që për $\delta \to 0$ kur $n \to \infty$, shtrëngohen në pikën M_0, dhe shqyrtojmë integralin:

$$\iint_{B \setminus R_n} \frac{1}{r^\alpha} dxdy. \tag{5}$$

Shënojmë:

$$x - x_0 = r\cos\ \varphi, y - y_0 = r\sin\ \varphi$$

dhe kemi:

$$\iint_{B\setminus R_n} \frac{1}{r^\alpha} dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\delta_n}^{\rho} \frac{rdr}{r^\alpha} = 2\pi \int_{\delta_n}^{\rho} r^{1-\alpha} dr = \begin{cases} 2\pi \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\Big|_{r=\delta n}^{r=\rho}, \text{për}\quad \alpha \neq 2 \\ 2\pi \ln r\Big|_{r=\delta_n}^{r=\rho},\ \text{për}\quad \alpha = 2\,. \end{cases}$$

Këndej shohim se kur $\delta_n \to 0$ integrali (5) ka limit të fundmë kur $\alpha < 2$ dhe të pafundmë për $\alpha \geq 2$ që sipas teoremës 4.3.8, rrjedh se integrali (5), pra edhe integrali:

$$\iint_D \frac{dxdy}{r_\alpha},$$

konvergjon për $\alpha < 2$ dhe divergjon për $\alpha \geq 2$.

Duke u mbështetur në këtë shembull mund të formulohet ky rezultat:

Teorema 4.3.9 *Nëse për funksionin $f(x,y)$ të dhënë në zonën D, i cili është i pakufizuar në pikën M_0, ka vend pabarazimi:*

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{r^\alpha}, r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\ )^\alpha$$

atëherë për $\alpha < 2$ integrali:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

konvergjon.

Vërtetimi është evident.

Vërejtja 1. Kthimi i integralit jo të vet të llojit të dytë në integral të përsëritur realizohet sipas kushteve analoge që u theksuan për integralet jo të veta të llojit të parë. Konkretisht për funksionin jonegativ kërkohet konvergjenca e integralit të përsëritur të këtij funksioni, kurse për funksionin që nuk ruan shenjë kërkohet konvergjenca e integralit të përsëritur të modulit të tij.

Edhe ndryshimi i ndryshoreve ne integralin jo të vet realizohet sipas rregullave të ndryshimit të ndryshoreve për integralin e zakonshëm të dyfishtë.

Vërejtja 2. Për integralet jo të veta të llojit të parë dhe të dytë me shumëfish më të madh se dy përkufizimet jepen në mënyrë analoge dhe vlejnë pohime të ngjashme me ato që formuluam për integralet e dyfishta jo të vet.

4.3.3 Detyra për ushtrime

1. Të shqyrtohet konvergjenca e integralit:

$$I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2},$$

ku:

$$\begin{array}{ll} a) & D = \{(x,y) |\ |y| \le |x|, x^2+y^2 \le 1\}, \\ b) & D = \{(x,y) |\ |y| \le x^2, x^2+y^2 \le 1\}. \end{array}$$

2. Të llogariten integralet:

$$\begin{array}{ll} a) & \displaystyle\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ D = \{(x,y).x^2+y^2 \le 1\} \\ b) & \displaystyle\iint\limits_D \frac{dxdy}{1-x^2-y^2},\ D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\} \\ c) & \displaystyle\iint\limits_D \ln\sin(x-y)dxdy,\ D = \{(x,y)/0 \le x \le \pi, 0 \le y \le x\}. \end{array}$$

3. Të llogaritet

$$\int\limits_D e^{-(x+y)^2}dxdy,$$

ku D është zona e përcaktuar me pabarazimet $x \ge 0, y \ge 0$.

4. Të shqyrtohet konvergjenca e integraleve:

$$a)\qquad \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}(a>0),\ D=\{(x,y)|x^2+y^2\geq 1\};$$

$$b)\qquad \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^m+y^n)^\alpha}\ (m,n,\alpha>0),\ D=\{(x,y)|x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^m+y^n\leq 1\};$$

5. Të tregohet se
$$\int\limits_D \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy,$$
ku $D=\{(x,y)|\ x\geq 1,\ y\geq 1\}$, divergjon edhe pse integralet:
$$\int\limits_1^\infty dx\int\limits_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy,\quad \int\limits_1^\infty dy\int\limits_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$
konvergjojnë.

5

INTEGRALET VIJËPËRKULTA DHE SIPËRFAQËSORE

Në këtë kapitull do të përkufizojmë integralet vijëpërkulta e sipërfaqësore dhe do të bëjmë fjalë për vetitë dhe llogaritjen e tyre. Këto integrale përkufizohen në mënyrë analoge siç përkufizohen integralet e njëfishta dhe të dyfishta. Integrali i caktuar $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ është integral në lidhje me funksionin f të përkufizuar në intervalin e mbyllur $[a, b]$, ndërsa integrali vijëpërkulët do të jetë një lloj integrali në lidhje me funksionin e përkufizuar në një lakore ℓ. Në mënyrë analoge, integrali $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ është integral në lidhje me funksionin f të përkufizuar në zonën D, ndërsa integrali sipërfaqësor do të jetë një lloj integrali në lidhje me funksionin f të përkufizuar në një sipërfaqe Σ.

5.1 INTEGRALI VIJËPËRKULËT

Siç do të shohim gjatë trajtimit të materialit është e domosdoshme që zgjerimin e nocionit të integrimit gjatë vijave në rrafsh ose në hapësirë ta bëjmë në dy drejtime të cilat çojnë në dy tipe integralesh vijëpërkulta.

5.1.1 Integralet vijëpërkulta të llojit të parë

a. Përkufizimi dhe llogaritja e integralit vijëpërkulët të llijit të parë

Shohim në fillim dy probleme që sjellin në kuptimin e integralit vijëpërkulët të llojit të parë.

Le të jetë ℓ lakore e vazhdueshme dhe e orientuar nëpër të cilën shpërndahet një masë me dendësi të ndryshueshme $\rho = \rho(x, y)$. Kërkohet të gjendet masa m

e shpërndarë në lakoren ℓ.

Funksionin $\rho(x, y)$ e konsiderojmë të vazhdueshëm në ℓ. Lakoren e ndajmë në mënyrë të çfarëdoshme në n-pjesë. Në secilën pjesë $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ marrim në mënyrë të çfarëdoshme pikën $P_i(\xi_i, \eta_i)$. Po supozojmë se në harkun $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ dendësia e masës është konstante dhe e barabartë me $\rho\ (\xi_i, \eta_i)$. Atëherë produkti $\rho\ (\xi_i, \eta_i) \cdot \triangle s_i$, ku me $\triangle s_i$ shënuam gjatësinë e harkut $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ përafërsisht paraqet masën e shpërndarë në harkun $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$. Shuma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \rho\ (\xi_i, \eta_i)\ \triangle s_i$$

paraqet përafërsisht masën e lëndës së shpërndarë në lakoren ℓ. Intuitivisht shihet se përafrimi është më i mirë sa më e imtë të jetë ndarja, prandaj është e natyrshme që masën e shpërndarë ta përkufizojmë me:

$$m = \lim_{\max \triangle s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} \rho\ (\xi_i, \eta_i)\ \triangle s_i. \tag{1}$$

Le të shqyrtojmë tash një problem tjetër.

Le të jetë ℓ një lakore e rektifikueshme në rrafshin Oxy në të cilën është i pŕkufizuar funksioni i vazhdueshëm $f(x, y) \geq 0$. Atëherë bashkësia e pikave $(x, y, f(x, y))$ $((x, y) \in \ell)$ në hapësirë, paraqet një lakore k.

Lakorja k shtrihet në sipërfaqen cilindrike drejtuese e së cilës është lakorja ℓ, me përftuese paralele me boshtin Oz (fig. 5.1). Kërkojmë syprinën e pjesës së sipërfaqes cilindrike të kufizuar me lakoren ℓ, lakoren k dhe segmentet $[AC]$ e $[BD]$, ku C e D janë pikat skajshme të lakores k.

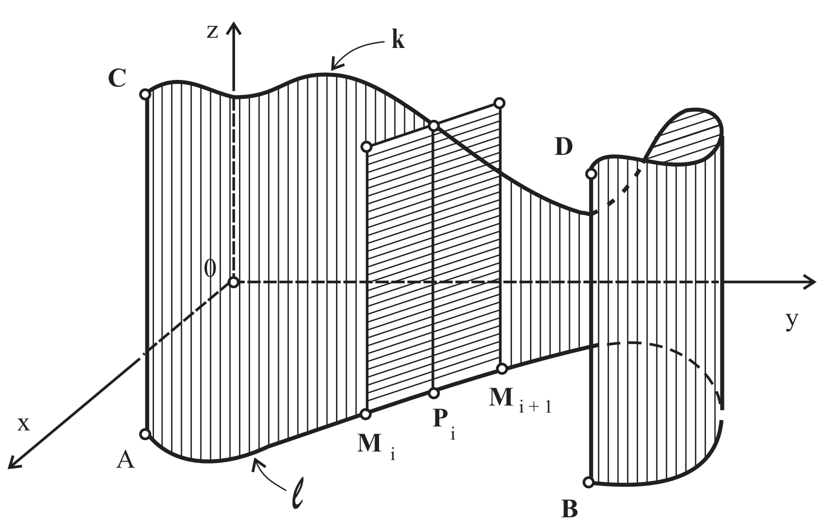


Fig. 5.1.

Si edhe më parë lakoren ℓ e ndajmë ne n pjesë. Në qoftë se nëpër pikat ndarëse M_i heqim përftueset e sipërfaqes cilindrike, atëherë sipërfaqen ndërmjet lakoreve ℓ e k do ta zbërthejmë në n pjesë. Në secilin hark $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ marrim në mënyrë të çfarëdoshme një pikë $P_i(\xi_i, \eta_i)$. Nëse me Δs_i shënojmë gjatësinë e harkut $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, atëherë produkti $f(\xi_i, \eta_i)\triangle s_i$ përafërsisht paraqet syprinën e pjesës së $i-$të $(i = 0, ..., n-1)$ të sipërfaqes së shqyrtuar. Shuma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \triangle s_i$$

përafërsisht paraqet syprinën e sipërfaqes së kërkuar. Përafrimi do të jetë aq mëi mirë sa më e imtë të jetë ndarja e lakores ℓ. Prandaj është e natyrshme që syprinën e pjesës së shqyrtuar të sipërfaqes cilindrike ta përkufizojmë me:

$$S = \lim_{\max \triangle s_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\, \eta_i) \triangle s_i. \qquad (2).$$

Nga (1) e (2) shohim se nga dy problemet e formuluara doli i njëjti problem matematik. Kjo dukuri në mënyrë të natyrshme, si te integralet që u përkufizuan gjer tash, jep përkufizimin e një integrali të ri për funksionin me dy ndryshore sipas një lakoreje.

Le të jetë dhënë lakorja ℓ në rrafshin Oxy, me skaje në pikat A e B, për të cilën supozojmë se është e rektifikueshme (d.m.th. ka gjatësi të fundme) dhe e orientuar.

Le të jetë $f(x, y)$ funksion i definuar në pikat e kësaj lakoreje. Harkun $\overset{\frown}{AB}$ e ndajmë në mënyrë të çfarëdoshme me anën e pikave:

$$A = M_0, M_1, M_2, ..., M_i, ..., M_n = B$$

në $n-$ pjesë (fig. 5.1). Në secilin prej harqeve $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, për $i = 0, 1, ..., n-1$, marrim një pikë të çfarëdoshme $P_i(\xi_i, \eta_i)$ dhe ndërtojmë shumën:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \triangle s_i, \qquad (3)$$

ku me $\triangle s_i$ shënojmë gjatësinë e harkut të i-të. Si zakonisht, shumën (3) e quajmë **shumë ntegrale** të funksionit $f(x, y)$. Kuptohet, vlera e shumës (3) varet nga mënyra e ndarjes së harkut $\overset{\frown}{AB}$ dhe nga mënyra e zgjedhjes së pikave P_i. Shënojmë $\lambda = \max_i\{\triangle s_i\}$.

Përkufizimi 5.1.1 *Limiti i shumës (3), kur $\lambda \to 0$, nëse ekziston dhe nuk varet nga mënyra e ndarjes së harkut ℓ e as nga mënyra e zgjedhjes së pikave P_i, quhet* **integral vijëpërkulët i llojit të parë** *i funksionit $f(x, y)$ gjatë lakores ℓ dhe* *shënohet me simbolin:*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{\ell} f(x,y)ds. \tag{4}$$

Pra:

$$\lim_{\lambda\to 0} \sigma = \int\limits_{\ell} f(x,y)ds = I. \tag{5}$$

Relacioni (5) tregon se për çdo $\epsilon > 0$ ekziston $\delta(\epsilon) > 0$ ashtu që për $\lambda < \delta(\epsilon)$ vlen pabarazimi $|\sigma - I| < \epsilon$, për të gjitha mënyrat e ndarjes së lakores ℓ dhe për të gjitha mënyrat e zgjedhjes së pikave P_i.

Në qoftë se krahasojmë barazimet (1) e (2) me barazimin (5), mund të shkruajmë:

$$m = \int\limits_{l} \rho(x,y)ds,$$

dhe:

$$S = \int\limits_{l} f(x,y)ds.$$

Në vazhdim shqyrtojmë se kur ekziston integrali vijëpërkulët i llojit të parë dhe si llogaritet ai.

Teorema 5.1.1 *Në qoftë se vija $\ell = \overset{\frown}{AB}$ jepet me ekuacionet $x = x(s), y = y(s)$ ku s është parametri i saj natyral (gjatësia e ndryshueshme e harkut të lakores) në segmentin $[0, S]$, ku $A(x(0), y(0)), B(x(S), y(S))$, funksionet $x(s)$ e $y(s)$ janë të vazhdueshme në domenin e tyre kurse funksioni $f(x,y)$ është i vazhdueshëm në ℓ, integrali (4) ekziston dhe:*

$$\int\limits_{\ell} f(x,y)ds = \int\limits_{0}^{S} f[x(s), y(s)]ds. \tag{6}$$

Vërtetimi. Segmentin $[0, S]$ e ndajmë në n-pjesë. Kjo ndarje implikon ndarjen e vijës ℓ në n-pjesë. Në pikat e harkut do të kemi:

$$f(x,y) = f[x(s), y(s)],$$

prandaj për $s_i \le s_i{}^* \le s_{i+1}$, kemi $P_i(\xi_i, \eta_i) = P_i[x(s_i{}^*), y(s_i{}^*)]$, kështu që shuma integrale (3) merr trajtën:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f[x(s_i^*), y(s_i^*)]\Delta s_i,$$

e cila kur $\lambda \to 0$ jep (6) sepse është shumë integrale e funksionit të vazhdueshëm në segmentin $[O, S]$. Teorema u vërtetua.

Meqenëse zakonisht lakoret nuk jepen me ekuacione ku parametri është natyral, formula (6) nuk ka ndonjë përdorim të gjerë, prandaj po kalojmë në llogaritjen e integralit vijëpërkulët të llojit të parë kur harku $\overset{\frown}{AB}$ jepet me ekuacione parametrike. Le të jetë dhënë harku $\overset{\frown}{AB}\equiv \ell$ me ekuacionet:

$$X = \varphi(t), Y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta], \tag{7}$$

ku funksionet $\varphi(t), \psi(t)$ janë të vazhdueshme kurse derivatet $\varphi'(t)$ e $\psi'(t)$ ekzistojnë, janë të vazhdueshme (pra ℓ është e lëmueshme) dhe nuk anulohen njëkohësisht në $[\alpha, \beta]$, d.m.th. $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$, si dhe $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)), B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$.

Për këto kushte ([10](1) fq. 249) lakorja ℓ është e rektifikueshme si dhe relacionet (7) vendosin një korrespondencë biunivoke në mes të t nga $[\alpha, \beta]$ dhe s nga $[0, S]$, Duke marrë zëvendësimin $s = s(t)$ në anën e djathtë të (6) dhe kur dihet se:

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt,$$

fitojmë:

$$\int\limits_{\ell} f(x, y)ds = \int\limits_{a}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\ dt. \tag{8}$$

Kështu, shohim se ka vend:

Teorema 5.1.2 *Nëse ℓ është lakore e lëmueshme e dhënë me ekuacionet:*

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ t \in [\alpha, \beta],$$

kurse $f(x, y)$ është i vazhdueshëm në ℓ, integrali vijëpërkulët i këtij funksioni në ℓ ekziston dhe jepet me formulën (8).

Vërejtje. Kur lakorja ℓ jepet me ekuacionin $y = y(x)$ në $[a, b]$, ku funksioni $y(x)$ ka derivat të vazhdueshëm në këtë segment, formula (8) bëhet:

$$\int\limits_{\ell} f(x, y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\ dx, \tag{9}$$

ndërsa kur ℓ jepet në koordinata polare $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$ formula (9) merr trajtën:

$$\int\limits_{\ell} f(x, y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi.$$

Shembulli 5.1.1 Të llogaritet $\int\limits_{\ell}(x+y)\, ds$ ku ℓ është harku i rrethit $x^2+y^2 = r^2$ në kuadrantin e parë.

Zgjidhje: Po e shprehim harkun e rrethit në formën parametrike:

$$x = r\cos t, y = r\sin t,\ t \in \left[\ 0, \frac{\pi}{2}\ \right].$$

Atëherë:

$$\int\limits_{\ell}(x+y)ds = \int\limits_{0}^{\pi/2}(r\cos t + r\sin t)\sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\;dt$$
$$= r^2\int\limits_{0}^{\pi/2}(\cos\, t\, +\, \sin\, t)\, dt = 2r^2.$$

Shembulli 5.1.2 Të llogaritet $\int\limits_{\ell} xyds$, ku ℓ është harku i elipsës $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ në kuadrantin e parë.

Zgjidhje: Elipsën e shprehim me ekuacione parametrike:

$$x = a\,\cos\, t,\; y = b\,\sin t,\; 0\le t\le \frac{\pi}{2}.$$

Atëherë:

$$\int\limits_{\ell} xyds = \int\limits_{0}^{\pi/2} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\;dt =$$

$$= \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int\limits_{0}^{\pi/2}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}\quad d[(a^2-b^2)\sin^2 t] = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

Në mënyrë analoge përkufizohet integrali vijëpërkulët i llojit të parë për funksionin me tri ndryshore $f(x,y,z)$ gjatë një lakoreje ℓ në hapësirë. Atë e shënojmë me:

$$\int\limits_{\ell} f(x,y,z)\,ds.$$

Kur harku i lëmueshëm ℓ jepet në formë parametrike:

$$x=\varphi\,(t)\,,\;\; y=\psi\,(t)\,,\;\; z=\chi\,(t),\;\; \alpha\le t\le\beta,$$

integrali vijëpërkulët i llojit të parë kthehet në integral të zakonshëm me ndihmën e formulës:

$$\int\limits_{\ell} f(x,y,z)\,ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\,\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\;dt.$$

b. Vetitë e integraleve vijëpřkulët të llojit të parë

Si pamë më sipër integrali vijëpërkulët i llojit të parë kthehet në integral të caktuar, prandaj vetitë i ka të ngjashme me ato të integraleve të zakonshme.

1. Nëse funksioni $f(x,y)$ është i integrueshëm në $\overset{\frown}{AB}$, i tillë do të jetë edhe funksioni $c \cdot f(x,y)$ ku c është konstante dhe ka vend barazimi:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} c \cdot f(x,y)ds = c \cdot \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds.$$

2. Në qoftë se funksionet $f(x,y)$ e $g(x,y)$ janë të integrueshëm në $\overset{\frown}{AB}$, të tillë do të janë edhe funksionet $f(x,y) \pm g(x,y)$ dhe ka vend barazimi:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} [f(x,y) \pm g(x,y)]ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds \pm \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} g(x,y)ds.$$

3. Në qoftë se harku $\overset{\frown}{AB}$ përbëhet nga dy pjesë $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{CB}$, me kusht që ato pjesë nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta dhe funksioni $f(x,y)$ është i integrueshëm në të dy pjesët, atëherë ai është i integrueshëm edhe në $\overset{\frown}{AB}$ dhe ka vend relacioni:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} f(x,y)\,ds + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} f(x,y)\,ds.$$

4. Në qoftë se funksioni $f(x,y)$ është i integrueshëm në $\overset{\frown}{AB}$, i tillë do të jetë edhe $|f(x,y)|$ dhe vlen:

$$\left|\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds\right| \leq \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} |f(x,y)|ds.$$

5. Në qoftë se funksionet $f(x,y)$ dhe $g(x,y)$ janë të integrueshëm në harkun $\overset{\frown}{AB}$ dhe vlen pabarazimi:

$$f(x,y) \geq g(x,y),$$

atëherë:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds \geq \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} g(x,y)\,ds.$$

6. Në qoftë se funksioni $f(x,y)$ është i vazhdueshëm në$\overset{\frown}{AB}$, atëherë ekziston pika $P(\xi,\eta) \in \overset{\frown}{AB}$ e tillë që:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = f(\xi,\eta) \cdot s,$$

ku s është gjatësia e harkut $\overset{\frown}{AB}$.

Në fund po japim një veti e cila nuk vlen për integralet e caktuara.

7. Në qoftë se $f(x,y)$ është i vazhdueshëm në $\overset{\frown}{AB}$, atëherë:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)\,ds,$$

d.m.th. integrali vijëpërkulët nuk varet nga orientimi i harkut $\overset{\frown}{AB}$.

Vërtetimi. Le të jenë:

$$x = x(s),\ y = y(s),\ s \in [0, S],$$

ekuacione parametrike të lakores $\overset{\frown}{AB}$ ku S është gjatësia e saj ndërsa me s kemi shënuar gjatësinë e lakores $\overset{\frown}{AM} \subset \overset{\frown}{AB}$, ku M është cilado pikë e lakores $\overset{\frown}{AB}$, d.m.th. s është parametri i saj natyral. Nëse shënojmë $\sigma = S - s$, σ do të jetë sa gjatësia e harkut $\overset{\frown}{BM}$. Barazimet:

$$x = x(S-\sigma),\ y = y(S-\sigma),\ 0 \le \sigma \le S,$$

janë ekuacionet e lakores $\overset{\frown}{BA}$. Nëse marrim:

$$s = S - \sigma,$$

atëherë, nga formula (6), gjejmë:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,ds = \int_0^S f[x(s),y(s)]ds = -\int_S^0 f[x(S-\sigma),y(S-\sigma)]d\sigma =$$

$$= \int_0^S f[x(S-\sigma),y(S-\sigma)]d\sigma = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)\,ds.$$

Vërejtje. Të gjitha vetitë e lartcekura vlejnë edhe për integralin e funksionit $f(x,y,z)$, sipas lakores ℓ e cila gjendet në hapësirë.

5.1.2 Integralet vijëpërkulët të llijit të dytë

a. Përkufizimi i integralit vijëpërkulët të llojit të dyt¨

Së pari analizojmë një problem i cili edhe do të na sjell deri te kuptimi i këtij integrali.

Le të jetë ℓ një lakore e lëmueshme e rrafshit që i bashkon pikat A e B. Lakorja ℓ le të jetë në një fushë të forcave te ndryshueshme F të dhëna me ekuacion vektorial

$$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$$

Nëpër lakoren ℓ nën ndikimin e forcave të fushës $\mathbf{F}$ lëvizë një pikë materiale. Duhet të llogaritet puna A të cilën e kryejnë forcat e fushës $\mathbf{F}$ kur pika materiale kalon prej pikës A në pikën B. Lakoren ℓ e ndajmë në n pjesë me anë të pikave $A = M_0, M_1, ..., M_i, M_{i+1}\ ..., M_n = B$, në kahun prej A në B. Le të jetë $\triangle\mathbf{s_i}$ vektori $\mathbf{M}_i\mathbf{M}_{i+1}(i = 0, ..., \ n-1)$. Në çdo hark $\overset{\frown}{M_iM}_{i+1}$ të lakores ℓ zgjedhim në mënyrë arbitrare një pikë $P_i(\xi, \eta_i)$. Le të jetë $\mathbf{F_i}$ madhësia e forcës në pikën P_i. Supozojmë se në harkun $\overset{\frown}{M_iM}_{i+1}$ forca F_i është konstante. Më në fund intensiteti i vektorit $\triangle\mathbf{s_i}$ dhe gjatësia e harkut $\overset{\frown}{M_iM}_{i+1}$, kur pikat M_i e M_{i+1} janë mjaft afër njëra-tjetrës, përafërsisht përputhen. Këndej punën e forcave $\mathbf{F}$ në harkun $\overset{\frown}{M_iM}_{i+1}$ mund ta përafrojmë me punën $\triangle A_i$ të forcës konstante $\mathbf{F_i}$ në segmentin e orientuar $\triangle s_i$. Nga fizika dihet se në rastin e tillë, puna e kryer $\triangle A_i$ është e barabartë me produktin skalar të forcës $\mathbf{F_i}$ me vektorin $\triangle s_i$:

$$\triangle A_i = \mathbf{F}_i \circ \triangle\mathbf{s}_i = |\mathbf{F}| \cdot |\triangle\mathbf{s}_i| \cdot \cos\varphi_i$$

ku φ_i është këndi ndërmjet vektorëve $\mathbf{F_i}$ dhe $\triangle\mathbf{s}_i$, ndërsa $|\mathbf{F_I}|$ madhësia e forcës $\mathbf{F_i}$ në pikën $P_i(\xi_i, \eta_i)$. Nga ana tjetër:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i) = P(\xi_i, \eta_i)\mathbf{i} + Q(\xi_i, \eta_i)\mathbf{j}.$$

Projeksionet e vektorit $\triangle\mathbf{s}_i$ në boshtet Ox e Oy janë $\triangle x_i = x_{i+1} - x_i$ dhe $\triangle y_i = y_{i+1} - y_i$. Prandaj:

$$\triangle\mathbf{s}_i = \triangle x_i\,\mathbf{i} + \triangle\mathbf{y_i}\,\mathbf{j},$$

ndërsa:

$$\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i) \circ (\triangle x_i\mathbf{i} + \triangle y_i\mathbf{j}) = P(\xi_i, \eta_i)\triangle\mathbf{x}_i + Q(\xi_i, \eta_i)\triangle\mathbf{y}_i.$$

Me fjalë të tjera,

$$\triangle A_i = P(\xi_i, \eta_i)\triangle\mathbf{x}_i + Q(\xi_i, \eta_i)\triangle\mathbf{y}_i.$$

Punën e kryer A përafërsisht mund ta paraqesim me:

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}(\xi_\mathbf{i}, \eta_\mathbf{i}) \circ \triangle\mathbf{s_i} = \sum_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{n-1}} [\mathbf{P}(\xi_\mathbf{i}, \eta_\mathbf{i})\triangle\mathbf{x_i} + \mathbf{Q}(\xi_\mathbf{i}, \eta_\mathbf{i})\triangle\mathbf{y_i}].$$

Është e natyrshme që punën A ta konsiderojmë limit të shumës së anës së djathtë të relacionit të mësipërm kur $\lambda = \max\{|\triangle\mathbf{s}_i|\} \to 0$:

$$A = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} [P(\xi_i, \eta_i)\triangle x_i + Q(\xi_i.\eta_i)\triangle y_i]. \tag{1}$$

Limiti si në (1) paraqitet edhe në shumë raste të tjera në matematikë, fizikë, mekanikë etj. prandaj po e shqyrtojmë atë në rastin e përgjithshëm, d.m.th. po i japim kuptimin matematik atij limiti.

Supozojmë se në vijën e lëmueshme $\widehat{AB}$ e të orientuar në rrafsh, janë dhënë dy funksione $P(x, y)$ dhe $Q(x, y)$. Me ndihmën e pikave $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_n = B$, të vendosura njëra pas tjetrës nga A në B, ndajmë harkun $\widehat{AB}$ në n-pjesë (fig. 5.2).

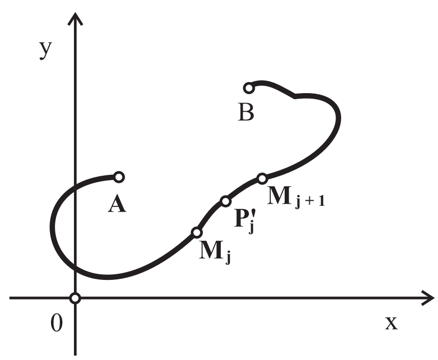


Fig. 5.2.

Shënojmë $M_i(x_i, y_i)$ për $i = 0, ..., n-1$. Në harkun $\widehat{M_i M_{i+1}}$ marrim në mënyrë të çfarëdoshme pikën $P_i'(\xi_i, \eta_i)$ dhe formojmë shumën:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} [P(\xi_i, \eta_i)\triangle x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\triangle y_i], \tag{2}$$

ku:

$$\triangle x_i = x_{i+1} - x_i, \ \triangle y_i = y_{i+1} - y_i.$$

Përkufizimi 5.1.2 *Limiti i shumës* (2) *kur* $\lambda = \max\{| \widehat{M_i M_{i+1}} |\} \to 0$, *në qoftë se ekziston, quhet* **integral vijëpërkulët i llojit të dytë** *i vektor funksionit me komponente* $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ *dhe shënohet:*

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \tag{3}$$

Barazimi (1) paraqet interpretimin e integralit vijëpërkulët të llojit të dytë në mekanikë: vlera e punës së kryer nga forca $\mathbf{F}$, kur një pikë materiale nën ndikimin e saj e kalon rrugën gjatë lakores ℓ, numerikisht është e barabartë me vlerën e integralit vijëpërkulët të funksionit $\mathbf{F}$ gjatë lakores ℓ.

Kur integralet:

$$\int_\ell P(x, y)dx \text{ dhe } \int_\ell Q(x, y)dy,$$

ku $\overset{\frown}{AB} = \ell$, të cilët quhen përkatësisht, integralet sipas x dhe sipas y, ekzistojnë, ekziston edhe integrali (3) dhe:

$$\int_\ell Pdx + Qdy = \int_\ell Pdx + \int_\ell Qdy.$$

Ky barazim vërtetohet menjëherë, duke ndarë shumën (2) dhe duke kaluar në limit kur $\lambda \to 0$. Vetitë $1^o - 6^o$ të integralit vijëpërkulët të llojit të parë mund të formulohen njësoj edhe për integralet vijëpërkulta të llojit të dytë. Vetia 7^o merr trajtën:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = -\int_{\overset{\frown}{BA}} Pdx + Qdy,$$

që tregon se te integralet vijëpërkulta të llojit të dytë ndryshimi i orientimit të përshkrimit të lakores çon në ndryshimin e shenjës së vlerës së integralit. Kjo veti rrjedh nga fakti se kur ndërrohet orientimi, projeksionet e segmenteve të orientuar me kahe të kundërta ndryshojnë për nga shenja.

Kur lakorja është e hapur atëherë atë mund ta orientojmë prej njërës pikë të saj në tjetrën, p.sh. prej pikës A në B dhe shkruajmë $\overset{\frown}{AB}$. Atëherë është e qartë se $\overset{\frown}{BA}$ paraqet drejtimin e kundërt. Në qoftë se lakorja është e mbyllur ($A \equiv B$) dhe e thjesht (nuk e ndërpret vetveten), atëherë mënyra e treguar e orientimit nuk mund të bëhet. Orientimin e lakoreve të mbyllura nganjëherë e përkufizojmë në këtë mënyrë:

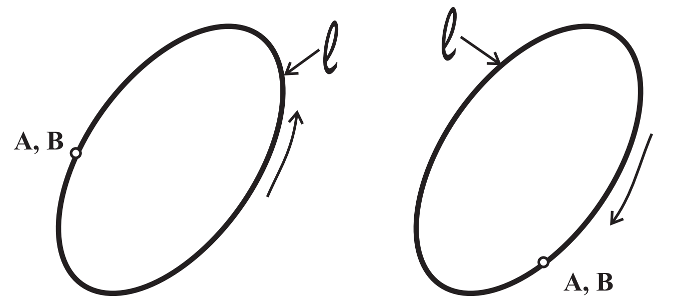


Fig. 5.3.

Kahun e kundërt me rrotullimin e akrepave të orës, sipas marrëveshjes, e quajmë **kah pozitiv** (fig. 5.3). Në këtë rast **kahu negativ** do të përputhet me kahun e rrotullimit të akrepave të orës. Për lakoren e mbyllur themi se e kemi orientuar në qoftë se në të kemi caktuar njërin kah. Le të vëmë në dukje se ekzistojnë edhe aso lakoresh të mbyllura për të cilat mënyra e përmendur e orientimit nuk mund të përcaktoj njëvlerësisht kahun e orientimit. Për shembull, në fig. 5.4. kemi orientuar lakoren edhe për orientimin e tillë nuk mund të themi se është në kahun e rrotullimit të akrepave. Ta përvetësojmë këtë përkufizim të orientimit të lakores së mbyllur:

Në qoftë se duke lëvizur nëpër lakoren e mbyllur ℓ zona e kufizuar me të na mbetet në anën e majtë, atëherë do të themi se lakoren e kemi orientuar në kahun pozitiv.

Në fig. 5.4. lakorja ℓ kufizon zonën e nxirë. Kahu pozitiv nuk përputhet me asnjërin kah të rrotullimit të akrepave. Në fig. 5.3. në rastin a) kemi orientim pozitiv të lakores, ndërsa në rastin b) orientim negativ të saj.

Le të vëmë në dukje edhe këtë veti të integralit vijëpërkulët të llojit të dytë.

Në qoftë se zonën D, të kufizuar me lakoren e mbyllur ℓ e ndajmë në dy zona D_1 e D_2, atëherë:

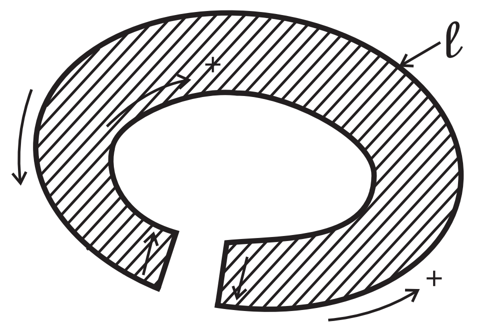


Fig. 5.4.

$$\int_{\ell} Pdx + Qdy = \int_{\ell_1} Pdx + Qdy + \int_{\ell_2} Pdx + Qdy,$$

ku me ℓ_1 e ℓ_2 kemi shënuar lakoret që kufizojnë zonat D_1 e D_2, përkatësisht (fig. 5.5).

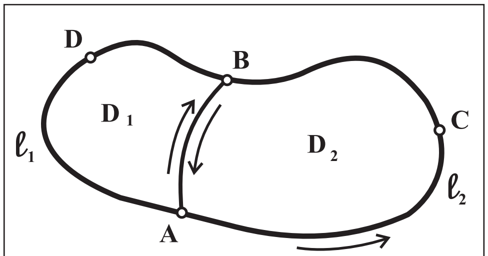


Fig. 5.5.

Me të vërtetë:

$$\int_{l} Pdx + Qdy = \int_{\overset{\frown}{ACB}} Pdx + Qdy + \int_{\overset{\frown}{BA}} Pdx + Qdy + \int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy +$$

$$+\int\limits_{\overset{\frown}{BDA}} Pdx+Qdy=\oint\limits_{\ell_1} Pdx+Qdy+\oint\limits_{\ell_2} Pdx+Qdy, \text{sepse} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}}+\int\limits_{\overset{\frown}{BA}}=0.$$

Më në fund të cekim se nëse lakorja ℓ e ndërprenë vetveten, atëherë duhet treguar kujdes në llogaritjen e integralit sipas lakores ℓ. P.sh. lakoret e paraqitura në fig. 5.6. duhet konsideruar si dy vija të ndryshme, prandaj edhe integralet e llojit të dytë sipas tyre, në përgjithësi do të ndryshojnë.

Vërejtje. Përkufizimi i integralit vijëpërkulët të llojit të dytë për lakoret e lëmueshme zgjërohet edhe për lakoret pjesë-pjesë të lëmueshme. Në qoftë se γ është pjesë-pjesë e lëmueshme, d.m.th. paraqitet si union i një numri të fundmë të lakoreve të lëmueshme $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ me përkufizim shënojmë:

$$\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy=\sum_{i=1}^{k}\Big(\int\limits_{\gamma_i} Pdx+Qdy\Big).$$

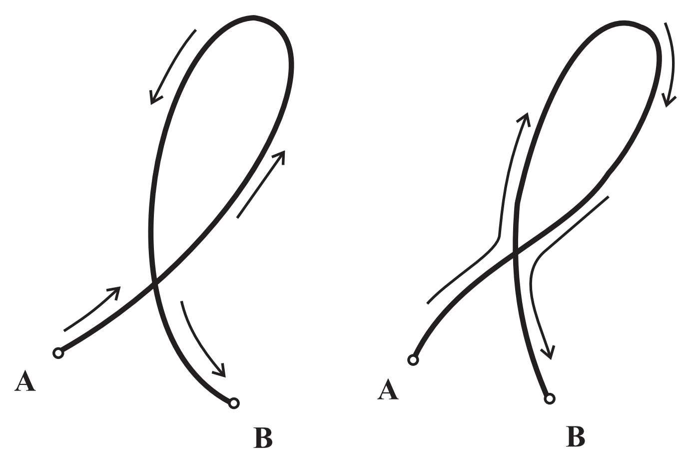


Fig. 5.6.

b. Ekzistenca dhe llogaritja e integralit vijëpërkulët ië llojit të dytë

Le të jetë dhënë harku i lëmueshëm $\overset{\frown}{AB}$ me ekuacionet parametrike:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha,\beta]. \tag{4}$$

ku $A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha)), B(\varphi(\beta),\psi(\beta))$.

Teorema 5.1.3 *Në qoftë se funksionet $P(x,y)$ dhe Q(x,y) janë të vazhdueshme në harkun e lëmueshëm e të orientuar $\overset{\frown}{AB}$ të dhënë me ekuacionet* (4), *integrali*

(3) *ekziston dhe vlen formula:*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\, \psi(t)]\psi'(t)\}dt \quad (5)$$

Vërtetimi. Meqenëse harku $\overset{\frown}{AB}$ është i lëmueshëm, ekzistojnë derivatet e funksioneve $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ në segmentin $[\alpha,\beta]$, janë të vazhdueshme dhe $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$ (d.m.th. derivatet nuk anulohen njëkohësisht në $[\alpha,\beta]$). Këndej rrjedh se midis pikave të harkut $\overset{\frown}{AB}$ dhe pikave të segmentit $[\alpha,\beta]$ vendoset një korrespodencë biunivoke. Prandaj çdo ndarjeje të harkut $\overset{\frown}{AB}$ i korrespodon një ndarje e segmentit $[\alpha,\beta]$ dhe anasjelltas.

Segmentin $[\alpha,\beta]$ e ndajmë në $n-$ pjesë me ndihmën e pikave:

$$\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta.$$

Kësaj ndarjeje i korrespondojnë pikat:

$$A = A_0, A_1, ..., A_{i+1}, ..., A_n = B$$

mbi lakoren $\overset{\frown}{AB}$, ku $A_i[\varphi(t_i),\psi(t_i)]$ $(i = 0,...,n-1)$. Meqenëse $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t) > 0$ për çdo $t \in [\alpha,\beta]$, këto pika janë të renditura nga A e B. Në qoftë se me $|\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}|$ shënojmë gjatësinë e harkut $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$, atëherë dihet se:

$$|\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}| = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\; dt,$$

që tregon se $\max\limits_{0\le i\le n-i}\{\triangle t_i = t_{i+1} - t_i\} \to 0$ rrjedh $\max\limits_{0\le i\le n-1}\{|\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}|\} \to 0$, dhe anasjelltas. Në segmentin $[t_i,\, t_{i+1}]$ marrim një pikë të çfarëdoshme $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$, për: $i = 0,1,2,...,n-1$. Kësaj pike i korrespondojnë pikat $M_i(\xi_i,\eta_i) = M_i[\varphi(t_i^*),\psi(t_i^*)]$ e harkut $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ kështu që shuma (2) bëhet:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{i=0}^{n-1}[P(\xi_i,\eta_i)\triangle x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\triangle y_i] = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\{P[\varphi(t_i^*),\psi(t_i^*)]\triangle x_i + Q(\varphi(t_i^*),\psi(t_i^*)\triangle y_i\}\end{aligned} \quad (6)$$

ku:

$$\triangle x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i),\; \triangle y_i = \psi(t_{i+1}) - \psi(t_i).$$

duke zbatuar teoremën e Lagranzhit për këto diferenca, kemi:

$$\triangle x_i = \varphi'(r_i)\triangle t_i,\; \triangle y_i = \psi'(r_i^*)\triangle t_i,\; \triangle t_i = t_{i+1} - t_i,$$

$r_i \in (t_i, t_{i+1}), r_i^* \in (t_i, t_{i+1})$. Këndej dhe nga (6) rrjedh:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \{P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)]\varphi'(r_i) + Q[\varphi(t_i^*),\, \psi(t_i^*)]\, \psi'(r_i^*)\} \triangle t_i\,.$$

Shprehja:

$$\sigma^* = \sum_{i=0}^{n-1} \{P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)]\, \varphi'(t_i^*) + Q[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)]\psi'(t_i^*)\} \triangle t_i$$

është shumë integrale e funksionit të vazhdueshëm:

$$P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)$$

në segmentin $[\alpha, \beta]$. Kjo shumë kur $\lambda = \max\{\triangle t_i\} \to 0$, ka limit integralin (5). Prandaj: për të vërtetuar teoremën mbetet të tregohet se:

$$\lim_{\lambda \to 0} (\sigma - \sigma^*) = 0 \tag{7}$$

Me të vërtetë, kemi:

$$\begin{aligned} |\sigma - \sigma^*| \leq \quad & \sum_{i=0}^{n-1} \{|P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)||\varphi'(r_i) - \varphi'(t_i^*)| + \\ & +|Q[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)]| \cdot |\psi'(r_i^*) - \psi'(t_i^*)|\} \triangle t_i. \end{aligned} \tag{8}$$

Meqenëse funksionet P e Q janë të vazhdueshme në $\overset{\frown}{AB}$, pra janë të vazhdueshme edhe në $[\alpha,\, \beta]$, ato janë të kufizuara, prandaj ekziston një konstantë K e tillë që:

$$|P[\varphi(t), \psi(t)| \leq K,\ |Q[\varphi(t), \psi(t)]| \leq K,$$

për çdo $t \in [\alpha, \beta]$.

Funksionet $\varphi'(t)$ dhe $\psi'(t)$ janë uniformisht të vazhdueshme në $[\alpha, \beta]$, prandaj për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta > 0$ ashtu që për ndarje të segmentit $[\alpha, \beta]$ të tillë që $\lambda < \delta$, luhatja në secilën pjesë ndarëse të jetë më vogël se $\frac{\varepsilon}{2K(\beta-\alpha),}$ për të dy funksionet. Pra:

$$|\varphi'(r_i) - \varphi'(t_i^*)| < \frac{\varepsilon}{2K(\beta - \alpha)},\ |\psi'(r_i^*) - \psi'(t_i^*)| < \frac{\varepsilon}{2K(\beta - \alpha)}.$$

Këndej dhe nga (8) del relacioni (7). Teorema u vërtetua.

Po theksojmë se teorema 5.1.3. mbetet e vërtetë edhe kur harku $\overset{\frown}{AB}$, i dhënë me ekuacionet (4) është pjesë-pjesë i lëmueshëm. (Në këtë rast do të zbatohej teorema 5.1.3. në secilën pjesë të lëmueshme të harkut $\overset{\frown}{AB}$).

Në vazhdim shohim një rast të veçantë të formulës (5). Harku $\overset{\frown}{AB}$ le të jetë dhënë me ekuacion $y = y(x)$, ku $x \in [a, b]$ dhe $A(a, y(a)), B(b, y(b))$. Duke supozuar se $y'(x)$ është i vazhdueshëm në $[a, b]$ formula (5) merr trajtën:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{a}^{b} \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]y'(x)\}dx. \tag{9}$$

Në mënyrë analoge nëse harku $\overset{\frown}{AB}$ jepet me ekuacionin $x = x(y)$ në $[c, d]$, fitojmë:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{c}^{d} [P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)]dy. \tag{10}$$

Në fund të kësaj pike po theksojmë se në mënyrë analoge përkufizohet integrali vijëpërkulët i llojit të dytë për vektor funksionin me komponentët $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ të përkufizuara në lakoren e lëmueshme ℓ e cila gjendet në hapësirë. Atë e shënojmë me:

$$\int\limits_{\ell} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \tag{10'}$$

Po ashtu, tregohet si në teoremën 5.1.3 se kur lakorja ℓ është e dhënë në formën:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t),\ \alpha \leq t \leq \beta,$$

ku funksionet $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$, kanë derivat të vazhdueshëm dhe nuk anulohen njëkohësisht në asnjë pikë të segmentit $[\alpha, \beta]$, funksionet P, Q, R janë të vazhdueshme në ℓ, integrali (10') ekziston dhe ka vend formula:

$$\int\limits_{\ell} Pdx + Qdy + Rdz =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\psi'(t) + R[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\chi'(t)\}dt.$$

Vërejtje. Ne përkufizuam integralin vijëpërkulët të dy llojeve për lakoret që gjenden në planin $\mathbf{R}^2$ ose në hapësirën $\mathbf{R}^3$. Në mënyrë analoge ai përkufizohet edhe për lakoret që shtrihen në çdo hapësirë $n-$ dimensionale $\mathbf{R}^n$, $n > 3$. Integrali vijëpërkulët sipas lakores së tillë posedon veti analoge me ato që u shqyrtuan në rastin dydimensional dhe vërtetimi i tyre është krejtësisht analog me vërtetimet e vetive në fjalë. Për këtë ne nuk do të ndalemi as në formulimin e as në vërtetimin e vetive përkatëse.

Shembulli 5.1.3 Të llogaritet:

$$I = \int_{\ell} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 + 2xy)dy,$$

ku ℓ është:

a) segmenti $[OA]$, ku $O(0,0)$, $A(1,1)$;

b) harku i parabolës $y = x^2$ nga origjina e koordinatave deri te pika $A(1,1)$;

c) vija e thyer OBA, ku $B(1,0)$. (fig. 5.7).

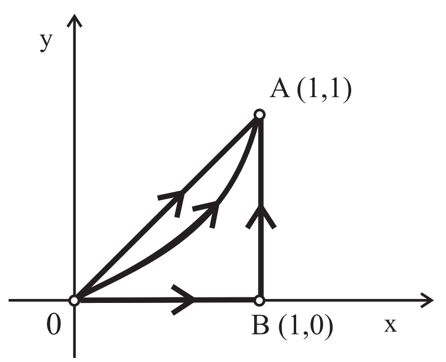


Fig. 5.7.

Zgjidhja: a) Segmenti $[OA]$ jepet me ekuacionin $y = x,\ 0 \leq x \leq 1$. Atëherë nga formula (9) gjejmë:

$$I = \int_0^1 (x^2 - 2x \cdot x + x^2 + 2x \cdot x)dx = 2\int_o^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

(b) Nga $y = x^2$ fitojmë $dy = 2xdx$, ndërsa kufijtë e integrimit do të jenë $x_1 = 0$ dhe $x_2 = 1$. Prandaj:

$$I = \int_0^1 (2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + x^2)dx = \frac{29}{30}.$$

c) Lakorja ℓ përbëhet nga segmentet $[OB]$ dhe $[BA]$ për të cilët kemi:

$$y = 0,\ dy = 0,\ 0 \leq x \leq 1,$$

përkatësisht:

$$x = 1,\ dx = 0,\ 0 \leq y \leq 1.$$

Prandaj:

$$I = I_{[OB]} + I_{[BA]} = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 (y^2 + 2y) dy = \frac{5}{3}.$$

Shembulli 5.1.4 Të llogaritet integrali:

$$I = \int_\ell (3x^2 y + x)\, dx + (x^3 - y)\, dy$$

a) Gjatë segmentit që bashkon pikat $O(0,0)$ dhe $B(1,1)$;
b) Gjatë harkut të parabolës $y^2 = x$ që i bashkon ato dy pika;
c) Gjatë vijës së thyer OAB, ku $A(1,0)$.

Zgjidhje: a) Segmenti që bashkon pikat O e B është:

$$y = x \text{ për } 0 \leq x \leq 1,$$

prandaj:

$$I = \int_o^1 (3x^3 + x + x^3 - x) dx = 1.$$

b) Në bazë të formulës (10) kemi

$$I = \int_0^1 [(3y^5 + y^2) 2y + (y^6 - y)] dy = 1.$$

c) Kemi:

$$I = \int_0^1 x dx + \int_0^1 (1 - y) dy = 1$$

Vërejtje. Po theksojmë se në shembullin 5.1.3 për tri rrugë gjejmë tri rezultate të ndryshëm, kurse në shembullin 4.1.4 për të tria rrugët e integrimit arritëm te i njëjti rezultat.

Shembulli 5.1.5 Të llogaritet:

$$I = \int_\ell (x^2 + 2xy) dy,$$

ku ℓ është pjesa e sipërme e elipsës $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, e orientuar nga $A(-a,0)$ në pikën $B(a,0)$.

Zgjidhje: Ekuacioni i harkut ℓ është:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,$$

ku t ndryshon nga $t_1 = \pi$ deri te $t_2 = 0$.

$$\int_\ell (x^2+2xy)dy = \int_\pi^0 (a^2\cos^2 t + 2ab\cos t\sin t)b\cos t dt = a^2 b\int_\pi^0 \cos^3 t dt +$$

$$+2ab^2\int_\pi^0 \cos^2 t\sin t dt = a^2 b\int_\pi^0 (1-\sin^2 t)d(\sin t) - 2ab^2\int_\pi^0 \cos^2 t d(\cos t) = -\frac{4ab^2}{3}.$$

Shembulli 5.1.6 Të llogaritet:

$$I = \int_\ell xydx + yzdy + zxdz,$$

ku ℓ është harku i rrethit $x^2+y^2+z^2 = 2Rx,\ z = x$, për të cilin $y \geq 0$, i orientuar nga origjina e koordinatave deri te pika $M(R,O,R)$.

Zgjidhje: Projeksioni i rrethit:

$$x^2+y^2+z^2 = 2Rx,\ \ z = x$$

në rrafshin Oxy është

$$2x^2+y^2 = 2Rx$$

e cila, në të vërtetë është elipsa:

$$\frac{\left(x-\frac{R}{2}\right)^2}{\frac{R^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{R^2}{2}} = 1.$$

Ekuacioni i saj në trajtën parametrike është:

$$x = \frac{R}{2} + \frac{R}{2}\cos t,\ y = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t.$$

Nga $z = x$ del:

$$z = \frac{R}{2} + \frac{R}{2}\cos t.$$

Në rrugën e integrimit parametri t ndryshon nga $t_1 = \pi$ deri te $t_2 = 0$. Prandaj:

$$\int_\pi^0 \Big[\Big(\frac{R}{2} + \frac{R}{2}\cos t\Big)\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t\Big(-\frac{R}{2}\sin t\Big) + \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t\Big(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t\Big)\cdot\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t$$

$$+ \ \Big(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t\Big)^2\cdot\Big(-\frac{R}{2}\sin t\Big)\Big]dt = \frac{R^3}{8}\int_\pi^0 (\sin t\cos^2 t - \sin t -$$

$$- \ \sqrt{2}\sin^2 t - \sqrt{2}\sin^2 t\cos t)dt = R^3\Big(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}\pi}{16}\Big).$$

5.1.3 Lidhja midis integraleve të llojit të parë dhe të llojit të dytë

Teorema 5.1.4 *Në qoftë se lakorja e lëmueshme $\ell = \overset{\frown}{AB}$ jepet me ekuacione me parametër natyral:*

$$x = x(s),\ \ y = y(s),\ \ 0 \leq s \leq S,$$

kurse funksionet $P(x,y)$ dhe $Q(x,y)$ janë të vazhdueshme mbi këtë lakore, vlen barazimi:

$$\int\limits_{\ell} Pdx + Qdy = \int\limits_{\ell} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds \tag{11}$$

ku $\cos\alpha$ dhe $\cos\beta$ janë kosinuset drejtuese të tangjentes së hequr në pikën M të lakores së orientuar nga A në B.

Vërtetimi. Tregojmë se:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\cos\alpha ds.$$

Nga teorema 5.1.3. kemi:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx = \int\limits_{0}^{S} P[x(s),y(s)]x'(s)ds. \tag{12}$$

Dihet se vektori $\mathbf{r}$ i drejtuar sipas tangjentes në pikën $M(x(s),y(s))$ është

$$\mathbf{r} = \{x'(s), y'(s)\}$$

dhe se $|\mathbf{r}| = 1$. Tash:

$$\mathbf{r} \circ \mathbf{i} = [x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}] \circ \mathbf{i} = x'(s),$$

$$\mathbf{r} \circ \mathbf{i} = |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{i}| \cos\alpha = \cos\alpha,$$

sepse $\mathbf{i},\ \mathbf{j}$ janë vektorët drejtues të boshteve Ox e Oy, përkatësisht. Këndej shohim se:

$$x'(s) = \cos\alpha$$

dhe pasi të zëvendësojmë në (12) marrim:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx = \int\limits_{0}^{S} P[x(s),y(s)]\cos\alpha\,ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\cos\alpha ds.$$

Në mënyrë analoge tregohet se:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Qdy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q\cos\beta ds,$$

dhe me ëtë u kompletua vërtetimi i teoremës.

Vërejtja 1. Në formulën (1) mund të zëvendësohet $\cos\beta$ me $\sin\alpha$ sepse $\cos\beta$-$=\sin\alpha$.

Vërejtja 2. Kur në lakore merret orientimi nga B në A, integrali në të majtë të (11) ndryshon shenjën. Në integralin e djathtë këndet α e β do të ndryshojnë për π, kështu që edhe në integralin e djathtë del një minus, pra barazimi ruhet.

Vërejtja 3. Formula (1) mbetet e vërtetë edhe kur lakorja ℓ është pjesë-pjesë e lëmueshme. Vërtetimi i këtij pohimi del kur lakorja ℓ ndahet në numër të fundmë pjesësh të lëmueshme, për secilën zbatojmë teoremën 5.1.4, dhe pastaj i mbledhim anëpëranë.

Vërejtja 4. Për integralin vijëpërkulët nëpër lakoren në hapësirë kemi:

$$\int\limits_{\ell} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{\ell} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

(γ është këndi që tangjentja e lakores formon me boshtin Oz).

5.1.4 Formula e Grinit

Në këtë pikë do të gjejmë lidhjen ndërmjet integralit vijëpërkulët nëpër një lakore të mbyllur ℓ dhe integralit të dyfishtë nëpër zonën D të kufizuar me lakoren ℓ.

Le të jetë dhënë në planin Oxy zona D e kufizuar me lakoren pjesë-pjesë të lëmueshme ℓ dhe e rregullt sipas boshtit Ox e Oy. Zonën e tillë D do ta quajmë **zonë të thjeshtë.**

Teorema 5.1.5 *(e Grinit) Në qoftë se në zonën e mbyllur e të thjeshtë D funksionet $P(x,y)$ dhe $Q(x,y)$ janë të vazhdueshme së bashku me derivatet e tyre të pjesshme $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, atëherë vlen formula:*

$$\int\limits_{\ell} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy, \tag{13}$$

ku ℓ është konturi i zonës i orientuar pozitivisht.

Vërtetimi. Konturin ℓ të zonës D mund ta paraqesim si union të grafikëve të dy lakoreve pjesë-pjesë të lëmueshme $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$, $a \leq x \leq b$, dhe ndoshta të dy segmenteve të drejtëzave $x = a$ e $x = b$, si dhe si union i grafikëve të dy lakoreve pjesë-pjesë të lëmueshme $\alpha(y)$ e $\beta(y)$, $\alpha(y) \leq \beta(y)$, $c \leq y \leq d$, dhe, ndoshta, segmenteve të drejtëzave $y = c$ e $y = d$ (fig. 5.8).

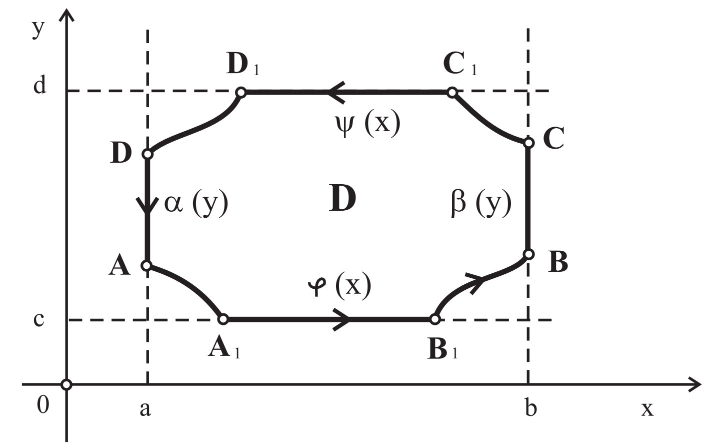


Fig. 5.8.

Shqyrtojmë integralin:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy,$$

i cili ekziston sepse funksioni $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ është i vazhdueshëm në D. Me kalimin në integral të përsëritur, duke përdorur formulën e Njutën-Lajbnicit si dhe formulën (9) të pikës **b**, marrim:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx =$$

$$= \int\limits_a^b \{P[x, \psi(x)] - P[x, \varphi(x)]\} dx = \int\limits_a^b P[x, \psi(x)] dx - \int\limits_a^b P[x, \varphi(x)] dx =$$

$$= \int\limits_{\overset{\frown}{DC}} P(x, y) dx - \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y) dx = -\int\limits_{\overset{\frown}{CD}} P(x, y) dx - \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y) dx.$$

Vërejmë se për segmentet [BC] e [DA]

$$\int\limits_{[BC]} P(x, y) dx = \int\limits_{[DA]} P(x, y) dx = 0$$

(sepse $dx = 0$). Prandaj:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx - \\ -\int\limits_{[BC]} P(x,y)dx - \int\limits_{\widehat{CD}} P(x,y)dx - \int\limits_{[DA]} P(x,y)dx = -\int\limits_{\ell} P(x,y)dx.\end{aligned} \tag{14}$$

Në mënyrë krejtësisht analoge, duke marrë parasysh se zona D është normale ndaj boshtit Oy, gjejmë formulën:

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{\ell} Qdy. \tag{15}$$

Tash nga (14) e (15) fitojmë formulën (13). Teorema u vërtetua.

Formulën e Grinit e gjetëm kur zona D është e thjeshtë. Bëjmë tash përgjithësimin e saj kur zona nuk është e thjesht. Supozojmë se zona D ndahet në zonat e thjeshta $D_i,\ i = 1, 2, ..., n$ (fig. 5.9).

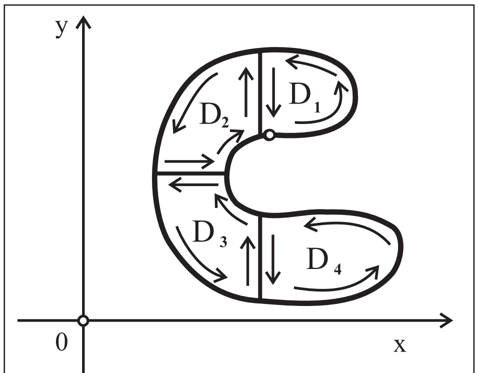


Fig. 5.9.

Nga teorema 5.1.5. shohim se për çdo $i = 1, 2, ..., n$, vlen barazimi:

$$\iint\limits_{D_i} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \int\limits_{\ell_i} Pdx + Qdy, \tag{16}$$

ku ℓ_i është konturi i zonës D_i e orientuar pozitivisht. Mbledhim barazimet (16) dhe fitojmë:

$$\sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\ell_i} Pdx + Qdy \tag{17}$$

Tash, në bazë të vetisë aditive të integralit të dyfishtë, kemi:

$$\sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \iint\limits_{D} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy. \tag{18}$$

Në anën e djathtë të barazimit (17) kemi shumë të integraleve vijëpërkulta të llojit të dytë gjatë lakoreve ℓ_i. Secila nga këto lakore përbëhet nga pjesë që i takojnë konturit ℓ si dhe nga pjesë të shtuara për të bërë ndarjen. Gjatë pjesëve të shtuara integrali merret dy herë, në të dy zonat fqinje, por me orientime të ndryshme. Prandaj, duke marrë parasysh se me ndërrimin e orientimit të lakores së integrimit ndryshon shenja e integralit vijëpërkulët, marrim:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\ell_i} Pdx + Qdy = \int_{\ell} Pdx + Qdy. \tag{19}$$

Nga formulat (17), (18) e (19) marrim formulën (13) në rastin e përgjithshëm.

Vërejtje. Formula e Grinit mbetet e vërtetë edhe kur zona D kufizohet nga një numër i fundmë konturash të thjeshta (fig. 5.10).

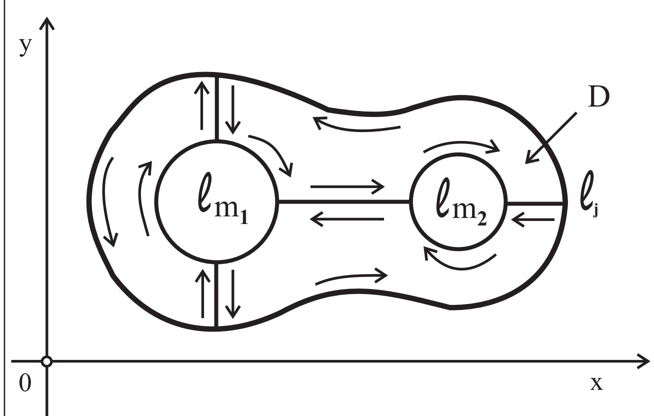


Fig. 5.10.

Nëse konturi i tillë është njëherit edhe kufi i zonës së pakufizuar që shtrihet në $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{D}$, atëherë atë e quajmë **të jashtëm**, ndërsa nëse ai është njëherit edhe kufi i zonës së kufizuar që shtrihet në $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{D}$, atë e quajmë **të brendshëm.** Kështu në fig. 5.10. konturi ℓ_j është i jashtëm, ndërsa ℓ_{m_1} e ℓ_{m_2} janë të brendshëm.

Në rastin kur kufiri i zonës D përbëhet nga konturi i jashtëm ℓ_j dhe ata të brendshëm $\ell_{m_1}, \ell_{m_2}, ..., \ell_{m_n}$ dhe nëse zona D mund të ndahet në numër të fundmë zonash të thjeshta atëherë ka vend formula:

$$\iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \int_{\ell_j} Pdx + Qdy + \sum_{i=1}^{n} \int_{l_{m_i}} Pdx + Qdy$$

ku P e Q, si edhe në teoremën e Grinit, janë funksione të vazhdueshme së bashku me derivatet e tyre $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}$ në zonën e mbyllur D, ℓ_j është pozitivisht e orientuar ndërsa $\ell_{m_i},\ i = 1, 2, ...n$, janë negativisht të orientuara.

5.1.5 Llogaritja e syprinave të figurave rrafshe me integralin vijëpërkulët

Në formulën e Grinit marrim $Q = x,\ P = 0$ dhe gjejmë $\iint\limits_D dxdy = \int\limits_\ell xdy$, d.m.th:

$$S = \int\limits_\ell xdy, \tag{20}$$

ku S është syprina e zonës D. Në mënyrë analoge për $P = -y,\ Q = 0$, fitojmë:

$$S = -\int\limits_\ell ydx. \tag{21}$$

Nga formulat (20) e (21) fitojmë:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\ell xdy - ydx. \tag{22}$$

Shembulli 5.1.7 Të gjendet syprina e zonës së kufizuar nga astroida:

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Zgjidhje: Kemi:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int\limits_\ell xdy - ydx = \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)dt \\ &= \frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2tdt = \frac{3a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt = \frac{3\pi a^2}{8}\,. \end{aligned}$$

5.1.6 Integralet vijëpërkulët që nuk varen nga rruga e integrimit

Integrali vijëpërkulët sipas lakoreve që bashkon dy pika, në rastin e përgjithshëm varet nga rruga (lakorja) që i bashkon ato pika. Ekziston një klasë e gjerë shprehjesh $Pdx + Qdy$ (shembulli 2. i pikës 1.2. tregon se kjo klasë nuk është e zbrazët) për të cilat në kushte të caktuara integrali

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$$

nuk varet nga lakorja sipas së cilës bashkohen pikat A e B. Në këtë pikë pra shqyrtojmë se nën cilat kushte integrali vijëpërkulët nuk varet nga rruga e integrimit.

Për lakoret (konturat) që përmenden në këtë pikë do të supozojmë se janë pjesë-pjesë të lëmueshme.

Le të jetë D një zonë plane, d.m.th. (përkufizimi II.1.10) ajo është e lidhur dhe e hapur.

Teorema 5.1.6 *Në qoftë funksionet $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ janë të vazhdueshme në zonën D, atëherë kondiat e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. *Për çdo kontur të mbyllur ℓ, që shtrihet në D :*

$$\int_{\ell} Pdx + Qdy = 0;$$

2. *Për çdo dy pika $A \in D$ e $B \in D$, vlera e integralit*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$$

nuk varet nga lakorja $\overset{\frown}{AB} \subset D$ që i bashkon pikat A e B;

3. *Shprehja $Pdx + Qdy$ në D është diferencial i plotë i një funksioni $u(x,y)$ të përkufizuar në D, d.m.th.:*

$$du = Pdx + Qdy.$$

Në këtë rast në qoftë se $A \in D$ dhe $B \in D$, atëherë:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A),$$

për çdo lakore $\overset{\frown}{AB}$, e cila në D i bashkon ato pika.

Vërtetimi. Vërtetimin e bëjmë sipas shemës 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

a. 1) $\Rightarrow$ 2). Le të jenë $A \in D, B \in D$ si dhe $(\overset{\frown}{AB})_1$ e $(\overset{\frown}{AB})_2$ le të jenë dy lakore të cilat (në D) i bashkojnë pikat A e B (fig. 5.11).

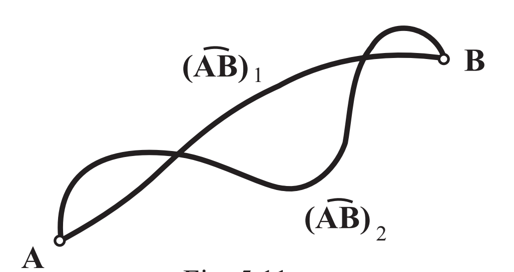


Fig. 5.11.

Lakorja $(\overset{\frown}{AB})_1 \cup (\overset{\frown}{BA})_2$ është e mbyllur prandaj, sipas kushtit 1. kemi:

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1 \cup (\overset{\frown}{BA})_2} Pdx + Qdy = 0. \tag{23}$$

Por:

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1 \cup (\overset{\frown}{BA})_2} Pdx + Qdy = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} Pdx + Qdy + \int\limits_{(\overset{\frown}{BA})_2} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_2} Pdx + Qdy,$$

dhe nga (23) fitojmë:

$$\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_2} Pdx + Qdy,$$

d.m.th. kondita (2) plotësohet.

b. 2) $\Rightarrow$ 3) Le të jenë $M_0(x_0, y_0) \in D, M(x, y) \in D$ dhe $\overset{\frown}{M_0M}$ lakore e cila në D bashkon pikat M_0 e M. Vëmë:

$$u(x, y) = \int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} Pdx + Qdy.$$

Nëse fiksojmë pikën M_0 shohim se (nga kondita (2)) funksioni $u(x, y)$ është i njëvlershëm, meqë vlera $u(M) = u(x, y)$ nuk varet nga zgjedhja e lakores e cila i bashkon pikat M_0 e M. Për të treguar se $du = Pdx + Qdy$ mjafton të tregojmë se:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Fiksojmë pikën $M(x, y)$ dhe zgjedhim pikën $M_1(x + \Delta x, y) \in D, \ \Delta x \neq 0$, të tillë që segmenti $[MM_1]$ (i cili është paralel me boshtin Ox dhe ka gjatësinë $|\Delta x|$), shtrihet në D (fig. 5.12).

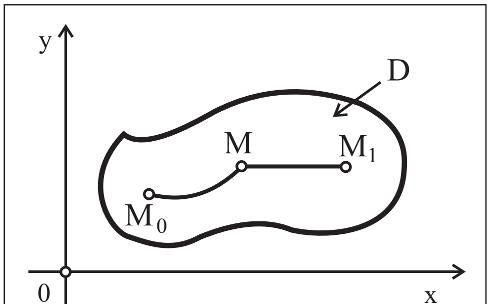


Fig. 5.12.

Kemi:

$$u(x+\Delta x,y)-u(x,y)=\int\limits_{M_0\overset{\frown}{M_1}} Pdx+Qdy-\int\limits_{M_0\overset{\frown}{M}} Pdx+Qdy=$$

$$=\int\limits_{[M\overset{\frown}{M_1}]} Pdx+Qdy.$$

Në segmentin $[MM_1]$ koordinata y është konstantë, prandaj $\int\limits_{[M\overset{\frown}{M_1}]} Qdy=0$, rrjedhimisht:

$$u(x+\Delta x,y)-u(x,y)=\int\limits_{[M\overset{\frown}{M_1}]} Pdx=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t,y)dt.$$

Pasi të përdorim formulën mbi vlerën mesatare fitojmë:

$$u(x+\Delta x,y)-u(x,y)=P(x+\vartheta\cdot\Delta x,y),\ 0<\vartheta<1,$$

prej nga gjejmë:

$$\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}=P(x+\vartheta\cdot\Delta x,y),0<\vartheta<1. \tag{24}$$

Me qenë se funksioni $P(x,y)$ është i vazhdueshëm, ana e djathtë e barazimit (24) ka limit kur $\Delta x\to 0$ dhe, rrjedhimisht, edhe ana e majtë po ashtu ka limit kur $\Delta x\to 0$. Duke kaluar me limit në (24) kur $\Delta x\to 0$ marrim:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=P(x,y).$$

Në mënyrë krejtësisht analoge tregohet barazimi:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=Q(x,y).$$

Kështu u tregua ekzistenca e funksionit $u(x,y)$ për të cilin vlen barazimi $du=Pdx+Qdy$.

Në vazhdim marrim pikat $A\in D,B\in D$, dhe harkun e çfarëdoshëm $\overset{\frown}{AB}$ i cili bashkon (në D) pikat A e B. Le të jenë:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ a\le t\le b,$$

ekuacionet parametrike të harkut $\overset{\frown}{AB}$. $A(x(a),y(a)),\ B(x(b),y(b))$ dhe

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy=\int\limits_{a}^{b}\Big\{P[x(t),y(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\Big\}dt=$$

$$= \int_a^b \{u[x(t), y(t)]\}\big|_t{}' dt = u[x(b), y(b)] - u[x(a), y(a)] = u(B) - u(A),$$

që tregon se vlen kondita 3.

c. 3) $\Rightarrow$ 1). Le të jetë ℓ një vijë e mbyllur në D dhe A pikë e çfarëdoshme e saj. Vija e tillë konsiderohet si lakore pika e fillimit e së cilës A përputhet me pikën e mbarimit. Prandaj, nga kondita 3, marrim:

$$\int_\ell P dx + Q dy = u(A) - u(A) = 0.$$

Teorema u vërtetua.

Vërejmë se teorema 5.1.6. jep konditat e nevojshme dhe të mjaftueshme për pavarësinë e integralit vijëpërkulët nga rruga e integrimit.

Në vazhdim tregojmë se me ngushtimin e klasës së zonave që i morëm në teoremën 5.1.6, marrim një kriter më efektiv për pavarësinë e integralit nga rruga e integrimit.

Së pari me përkufizim zonën D e quajmë **zonë me një lidhje** në qoftë se nuk ka "zbrazëtira". P.sh. qarku rrethor është zonë me një lidhje, ndërsa unaza rrethore është zonë me shumë lidhje (fig. 5.13).

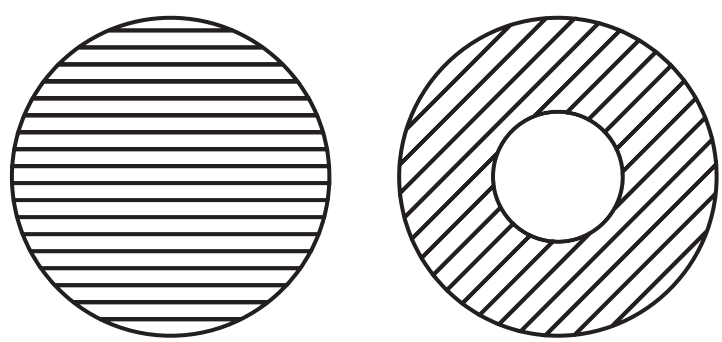


Fig. 5.13.

Teorema 5.1.7 *Le të jenë $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ së bashku me derivatet e tyre të pjesshme $\frac{\partial P}{\partial y}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}$ të vazhdueshme në zonën me një lidhje D. Atëherë, secila nga konditat e teoremës 1.6. është ekuivalente me konditën*

4. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ *në D.*

Vërtetimi. Duke marrë parasysh teoremën 1.6. mbetet të tregohet se 3) $\Rightarrow$ 4) dhe 4) $\Rightarrow$ 1).

d. 3) $\Rightarrow$ 4). Supozojmë se ekziston funksioni $u(x,y)$ i definuar në D i tillë që $du = Pdx + Qdy$, d.m.th. i tillë që $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q$. Meqë:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

dhe sipas konditës derivatet $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, pra edhe derivatet e përziera $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ janë të vazhdueshme, atëherë (teorema 2.4.6) ato janë të barabarta, d.m.th. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, dhe kushti 4. u vërtetua.

Po vëmë në dukje se për vërtetimin e pohimit 3) $\Rightarrow$ 4) nuk është e domosdoshme që D të jetë e lidhur e as me një lidhje.

e. 4) $\Rightarrow$ 1). Së pari vërejmë se nëse plotësohet kondita 4, d.m.th. $\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$ dhe nëse ℓ është kontur i thjesht i mbyllur dhe D_1 zonë e kufizuar, konturi i së cilës është ℓ, atëherë duke përdorur formulën e Grinit (këtu duhet që zona D të jetë me një lidhje), marrim:

$$\int_{\ell} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = 0.$$

Në qoftë se lakorja e mbyllur ℓ, e cila shtrihet në D ka numër të fundmë pikash që vetëpriten, atëherë ajo është union i vijave të thjeshta të mbyllura $\gamma_k, k = 1, 2, ..., n$. Prandaj $\displaystyle\int_{\gamma_k} Pdx + Qdy = 0$, prej nga rrjedh:

$$\int_{\ell} Pdx + Qdy.$$

Kalojmë në rastin e përgjithshëm kur lakorja e mbyllur ℓ ka numër të pafundmë pikash që vetëpriten. Së pari vërtetojmë lemën mbi përafrimin e integralit vijëpërkulët sipas lakores me integrale gjatë vijave të thyera.

Lema 5.1.1 *Le të jenë $P(x,y)$ dhe $Q(x,y)$ funksione të vazhdueshme në zonën D dhe ℓ lakore e lëmueshme që shtrihet në D. Nëse në ℓ anëshkruajmë vijën e thyer Λ atëherë, kur tenton në zero më e madhja gjatësi e hallkave të saj, do të kemi:*

$$\lim \int_{\Lambda} Pdx + Qdy = \int_{\ell} Pdx + Qdy.$$

Vërtetimi. Kufizohemi në integralet $\displaystyle\int_{\Lambda} Pdx$ dhe $\displaystyle\int_{\ell} Pdx$ sepse arsyetimet për integralet $\displaystyle\int_{\Lambda} Qdy$ dhe $\displaystyle\int_{\ell} Qdy$ janë krejtësisht analoge.

Po e zëmë se vija e thyer Λ i ka kulmet në pikat $A = A_0, A_1, A_2, ..., A_i$, $..., A_{i+1}, ..., A_n = B$. Shënojmë me P_i vlerat e funksionit në pikat A_i dhe me x_i abshisat e pikave A_i. Për një $\varepsilon > 0$ të dhënë, gjatësitë e hallkave $[A_i A_{i+1}]$, $i = 0$, $..., n-1$, mund t'i konsiderojmë aq të vogla ashtu që:

(a) luhatja e funksionit të vazhdueshëm $P(x, y)$ gjatë hallkës $[A_i A_{i+1}]$ të jetë më vogël se ε, dhe

(b) shuma integrale $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} P_i \cdot \Delta x_i$ të ndryshojë nga limiti i saj $\int\limits_{\ell} P dx$ për më pak se ε.

Kemi:

$$\int\limits_{\Lambda} P dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{[A_i A_{i+1}]} P dx \tag{25}$$

Nga ana tjetër vërejmë se:

$$\int\limits_{[A_i A_{i+1}]} dx = \int\limits_{[A_i A_{i+1}]} \cos\alpha ds = |A_i A_{i+1}| \cos\alpha = \Delta x_i.$$

ku me $|A_i A_{i+1}|$ shënuam gjatësinë e segmentit $[A_i A_{i+1}]$.

Prandaj:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} P_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n=1} \int\limits_{[A_i A_{i+1}]} P_i \, dx. \tag{26}$$

Tash nga (25) e (26) kemi:

$$\int\limits_{\Lambda} P dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{[A_i A_{i+1}]} P dx + \sum_{i=0}^{n-1} P_i \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} P_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} P_i \Delta x_i +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{[A_i A_{i+1}]} P dx - \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{[A_i A_{i+1}]} P_i dx = \sum_{i=0}^{n-1} P_i \Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{[A_i A_{i+1}]} (P - P_i) \, dx.$$

Këndej dhe nga (a) e (b) rrjedh se:

$$\left| \int\limits_{\Lambda} P dx - \int\limits_{\ell} P dx \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} P_i \Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{[A_i A_{i+1}]} (P - P_i) \, dx - \int\limits_{l} P dx \right| <$$

$$< \varepsilon + \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{[A_i A i+1]} |P - P_i| dx < \varepsilon + \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{[A_i A_{i+1}]} dx = \varepsilon + \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \leq$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon \cdot L \leq \varepsilon + \varepsilon \cdot S = \varepsilon (1 + S),$$

ku me L e S shënuam gjatësinë e vijës së thyer Λ përkatësisht gjatësinë lakores ℓ. Lema u vërtetua.

Tash vazhdojmë vërtetimin e teoremës. Le të jetë ℓ lakore e mbyllur pjesë-pjesë e lëmueshme në zonën D. Atëherë ℓ është union i lakoreve të lëmueshme $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_k$. Në secilën lakore të tillë $\ell_j,\ j = 1, ..., k$, anëshkruajmë vijën e thyer Λ_j. Unioni $\bigcup\limits_{j=1}^{k} \Lambda_j = \Lambda$ është vija e thyer e mbyllur e anëshkruar në lakoren ℓ. Meqë Λ mund të ketë numër të fundmë pikash që vetëpriten, kemi:

$$\int\limits_{\Lambda} Pdx + Qdy = 0.$$

Mirëpo, sipas lemës:

$$\lim_{\lambda \to 0} \int\limits_{\Lambda_j} Pdx + Qdy = \int\limits_{\ell_j} Pdx + Qdy,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ k,$$

prandaj:

$$\lim_{\lambda - 0} \int\limits_{\Lambda} Pdx + Qdy = \int\limits_{\ell} Pdx + Qdy,$$

d.m.th. $\int\limits_{\ell} Pdx + Qdy = 0$ (λ është më e madhja gjatësi e hallkave Λ_j). Teorema u vërtetua.

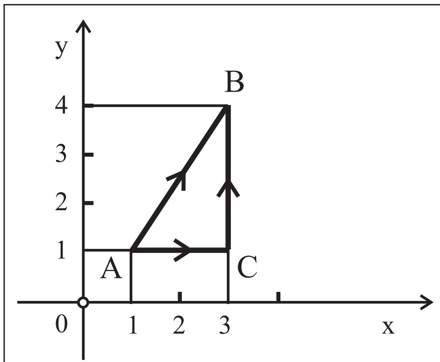


Fig. 5.14.

Shembulli 5.1.8 Të llogaritet:

$$I = \int\limits_{\ell} (6xy^2 - y^3)\, dx +\ (6x^2y - 3xy^2)\, dy,$$

ku ℓ është segmenti që i bashkon pikat $A\,(1, 1)$ *dhe* $B\,(3, 4)$.

Zgjidhja:

$$P = 6xy^2 - y^3,\quad Q = 6x^2y - 3xy^2,$$

d.m.th. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, prandaj integrali nuk varet nga rruga e integrimit. Po e zgjedhim rrugën si në fig. 5.14.

Atëherë:

$$I = \int\limits_{(1,1)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)\,dx + (6x^2y - 3xy^2)\,dy = \int\limits_{1}^{3} (6x \cdot 1 - 1)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{1}^{4} (6 \cdot 9 \cdot y - 3 \cdot 3y^2)\,dy = 238.$$

Shembulli 5.1.9 Le të jetë:

$$du = (3x^2y + x)\,dx + \,(x^3 - y + 1)\,dy.$$

Të gjendet $u\,(x, y)$.

Zgjidhje: Lehtë shihet se $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, prandaj:

$$u\,(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (3x^2y + x)\,dx + \,(x^3 - y + 1)\,dy.$$

Po e marrim pikën $M_0(0, 0)$ për pikë fillestare. Kemi:

$$u\,(x, y) \;= \int\limits_{0}^{y} (1 - y)\,dy + \int\limits_{0}^{x} (3x^2y + x)\,dx = -\frac{(1 - y)^2}{2} + x^3y + \frac{x^2}{2} + C.$$

5.1.7 Detyra për ushtrime

1. Të llogaritet $\int\limits_{\ell} xyds$, ku lakoja ℓ është konturi i drejtkëndëshit me kulmet $O\,(0, 0)\,, A\,(4, 0),\; B\,(4, 2)$ dhe $C\,(0, 2)$.

2. Të llogaritet $I = \int\limits_{\ell} (x + y)\,ds$, ku ℓ është konturi i trekëndëshit me kulme $O\,(0, 0)\,, A\,(1, 0)$ dhe $B\,(0, 1)$.

3. Të llogaritet $I = \int\limits_{\ell} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\,ds$, ku ℓ është astroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

4. Të llogaritet $\int\limits_{\ell} xyds$, ku ℓ është pjesa e elipsës $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ që gjendet në kuadratin e parë.

5. Të llogaritet $\int\limits_{\ell} \arctan \frac{y}{x} ds$, ku ℓ është ajo pjesë e spirales së Arkimedit $r = 2\phi$ që gjendet në rrethin me rreze R dhe qendër në fillimin e koordinatave.

6. Të llogaritet $\int\limits_{\ell} \sqrt{x^2 + y^2} ds$, ku ℓ është rrethi $x^2 + y^2 = ax$.

7. Të llogaritet $\int\limits_{\ell} (x - y)\, ds$, ku ℓ është pjesa e djathtë e leminiskatës:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

8. Të llogaritet $\int\limits_{\ell}$ zds ku ℓ është harku i lakores $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t$ për $0 \leq t \leq t_0$.

9. Të llogaritet gjatësia e lakores hapësinore $x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^2$ nga pika $O\,(0, 0, 0)$ deri te pika $A\,(3, 3, 2)$.

10. Të llogaritet gjatësia e harkut të lakores $y = k \arcsin \frac{x}{k},\ \ z = \frac{k}{y} \ln \frac{k + x}{k - x}$ nga $O(0, 0, 0)$ deri te pika $M\,(x_0, y_0, z_0)$, ku $x_0 > 0$.

11. Të llogaritet gjatësia e harkut të vijës ndërprerëse të sipërfaqeve $x^2 = 3y$ dhe $2xy = 9z$ nga fillimi i koordinatave deri te pika $T\,(3, 3, 2)$,

12. Të llogaritet gjatësia e lakores $x^2 + y^2 = cz,\ \frac{y}{x} = \tan \frac{x}{c}\ (c > 0)$ nga pika $0(0, 0, 0)$ deri te pika $A\,(x_0, y_0, z_0)$.

13. Të llogaritet gjatësia e lakores $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ \sqrt{x^2 + y^2}\ \mathrm{ch}\,(\arctan \frac{y}{x}) = a\,(a > 0)$ nga pika $A(a, 0, 0)$ deri te pika $B(x, y, z)$.

14. Të llogaritet $I = \int\limits_{\ell} (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$ ku lakorja ℓ është pjesa e lakores $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt\,(0 \leq t \leq 2\pi)$.

15. Të llogaritet $I = \int\limits_{\ell} x^2 ds$, ku ℓ është rrethi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x + y + z = 0$

16. Të llogaritet integrali vijëpërkulët:

$$I = \int\limits_{\ell} (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 + 2xy)\, dy,$$

në qoftë se ℓ është:

$a)$ pjesa e drejtëzës nga pika $O\,(0,0)$ deri te pika $A\,(1,1)$;

$b)$ harku i parabolës $y = x^2$ nga $O\,(0,0)$ deri te $A\,(1,1)$;

$c)$ vija e thyer OBA ku $0(0,0), B\,(1,0)$ dhe $A\,(1,1)$.

17. Të llogaritet $\int\limits_{\ell} xydx + (x+y)\,dy$, ku ℓ është konturi i trekëndëshit me kulmet $O\,(0,0), A\,(1,1)$ dhe $B\,(1,2)$ në të cilin merret orientimi pozitiv.

18. Të llogaritet:
$$I = \int\limits_{\ell} \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2},$$
ku ℓ është rrethi $x^2+y^2=a^2$ i orientuar pozitivisht.

19. Të llogaritet $I = \int\limits_{\ell} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, ku ℓ është elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ e orientuar pozitivisht.

20. Të llogaritet $I = \int\limits_{\ell} (2a-y)\,dx + xdy$, ku lakorja ℓ është harku i cikloidës $x = a\,(t-\sin t)$, $y = a\,(1-\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

21. Të llogaritet $I = \int\limits_{ABCD} \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$ ku $ABCDA$ është konturi i katrorit me kulmet $A\,(1,0)$, $B\,(0,1)\,, C\,(-1,0)\,, D\,(0,-1)$.

22. Të llogaritet:
$$I = \int\limits_{\ell} \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}},$$
ku ℓ është harku i astriodës $x = a\cos^3 t,\; y = a\sin^3 t$ nga pika $A\,(a,0)$ deri te pika $B\,(0,a)$.

23. Të llogaritet:
$$I = \int\limits_{\ell} \frac{xy\,(ydx - xdy)}{x^2+y^2},$$
ku ℓ është pjesa e djathtë e leminiskatës $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ e orientuar pozitivisht.

24. Të llogaritet $\int\limits_{\ell} x^3dx + 3zy^2dy - x^2ydz$, ku ℓ është pjesa e drejtëzës nga pika $A\,(1,2,3,)$ deri te pika $B\,(-1,2,1)$.

25. Të llogaritet $\int\limits_{\ell} xydx+yzdy+zxdz$, ku ℓ është harku i rrethit $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $z=x$, për të cilin $y\geq 0$, nga pika $O\,(0,0,0)$ deri te pika $M\,(R,O,R)$.

26. Të llogaritet $\int\limits_{\ell} y^2dx+z^2dy+x^2dz$, ku lakorja ℓ është lakorja e Vivianit $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2\ =ax,\ a>0$, për të cilën $z>0$, dhe shikuar nga pika $A\,(2a,0,0)$ është pozitivisht e orientuar.

27. Të llogaritet $I=\int\limits_{\ell}\cos 2ydx-2x\sin 2ydy$, ku ℓ është lakore e çfarëdoshme pozitivisht e orientuar që lidh pikat $A\,(1,\frac{\pi}{6})$ dhe $B\,(2,\frac{\pi}{4})$.

28. Të llogariten integralet vijëpërkulta të diferencialeve të plota sipas lakores së çfarëdoshme: $a)\displaystyle\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx+ydy$

$$\text{b)}\int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} e^x\,(\cos ydx-\sin ydy);$$

$c)\displaystyle\int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} f\,(x+y)(dx+dy)$, në qoftë se f është funksion i vazhdueshëm.

29. Të llogaritet:

$$\int\limits_{\ell} e^{-(x^2-y^2)}\,(\cos 2xydx+\sin 2xydy)$$

ku ℓ është rrethi $x^2+y^2=R^2$ i orientuar pozitivisht.

30. Të tregohet se për integralin vijëpërkulët vlen relacioni:

$$\Big|\int\limits_{\ell} P\,(x,y)\,dx+Q\,(x,y)\,dy\Big|\leq L\cdot M,$$

ku ℓ është gjatësia e vijës ℓ, ndërsa $M=\max\limits_{(x,y)\,\in\ell}\sqrt{P^2\,(x,y)\ +Q^2\,(x,y)}$.

31. Të çmohet integrali:

$$I_R=\int\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

Të tregohet se $\lim\limits_{R\to\infty} I_R=0$.

Udhëzim: të merret parasysh detyra 30.

32. Duke përdorur formulën e Grinit, të llogaritet integrali:

$$I = \int_{\ell} 2\left(x^2 + y^2\right) dx + \left(x + y\right)^2 dy,$$

ku ℓ është konturi i trekëndëshit me kulmet $A\left(1,1\right), B\left(2,2\right), C\left(1,3\right)$, pozitivisht i orientuar.

33. Të llogaritet $I = \int\limits_{\ell} xy^2 dy - x^2 y dx$, ku ℓ është rrethi $x^2 + y^2 = a^2$, pozitivisht i orientuar.

34. Të llogaritet:

$$I = \int_{\ell} e^x \left[\left(1 - \cos y\right) dx - \left(y - \sin y\right) dy\right],$$

ku ℓ është konturi i zonës $0 < x < \pi, 0 < y < \sin x$, pozitivisht i orientuar.

35. Të llogaritet $I = \int\limits_{\ell} \left(e^x \sin y - ky\right) dx + \left(e^x \cos y - k\right) dy$, ku t është pjesa e sipërme e rrethit $x^2 + y^2 = ax$ nga pika $A\left(a,0\right)$ deri te pika $O\left(0,0\right)$.

36. Të llogaritet

$$I = \int_{A\overset{\frown}{m}B} f\left(y\right) e^x dx + [f'\left(y\right) e^x - k]dy - k \int_{A\overset{\frown}{m}B} ydx.$$

37. Të llogaritet syprina e kufizuar me leminiskatën:

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 \left(x^2 - y^2\right).$$

38. Të llogaritet syprina e pjesës së sipërfaqes cilindrike $x^2 + y^2 = ax$ të ndërprerë nga sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

5.2 INTEGRALET SIPËRFAQËSORE

Integralet sipërfaqësore paraqesin një përgjithësim të integralit të dyfishtë dhe hasen në shumë zbatime në mekanikë, fizikë, gjeometri etj.

Ekziston analogji mjaft e gjerë në mes të teorisë së integraleve sipërfaqësore dhe asaj të integraleve vijëpërkulta. Edhe këtu dallojmë dy lloje integralesh: integrali sipërfaqësor i llojit të parë dhe integrali sipërfaqësor i llojit të dytë.

5.2.1 Integralet sipërfaqësore të llojit të parë

Le të jetë dhënë sipërfaqja Σ e cila është pjesë-pjesë e lëmueshme, në hapësirën $Oxyz$. Përkujtojmë se sipërfaqja quhet e lëmueshme nëse në çdo pikë të saj ekziston rrafshi tangjent i cili mbi sipërfaqe ndryshon në mënyrë të vazhdueshme, ndërsa ajo është pjesë-pjesë e lëmueshme nëse përbëhet nga një numër i fundmë sipërfaqesh të lëmueshme. Në pikën 4.1.5, është shqyrtuar problemi i syprinës së një sipërfaqeje të tillë. Me ℓ shënojmë vijën pjesë-pjesë të lëmueshme e cila është kontur i sipërfaqes Σ. Në rastin kur sipërfaqja është e mbyllur (p.sh. sfera) atëherë për kontur të saj nuk mund të flitet. Supozojmë se funksioni $u = f(x, y, z)$ është i definuar dhe i kufizuar në sipërfaqen Σ. Këtë sipërfaqe, me ndihmën e lakoreve pjesë-pjesë të lëmueshme, e ndajmë në n-pjesë (fig. 5.15). Po i shënojmë ato me $\Sigma_0, \Sigma_1, ..., \Sigma_{n-1}$, ndërsa me Δs_i $(i = 0, ..., n-1)$ shënojmë syprinën e pjesës së $i-$ të. Nga secila pjesë ndarëse marrim në mënyrë të çfarëdoshme një pikë $M_i(\xi_i, \eta_i, \chi_i)$ dhe ndërtojmë shumën:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i, \chi_i)\, \Delta s_i. \tag{1}$$

Po shënojmë me λ diametrin maksimal të pjesëve ndarëse Σ_i, $i = 0, ..., n-1$.

Përkufizimi 5.2.1 *Limitin e shumës integrale* (1), *nëse ekziston, kur* $\lambda \to 0$, *e quajmë* **integral sipërfaqësor i llojit të parë i funksionit** $f(x, y, z)$ **në sipërfaqen** Σ *dhe e shënojmë:*

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, ds. \tag{2}$$

Po theksojmë se në funksionin $f(x, y, z)$ që figuron në integralin (2) ndryshoret x, y e z nuk janë të pavarura nga njëra-tjetra, sepse ato lidhen me kushtin që pika $M(x, y, z)$ është pikë e sipërfaqes Σ. Në qoftë se $f(x, y, z) = 1$ atëherë $\iint_{\Sigma} ds$ paraqet syprinën e sipërfaqes Σ. Në rastin kur sipërfaqja Σ ndodhet për shembull në rrafshin Oxy atëherë barazimi (2) përkufizon integralin e dyfishtë në zonën Σ.

Si për çdo integral edhe për integralin (2) shtrohet problemi i ekzistencës dhe i lidhjes së tij me integralet e llojeve të njohura me qëllim që të mund të shfrytëzohet aparati llogaritës i tyre.

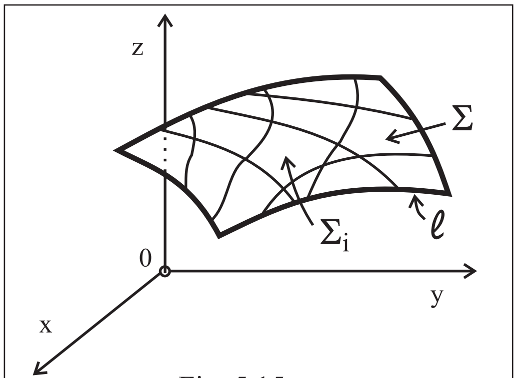


Fig. 5.15.

Teorema 5.2.1 *Le të jetë:*

(*a*) *sipërfaqja* Σ *e lëmueshme dhe e dhënë me ekuacion* $z = z\,(x, y)$ *në zonën e mbyllur dhe të kufizuar* D;

(*b*) *funksioni* $f\,(x, y, z)$ *i vazhdueshëm në sipërfaqen* Σ.

Atëherë, ekziston integrali (2) *dhe vlen formula:*

$$\iint_{\Sigma} f\,(x, y, z)\, ds = \iint_{D} f[x, y, z\,(x, y)]\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\; dxdy\,. \tag{3}$$

Vërtetimi. Së pari vërejmë se zona D e mbyllur dhe e kufizuar, duke qenë projeksion normal i sipërfaqes së lëmueshme Σ në rrafshin Oxy, kufizohet me një vijë të lëmueshme, prandaj është e matshme.

Sipërfaqen Σ me ndihmën e lakoreve pjesë-pjesë të lëmueshme e ndajmë në $n-$ pjesë: $\Sigma_0, ..., \Sigma_{n-1}$. Kësaj ndarjeje i korrespondon një ndarje e zonës D në zonat e matshme $D_0, D_1, ..., D_{n-1}$, ku D është projeksion i sipërfaqes Σ në rrafshin Oxy. Diametrat e zonave D_i nuk janë më të mëdhenj se diametrat e zonave Σ_i të sipërfaqes Σ.

Ndërtojmë shumën integrale:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f\,(\xi_i, \eta_i, \chi_i)\,\Delta s_i \tag{4}$$

që i përgjigjet integralit (2).

Nga pika q4.1.5. kemi konstatuar se:

$$\Delta s_i = \iint_{D_i} \sqrt{1 + z_y'^2 + z_y'^2}\; dxdy,$$

sepse funksioni $z = z(x, y)$, që paraqet sipërfaqen e lëmueshme Σ, ka derivate të pjesshme të vazhdueshme në D.

Duke zbatuar teoremën mbi të mesmen për këtë integral kemi:

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + z_x'^2\left(x_i, y_i\right) + z_y'^2\left(x_i, y_i\right)} \cdot \Delta_i, \tag{5}$$

ku Δ_i është masa e zonës D_i kurse pika (x_i, y_i) është një pikë e kësaj zone. Duke zëvendësuar (5) në (4) dhe duke vërejtur se $\zeta_i = z\left(\xi_i, \eta_i\right)$ kemi:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f[\xi_i, \eta_i, z\left(\xi_i, \eta_i\right)] \sqrt{1 + z_x'^2\left(x_i, y_i\right) + z_y'^2\left(x_i, y_i\right)}\ \Delta_i. \tag{6}$$

Siç shihet shuma (6) nuk është shumë integrale sepse faktorët e ndryshëm janë llogaritur në pika të ndryshme.

Sipas supozimit funksioni:

$$u = f\left(x, y, z\left(x, y\right)\right) \sqrt{1 + z_x'^2\left(x, y\right) + z_y'^2\left(x, y\right)}$$

është funksion i vazhdueshëm në zonën D prandaj limiti i shumës së tij integrale:

$$\sigma^* = \sum_{n=0}^{n-1} f[\xi_i, \eta_i, z\left(\xi_i, \eta_i\right)] \sqrt{1 + z_x'^2\left(\xi_i, \eta_i\right) + z_y'^2\left(\xi_i, \eta_i\right)}\ \Delta_i\,, \tag{7}$$

kur diametri maksimal i zonave të ndarjes tenton në zero, është sa integrali që gjendet në të djathtë të formulës (3).

Mbetet të vërtetojmë se $\lim\limits_{\rho \to 0} \sigma = \lim\limits_{\rho \to 0} \sigma^*$ ku ρ është diametri maksimal i zonave ndarëse të D.

Çmojmë diferencën:

$$|\sigma - \sigma^*| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left|f\left(\xi_i, \eta_i, z\left(\xi_i, \eta_i\right)\right)\right| \Big| \sqrt{1 + z_x'^2\left(x_i, y_i\right) + z_y'^2\left(x_i, y_i\right)} -$$

$$- \sqrt{1 + z_x'^2\left(\xi_i, \eta_i\right) + z_y'^2\left(\xi_i, \eta_i\right)}\ \Big| \cdot \Delta_i \tag{8}$$

Le të jetë $\varepsilon > 0$ një numër i çfarëdoshëm. Meqenëse funksioni:

$$\sqrt{1 + z_x'^2\left(x, y\right) + z_y'^2(x, y)}$$

është i vazhdueshëm në zonën e mbyllur e të kufizuar D, atëherë (sipas rrjedhimit të teoremës 2.3.8) për këtë ε gjendet një $\delta > 0$ ashtu që për ndarje të zonës D të tillë që $\rho < \delta$, luhatja e funksionit në secilën prej zonave D_i është më e vogël se $\dfrac{\varepsilon}{\Delta \cdot A}$, ku $A > |f\left(x, y, z\right)|$ në Σ, kurse Δ është syprina e zonës D. Aq më parë kemi:

$$\left| \sqrt{1 + z_x'^2\left(x_i, y_i\right) + z_y'^2\left(x_i, y_i\right)} - \sqrt{1 + z_x'^2\left(\xi_i, \eta_i\right) + z_y^2(\xi_i, \eta_i)} \right| < \frac{\varepsilon}{\Delta \cdot A}.$$

Tash ndarjen e sipërfaqes Σ e marrim të tillë që diametri maksimal λ i pjesëve të ndarjes të jetë $\lambda < \delta$. Për këtë ndarje kemi $\rho < \delta$ sepse $\rho \leq \lambda$, prandaj nga (8) fitojmë pabarazimin:

$$|\sigma - \sigma^*| \leq A \cdot \frac{\varepsilon}{\Delta \cdot A} \sum_{i=0}^{n-1} \triangle_i = \varepsilon,$$

që synuam ta tregojmë. Teorema u vërtetua.

Kur sipërfaqja Σ është pjesë-pjesë e lëmueshme ajo ndahet në një numër të fundmë sipërfaqesh të lëmueshme, kështu që formula (3) mbetet e vërtetë (duke zbatuar për secilën pjesë dhe duke mbledhur) edhe për këtë sipërfaqe.

Në qoftë se sipërfaqja Σ merret me ekuacionin $x = x\,(y,z)$ ose $y = y\,(x,z)$ atëherë atë e projektojmë në rrafshin Oyz përkatësisht Oxz dhe duke bërë ndryshimet përkatëse fitojmë formulat analoge me (3).

Shembulli 5.2.1 Të llogaritet:

$$I = \iint\limits_{\Sigma} (xy + yz + zx)\, ds,$$

ku Σ është pjesa e sipërfaqes konike $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e ndërprerë me sipërfaqen cilindrike $x^2 + y^2 = 2ax$.
Zgjidhje: Meqenëse:

$$ds = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy,$$

$$I = \iint\limits_{D} (xy + y\sqrt{x^2+y^2} + x\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}\, dxdy,$$

ku:

$$D = \big\{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 2ax\big\}.$$

Duke kaluar në koordinata polare gjejmë:

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2a\,\cos\varphi} (r^2 \sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin\varphi + r^2\cos\varphi)\sqrt{2}\, r dr = \\ &= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 4a^4\cos^4\,\varphi\,(\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\sqrt{2}\, d\varphi = \\ &= 4a^4\sqrt{2}\left(-\frac{\cos^6\varphi}{6}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 4a^4\sqrt{2}\left(-\frac{\cos^5\varphi}{5}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 4\sqrt{2a^4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\,\varphi\, d\varphi \end{aligned}$$

$$= \quad 4\sqrt{2}\, a^4 \frac{16}{15}.$$

Pra:

$$I = \frac{64\sqrt{2}a^4}{15}.$$

Shembulli 5.2.2 Të llogaritet:

$$\iint\limits_{\Sigma} \left(y + z + \sqrt{4 - x^2}\right) ds,$$

në qoftë se Σ është pjesa e sipërfaqes cilindrike $x^2 + y^2 = 4$ ndërmjet rrafsheve $z = 0$ dhe $z = 4$.

Zgjidhje: Sipërfaqja e dhënë nuk projektohet në zonë në rrafshin Oxy, prandaj e projektojmë p.sh në rrafshin Oxz. Por në rastin e tillë sipërfaqja duhet të zbërthehet në dy sipërfaqe të cilat në rrafshin Oxz projektohen në të njëjtën zonë. Kemi:

$$\Sigma_1 : y = +\sqrt{4 - x^2},\ \Sigma_2 : y = -\sqrt{4 - x^2},\ z \in [0, 4];$$

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Sigma_1} (y + z + \sqrt{4 - x^2})\, ds &= \iint\limits_{D} (\sqrt{4 - x^2} + z + \sqrt{4 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dxdz \\ &= 16\,(4 + \pi). \end{aligned}$$

Në mënyrë analoge:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Sigma_2} (y + z + \sqrt{4 - x^2})\, ds &= \iint\limits_{D} (-\sqrt{4 - x^2} + z + \sqrt{4 - x^2})\frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} = dxdz \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \quad = \quad \iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_2} = 32\,(2 + \pi).$$

Po i japim formulës (3) një trajtë tjetër. Meqenëse sipërfaqja $z = z(x, y)$ është e lëmueshme, d.m.th. funksioni $z\,(x, y)$ ka derivate të pjesshme të vazhdueshme, një vektor normal ndaj sipërfaqes në pikën $M\,(x, y, z(x, y))$, është vektori:

$$\mathbf{N} = (-z'_x(x, y),\ -z'_y(x, y),\ 1).$$

Në qoftë se me $\mathbf{n}$ shënojmë vektorin unitar të $\mathbf{N}$ dhe me $\cos\alpha, \cos\beta$ dhe $\cos\gamma$ shënojmë kosinuset drejtuese të tij, kemi:

$$\cos\gamma = \cos\,(\mathbf{n}, Oz) = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}},$$

kurse kur marrim vektorin e kundërt të **n** kemi $cos\,\gamma = -\dfrac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$, prandaj:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_{D} f\left[x,y,z(x,y)\right]\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}.$$

Në mënyrë analoge, kur sipërfaqja jepet me ekuacion:

$$x = x\,(y,z) \text{ në } D^*, \; y = y\,(x,z) \text{ në } D^{**},$$

fitojmë përkatësisht:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_{D^*} f[x(y,z),y,z]\frac{dydz}{|\cos\,\alpha|},$$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_{D^{**}} f\left[x,y\,(x,z),z\right]\frac{dxdz}{|\cos\,\beta|},$$

ku α e β janë, përkatësisht, këndet që i formon vektori **n** ose **(-n)** me boshtet Ox e Oy.

Shembulli 5.2.3 Të llogaritet integrali:

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{ds}{(1+x+y)^2},$$

ku Σ është konturi i tetraedrit : $x+y+z \leq 1,\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0$. (fig. 5.16).

Zgjidhja: Faqen e tetraedrit në të cilën është $x = 0$ e shënojmë me Σ_1, dhe ngjashëm:

$$y = 0 \quad \cdots \quad \Sigma_2$$

$$z = 0 \quad \cdots \quad \Sigma_3$$

$$x+y+z = 1 \quad \cdots \quad \Sigma_4.$$

Prandaj marrim: $I = \displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = \iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_2} + \iint\limits_{\Sigma_3} + \iint\limits_{\Sigma_4}.$

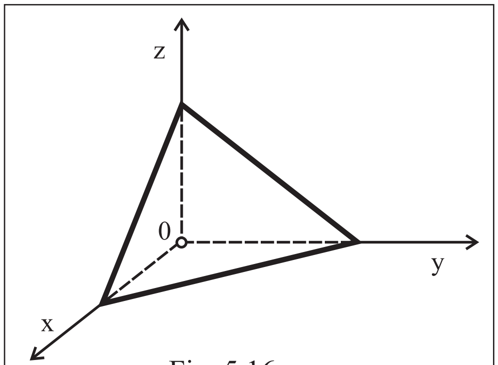


Fig. 5.16.

Le të jetë vektori unitar $\mathbf{n}_i$ normal në sipërfaqen Σ_i, d.m.th.

$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{i}$, prej nga shohim se $ds = \frac{dydz}{|\cos\,\alpha|} = dydz$;

$\mathbf{n}_2 = -\mathbf{j}$, $\cdots\cdots$ $ds = \frac{dxdz}{|\cos\,\beta|} = dxdz$;

$\mathbf{n}_3 = -\mathbf{k}$, $\cdots\cdots$ $ds = \frac{dxdy}{|\cos\,\gamma|} = dxdy$;

$\mathbf{n}_4 = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$, $\cdots\cdots$ $ds = \frac{dxdy}{|\cos\,\gamma|} = \sqrt{3}\,dxdy$.

Kemi:

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = \iint\limits_{D_1} \frac{dydz}{(1+y)^2} = 1 - \ln\,2,$$

ku D_1 është projeksioni i sipërfaqes Σ_1 në rrafshin Oyz;

$$\iint\limits_{\Sigma_2} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = \iint\limits_{D_2} \frac{dxdz}{(1+x)^2} = 1 - \ln\,2,$$

ku D_2 është projeksioni i sipërfaqes Σ_2 në rrafshin Oxz.

$$\iint\limits_{\Sigma_3} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = \iint\limits_{D_3} \frac{dxdy}{(1+x+y)^2} = -\frac{1}{2} + \ln 2;$$

$$\iint\limits_{\Sigma_4} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = \iint\limits_{D_4} \frac{\sqrt{3}dxdy}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3}\Big(-\frac{1}{2} + \ln\,2\Big).$$

Prandaj:

$$I = (1 - \ln\,2)\cdot 2 - \frac{1}{2} + \ln\,2 + \sqrt{3}\Big(-\frac{1}{2} + \ln\,2\Big) = \frac{1}{2}(3-\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-1)\,\ln\,2.$$

Në fund të kësaj pike, do të vëmë në dukje disa zbatime të integralit sipërfaqësor të llojit të parë.

Le të jetë sipërfaqja Σ e matshme me densitet sipërfaqësor $\rho = \rho(x, y, z)$ të vazhdueshëm në Σ.

1. masa e lëndës së vendosur mbi sipërfaqen Σ, nëse ekziston është:

$$m = \iint_{\Sigma} P\,(x, y, z)\, ds;$$

2. momentet statike të sipërfaqes ndaj rrafsheve koordinative janë:

$$M_{xy} = \iint_{\Sigma} z \cdot \rho\,(x, y, z)\, ds,\ M_{xz} = \iint_{\Sigma} y \cdot \rho\,(x, y, z)\, ds,$$

$$M_{yz} = \iint_{\Sigma} x \cdot \rho\,(x, y, z)\, ds;$$

3. qendra e rëndesës i ka koordinatat:

$$\xi = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iint_{\Sigma} x\rho\,(x, y, z)\, ds}{\iint_{\Sigma} \rho\,(x, y, z)\, ds,},\ \eta = \frac{\iint_{\Sigma} y\rho\,(x, y, z)\, ds}{\iint_{\Sigma} \rho\,(x, y, z)\, ds},\ \rho = \frac{\iint_{\Sigma} z\rho\,(x, y, z)\, ds}{\iint_{\Sigma} \rho\,(x, y, z)\, ds}.$$

4. momenti i inercisë ndaj boshtit Oz përcaktohet me formulën:

$$I_z = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \cdot \rho\,(x, y, z)\, ds.$$

Momentet e tjera shprehen me formula analoge.

Shembulli 5.2.4 Të llogaritet momenti i inercisë së sipërfaqes

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2},$$

në lidhje me boshtin Ox nëse densiteti i masës në Σ është $\rho\,(x, y, z) = 1$.

Zgjidhje:

$$I_x = \iint_{\Sigma} \rho\,(x, y, z)\,(y^2 + z^2)\, ds =$$

$$= \iint_{D} (y^2+z^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{r^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = r \iint_{D} \frac{(r^2 - x^2)\, dxdy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= r \int_0^{2\pi} \int_0^{r} \frac{r^2 - \rho^2\, \cos^2\theta}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho d\rho\, d\theta = \frac{4\pi\, r^4}{3}.$$

5.2.2 Integralet sipërfaqësore të llojit të dytë

Derisa te integralet vijëpërkulta të llojit të dytë ishte e nevojshme të përcaktohet orientimi i lakores së integrimit, për integralet sipërfaqësore të llojit të dytë rol esencial luan nocioni i anës ose i faqes së një sipërfaqeje të dhënë.

a. Sipërfaqet me një anë dhe me dy anë

Le të jetë Σ një sipërfaqe e lëmueshme dhe M_0 një pikë e brendshme e saj (fig. 5.17). Dihet se normalja ndaj sipërfaqes në pikën M_0 ka dy kahe të kundërta. Zgjedhim njërin prej tyre të cilin po e përcaktojmë me vektorin unitar $\mathbf{n}$. Le të jetë m një lakore e mbyllur që shtrihet mbi sipërfaqen Σ, kalon nëpër pikën M_0 dhe nuk e pret konturin ℓ të Σ. Vektorin $\mathbf{n}$ e lëvizim në mënyrë të vazhdueshme gjatë lakores m në mënyrë të tillë që në çdo pikë, gjatë kësaj lëvizjeje, ai të jetë normal ndaj sipërfaqes. Është e qartë se kur vektori $\mathbf{n}$ të përshkoj vijën m dhe të kthehet përsëri në pikën M_0, ai ose do ta ketë kahun fillestar ose kahun e kundërt të tij.

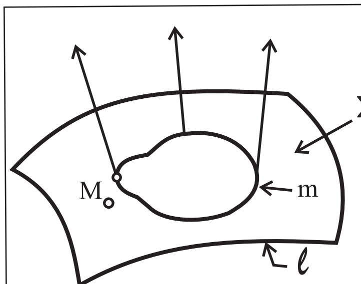


Fig. 5.17.

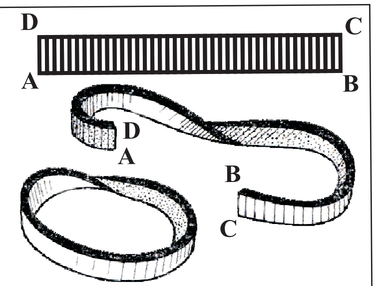


Fig. 5.18.

Me përkufizim sipërfaqja e lëmueshme Σ quhet me **dy anë** nëse vektori normal $\mathbf{n}$ pas përshkrimit të çdo lakoreje të mbyllur, që shtrihet në të, kthehet në pozitën fillestare. Nëse gjendet bile një vijë e mbyllur m që nuk ka pika të përbashkëta me kufirin ℓ dhe e tillë që duke kaluar në mënyrë të vazhdueshme gjatë m, vektori normal ndaj sipërfaqes kthehet në të kundërt, sipërfaqja Σ quhet **me një anë.**

Shembuj 5.2.1 1. Shembulli më i thjeshtë i sipërfaqes me dy anë është rrafshi. Po ashtu sipërfaqe e tillë është edhe çdo pjesë e tij.

2. Çdo sipërfaqe e lëmueshme e dhënë me ekuacion të formës:

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in D$$

është me dy anë. Dihet se vektori normal ndaj saj në një pikë të çfarëdoshme $M(x, y, z)$ të sipërfaqes është:

$$\mathbf{N} = \{\mp z'_x(x, y),\ \mp z'_y(x, y),\ \pm 1\},$$

prandaj duke e zgjedhur njërin prej tyre, përcaktojmë anën e sipërme kur e marrim koordinatën e tretë (+1 dhe anën e poshtme kur marrim të jetë (-1).

Në mënyrë analoge mund të konstatohet për anë të sipërfaqeve të dhëna me ekuacione $x = x(y, z)$ ose $y = y(x, z)$.

3. Sipërfaqet e mbyllura (p.sh. sfera) që nuk kanë vetëprerje janë me dy anë. Kështu p.sh. nëse normalja e sipërfaqes sferike është e drejtuar kah qendra e saj atëherë ajo përcakton **anën e brendshme** të saj, ndërsa nëse ka drejtim të kundërt – ajo përcakton **anën e jashtme** të saj.

4. Shembulli interesant i sipërfaqes me një anë është dhënë në punimet e matematikanëve gjermanë A. F. Möbius dhe J. B. Listing. Ajo sipërfaqe quhet **fjongu i Möbiusit** dhe fitohet duke i bashkuar dy skajet e një shiriti nëse ai është përdredhur një herë (fig. 5.18). Se fjongu i Möbiusit është sipërfaqe me një anë shihet nga fig. 5. 19.

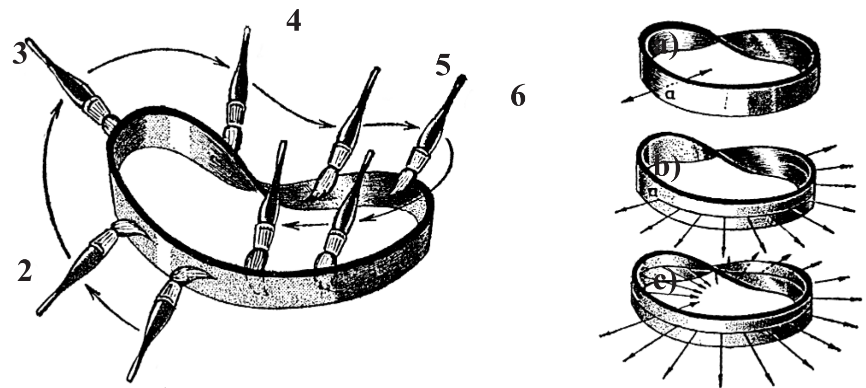


Fig. 5.19.

Sipërfaqja me dy anë quhet **e orientueshme**. Kur zgjidhet ana e saj thuhet se është orientuar. Le të theksojmë se vetia e sipërfaqes që të jetë e orientueshme ose jo e orientueshme është globale e jo lokale.

Tash japim nocionin e orientimit të një vije të mbyllur që kufizon sipërfaqen Σ.

Me përkufizim vijën e mbyllur ℓ që është kontur i zonës Σ ose pjesë e këtij kufiri e quajmë të **orientuar në përputhje me sipërfaqen,** atëherë kur vrojtuesi që qëndron sipas vektorit normal të drejtuar prej këmbëve tek koka dhe lëviz nëpër vijë, pjesën më të afërt të sipërfaqes Σ e ka nga krahu i majtë. Kjo vlen edhe kur sipërfaqja ka zbrazëti (fig. 5.20).

Orientimin e vijës në përputhje me sipërfaqen e quajmë **orientim pozitiv** kurse të kundërtin e quajmë **negativ.** Edhe për vijën e mbyllur që shtrihet mbi sipërfaqe orientimi pozitiv në lidhje me zonën që kufizon ajo përcaktohet si më sipër.

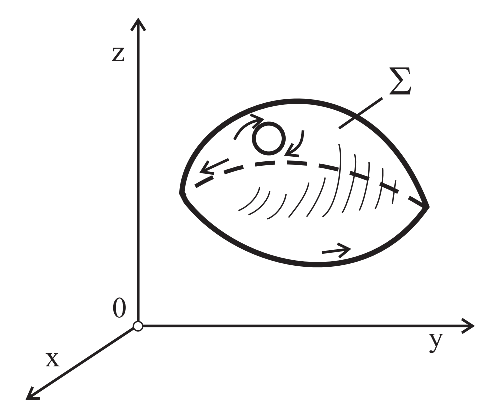


Fig. 5.20.

b. Përkufizimi dhe llogaritja e integralit sipërfaqësor të llojit të dytë

Supozojmë se Σ është një sipërfaqe e lëmueshme, e orientuar dhe $R\,(x, y, z)$ një funksion i përcaktuar në të. E ndajmë sipërfaqen Σ në $n-$pjesë $\Sigma_0,\ \Sigma_1, \cdots, \Sigma_{n-1}$ dhe në secilën prej këtyre pjesëve marrim një pikë $M_i\,(\xi_i, \eta_i, \chi_i)$. Ndërtojmë shumën:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} R\,(\xi_i, \eta_i, \chi_i) \cdot \triangle_i, \tag{1}$$

ku me $\triangle_i$ shënuam syprinën e projeksionit të sipërfaqes $\Sigma_i,\ i = 0, \cdots, n-1$, në rrafshin Oxy të marrë me shenjë plus, kur ana e sipërfaqes Σ_i është marrë sipas normales që formon kënd të ngushtë me boshtin Oz dhe me shenjë minus kur ky kënd është i gjerë. Në ndarje mund të ketë edhe zona Σ_i në disa pika të të cilave normalja formon kënd të ngushtë me boshtin Oz e në disa të tjera kënd të gjerë. Në këtë rast ose e imtësojmë ndarjen që në zona të kemi kënd të ngushtë ose të gjerë për të gjitha pikat ose këtyre elementeve u vihet shenjë e çfarëdoshme, sepse ato nuk ndikojnë në rezultat, meqë shuma e syprinave të projeksioneve të këtyre elementeve është e vogël (sepse zona $D =$ proj$\,_{Oxy}\Sigma$ është e matshme). Kur sipërfaqja Σ ka pjesë cilindrike përftueset e së cilës janë paralele me boshtin Oz, atëherë projeksionet e pjesëve ndarëse Σ_i e kanë syprinën zero.

Përkufizimi 5.2.2 *Limitin e shumës* (1), *nëse ekziston, kur diametri maksimal i pjesëve të ndarjes tenton në zero, e quajmë* **integral sipërfaqësor i llojit të dytë** *i funksionit* $R\ (x, y, z)$ *në anën e zgjedhur të sipërfaqes* Σ *dhe shënohet me simbolin:*

$$\iint\limits_{\Sigma} R\,(x, y, z)\, dxdy. \tag{2}$$

Ky simbol nuk tregon se cila anë e sipërfaqes është zgjedhur, prandaj zakonisht ana theksohet në mënyrë të veçantë. Nga përkufizimi rrjedh se po të zëvendësojmë anën e zgjedhur të sipërfaqes me të kundërtën, atëherë integrali ndërron shenjë.

Për sipërfaqet me një anë nocioni i integralit sipërfaqësor të llojit të dytë nuk përkufizohet.

Për funksionet $P(x,y,z)$ dhe $Q(x,y,z)$, duke ndryshuar rolet e boshteve koordinative paralel me të cilët bëhet projektimi, njëlloj si për (2), përcaktohen integralet:

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz \ \text{ dhe } \iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dxdz. \tag{3}$$

Shuma e integraleve (2) dhe (3) shënohet:

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

dhe quhet **integral sipërfaqësor i plotë i llojit të dytë,** sipas anës së zgjedhur të sipërfaqes Σ.

Pra, me përkufizim kemi:

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz + \iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\ dxdz +$$

$$+ \iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy, \tag{4}$$

ku në sipërfaqen Σ është zgjedhur njëra anë. Marrja e anës së kundërt ndikon në ndryshimin e shenjës së integralit sipërfaqësor (4).

Në vazhdim shqyrtojmë problemin e ekzistencës dhe të llogaritjes së integralit (4).

Teorema 5.2.2 *Le të jetë:*

(a) *Sipërfaqja* Σ *e lëmueshme, e orientuar dhe e dhënë me ekuacionin* $z = z(x,y)$ *në zonën* $D = \operatorname{proj}_{0xy}\Sigma$;

(b) *Funksioni* $R(x,y,z)$ *i vazhdueshëm në* Σ.

Atëherë, integrali sipërfaqësor (2) *ekziston dhe ka vend barazimi:*

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{D} R[x,y,z(x,y)]\,dxdy, \tag{5}$$

ku integrali sipërfaqësor merret sipas anës së sipërme të sipërfaqes Σ *(d.m.th. anës së tillë që normalja në të formon kënd të ngushtë me boshtin* Oz*).*

Vërtetimi. Duke zëvendësuar $\chi_i = z(\xi_i, \eta_i)$ në shumën (1) fitojmë:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} R\left[\xi_i, \eta_i, z\left(\xi_i, \eta_i\right)\right] \Delta_i \tag{6}$$

ku Δ_i janë madhësi pozitive sepse, sipas kushtit, kemi marrë anën e sipërme të sipërfaqes Σ. Shuma σ është shumë integrale e funksionit të vazhdueshëm $R\left[x, y, z\left(x, y\right)\right]$ në zonën D. Meqenëse kur diametri maksimal i pjesëve Σ_i tenton në zero do të tentoj në zero edhe diametri maksimal λ i zonave D_i, duke kaluar me limit kur $\lambda \to 0$ në relacionin (6) fitojmë (5). Teorema u vërtetua.

Në rastin kur integrali i anës së majtë të (5) të merrej sipas anës së poshtme të sipërfaqes Σ, në shumën (6) syprinat $\triangle_i$ do të merreshin me shenjë minus, prandaj barazimi (5) merr formën:

$$\iint\limits_{\Sigma} R\left(x, y, z\right) dxdy = -\iint\limits_{D} R\left[x, y, z\left(x, y\right)\right] dxdy. \tag{7}$$

Formulat (5) e (7) janë të vërteta edhe për rastin kur sipërfaqja Σ është pjesë-pjesë e lëmueshme në D. Në këtë rast relacionet (5) e (7) merren si shumë e relacioneve të secilës nga pjesët e lëmueshme.

Tash shqyrtojmë lidhjen ndërmjet integralit sipërfaqësor të llojit të parë me atë të llojit të dytë.

Në pikën 1.1. gjetëm se:

$$\iint\limits_{\Sigma} f\left(x, y, z\right)\, ds = \iint\limits_{D} f\left[x, y, z\left(x, y\right)\right] \frac{dxdy}{\cos\left(\mathbf{n}, O_z\right)}, \tag{8}$$

duke supozuar se këndi $\gamma = \angle(\mathbf{n}, Oz)$ është i ngushtë. Në (8) vëmë $f\left(x, y, z\right) = R\left(x, y, z\right)\, \cos\gamma$. Kemi:

$$\iint\limits_{\Sigma} R\left(x, y, z\right)\, \cos\gamma dxdy = \iint\limits_{D} R\left[x, y, z\left(x, y\right)\right] dxdy. \tag{9}$$

Tash nga (5) e (9) fitojmë:

$$\iint\limits_{\Sigma} R\left(x, y, z\right) dxdy = \iint\limits_{\Sigma} R\left(x, y, z\right)\, \cos\gamma ds. \tag{10}$$

Formula (10) mbetet e vërtetë edhe kur marrim anën e poshtme të sipërfaqes, sepse në këtë rast të dy anët e saj do të ndryshonin shenjë në të kundërt.

Më në fund po theksojmë se formula (10) është e vërtetë dhe kur sipërfaqja Σ është pjesë e ndonjë sipërfaqeje cilindrike me përftuese drejtvizore paralele me boshtin Oz (në ato pjesë kemi $\cos\gamma = 0$, prandaj të dy anët e (10) janë zero).

Në mënyrë analoge nxirren formulat:

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz = \pm \iint\limits_{D_1} P[x(y,z),y,z]\,dydz, \tag{11}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dxdz = \pm \iint\limits_{D_2} Q[x,y(x,z),z]\,dxdz, \tag{12}$$

ku $D_1 = \operatorname{proj}_{Oyz}\Sigma$, $D_2 = \operatorname{proj}_{xz}\Sigma$, si dhe formulat

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz = \iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha ds, \tag{13}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dxdz = \iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta ds, \tag{14}$$

ku α e β janë kënde që i formon vektori $\mathbf{n}$ me boshtet Ox e Oy, përkatësisht.

Në formulën (11) sipërfaqja Σ është e lëmueshme dhe e dhënë me ekuacion $x = x(y,z)$ në D_1. Shenja është plus kur normalja formon kënd të ngushtë me boshtin Ox dhe minus kur ajo normale me boshtin Ox formon kënd të gjerë. Formula (12) merret për sipërfaqen Σ në trajtë $y = y(x,z)$ në D_2. Formulat (13) e (14) janë të vërteta edhe për sipërfaqe cilindrike me përftuese paralele me boshtin Ox e Oy, përkatësisht.

Duke mbledhur anëpëranë relacionet (10), (13) e (14) fitojmë:

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds \tag{15}$$

Shembulli 5.2.5 Të llogaritet:

$$I = \iint\limits_{\Sigma} zdxdy + xdzdx + ydydz,$$

ku Σ është pjesa e sipërme e rrafshit $2x + z = 4$, $0 < y < 4$ në oktantin e parë.

Zgjidhje: $I = I_1 + I_2 + I_3$.

I_1 llogaritet sipas projeksionit të sipërfaqes në rrafshin Oxy, I_2 sipas projeksionit në rrafshin Oxz, ndërsa I_3 sipas projeksionit në rrafshin Oyz.

$$I_1 = \iint\limits_{D} (4-2x)\,dxdy = \int_0^4 dy \int_0^2 (4-2x)\,dx = 16,$$

$$I_2 = \iint\limits_{\Sigma} xdzdx = 0,$$

sepse $\cos\beta = 0$.

$$I_3 = \iint\limits_{D_2} ydzdy = \int\limits_0^4 dz \int\limits_0^4 ydy = 32.$$

Prandaj:

$$I = 16 + 32 = 48.$$

Vërtetimi. Siç pamë në përkufizimin e integralit sipërfaqësor të llojit të dytë në rastin e projektimit të sipërfaqes, në rrafshin Oxy duhet të merret parasysh përcaktimi i shenjës. Në fig. 5.21. kemi paraqitur sesi duhet caktuar shenjën;

+ kur vektori normal në sipërfaqe formon me boshtin Oz kënd të ngushtë:
- kur vektori normal në sipërfaqe formon me boshtin Oz kënd të gjerë:

.

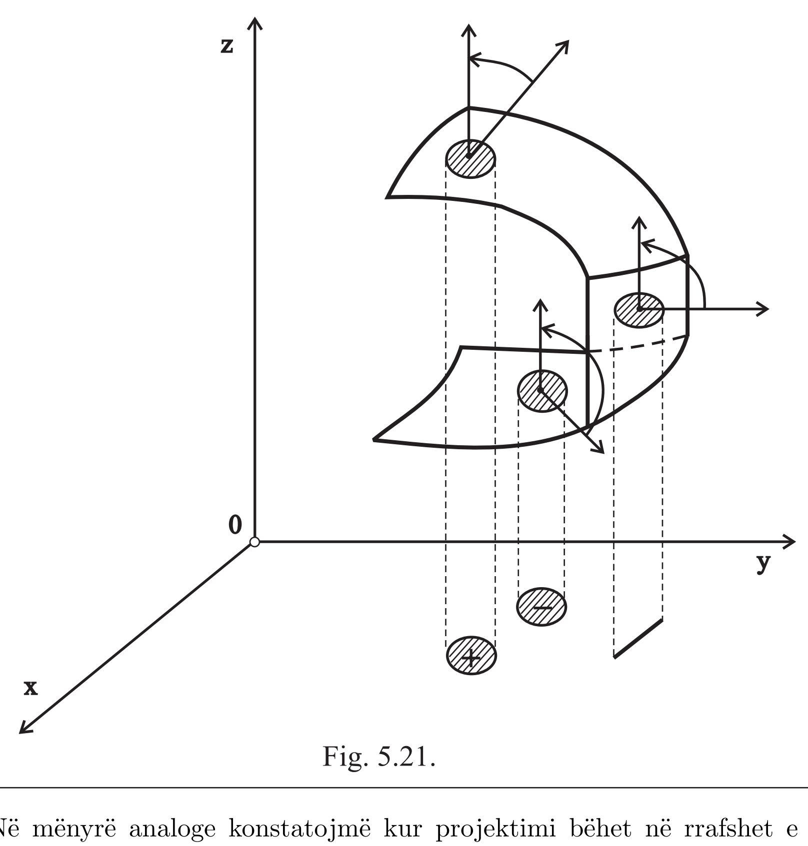


Fig. 5.21.

Në mënyrë analoge konstatojmë kur projektimi bëhet në rrafshet e tjera koordinative.

5.2.3 Lidhja ndërmjet integralit sipërfaqësor dhe integralit të trefishtë

Në këtë pikë do të gjejmë një formulë e cila mbanë emrin e Gausit dhe lidh integralin e trefishtë sipas një trupi të hapësirës tredimensionale me integralin sipërfaqësor të llogaritur gjatë faqes së jashtme të konturit të atij trupi.

Le të jetë dhënë trupi V normal ndaj rrafshit Oxy (d.m.th. drejtëza paralele me boshtin Oz që kalon nëpër cilëndo pikë të brendshme të zonës $D = \text{proj}_{\,Oxy}V$ e ndërpret konturin Σ të zonës V në më së shumti dy pika) ndërsa konturi i tij le të jetë sipërfaqe pjesë-pjesë e lëmueshme. Le te jetë:

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \middle|\ \left(x, y\right) \in D \quad \text{dhe} \quad \varphi\left(x, y\right) \leq z \leq \psi\left(x, y\right)\right\}$$

ku sipërfaqet:

$$z = \varphi\left(x, y\right),\ z = \psi\left(x, y\right)$$

janë pjesë-pjesë të lëmueshme. Shënojmë me Σ_1 sipërfaqen $z = \varphi\left(x, y\right)$ dhe Σ_2 sipërfaqen $z = \psi\left(x, y\right)$. Po e cekim se sipërfaqja Σ mund të ketë ndonjë pjesë cilindrike me përftuese drejtvizore paralele me boshtin Oz dhe atë e shënojmë me Σ_3. Le të jetë $R\left(x, y, z\right)$ funksion i vazhdueshëm në zonën V dhe në konturin e saj Σ, së bashku me derivatin e tij:

$$\frac{\partial R\left(x, y, z\right)}{\partial z}.$$

Duke kaluar në integral të përsëritur marrim:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi\,(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz = \iint\limits_D \left\{R\left[x, y, \psi\left(x, y\right)\right] - \right.$$
$$\left. - R\left[x, y, \varphi\left(x, y\right)\right]\right\} dxdy. \tag{1}$$

Në bazë të formulës (5) të pikës 5.2.2. kemi:

$$\iint\limits_D R\left[x, y, \psi\left(x, y\right)\right] dxdy = \iint\limits_{\Sigma_2} R\left(x, y, z\right) dxdy \tag{2}$$

ku integrali sipërfaqësor merret sipas anës së sipërme të sipërfaqes Σ_2.
Në mënyrë analoge:

$$\iint\limits_D R\left[x, y, \varphi\left(x, y\right)\right] dxdy = \iint\limits_{\Sigma_1} R\left(x, y, z\right) dxdy,$$

ku integrali sipërfaqësor merret sipas anës së sipërme të sipërfaqes Σ_1. Kur marrim anën e poshtme të sipërfaqes Σ_1 fitojmë:

$$-\iint\limits_D R\left[x, y, \varphi\left(x, y\right)\right] dxdy = \iint\limits_{\Sigma_1} R\left(x, y, z\right) dxdy \tag{3}$$

Në rastin kur $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, nga (2) e (3) gjejmë:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_{\Sigma_2} Rdxdy + \iint\limits_{\Sigma_1} Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma} Rdxdy. \tag{4}$$

Kur trupi V kufizohet edhe nga ndonjë pjesë cilindrike Σ_3, meqenëse:

$$\iint\limits_{\Sigma_3} Rdxdy = 0,$$

duke e shtuar këtë integral në anën e djathtë të formulës (4) ajo mbetet e vërtetë edhe për këtë trup.

Vërejmë se formula (4) mbetet e vërtetë edhe për zonat që kufizohen me sipërfaqe pjesë-pjesë të lëmueshme dhe që mund të ndahen në një numër të fundmë zonash normale ndaj rrafshit Oxy.

Me të vërtetë, supozojmë se trupi V i kufizuar me sipërfaqen Σ ndahet, me sipërfaqen Σ^* në dy trupa V_1 e V_2 të cilët janë normal ndaj rrafshit Oxy. Me $\Sigma_1 \cup \Sigma^*$ e $\Sigma_2 \cup \Sigma^*$ shënojmë konturin e zonës V_1 e V_2, përkatësisht (fig.5.22).

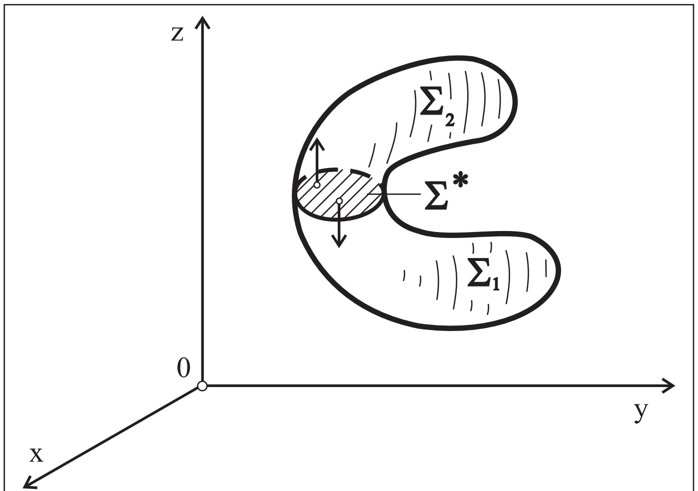


Fig. 5.22.

Zbatojmë formulën (4) për zonat V_1 e V_2:

$$\iiint\limits_{V_1} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_{\Sigma_1 \cup \Sigma^*} Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma_1} Rdxdy + \iint\limits_{\Sigma^*} Rdxdy, \tag{5}$$

$$\iiint\limits_{V_2} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_{\Sigma_2 \cup \Sigma^*} Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma_2} Rdxdy + \iint\limits_{\Sigma^*} Rdxdy, \tag{6}$$

ku integralet merren sipas anës së jashtme të sipërfaqeve përkatëse. Duke i mbledhur relacionet (5) dhe (6) dhe duke patur parasysh se orientimi i $\sum^*$ në (5) është i kundërt me atë në (6), fitojmë:

$$\iiint\limits_{V_1} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz + \iiint\limits_{V_2} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\Sigma_1} Rdxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} Rdxdy,$$

nga edhe del (4).

Në mënyrë analoge tregohet se kur zona V është normale ndaj rrafshit koordinativ Oxz ose mund të ndahet në një numër të fundmë zonash normale, si dhe kufizohet nga sipërfaqja pjesë-pjesë e lëmueshme Σ, atëherë:

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{\Sigma} Qdxdz. \tag{7}$$

ku funksionet Q e $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ supozohen të vazhdueshme në zonën $V \cup \Sigma$, kurse integrimi bëhet sipas anës së jashtme të Σ. Për kushte analoge po ashtu vlen:

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{\Sigma} Pdydz. \tag{8}$$

Tash nga (4), (7) e (8) fitojmë:

$$\iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \tag{9}$$

ku integrali sipërfaqësor merret sipas anës së jashtme të sipërfaqes Σ.

Kështu vërtetuam këtë rezultat.

Teorema 5.2.3 *Supozojmë se:*

(a) *Zona V është normale ndaj të tre rrafsheve koordinative ose mund të ndahet në një numër të fundmë zonash të tilla dhe kufizohet nga sipërfaqja pjesë-pjesë e lëmueshme Σ;*

(b) *Funksionet $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ dhe derivatet e tyre $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ janë të vazhdueshme në $V \cup \Sigma$.*

Atëherë vlen formula (9), *ku integrali sipërfaqësor i llojit të dytë merret sipas anës së jashtme të sipërfaqes Σ.*

Formula (9) quhet **formula e Gausit**.

Duke ditur lidhjen që ekziston në mes të integralit sipërfaqësor të llojit të parë dhe atij të llojit të dytë, formula e Gausit mund të shkruhet në formën:

$$\iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds,$$

ku $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ janë kosinuset drejtuese të vektorit normal ndaj sipërfaqes të drejtuar nga brenda për jashtë zonës V.

Shembulli 5.2.6 Të llogaritet:

$$I = \iint\limits_{\Sigma} 4x^3 dydz + 4y^3 dxdz - 6z^4 dxdy$$

në qoftë se Σ është ana e jashtme e konturit të trupit që gjendet në sipërfaqen cilindrike $x^2 + y^2 = a^2$ ndërmjet rrafsheve $z = 0$ dhe $z = h$.

Zgjidhja: Nëse me V shënojmë trupin të cilin e kufizon Σ atëherë sipas formulës së Gausit kemi:

$$I = \iint\limits_{\Sigma} 4x^3 dydz + 4y^3 dxdz - 6z^4 dxdy = \iiint\limits_{V} (12x^2 + 12y^2 - 24z^3)\, dxdydz =$$

$$= 12 \iint\limits_{D} \left[(x^2 + y^2)z - \frac{z^4}{2} \right]\Bigg|_0^h dxdy = 6\pi a^2 h\, (a^2 - h^2).$$

Shembulli 5.2.7 Të llogaritet:

$$I = \iint\limits_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dxdz - z^3 dxdy,$$

ku Σ është ana e jashtme e sferës $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Zgjidhje: Sipas formulës së Gausit kemi:

$$I = 3 \iiint\limits_{V} (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz,$$

ku V është rruzulli $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Duke kaluar në koordinata sferike gjejmë:

$$I = 3 \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho^4 \sin\ \theta d\rho = \frac{12}{5}\pi R^5.$$

Shohim tash dy zbatime të formulës së Gausit.

a. Llogaritja e vëllimit të trupit me integralin sipërfaqësor

Në pikën 5.1.4 pamë se si me anën e formulës së Grinit, gjetëm formulën për llogaritjen e syprinës së një figure rrafshe me ndihmën e integralit vijëpërkulët gjatë konturit të figurës. Në këtë pikë do të shohim sesi, duke zbatuar formulën e Gausit, gjejmë formulën për llogaritjen e vëllimit të një trupi me ndihmën e integralit sipërfaqësor sipas anës së jashtme të konturit të atij trupi.

Supozojmë se trupi V kufizohet me sipërfaqen Σ dhe se plotësohen kushtet e teoremës 5.2.3 Atëherë për funksionet P, Q, R të tilla që:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1, \tag{10}$$

në trupin V, duke zbatuar formulën e Gausit kemi:

$$V^* = \iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy, \qquad V^* = mV$$

sepse:

$$\iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iiint\limits_{V} dxdydz = V^*.$$

Meqë për funksionet P, Q, R kërkohet të plotësohet kushti (10) atëherë është e qartë se mund të gjendet një bashkësi e pafundme formulash me të cilat llogaritet vëllimi i trupit V. P.sh. njëra prej tyre merret kur shënojmë $P = \dfrac{1}{3}x$, $Q = \dfrac{1}{3}y$, $R = \dfrac{1}{3}z$. Kemi:

$$V^* = \frac{1}{3} \iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy.$$

b. Anulimi i integralit sipërfaqësor gjatë një sipërfaqeje të mbyllur

Në këtë pikë formulojmë një rezultat të ngjashëm me atë që kemi gjetur nga formula e Grinit për integralet vijëpërkulta gjatë një konturi të mbyllur.

Teorema 5.2.4 *Supozojmë se trupi V' dhe funksionet P, Q, R, $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ plotësojnë kushtet e teoremës* 5.2.3. *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që integrali sipërfaqësor*

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \tag{11}$$

të jetë i barabartë me zero gjatë çdo sipërfaqeje të mbyllur Σ, që shtrihet në V', është që në çdo pikë të brendshme të këtij trupi të plotësohet relacioni

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

Vërtetimi. Le të jetë V trupi që kufizohet nga sipërfaqja Σ dhe përmbahet në V'. Nga formula e Gausit rrjedh se kur plotësohet kushti (12) integrali (11) bëhet zero.

Për të treguar kushtin e nevojshëm supozojmë të kundërtën, d.m.th. se në një pikë $G(x, y, z)$ të brendshme për trupin V' kushti (12) nuk plotësohet. P.sh. në këtë le të kemi:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} > 0$$

Atëherë ekziston një rrethinë (rruzull) e pikës G ashtu që edhe në çdo pikë të saj ruhet pabarazimi i mësipërm. Rruzullin e shënojmë me V, konturin e tij me Σ dhe rrezen e tij e marrim të tillë që $V \subset V'$. Është e qartë se:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz > 0$$

prandaj, sipas formulës së Gausit, kemi:

$$\iint\limits_\Sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy > 0,$$

gjë që është në kundërshtim me supozimin se integrali anulohet gjatë sipërfaqes Σ. Teorema u vërtetua.

5.2.4 Lidhja ndërmjet integralit vijëpërkulët dhe integralit sipërfaqësor

Në këtë pikë do të gjejmë formulën e cila lidh integralin gjatë një sipërfaqeje $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ me integralin gjatë konturit të saj. Siç dihet, kjo lloj lidhje në rrafsh jepet me formulën e Grinit.

Le të jetë dhënë në hapësirë sipërfaqja e lëmueshme Σ me ekuacionin:

$$z = z\,(x, y) \tag{1}$$

Kufirin e saj e shënojmë me L dhe e orientojmë në përputhje me anën e zgjedhur në Σ. Supozojmë se funksioni $P\,(x, y, z)$ së bashku me derivatet e tij $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial P}{\partial z}$ janë të vazhdueshme në Σ. Me D po shënojmë projeksionin e sipërfaqes Σ në rrafshin Oxy dhe me ℓ konturin e saj. Po e zgjedhim anën e sipërme të sipërfaqes Σ. Atëherë konturi L është pozitivisht i orientuar. Të njëjtin orientim do ta ketë edhe konturi ℓ në lidhje me zonën D (fig. 5.23).

Lidhjen e integralit vijëpërkulët gjatë konturit të orientuar L dhe integralin sipërfaqësor të llojit të dytë sipas sipërfaqës Σ do ta gjejmë sipas skemës:

$$\int\limits_L \to \int\limits_\ell \to \iint\limits_D \to \iint\limits_\Sigma .$$

Marrim integralin:

$$I = \int\limits_L P\,(x, y, z)\, dx.$$

Meqenëse vija L ndodhet në Σ ekuacioni i së cilës është $z = z(x, y)$ kemi:

$$I = \int_L P(x, y, z)\, dx = \int_\ell P[x, y, z(x, y)]\, dx. \tag{2}$$

Sipas formulës së Grinit (funksionin Q e marrim të barabartë me zero) marrim:

$$\begin{aligned} I = & \int_\ell P[x, y, z(x, y)]\, dx = -\iint_D \frac{\partial P[x, y, z(x, y)]}{\partial y} dxdy = \\ & = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy. \end{aligned} \tag{3}$$

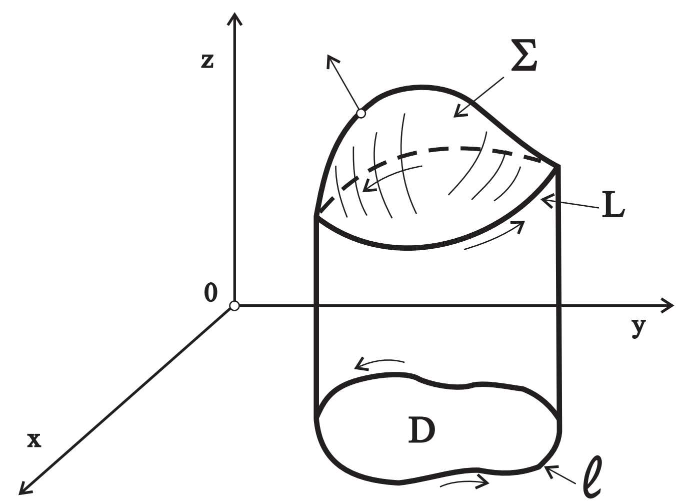


Fig. 5.23.

Llogarisim shprehjen $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Dihet se vektori i normales së sipërfaqes (1)prej së cilës kemi zgjedhur anën e sipërme është:

$$\mathbf{N} = \left\{-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right\},$$

kështu që duke shënuar me $\cos\alpha$, $\cos\beta$ dhe $\cos\gamma$ kosinuset drejtuese të tij kemi:

$$\cos\alpha = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Prandaj $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ dhe duke zëvendësuar ne (3), gjejmë:

$$I = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right) dxdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\frac{dxdy}{\cos\gamma} =$$

$$= \iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) ds.$$

Këndej dhe nga (2) fitojmë:

$$\int\limits_L Pdx = \iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) ds. \tag{4}$$

Formula (4) mbetet e vërtetë dhe kur sipërfaqja Σ jepet me ekuacionin $y = y(x,z)$.

Me të vërtetë duke marrë të njëjtat simbole për vijat dhe zonat, pastaj anën e sipërme (në lidhje me boshtin Oz) dhe duke marrë parasysh se sistemi Oxz është i majtë, kemi:

$$I = \int\limits_L Pdx = \int\limits_\ell P[x, y(x,z), z]dx = \iint\limits_D \frac{\partial P[x, y(x,z), z]}{\partial z} dxdz =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dxdz. \tag{5}$$

Në këtë rast vektori normal ndaj sipërfaqes, që formon kënd të ngushtë me boshtin Oy, është:

$$\mathbf{N} = \left\{-\frac{\partial y}{\partial x}, 1, -\frac{\partial y}{\partial z}\right\},$$

prandaj duke shënuar me $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ kosinuset drejtuese të vektorit $\mathbf{N}$ kemi:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}. \tag{6}$$

Tash kur zëvendësojmë (6) në (5) del përsëri formula (4).

Po theksojmë se formula (4) mbetet e vërtetë dhe po të ndryshohet ana e sipërfaqes Σ. Me të vërtetë, në këtë rast do të ndryshoj orientimi i vijës L, kështu që barazimi (4) mbetet në fuqi sepse njëkohësisht ndryshon shenja në të dy anët e tij.

Le të jenë funksionet $Q(x,y,z), R(x,y,z), \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial R}{\partial y}$ të vazhdueshme në Σ. Duke ndryshuar në mënyrë ciklike rolin e ndryshoreve në formulën (4), për funksionet e sipërpërmendura, fitojmë:

$$\int\limits_L Qdy = \iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) ds, \tag{7}$$

dhe:

$$\int\limits_{L} Rdz = \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos\beta \right) ds. \tag{8}$$

Duke mbledhur anë për anë formulat (4), (7) dhe (8) dhe duke pasur parasysh lidhjen e integralit sipërfaqësor të llojit të parë me atë të llojit të dytë, fitojmë:

$$\int\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] ds =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{9}$$

Kështu vërtetuam këtë rezultat.

Teorema 5.2.5 *Le të jenë funksionet* $P, Q, R, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial P}{\partial z}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial R}{\partial y}$ *të vazhdueshme në sipërfaqen e lëmueshme* Σ *të kufizuar me lakoren* L. *Atëherë ka vend formula* (9).

Formula (9) quhet **formula e Stoksit.**

Vërejmë se teorema 5.2.5 mbetet në fuqi edhe kur Σ është pjesë-pjesë e lëmueshme. Me të vërtetë, në këtë rast Σ ndahet në numër të fundmë pjessh të lëmueshme, integrali sipërfaqësor konsiderohet si shumë integralesh sipas sipërfaqeve të tilla, kurse integrali vijëpërkulët, gjatë vijave me të cilat bëhet ndarja, do të merret nga dy herë e në drejtime të kundërta, kështu që këto shtesa anulohen dhe mbetet vetëm integrali gjatë konturit të sipërfaqes.

Në rastin special, për z=konst. $(dz = 0)$ marrim formulën e Grinit në rrafsh:

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{L} Pdx + Qdy.$$

Formula e Stoksit më lehtë mbahet në mend nëse e shkruajmë në trajtën:

$$\int\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds \tag{10}$$

ku përcaktori zhvillohet sipas rreshtit të parë, kurse minorët kuptohen si simbole që zhvillohen si përcaktorë të zakonshëm në të cilën veprimin e shumëzimit e zëvendëson veprimi i derivimit.

Shembulli 5.2.8 Le të jetë C lakore e mbyllur që gjendet në rrafshin:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

($\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ janë kosinuset drejtuese të normales së rrafshit) dhe e cila kufizon sipërfaqen Σ. Të llogaritet:

$$I = \int\limits_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

nëse C është e orientuar pozitivisht.

Zgjidhja: Kemi:

$$I = \int\limits_C (z\cos\beta - y\cos\gamma)dx + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)dy + (y\cos\alpha - x\cos\beta)dz.$$

dhe duke përdorur formulën e Stoksit fitojmë:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_\Sigma (\cos\alpha + \cos\alpha)dydz + (\cos\beta + \cos\beta)dxdz + (\cos\gamma + \cos\gamma)dxdy = \\ &= 2\iint\limits_\Sigma \cos\alpha dydz + \cos\beta dxdz + \cos\gamma dxdy. \end{aligned}$$

Këndej dhe meqë:

$$dydz = \cos\alpha\, ds,\ dzdx = \cos\beta\, ds,\ dxdy = \cos\gamma\, ds,$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

fitojmë:

$$I = 2\iint\limits_\Sigma (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)dS = 2\iint\limits_\Sigma dS = 2\cdot\triangle,$$

ku $\triangle$ është syprina e sipërfaqes Σ.

5.2.5 Detyra për ushtrime

1. Të llogaritet $I = \int\limits_\Sigma \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) ds$, në qoftë se Σ është pjesa e rrafshit $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ që gjendet në oktantin e parë.

2. Të llogaritet $I = \iint\limits_\Sigma \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}\, ds$, në qoftë se Σ është qarku që fitohet me ndërprerjen e rruzullit $x^2 + y^2 = z^2 \leq 1$ me rrafshin $z + y = 1$.

3. Të llogaritet $I = \iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)ds$, ku Σ është pjesa e sipërfaqes konike $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e ndërprerë me sipërfaqen $x^2+y^2=2ax$.

4. Të llogaritet $I = \iint\limits_{\Sigma}|xyz|ds$, në qoftë se Σ është pjesë e sipërfaqes $z = x^2+y^2$ që është e kufizuar me rrafshin $z=1$.

5. Të llogaritet $I = \iint\limits_{S}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)ds$, sipas sipërfaqes së trupit të përcaktuar me $x^2+y^2+2az \le a^2,\ x\ge 0,\ z\ge 0$. α, β e γ janë këndet të cilat normalja në sipërfaqe i formon me boshtet koordinative.

6. Të llogaritet $I = \iint\limits_{\Sigma}(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)ds$, në qoftë se Σ është pjesa e sipërfaqes së konit $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ të cilën e ndërprenë cilindri $x^2+y^2=2x$.

7. Të vërtetohet formula e Puassonit:

   $\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)ds = 2\pi\int\limits_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du$, nëse Σ është sfera $x^2+y^2+z^2=1$.

8. Të llogaritet masa e pjesës së sipërfaqes parabolike $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\ 0\le z\le 1$, në qoftë se dendësia sipërfaqësore është $\rho = z$.

9. Të gjenden koordinatat e qendrës së qëndresës (rëndimit) të pjesës së sipërfaqes konike $z=\sqrt{x^2+y^2}$ të ndërprerë me sipërfaqen cilindrike $x^2+y^2=ay$ nëse dendësia sipërfaqësore ρ është konstante.

10. a) Të llogariten momentet statike të pllakës trekëndëshe homogjene $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge$ ndaj rrafsheve koordinative Oxy, Oyz e Ozx.

    b) Të caktohen koordinatat e qendrës së rëndimit (x_T, y_T, z_T) në rastin $a=b=c$.

    c) Të gjenden momentet e inercisë ndaj rrafsheve koordinative nëse dendësia e pllakës është konstante dhe e barabartë me ρ si dhe $a=b=c$.

11. Të llogaritet:

$$I = \iint\limits_{\Sigma} zdxdy + xdzdx + ydydz,$$

    në qoftë se Σ është ana e sipërme e rrafshit $2x+z=4, 0<y<4$ në oktantin e parë.

12. Të llogaritet $\iint\limits_{\Sigma} f(x)dydz$, ku $f(x)$ është funksion i vazhdueshëm, ndërsa Σ ana e jashtme e konturit të trupit:

$$0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c.$$

13. Të llogaritet:

$$I = \iint\limits_{\Sigma} (y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dxdy,$$

nëse Σ është ana e jashtme e sipërfaqes konike:

$$x^2 + y^2 = z^2, \ 0 \le z \le h.$$

14. Të llogaritet $I = \iint\limits_{\Sigma} zdxdy$, nëse Σ është ana e jashtme e elipsoidit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

15. Të llogaritet $I = \iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, në qoftë se Σ është ana e jashtme e sferës $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

16. Të llogaritet $I = \iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$ sipas anës së sipërme të pjesës së sipërfaqes $x^2 + y^2 + 2az = a^2$ e cila gjendet në oktantin e parë:

    a) si integral sipërfaqësor i llojit të dytë;

    b) si integral sipërfaqësor i llojit të parë.

17. Duke përdorur formulën e Stoksit të llogariten integralet:

    a) $I = \int\limits_{\ell} ydx + zdy + xdz$, ku ℓ është rrethi $x^2+y^2+z^2 = a^2, x+y+z = 0$, i orientuar pozitivisht nëse shikohet nga ana pozitive e boshtit Ox.

    b) $I = \int\limits_{\ell} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, ku ℓ është lakorja $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{h} + \frac{z}{h} = 1 (a > 0, h > 0)$, e orientuar pozitivisht nëse shikohet nga ana pozitive e boshtit Ox.

    c) $I = \int\limits_{\ell} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, ku ℓ është ndërprerje e sipërfaqes së kubit:

    $$0 \le x \le a, \ 0 \le y \le a, \ 0 \le z \le a$$

    me rrafshin $x+y+z = \frac{3}{2}a$, e cila është e orientuar pozitivisht nëse shikohet nga ana pozitive e boshtit Ox.

18. Duke përdorur formulën e Gausit të llogariten integralet:

    a) $I = \iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, ku Σ është ana e jashtme e kufirit të kubit $0 \le x \le a, \ 0 \le y \le a, \ 0 \le z \le a$.

    b) $I = \iint\limits_{\Sigma} (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy$, ku Σ është ana e jashtme e sipërfaqes $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$.

6

ANALIZA VEKTORIALE

6.1 FUNKSIONET VEKTORIALE TË ARGUMENTIT SKALAR

Skalarët si funksione të argumentit të pavarur skalar janë funksionet e zakonshme që janë studiuar gjer tash në analizënmatematike. Rol të rëndësishëm në analizë luajnë edhe funksionet vektoriale të argumentit skalar si edhe ato të argumentit vektorial. Në këtë paragraf studiojmë ato të argumentit skalar.

6.1.1 Hodografi i funksionit vektorial

Përkufizimi 6.1.1 *Vektori* $\mathbf{r}$ *quhet* **funksion vektorial** *i argumentit skalar* t, *nëse çdo vlere* $t \in [\alpha, \beta]$ *i përgjigjet vektori plotësisht i përcaktuar* $\mathbf{r}$.

Në këtë rast shkruajmë $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Në qoftë se $\mathbf{r}$ është funksion i argumentit skalar atëherë koordinatat x, y, z të vektorit $\mathbf{r}$ janë funksione të argumentit t, d.m.th.:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \tag{1}$$

Anasjelltas, nëse koordinatat e vektorit $\mathbf{r}$ janë funksione të t, atëherë edhe $\mathbf{r}$ është funksioni i atij argumenti, d.m.th.:

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \tag{2}$$

Barazimet (1) e (2) tregojnë se funksioni vektorial $\mathbf{r}(t)$ konsiderohet i dhënë atëherë dhe vetëm atëherë kur jepen funksionet skalare $x(t), y(t)$ e $z(t)$.

Është e qartë se funksioni vektorial $\mathbf{r}$ mund të varet nga më shumë se një skalar, p.sh. nga $t_1, t_2, ..., t_n$. Në këtë rast shkruajmë $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_1, t_2, ..., t_n)$ për $t_i \in [\alpha, \beta], i = 1, 2, ..., n$.

Përkufizimi 6.1.2 *Vendin gjeometrik të pikave të cilat i përshkruan mbarimi i vektorit* $\mathbf{r}(t)$ *gjatë ndryshimit të skalarit* t *në* $[\alpha, \beta]$, *kur fillimi i vektorit* $\mathbf{r}(t)$ *është i vendosur në një pikë të fiksuar të hapësirës, quhet* **hodograf** *i funksionit vektorial* $\mathbf{r}(t)$ *(fig. 6.1).*

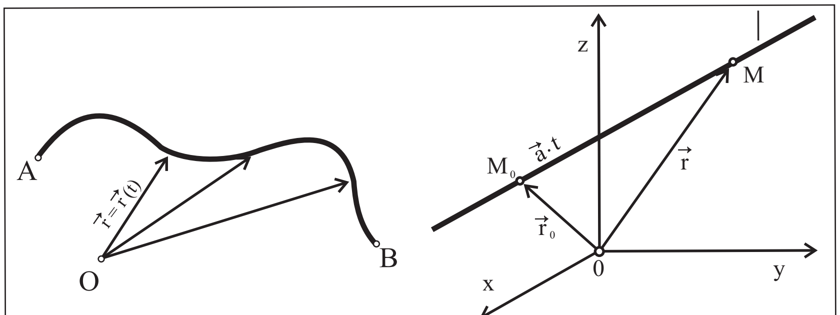


Fig. 6.1. Fig. 6.2.

Shembulli 6.1.1 Hodografi i funksionit vektorial të dhënë me barazimin

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{a} \cdot t,$$

ku $\mathbf{r_0}$ e $\mathbf{a}$ janë vektorë konstantë, kurse t skalar i ndryshueshëm është drejtëza ℓ (fig. 6.2).

Shembulli 6.1.2 Të vizatohet hodografi i funksionit $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$.

Zgjidhja: Mënyra e parë. Vizatimin e bëjmë duke marrë parasysh tabelën:

t	0	1	2	3	4
$\mathbf{r}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$	$2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$	$3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+9\mathbf{k}$	$4\mathbf{i}+4\mathbf{j}+16\mathbf{k}$

Mënyra e dytë. Në qoftë se me x, y, z shënojmë koordinatat e vektorit $\mathbf{r}$, do të kemi:

$$x = t,\ y = t,\ z = t^2$$

Duke eliminuar nga barazimet e mësipërme parametrin t, fitojmë ekuacionet e sipërfaqeve $y = x$, $z = x^2$, vija ndërprerëse e të cilave paraqet hodografin e funksionit të dhënë (fig. 6.3).

6.1.2 Vlera kufitere dhe vazhdueshmëria e funksionit vektorial

Le të jetë $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ funksion vektorial i përkufizuar në intervalin $[\alpha, \beta]$.

Përkufizimi 6.1.3 *Thuhet se vektori* $\mathbf{A}$ *është* **limit** *i funksionit vektorial* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *kur* $t \to t_0$, *në qoftë se për çdo* $\varepsilon > 0$ *ekziston* $\delta(\varepsilon) > 0$ *ashtu që për çdo* $t \neq t_0$ *për të cilët* $|t - t_0| < \delta$, *vlen pabarazimi:*

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{A}| < \varepsilon. \tag{1}$$

Në këtë rast shkruajmë

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{A} \quad \text{ose} \quad \mathbf{r}(t) \to \mathbf{A} \quad \text{kur} \quad t \to t_0.$$

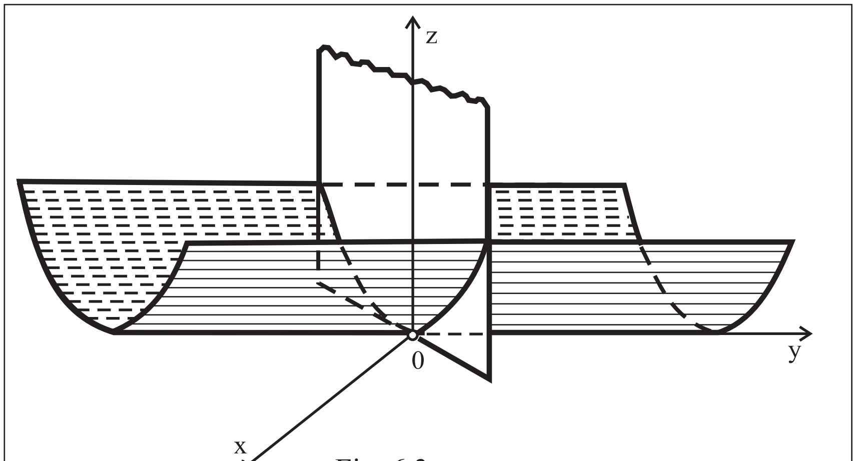


Fig. 6.3.

Pabarazimi (1) gjeometrikisht tregon se (fig. 6.4) fundet e vektorëve $\mathbf{r}(t)$, për të cilët $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$ e që kanëfillimin e përbashkët 0 me vektorin limit $\mathbf{A}$, shtrihen në rruzullin me rreze ε e me qendër në fundin e vektorit $\mathbf{A}$.

Përkufizimi 6.1.3′. *Vektori $\vec{\alpha}(t)$ quhet pambarimisht i vogël kur $t \to t_0$, në qoftë se $\vec{\alpha}(t)$ ka limitin e barabartë me zero kur $t \to t_0$.*

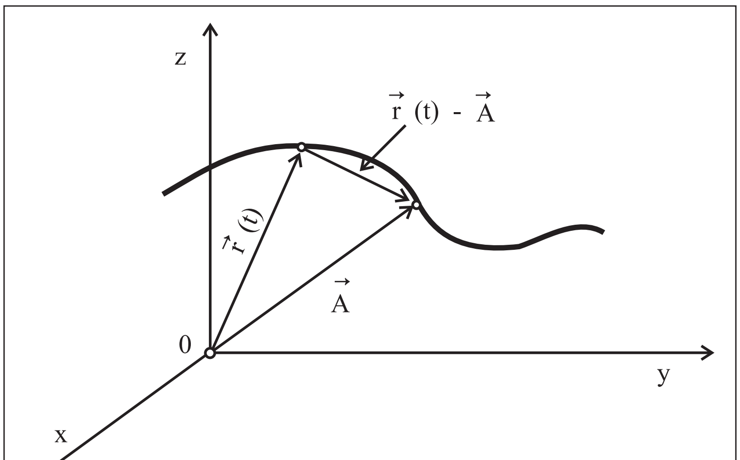


Fig. 6.4.

Shembulli 6.1.3 Të tregohet se vektori $\vec{\alpha}(t) = t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ është pambarimisht i vogël kur $t \to 0$.

Zgjidhje: Kemi:

$$|\vec{\alpha}(t)| = |t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}\ | \leq |t| + |\sin t\ | \leq 2\ |t|,$$

prej nga shohim se nëse për çdo $\varepsilon > 0$ marrim $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, atëherë për $|t - 0| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$kemi $|\vec{\alpha}(t)| < \varepsilon$. Kjo pikërisht tregon se $\lim\limits_{t\to 0} \vec{\alpha}(t) = 0$.

Të gjitha veprimet me limite të funksioneve skalare vlejnë edhe për funksionet vektoriale të argumentit skalar. Lexuesi nuk e ka vështirë t'i vërtetoj këto pohime:

1° Limiti i modulit të vektorit është sa moduli i atij limiti, nëse ky i fundit ekziston.

2° Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që funksioni vektorial $\mathbf{r}(t)$ të ketë limitin $\mathbf{A}$ kur $t \to t_0$ është që $\mathbf{r}(t)$ të mund të paraqitet në formën:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A} + \vec{\alpha}(t),$$

ku $\vec{\alpha}(t)$ është vektor pambarimisht i vogël kur $t \to t_0$.

3° Në qoftë se:

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{A},\ \lim_{t\to t_0} \mathbf{b}(t) = \mathbf{B}, \tag{2}$$

atëherë edhe $\mathbf{a}(t) \pm \mathbf{b}(t)$ ka limit kur $t \to t_0$ dhe:

$$\lim_{t\to t_0} [\mathbf{a}(t) \pm \mathbf{b}(t)] = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}.$$

4° Në qoftë se vlen (2), atëherë:

$$\lim_{t\to t_0} [\mathbf{a}(t) \circ \mathbf{b}(t)] = \mathbf{A} \circ \mathbf{B},$$

ku $\circ$ paraqet shenjën e produktit skalar të vektorëve.

5° Në qoftë se vlen (2), atëherë :

$$\lim_{t\to t_0} [\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)] = \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

ku $\times$ paraqet shenjën e produktit vektorial të vektorëve.

6° Në qoftë se $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ dhe $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{A}$, atëherë:

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = a_1,\ \lim_{t\to t_0} y(t) = a_2,\ \lim_{t\to t_0} z(t) = a_3.$$

Përkufizimi 6.1.4 *Për funksionin vektorial* $\mathbf{r}(t)$ *thuhet se është i* **vazhdueshëm** *në pikën* $t_0 \in [\alpha, \beta]$ *në qoftë se për çdo numër* $\varepsilon > 0$ *ekziston numri* $\delta(\varepsilon) > 0$ *ashtu që*

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)| < \varepsilon$$

për çdo t *të tillë që* $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$.

Funksioni vektorial $\mathbf{r}(t)$ është i vazhdueshëm në $[\alpha, \beta]$ në qoftë se ai është i vazhdueshëm në çdo pikë të atij segmenti.

6.1.3 Derivati i funksionit vektorial

Derivati i funksionit vektorial përkufizohet në mënyrë të ngjashme sikur për funksionin skalar.

Le të jetë funksioni vektorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{t})$ i përkufizuar në (α, β) dhe $t \in (\alpha, \beta)$ pikë e çfarëdoshme. Pikës t i japim shtesën $\triangle t$ ashtu që $t + \triangle t \in (\alpha, \beta)$ dhe gjejmë shtesën përkatëse $\triangle \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \triangle t) - \mathbf{r}(t)$ të funksionit $\mathbf{r}(t)$.

Përkufizimi 6.1.5 *Limitin e raportit* $\frac{\triangle \mathbf{r}}{\triangle t}$, *nëse ekziston, kur* $\triangle t \to 0$ *e quajmë* **derivat** *të funksionit vektorial* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *dhe e shënojmë me njërin nga simbolet:*

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt},\ \mathbf{r}'(t),\ \dot{\mathbf{r}}\ (t).$$

Pra:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle \mathbf{r}}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \triangle t) - \mathbf{r}(t)}{\triangle t}.$$

Këndej rrjedhë se:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} &= \lim_{\triangle t \to 0} \frac{x(t + \triangle t) - x(t)}{\triangle t}\mathbf{i} + \lim_{\triangle t \to 0} \frac{y(t + \triangle t) - y(t)}{\triangle t}\mathbf{j} + \\ &+ \lim_{\triangle t \to 0} \frac{z(t + \triangle t) - z(t)}{\triangle t}\mathbf{k} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Prandaj, që të gjendet derivati i funksionit vektorial, duhet të gjejmë derivatin e koordinatave të tij $x(t), y(t)$ e $z(t)$.

Në analogji me diferencialin e funksionit skalar, **diferenciali i funksionit vektorial** $\mathbf{r}$(t) është vektori d$\mathbf{r}$ i përcaktuar me barazimin:

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot dt,$$

ku $dt = \triangle t$ është shtesa e argumentit skalar t.

Sikur edhe te funksionet skalare vlen

$$\triangle \mathbf{r} = d\mathbf{r} + \vec{\alpha} \cdot \triangle t$$

ku $\vec{\alpha} \to 0$ kur $\triangle t \to 0$.

Vlejnë këto veti:

1° Në qoftë se $\mathbf{c}$ është vektor konstant, atëherë $\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{0}$;

2° Derivati i shumës së funksioneve vektoriale është sa shuma e derivateve të tyre:

$$\frac{d(\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt};$$

3° Supozojmë se funksioni $\mathbf{a}(t)$ shumëzohet me funksionin skalar $m(t)$. Atëherë:

$$\frac{d(m \cdot \mathbf{a})}{dt} = m\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{dm}{dt}\mathbf{a};$$

4° $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \circ \mathbf{b}(t)] = \mathbf{b} \circ \dfrac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \circ \dfrac{d\mathbf{b}}{dt};$

5° $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \dfrac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \dfrac{d\mathbf{b}}{dt}$, duke marrë parasysh se në anën e djathtë të 5° rendi i faktorëve nuk mund të ndërrohet.

Sa për ilustrim po e vërtetojmë formulën 5°.

Sipas përkufizimit të derivatit kemi:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \lim_{\triangle t \to 0} \frac{(\mathbf{a} + \triangle\mathbf{a}) \times (\mathbf{b} + \triangle\mathbf{b}) - \mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\triangle t} = \\
&= \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \triangle\mathbf{b} + \triangle\mathbf{a} \times \triangle\mathbf{b}}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0}\left(\frac{\triangle\mathbf{a}}{\triangle t} \times \mathbf{b}\right) + \\
&+ \lim_{\triangle t \to 0}\left(\mathbf{a} \times \frac{\triangle\mathbf{b}}{\triangle t}\right) + \lim_{\triangle t \to 0}\left(\triangle\mathbf{a} \times \frac{\triangle\mathbf{b}}{\triangle t}\right) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}.
\end{aligned}$$

Në rastin kur $\mathbf{c}$ është vektor konstant atëherë, sipas vetive $1°, 4°$ e $5°$ do të kemi:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{c} \circ \mathbf{b}(t)) = \mathbf{c} \circ \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{c}.$$

6° Në qoftë se $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u), u = u(t)$, atëherë

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot u'(t).$$

Tash shohim cili është kuptimi gjeometrik dhe ai mekanik i derivatit të funksionit vektorial.

Le të jetë $A(x(t), y(t), z(t))$ cilado pikë e hodografit të funksionit

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Supozojmë se $x(t), y(t)$ dhe $z(t)$ janë funksione të derivueshme në $[\alpha, \beta]$. Le të marrim një pikë tjetër B me koordinatat $(x(t + \triangle t), y(t + \triangle t), z(t + \triangle t))$. Është e qartë se koordinatat e vektorit $\mathbf{AB}$ (fig. 6.5) janë

$$x(t + \triangle t) - x(t),\ y(t + \triangle t) - y(t),\ z(t + \triangle t) - z(t).$$

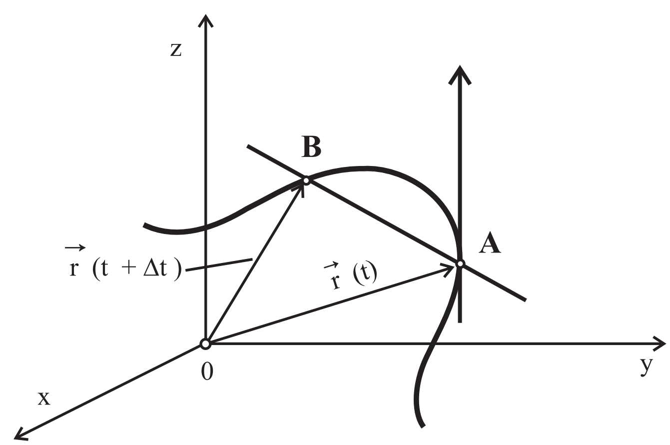


Fig. 6.5.

Këto koordinata paraqesin koordinatat e vektorit drejtues të sekantes (AB). Ky vektor nuk e ndryshon drejtimin në qoftë se komponentët e tij i pjesëtojmë me të njëjtin numër $\triangle t\,(\triangle t \neq 0)$. Rrjedhimisht, shprehjet:

$$\frac{x(t+\triangle t)-x(t)}{\triangle t},\ \frac{y(t+\triangle t)-y(t)}{\triangle t},\ \frac{z(t+\triangle t)-z(t)}{\triangle t}$$

paraqesin komponentët e një vektori drejtues të sekantes (AB).

Në qoftë se kalojmë në limit kur $\triangle t \to 0$, atëherë komponentët e vektorit drejtues të sekantes (AB) do të jenë komponentët e vektorit drejtues të tangjentes në pikën A (fig. 6.5). Pra:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

është një vektor në drejtim të tangjentes. Kahu i tij është kah i rritjes së parametrit.

Tash supozojmë se një pikë lëviz nëpër një lakore në hapësirë ekuacioni i së cilës është:

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

dhe se në kohën t ajo ndodhet në pikën $M(x(t), y(t), z(t))$. Në këtë rast rrugën që e përshkruan pika e quajmë **trajektore.** Siç dihet, vektori:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t),$$

është vektor i cili ka drejtimin e tangjentes në pikën M dhe quhet vektori **i shpejtësisë** së pikës lëvizëse M. Vektori i shpejtësisë

$$\mathbf{v}(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

na jep madhësinë dhe drejtimin e shpejtësisë se çastit të pikës lëvizëse në kohën t. Intensiteti i vektorit të shpejtësisë:

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}, \tag{1}$$

i cili gjeometrikisht paraqet gjatësinë e vektorit $\mathbf{v}(t)$, quhet **shpejtësia e lëvizjes në kohën** t.

Derivati i dytë i funksionit vektorial:

$$\mathbf{r}''(t) = \mathbf{v}'(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}(t),$$

i cili paraqet shpejtësinë e ndryshimit momental të vektorit $\mathbf{v}(t)$, përkufizon **nxitimin e pikës** në kohën t.

Drejtimi i vektorit të nxitimit në rastin e përgjithshëm nuk është i njëjtë me drejtimin e vektorit të shpejtësisë.

Vërejtja 1. Dihet se gjatësia e harkut të lakores:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\ (\alpha \le t \le \beta)$$

jepet me formulën:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt.$$

Në qoftë se kufijtë e integrimit i marrim prej 0 deri në t shohim se s i cili tash është funksion i t, paraqet gjatësinë e harkut të përshkruar ndërmjet kohës 0 e t :

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt. \tag{2}$$

Nga (2) gjejmë:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t), \tag{3}$$

ose duke marrë parasysh formulën (1):

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (\mathbf{v}(t))^2 = \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \circ \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

d.m.th.:

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|. \tag{4}$$

Barazimi (3) mund të shkruhet edhe në formën:

$$ds^2 = d\mathbf{r} \circ d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

ku:

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}.$$

Duke patur parasysh se s paraqet gjatësitë e harkut të përshkruar ndërmjet dy intervaleve rrjedh se atë mund ta marrim si parametër në paraqitjen e ekuacioneve të lakores në formën parametrike dhe e quajmë **parametër natyral**.

P.sh. për rrethin $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j}$ kemi:

$$s(t) = \int\limits_0^t \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}dt = at,$$

prej nga $t = \frac{s}{a}$. Prandaj, ekuacioni:

$$\mathbf{r}\left(\frac{s}{a}\right) = a\cos\frac{s}{a}\,\mathbf{i} + a\sin\frac{s}{a}\,\mathbf{j},$$

paraqet ekuacionin vektorial të rrethit në të cilin gjatësia e harkut luan rolin e parametrit.

Vërejtja 2. Në mënyrë analoge sikur te funksionet skalare përkufizohet derivati i n-të i funksionit vektorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ si dhe derivatet e pjesshme të funksionit $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_1, t_2, ..., t_m)$.

6.1.4 Integrimi i funksionit vektorial

Përkufizimi 6.1.6 *Funksioni* $\mathbf{A}(t)$ *quhet* **primitivë** *e funksionit vektorial* $\mathbf{a}(t)$ *për* $\alpha \le t \le \beta$, *nëse* $\mathbf{A}(t)$ *është i derivueshëm dhe:*

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{a}(t),\ t \in (\alpha, \beta).$$

Përkufizimi 6.1.7 *Bashkësinë e të gjitha primitivave të funksionit* $\mathbf{a}(t)$ *e quajmë* **integral të pacaktuar** *të funksionit vektorial* $\mathbf{a}(t)$.

Shenja e integralit të pacaktuar, sikur edhe te funksionet skalare, është $\int$. Pra:

$$\int \mathbf{a}(t)\,dt = \mathbf{A}(t) + \mathbf{C},$$

ku $\mathbf{A}(t)$ është primitivë e çfarëdoshme e funksionit $\mathbf{a}(t)$, ndërsa $\mathbf{C}$ vektor konstant i çfarëdoshëm.

Për integralet e funksionit vektorial vlejnë këto veti:

1° $\displaystyle\int k \cdot \mathbf{a}(t)dt = k\int \mathbf{a}(t)dt$, ($k$ konstantë numerike);

2° $\int [\mathbf{a}(t) \pm \mathbf{b}(t)]dt = \int \mathbf{a}(t)dt \pm \int \mathbf{b}(t)dt.$

3° Në qoftë se $\mathbf{c}$ është vektor konstant, $\mathbf{a}$(t)-vektor i ndryshueshëm, atëherë

$$\int \mathbf{c} \circ \mathbf{a}(t)dt = \mathbf{c} \circ \int \mathbf{a}(t)\ dt,$$

$$\int \mathbf{c} \times \mathbf{a}(t)dt = \mathbf{c} \times \int \mathbf{a}(t)dt.$$

Po theksojmë se në qoftë se:

$$\mathbf{a}(t) = a_1(t)\mathbf{i} + a_2(t)\mathbf{j} + a_3(t)\mathbf{k},$$

atëherë:

$$\int \mathbf{a}(t)dt = \mathbf{i} \int a_1(t)dt + \mathbf{j} \int a_2(t)dt + \mathbf{k} \int a_3(t)dt,$$

d.m.th. integrimi i funksionit vektorial kthehet në integrimin e tri funksioneve skalare.

Shembulli 6.1.4 Të gjendet integrali i pacaktuar i funksionit vektorial $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}e^{-t} + \mathbf{k}$.

Zgjidhja: kemi:

$$\int \mathbf{a}(t)dt = \mathbf{i} \int \sin t\, dt + \mathbf{j} \int e^{-t}dt + \mathbf{k} \int dt = -\mathbf{i}\cos t - \mathbf{j}e^{-t} + \mathbf{k}t + \mathbf{C},$$

ku $\mathbf{C}$ është vektor i çfarëdoshëm konstant.

Supozojmë se funksioni vektorial $\mathbf{a}(t)$ është i vazhdueshëm në segmentin $[\alpha, \beta]$.

Përkufizimi 6.1.8 Integral të caktuar *të funksionit vektorial* $\mathbf{a}(t)$ *në segmentin* $[\alpha, \beta]$ *quajmë limitin, nëse ekziston, e shumës integrale:*

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{a}(\xi_i)\triangle t_i,\ \ \xi_i \in [t_i, t_{i+1}],$$

kur tenton në zero gjatësia λ *e më të madhit nga segmentet* $[t_1, t_{i+1}]\,(i = 0, 1, ..., n-1)$, *në të cilëtështë ndarë segmenti* $[\alpha, \beta]$ *dhe e shënojmë me:*

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{a}(t)dt = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{a}(\xi_i)\triangle t_i.$$

Ka vend formula:

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{a}(t)dt = \mathbf{A}(\beta) - \mathbf{A}(\alpha),$$

ku $\mathbf{A}(t)$-është primitivë e çfarëdoshme e funksionit $\mathbf{a}(t)$ në $[\alpha,\beta]$.

Në qoftë se:

$$\mathbf{a}(t) = a_1(t)\mathbf{i} + a_2(t)\mathbf{j} + a_3(t)\mathbf{k},$$

atëherë:

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{a}(t)dt = \mathbf{i}\int_\alpha^\beta a_1(t)dt + \mathbf{j}\int_\alpha^\beta a_2(t) + \mathbf{k}\int_\alpha^\beta a_3(t)dt.$$

6.1.5 Lakesa e lakores. Tangjentja dhe normalja

Le të jetë:

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$$

ekuacioni i një lakoreje L në hapësirë, ku parametri s është gjatësia e harkut të saj.

Nga barazimi (4) i pikës 1.3. për $t = s$ shohim se:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \tau^0,$$

ku τ^0 është vektori njësi në drejtim të tangjentes së lakores L, ndërsa kahu është ai i rritjes së parametrit. Kemi:

$$\tau^0 = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k},$$

prej nga:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1.$$

Që të vërtetohet se $\frac{d\tau^0}{ds}$ është normal në vektorin τ^0 mjafton të tregojmë se ka vend ky rezultat:

Lema 6.1.1 *Në qoftë se funksioni vektorial $\mathbf{r}(t)$ është i derivueshëm dhe ka gjatësi konstante në $[\alpha,\beta]$, atëherë $\mathbf{r}'(t)$ është normal në $\mathbf{r}(t)$ për çdo $t \in [\alpha,\beta]$.*

Vërtetim. Le të jetë $|\mathbf{r}(t)|^2 = g(t)$. Sipas supozimit rrjedh se $g(t)$ është konstant. Këndej shohim se $g'(t) = 0$, për çdo $t \in [\alpha,\beta]$. Nga ana tjetër $g(t) = \mathbf{r}(t)\circ\mathbf{r}(t)$, prandaj $g'(t) = [\mathbf{r}(t)\circ\mathbf{r}(t)]' = 0$, d.m.th. $2\mathbf{r}(t)\circ\mathbf{r}'(t) = 0$ prej nga rrjedh pohimi i lemës.

Le të jetë dhënë funksioni:

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}. \tag{$*$}$$

Në rastin kur hodografi i funksionit $(*)$ është drejtëz, në çdo të saj vektori njësi τ^0 nuk e ndryshon drejtimin e tij. Pra $\tau^{0\prime} = 0$. Vektori $\frac{d\tau^0}{ds}$ quhet **vektori i lakueshmërisë së lakores**. Ai karakterizohet me anën e shpejtësisë së ndryshimit të vektorit njësi τ^0 në lidhje me parametrin.

Përkufizimi 6.1.9 Lakesë të lakores *në një pikë të saj quajmë funksionin (skalar) K i cili është i barabartë me intensitetin e vektorit* $\frac{d\tau^0}{ds}$.

Pra:

$$\left|\frac{d\tau^0}{ds}\right| = K.$$

Le të vërejmë se

$$\frac{d\tau^0}{ds} = \frac{d\tau^0}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\tau^{0\prime}}{|\mathbf{v}(\mathrm{t})|}.$$

Kështu $K = \frac{|\tau^{0\prime}|}{|\mathbf{v}(\mathrm{t})|}$.

Përkufizimi 6.1.10 *Drejtëza e cila ka drejtimin e vektorit* τ^0 $\left(\frac{d\tau^0}{ds}\right)$ *dhe kalon nëpër pikën* M *të lakores* L, *quhet* **tangjente (normale kryesore)** *e lakores në pikën* M.

Lexuesi nuk e ka vështirë të vërejë se ekuacioni i tangjentes (normales) së lakores L në pikën M në formën vektoriale është:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times \tau^0 = \mathbf{0} \left((\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times \mathbf{n}^0 = \mathbf{0}\right),$$

ku $\mathbf{n}^0$ është vektor njësi i $\frac{d\tau^0}{ds}$, $\mathbf{R}$ është rreze-vektori e cilës do pikë $P(X, Y, Z)$ të tangjentes, ndërsa $\mathbf{r}$ është rreze-vektore e pikës $M(x, y, z)$. Ekuacioni i tangjentes (normales) në formën skalare është:

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{ds}} \quad \left(\frac{X - x}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{Y - y}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{Z - z}{\frac{d^2z}{ds^2}}\right).$$

Meqenëse $\mathbf{n}^0$ është vektor njësi i $\frac{d\tau^{\mathbf{0}}}{ds}$, atëherë:

$$\frac{d\tau^0}{ds} = K \cdot \mathbf{n}^0. \tag{1}$$

Madhësinë reciproke me lakesën e lakores në pikën e dhënë e quajmë **rreze të lakesës** së lakores në atë pikë dhe e shënojmë me R:

$$R = \frac{1}{K}.$$

Prandaj, formulën (1) mund ta shkruajmë në formën

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\tau^0}{ds} = \frac{\mathbf{n}^0}{R}.$$

Këndej rrjedhë se:

$$K = \frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|,$$

ose

$$K = \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}\,. \tag{2}$$

Me formulën (2) mund të llogaritet lakesa e lakores në cilën do pikë të saj në qoftë se lakorja jepet në formën parametrike ku si parametër merret gjatësia e harkut s. P.sh. për rrethin

$$\begin{aligned} x &= a\cos\frac{s}{a} \\ y &= a\sin\frac{s}{a}, \end{aligned}$$

kemi:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a},$$

dhe nga (2) gjejmë:

$$K = \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{1}{a^2}\cos^2\frac{s}{a} + \frac{1}{a^2}\sin^2\frac{s}{a}} = \frac{1}{a},$$

d.m.th. lakesa e rrethit me rreze s është konstantë dhe e barabartë me vlerën reciproke të rrezes së rrethit.

Tashti shohim rastin kur lakorja L jepet me ekuacionin $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, ku t është parametër i çfarëdoshëm.

Teorema 6.1.1 *Lakesa e lakores L ekuacioni i së cilës është $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, jepet me formulën*

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}\,.$$

Për vërtetimin e kësaj teoreme duhet ky rezultat:

Lema 6.1.2 *Vektori i nxitimit $\mathbf{v}'(t)$ është kombinim linear i vektorëve $\tau^{\mathbf{0}}$ e $\mathbf{n}^{\mathbf{0}}$, d.m.th. $\mathbf{a}(t)$ ndodhet në rrafshin e përcaktuar nga vektorët $\tau^{\mathbf{0}}$ e $\mathbf{n}^{\mathbf{0}}$.*
Vërtetimi. Me të vërtetë nga:

$$\tau^{\mathbf{0}} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|},\ \mathbf{r}'(t) \neq 0,$$

rrjedhë:

$$\mathbf{v}(t) = |\mathbf{v}(t)| \cdot \tau^{\mathbf{0}}.$$

Prej këndej:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \left[|\mathbf{v}(t)| \cdot \tau^{\mathbf{0}}\right]' = |\mathbf{v}(t)|' \cdot \tau^{\mathbf{0}} + |\mathbf{v}(t)| \cdot \tau^{\mathbf{0}\prime}. \tag{3}$$

Tash duke marrë parasysh se $\mathbf{n^0} = \frac{\tau^{\mathbf{0}\prime}}{|\tau^{\mathbf{0}\prime}|}$, kemi:

$$\mathbf{a}(t) = |\mathbf{v}(t)|^{'} \cdot \tau^{\mathbf{0}} + |\mathbf{v}(t)| \cdot |\tau^{\mathbf{0}\prime}| \cdot \mathbf{n^0},$$

çka deshëm të tregojmë.

Vërtetimi i teoremës 1.1. Vektorin $\mathbf{v}(t)$ e shkruajmë në formën $\mathbf{v}(t) = |\mathbf{v}(t)| \cdot \tau^{\mathbf{0}}$. Nga ana tjetër, me qenë se τ^0 e $\mathbf{n^0}$ janë vektorë reciprokisht normal kemi:

$$|\tau^0 \times \mathbf{n^0}(t)| = |\tau^0| \cdot |\mathbf{n^0}(t)| \cdot \sin 90^\circ = 1. \tag{4}$$

Tashti nga (3) dhe fakti se $|\mathbf{v}(t)|^{'} = \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt}) = \frac{d^2s}{dt^2}$, marrim:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \tau^0 + |\mathbf{v}(t)| \cdot |\tau^{\mathbf{0}\prime}| \cdot \mathbf{n^0}. \tag{5}$$

Nga (5) gjejmë:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t) &= [|\mathbf{v}(t)| \cdot \tau^{\mathbf{0}}] \times \left[\frac{d^2s}{dt^2}\,\tau^0 + |\mathbf{v}(t)| \cdot |\tau^{\mathbf{0}\prime}| \cdot \mathbf{n^0}\right] = \\ &= |\mathbf{v}(t)|^2 |\tau^{0\prime}| \cdot (\tau^0 \times \mathbf{n^0}). \end{aligned} \tag{6}$$

Tash, duke marrë parasysh se:

$$\left|\frac{d\tau^0}{ds}\right| = \left|\frac{d\tau^0}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}}\right| = \left|\frac{\tau^{0\prime}}{|\mathbf{v}(t)|}\right| = K,$$

barazimi (6) merr formën:

$$\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t) = |\mathbf{v}(t)|^2 \cdot |\mathbf{v}(t)| \cdot K \cdot (\tau^0 \times \mathbf{n^0}).$$

Këndej dhe nga (4) gjejmë:

$$|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)| = |\mathbf{v}(t)|^3 \cdot K,$$

d.m.th.:

$$K = \frac{|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)|}{|\mathbf{v}(t)|^3},$$

ose:

$$K = \frac{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}.$$

Le të vërejmë se forma skalare e formulës për llogaritjen e lakesës së lakores është:

$$K = \frac{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ku:

$$M = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad N = -\begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}.$$

Shembulli 6.1.5 Të llogaritet lakesa e lakores

$$\mathbf{r} = a\cos t \cdot \mathbf{i} + a\sin t \cdot \mathbf{j} + ht \cdot \mathbf{k}.$$

Zgjidhja: Kemi:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\sin t \cdot \mathbf{i} + a\cos t \cdot \mathbf{j} + h \cdot \mathbf{k},\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -a\cos t \cdot \mathbf{i} - a\sin t \cdot \mathbf{j},$$

prandaj:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & h \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = a \cdot h\sin t \cdot \mathbf{i} - a \cdot h\cos t \cdot \mathbf{j} + a^2 \cdot \mathbf{k}.$$

Këndej:

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right| = a\sqrt{a^2+h^2}\ ,$$

dhe meqë: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sqrt{a^2+h^2}$, marrim:

$$K = \frac{a}{a^2+h^2}.$$

Rrezja e lakores është

$$R = \frac{a^2+h^2}{a}.$$

Shembulli 6.1.6 Të llogaritet lakesa e lakores

$$\mathbf{r} = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j} + 6t\,\mathbf{k}.$$

Zgjidhje: Kemi $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -3\sin t \cdot \mathbf{i} + 3\cos t \cdot \mathbf{j} + 6 \cdot \mathbf{k}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -3\cos t \cdot \mathbf{i} - 3\sin t \cdot \mathbf{j}$. Duke përdorur formulën për llogaritjen e lakesës së lakores, lehtë shihet se $K = \frac{5}{18\sqrt{6}}$.

6.1.6 Rrafshi oskulator. Binormalja. Torzioni

Rrafshi i cili kalon nëpër tangjenten dhe normalen kryesore të lakores së dhënë quhet **rrafshi oskulator** i lakores.

Për lakoren plane të gjitha rrafshet oskulatore përputhen me rrafshin e saj. Po vëmë në dukje se vektori i nxitimit **a**, kur i bashkëngjitet lakores, shtrihet në rrafshin oskulator.

Vektorin $\mathbf{b^0}$ të definuar me barazimin $\mathbf{b^0} = \tau^0 \times \mathbf{n^0}$ e quajmë **vektor binormal**. Është e qartë se $|\mathbf{b^0}| = 1, \mathbf{b^0}$ është normal në vektorët τ^0 dhe $\mathbf{n^0}$ si dhe në të njëjtën renditje formojnë treshe të djathtë.

Përkufizimi 6.1.11 *Drejtëza e cila ka drejtimin e vektorit* $\mathbf{b^0}$ *dhe kalon nëpër pikën* M *të lakores quhet* **binormale** *e lakores në pikën* M.

Le të jetë $\mathbf{R}$ vektori i pozitës së cilës do pikë $P(X, Y.Z)$ të binormales dhe $\mathbf{r}$ vektori i pozitës së pikës $M(x, y, z)$. Lexuesi nuk e ka vështirë të konstatoj se ekuacioni i binormales në formën vektoriale është:

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r}) \times \mathbf{b}^0 = \mathbf{0},$$

ndërsa në formën skalare, duke marrë parasysh se $\mathbf{b^0} = \tau^0 \times \mathbf{n^0}$, ka trajtën:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X-x & Y-y & Z-z \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Rrafshi i përcaktuar me vektorët $\mathbf{n^0}$ e $\mathbf{b^0}$ quhet **normal,** ndërsa ai i përcaktuar nga τ^0 e $\mathbf{b^0}$ quhet **rektifikues** (fig. 6.6).

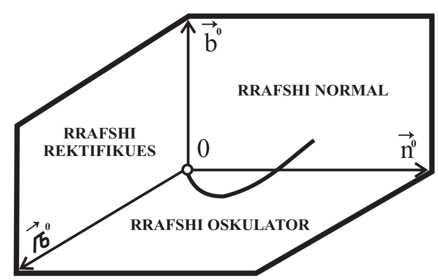


Fig. 6.6.

Le të jetë dhënë lakorja me ekuacionin $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, ku s është gjatësia e harkut të lakores.

Në qoftë se vektori $\mathbf{b^0}'$ është i ndryshëm nga zero, atëherë $\mathbf{b^0}' \perp \mathbf{b^0}$. $\mathbf{b^0}'$ është vektor normal në τ^0. Me të vërtetë, $\mathbf{b^0} \circ \tau^0 = 0$, prandaj $(\mathbf{b^0} \circ \tau^0)' = \mathbf{b^0}' \circ \tau^0 + \mathbf{b^0} \circ \tau^{0\prime}$. Këndej dhe meqë $\mathbf{b^0} \circ \tau^{0\prime} = 0$ rrjedhë $\mathbf{b^0}' \perp \tau^0$. Kështu konstatojmë se vektorët $\mathbf{b^0}'$ e $\mathbf{n^0}$ janë kolinearë. Shkruajmë:

$$\mathbf{b^0}' = \frac{d\mathbf{b^9}}{ds} = \frac{1}{T}\mathbf{n^0}. \tag{1}$$

Përkufizimi 6.1.12 *Madhësinë* $\frac{1}{T}$ *e quajmë* **torzioni** *(ose* **përdredhja***) e lakores, ndërsa* T *quhet* **rrezja e torzionit të lakores**.

Po vëmë në dukje se:

(a) në rastin kur $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ atëherë torzioni jepet me formulën:

$$\frac{1}{T} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds} \circ \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right)}{|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}|}$$

dhe

(b) në rastin kur $\mathbf{r}$=$\mathbf{r}$(t), ku t është parametër i çfarëdoshëm, atëherë kemi:

$$\frac{1}{T} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \circ (\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3})}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^t}\right|^2}. \tag{2}$$

Shembulli 6.1.7 Të gjendet torzioni i lakores:

$$\mathbf{r} = a\cos t \cdot \mathbf{i} + a\sin t \cdot \mathbf{j} + ht \cdot \mathbf{k}\,.$$

Zgjidhja: Nga shembulli i pikës 1.4. dihet se:

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}\right|^2 = a^2(a^2 + h^2).$$

Kemi:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \circ \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right) = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & h \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2h.$$

Duke përdorur formulën (2) gjejmë:

$$\frac{1}{T} = \frac{h}{a^2 + h^2}.$$

Të rikujtojmë se (formulat (1) të pikave (1.5.)* e 1.6):

$$\frac{d\tau^0}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{n^0}, \quad \frac{d\mathbf{b^0}}{ds} = \frac{1}{T}\mathbf{n^0}. \tag{3}$$

Nga $\mathbf{n^0} = \mathbf{b^0} \times \tau^0$ gjejmë:

$$\frac{d\mathbf{n^0}}{ds} = \frac{d\mathbf{b^0}}{ds} \times \tau^0 + \mathbf{b^0} \times \frac{d\tau^0}{ds}.$$

Këndej dhe nga (3) gjejmë:

$$\frac{d\mathbf{n^0}}{ds} = \frac{1}{T}(\mathbf{n^0} \times \tau^0) + \frac{1}{R}(\mathbf{b^0} \times \mathbf{n^0}) =$$

$$= -\frac{1}{T}(\tau^0 \times \mathbf{n^0}) - \frac{1}{R}(\mathbf{n^0} \times \mathbf{b^0}) = -\frac{1}{T}\,\mathbf{b^0} - \frac{1}{R}\,\tau^0,$$

d.m.th.:

$$\frac{d\mathbf{n^0}}{ds} = -\frac{1}{R}\,\tau^0 - \frac{1}{T}\,\mathbf{b^0}. \tag{4}$$

Formulat (3) e (4) të cilat shprehin derivatin e vektorëve τ^0, $\mathbf{b^0}, \mathbf{n^0}$, quhen **formulat e Frenet-it.**

6.1.7 Detyra për ushtrime

1. Të vizatohet hodografi i funksioneve vektoriale:

   a) $\mathbf{r} = 2\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} - t^2\,\mathbf{k}$;

   b) $\mathbf{r} = \cos t \cdot \mathbf{i} + 2\sin t \cdot \mathbf{j} + t \cdot \mathbf{k}$;

   c) $\mathbf{r} = \frac{t^2+1}{(t+1)^2}\,\mathbf{i} + \frac{2t}{(t+1)^2}\,\mathbf{k}$;

   d) $\mathbf{r} = \frac{2t\,\mathbf{i}+2t\,\mathbf{j}+(t^2-2)\,\mathbf{k}}{t^2+2}$.

2. Të llogariten limitet:

   a) $\lim\limits_{t\to 0}(\frac{\sin t}{t}\,\mathbf{i} + \frac{\cos t-1}{2t}\,\mathbf{j})$

   b) $\lim\limits_{t\to 0}(\frac{1-\sqrt{t}}{1-t}\,\mathbf{i} + \frac{t}{1+t}\,\mathbf{j} + \mathbf{k})$;

   c) $\lim\limits_{t\to 0}(\frac{e^t-e}{t-1}\,\mathbf{i} + \frac{\ln t}{1-t}\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k})$.

3. Të tregohet se nëse $\mathbf{a}(t)$ dhe $\mathbf{b}(t)$ janë funksione të vazhdueshme atëherë edhe prodhimi i tyre skalar $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ si dhe ai vektorial $\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)$ janë po ashtu të vazhdueshme.

4. Të gjendet $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ në qoftë se $\mathbf{r} = a\cos t \cdot \mathbf{i} + b\sin t \cdot \mathbf{j}$.

5. Të llogariten:

   a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r^2})$; b) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \circ \frac{d\mathbf{r}}{dt})$; c) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})$.

6. Të tregohet se nëse $\mathbf{e}$ është vektor njësi i cili ka drejtimin e vektorit $\mathbf{E}$, atëherë
$$\frac{\mathbf{E} \times d\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|^2} = \mathbf{e} \times d\mathbf{e}.$$

7. Le të jetë $\mathbf{r} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\sin\omega t\, bfj$, ku $\omega \in \mathbf{R}$ kurse $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ janë vektor konstant. Të tregohet se:

   1) $\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

   2) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

8. Të llogariten integralet e funksioneve:

   a) $\mathbf{a}(t) = te^t\,\mathbf{i} + \sin^2 t\,\mathbf{j} - \frac{1}{1+t^2}\,\mathbf{k}$;

   b) $\mathbf{a}(t) = \frac{t}{1+t^2}\,\mathbf{i} + te^{t^2}\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$;

   c) $\mathbf{a}(t) = e^{\sin t}\cos t\mathbf{i} - t\cos t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$;

   d) $\mathbf{a}(t) = \frac{1}{2}t^2\,\mathbf{i} - t\sin t\,\mathbf{j} + 2^t\,\mathbf{k}$.

9. Të llogariten integralet:

   a) $\int\limits_{o}^{\pi}(\sin^2 t\cos t\,\mathbf{i}+\cos^2 t\sin t\mathbf{j}+\mathbf{k})dt;$

   b) $\int\limits_{0}^{\pi}[(2t+\pi)\mathbf{i}+t\sin t\mathbf{j}+\pi\mathbf{k}]dt.$

10. Të gjendet rrezja e lakesës në pikën e çfarëdoshme të lakoreve:

    a) $\mathbf{r}=t^2\,\mathbf{i}+2t^3\,\mathbf{j};$

    b) $\mathbf{r}=\ln\cos t\,\mathbf{i}+\ln\sin t\,\mathbf{j}+\sqrt{2t}\cdot\mathbf{k}.$

11. Të gjendet rrezja e lakesës së lakores:

    $\mathbf{r}(t)=3t^2\mathbf{i}+(3t-t^3)\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, për $t=1$.

12. Të gjendet rrezja e lakesës së lakores

    $\mathbf{r}=a(\cos t+t\sin t)\,\mathbf{i}+a(\sin t-t\cos t)\,\mathbf{j}$, për $t=\frac{\pi}{2}$.

13. Të shkruhet ekuacioni i rrafshit oskulator në pikën $t=0$ për lakoren:

    $\mathbf{r}=a\cos t\,\mathbf{i}+a\sin t\,\mathbf{j}+ht\,\mathbf{k}.$

14. Të shkruhet ekuacioni i rrafshit oskulator në pikën $t=2$ për lakoren:

    $\mathbf{r}=t\,\mathbf{i}-t\,\mathbf{j}+\frac{1}{2}t^2\,\mathbf{k}.$

15. Të shkruhet ekuacioni i rrafshit oskulator në pikën $t=0$ për lakoren:

    $\mathbf{r}=e^t\,\mathbf{i}+e^{-t}\,\mathbf{j}+\sqrt{2}t\,\mathbf{k}.$

16. Të llogaritet torzioni i lakores:

    $\mathbf{r}=e^t\cos t\,\mathbf{i}+e^t\sin t\,\mathbf{j}+at\,\mathbf{k}$, për t të çfarëdoshëm.

17. Të llogaritet torzioni i lakores:

    $\mathbf{r}=a\ \mathrm{ch}\,t\mathbf{i}+a\ \mathrm{sh}\,t\mathbf{j}+at\mathbf{k}$, për t të çfarëdoshëm.

18. Të gjenden $\tau,\ \mathbf{n^0},\ \mathbf{b^0}$, lakesa dhe torzioni i lakores:

    a) $\mathbf{r}=(3t-t^3)\,\mathbf{i}+3t^2\,\mathbf{j}+(3t+t^3)\,\mathbf{k}$, nëse $t=2$;

    b) $\mathbf{r}=(t-\sin t)\,\mathbf{i}+(1-\cos t)\,\mathbf{j}+4\sin\frac{t}{2}\,\mathbf{k},\ t=\pi;$

    c) $\mathbf{r}=t\,\mathbf{i}+\frac{1}{t^3}\,\mathbf{j}+t^{-1}\,\mathbf{k},\ t=1.$

19. Të shkruhet ekuacioni i tangjentes, normales dhe binormales në pikat e lakoreve nga detyra 18.

6.2 TEORIA E FUSHËS

Teoria e fushës ka zbatim të madh në fizikë dhe në shkencat teknike. Në veçanti rëndësi të madhe ka për studimin e problemeve të fushës elektromagnetike.

Termi "fushë" zakonisht përdoret për të treguar pjesën e hapësirës (ose gjithë hapësirën) ku shqyrtohet një fenomen fizik. P.sh. temperatura e ajrit në pika të ndryshme të hapësirës formon fushën e temperaturës, presioni atmosferik - fushën e presionit, forca - fushën e forcës, ngarkesa elektrike - fushën elektrike etj.

Në rastet kur proceset karakterizohen me madhësi skalare (p.sh. temperatura, presioni atmosferik, etj) fusha quhet **skalare,** ndërsa kur ato karakterizohen nga një madhësi vektoriale (fusha e forcës, fusha elektrike, etj) atëherë fusha quhet **vektoriale**.

Në vazhdim marrim përkufizimin matematik të këtyre kuptimeve dhe japim kuptime e rezultate tjera në lidhje me to.

6.2.1 Fusha skalare. Sipërfaqet niveli dhe vijat niveli

Përkufizimi 6.2.1 Fushë skalare *quhet hapësira ose ndonjë pjesë e saj në çdo pikë të së cilës është përcaktuar një funksion skalar* $u = f(P) = f(x, y, z)$.

Shembuj 6.2.1 1. Le të jetë q ngarkesa pikësore e vendosur në origjinën e koordinatave. Potenciali i fushës elektrostatike i krijuar prej saj përcaktohet me formulën $u = \frac{q}{r}$, ku $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ është largesa e pikës nga ngarkesa e vendosur në origjinën e koordinatave. Këtu funksioni u përcakton një fushë skalare në të gjithë hapësirën me përjashtim të origjinës së koordinatave ku $r = 0$ dhe potenciali është i pafundmë.

2. Fusha skalare e funksionit:

$$u = u(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

është bashkësia e pikave që gjenden jashtë konit $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ së bashku me pikat e konit.

Vërejtje. Në qoftë se vlerat e funksionit skalar varen nga dy koordinata të pikës P, atëherë fusha skalare quhet **plane.**

Fusha skalare e funksionit:

$$u = u(x, y) = \frac{1}{x + y},$$

është bashkësia e pikave të planit Oxy me përjashtim të pikave të drejtëzës $x + y = 0$.

Për karakterizimin gjeometrik të fushave skalare shërbejnë të ashtuquajturat sipërfaqe niveli.

Përkufizimi 6.2.2 *Vendi gjeometrik i pikave në të cilat funksioni skalar i fushës ka të njëjtën vlerë quhet* **sipërfaqe niveli e fushës skalare.**

Sipërfaqja niveli e fushës së dhënë jepet me barazimin $f(x,y,z)=C$, ku C është konstantë.

Shembulli 6.2.1 Të gjenden sipërfaqet niveli të fushës skalare:

$$u = x + 2y + 3z.$$

Zgjidhja: Sipërfaqet niveli jepen me barazimin:

$$x + 2y + 3z = C,$$

ku C është konstantë, dhe shohim se ato janë plane paralele.

2. Sipërfaqet niveli të fushës skalare $u = x^2 + y^2 + z^2$ janë sferat koncentrike $x^2 + y^2 + z^2 = C$, ku C është konstantë. Për $C = 0$ fitohet pika $O(0,0,0)$.

3. Sipërfaqet niveli të fushës skalare:

$$u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

janë konat $z^2 = (x^2 + y^2)\sin^2 C$, ku C është konstantë.

4. Të gjenden sipërfaqet nivele të fushës skalare

$$u = e^{\mathbf{a} \circ \mathbf{r}},$$

ku $\mathbf{a}$ është vektor konstant, kurse $\mathbf{r}$ rreze-vektor i pikës.

Zgjidhja: Kemi $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ dhe le të jetë $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}$. Atëherë:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{r} = a_1 x + a_2 y + a_3 z.$$

Ekuacioni i sipërfaqes nivele është $e^{\mathbf{a} \circ \mathbf{r}} = C,\ C > 0$. Këndej kemi:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{r} = \ln C.$$

ose:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = \ln C.$$

Pra, sipërfaqet nivele janë familja e rrafsheve paralele.

Në rastin kur fusha skalare është rrafshe, karakterizimin gjeometrik të saj e bëjnë të ashtuquajturit **vija niveli** të cilat përkufizohen në mënyrë analoge sikur sipërfaqet niveli.

5. Vija niveli të fushave skalare

$$u = x^2 + y^2,\ u = x^2 - y^2,\ u = xy$$

janë

$$x^2 + y^2 = C,\ x^2 - y^2 = C,\ xy = C$$

ku C është konstantë, d.m.th. në rastin e parë rrathët kurse në të dytin e të tretin hiperbolat.

6.2.2 Gradienti i fushës skalare

Në pikën 2.4.6 është dhënë kuptimi i gradientit të funksioneve $u = f(x, y)$ e $u = f(x, y, z)$. Le të jetë dhënë fusha skalare e përcaktuar me funksionin $u = f(x, y, z)$ për të cilin supozojmë se është i diferencueshëm. Duke marrë parasysh përkufizimin 6.2.1 përkufizimi i gradientit mund të jepet kështu:

Përkufizimi 6.2.3 *Gradienti i fushës skalare $u = u(x, y, z)$ në pikën e dhënë M quhet vektori, projeksionet e të cilit në boshtet koordinative janë përkatësisht të barabarta me derivatet e pjesshme të fushës sipas drejtimit të boshteve koordinative.*

Gradientin e fushës skalare e shënojmë me grad u. Pra:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Vetitë themelore të gradientit janë

1. Gradienti i funksionit $u = u(x, y, z)$ është i barabartë me zero atëherë dhe vetëm atëherë kur funksioni është konstant;

2. $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v$;

3. $\operatorname{grad}(u \cdot v) = v \cdot \operatorname{grad} u + u \cdot \operatorname{grad} v$;

3'. $\operatorname{grad}(C \cdot u) = C \cdot \operatorname{grad} u$, C është konstantë;

4. $\operatorname{grad} \frac{u}{v} = \frac{v \cdot \operatorname{grad} u - u \cdot \operatorname{grad} v}{v^2}$;

5. $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$;

6. $\operatorname{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v$.

Vërtetimet mund t'i bëj lexuesi.

Tash shqyrtojmë lidhjen ndërmjet $\operatorname{grad} u(x, y)$ dhe vijës niveli që kalon nëpër pikën $P_0(x_0, y_0)$. Siç dihet ekuacioni i vijës është

$$u(x, y) = C, \tag{1}$$

ku C është konstante. Supozojmë se lakorja L është dhënë me anën e ekuacioneve parametrike

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

ose ekuacionit:

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j},$$

ku funksionet $x(t)$ e $y(t)$ janë të derivueshme. Koordinatat $x(t)$ e $y(t)$ të çdo pike të lakores e arsyetojnë ekuacionin (1) :

$$u(x(t), y(t)) - C = 0. \tag{2}$$

Nga barazimi (2) marrim $\frac{\partial u}{\partial x}\, x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\, y'(t) = 0$ dhe gjejmë:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}\right) \circ [x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}] = 0,$$

ose

$$\operatorname{grad} u(x,y) \circ \mathbf{r}'(t) = 0. \tag{3}$$

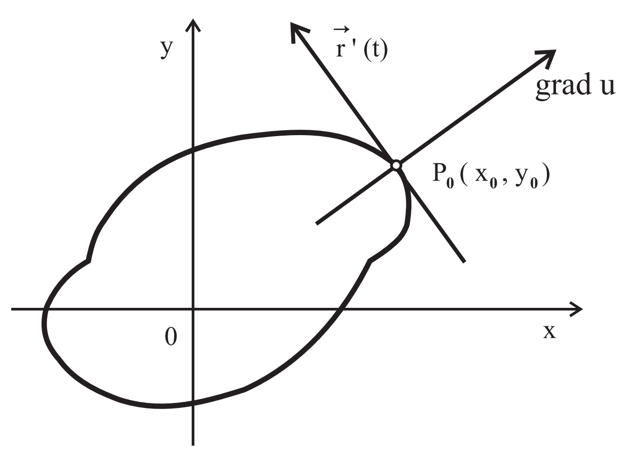


Fig. 6.7.

Në rastin e veçantë, për $t = t_0$ kemi $\operatorname{grad} u(x_0, y_0) \circ r'(t_0) = 0$. Në qoftë se supozojmë se vektori $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \neq 0$, nga (3) përfundojmë se vektori $\operatorname{grad} u$ është normal në tangjenten e lakores nivelore që kalon nëpër pikën $P_0(x_0, y_0)$ (fig.6.7). Meqenëse P_0 është pikë e çfarëdoshme e lakores niveli, përfundojmë se $\operatorname{grad} u(x,y)$ në çdo pikë $M(x,y)$ është normal në lakoren niveli që kalon nëpër atë pikë.

Detyrë. Ekuacioni i sipërfaqes $\sum$ është:

$$f(x,y,z) = 0.$$

Të shkruhet ekuacioni i normales dhe rrafshit tangjent të asaj sipërfaqeje në pikën $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Zgjidhja: Le të jetë L një lakore që gjendet në $\sum$ dhe kalon nëpër pikën M_0. Le të supozojmë se lakorja L është dhënë në formën parametrike:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta],$$

apo në formën vektoriale:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Për $t = t_0$ kemi $x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ z_0 = z(t_0)$ si dhe:

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$

për çdo $t \in [\alpha, \beta]$.

Po e derivojmë ekuacionin e fundit në lidhje me t :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0.$$

Për $t = t_0$ do të kemi:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \cdot y'(t_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \cdot z'(t_0) = 0$$

ose në trajtën:

$$\left[\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f(x_0, y0, z_0)}{\partial z}\mathbf{k}\right] \circ (x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0\mathbf{j}, z'(t_0)\mathbf{k} = 0.$$

Pra:

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) \circ \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

Meqenëse $\mathbf{r}'(t_0)$ është vektor në drejtim të tangjentes, arëherë $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$ në pikën M_0 të sipërfaqes $f(x, y, z) = 0$ është normal në tangjenten e lakores L në pikën M_0. Meqë lakorja L është lakore e çfarëdoshme e cila kalon nëpër pikën M_0, rrjedh se $\operatorname{grad} f$ është normal në secilën lakore të sipërfaqes $f(x, y, z) = 0$ që kalon nëpër pikën M_0.

Është e qartë se rrafshi që kalon nëpër pikën M_0 dhe është normal në vektorin $\operatorname{grad} f(M_0)$ është rrafshi tangjent i sipërfaqes në pikën M_0.

Ekuacioni i rrafshit tangjent të sipërfaqes $f(x, y, z) = 0$ në pikën M_0 është:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \circ \operatorname{grad} f(M_0) = \mathbf{0},$$

ose:

$$[(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] \circ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \mathbf{0},$$

d.m.th.:

$$(x - x_0)\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = 0.$$

Drejtëza që kalon nëpër pikën $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nëpër të cilën kalon rrafshi tangjent dhe është normal në të, quhet **drejtëza normale e sipërfaqes** në pikën M_0.

Ekuacioni i drejtëzës normale është:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}}.$$

6.2.3 Fusha vektoriale. Vijat vektoriale

Përkufizimi 6.2.4 *Fushë vektoriale quhet pjesa e hapësirës ose gjithë hapësira në çdo pikë M të së cilës është përkufizuar madhësia vektoriale $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$.*

Meqenëse çdo funksion vektorial i formës $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ mund të shkruhet në formën:

$$\mathbf{a} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k},$$

atëherë shqyrtimi i fushës vektoriale kthehet në shqyrtimin e tri fushave skalare Kështu edhe fusha vektoriale është e përcaktuar me tri madhësi skalare.

Shembulli 6.2.2 Në hidrodinamikë, duke studiuar fluksin e lëngut që rrjedh përmes ndonjë pjese të hapësirës takohemi me një fushë vektoriale. Fusha e shpejtësisë së pjesëzave të një lëngu që lëviz është fushë vektoriale.

Shembulli 6.2.3 Fusha e forcës tërheqëse (fusha e rëndesës) $\mathbf{F}(x,y,z)$ është fushë vektoriale.

Le të jetë dhënë fusha vektoriale $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x,y,z)$. Për paraqitjen grafike të kësaj fushe merren të ashtuquajturat vija vektoriale.

Përkufizimi 6.2.5 **Vijë vektoriale (ose forcë)** *quhet lakorja në çdo pikë të së cilës tangjentja përputhet me drejtimin e vektorit të fushës* **a.**

Supozojmë se fusha vektoriale jepet me vektorin:

$$\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

ku P, Q e R janë funksione të vazhdueshme të ndryshoreve x, y, z të cilat kanë derivate të pjesshme të rendit të parë. Më tej e zëmë se ekuacioni i një lakoreje në hapësirë jepet në trajtën:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Atëherë vektori:

$$d\mathbf{r}(t) = dx(t)\mathbf{i} + dy(t)\mathbf{j} + dz(t)\mathbf{k}$$

në çdo pikë të lakores do të ketë drejtimin e tangjentes. Sipas përkufizimit, kjo vijë do të jetë vektoriale në qoftë se vektori **a** i fushës dhe ai d**r**(t) janë kolinearë, d.m.th.:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Zgjidhja e sistemit të mësipërm jep ekuacionin e vijave vektoriale.

Shembulli 6.2.4 Të gjenden vijat vektoriale të fushës vektoriale:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.$$

Zgjidhja: Kemi:

$$\mathbf{a} = \frac{x}{|\mathbf{r}|}\,\mathbf{i} + \frac{y}{|\mathbf{r}|}\,\mathbf{j} + \frac{z}{|\mathbf{r}|}\,\mathbf{k},$$

prandaj vijat vektoriale i kërkojmë duke zgjidhur sistemin:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Zgjidhja e sistemit do té jetë:

$$y = C_1 x,$$

$$y = C_2 z,$$

ku C_1 e C_2 janë konstante dhe kjo zgjidhje paraqet ekuacionin e vijave vektoriale.

Shembulli 6.2.5 Të gjenden vijat vektoriale të fushës vektoriale:

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{r},$$

ku $\mathbf{c}$ është vektor konstant.

Zgjidhje: Nga:

$$\mathbf{c} = c_1\,\mathbf{i} + c_2\,\mathbf{j} + c_3\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},$$

shohim se

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (c_2 z - c_3 y)\mathbf{i} + (c_3 x - c_1 z)\mathbf{j} + (c_1 y - c_2 x)\mathbf{k}$$

Ekuacioni diferencial i vijave vektoriale është

$$\frac{dx}{c_2 z - c_3 y} = \frac{dy}{c_3 x - c_1 z} = \frac{dz}{c_1 y - c_2 x}. \tag{1}$$

Shumëzojmë numëruesin e emëruesin e thyesës së parë me x, të dytës me y, të tretin me z dhe i mbledhim. Atëherë

$$\frac{dx}{c_2 z - c_3 y} = \frac{dy}{c_3 x - c_1 z} = \frac{dz}{c_1 y - c_2 x} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}$$

Këndej gjejmë:

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

d.m.th.:

$$x^2 + y^2 + z^2 = A_1, \quad A_1 - \text{konstantë pozitive}\ .$$

Tash numëruesin e emëruesin e thyesës së parë të (1) e shumëzojmë me c_1, të dytës me c_2, të tretës me c_3 dhe pasi t'i mbledhim fitojmë:

$$\frac{dx}{c_2z - c_3y} = \frac{dy}{c_3x - c_1z} = \frac{dz}{c_1y - c_2x} = \frac{c_1dx + c_2dy + c_3dz}{0}.$$

Këndej gjejmë:

$$c_1dx + c_2dy + c_3dz = 0$$

d.m.th.:

$$c_1x + c_2y + c_3z = A_2, \quad A_2 - \text{ konstantë.}$$

Ekuacionet e vijave vektoriale janë:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = A_1 \\ c_1x + c_2y + c_3z = A_2 \end{array}\right\}$$

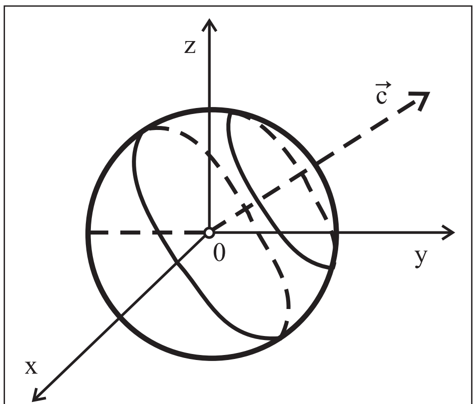


Fig. 6.8.

Ekuacionet e mësipërme tregojnë se vijat vektoriale merren si rezultat i ndërprerjes së sferës me qendër nëfillimin e koordinatave me rrafshet normale në vektorin $\mathbf{c} = c_1\,\mathbf{i} + c - 2\,\mathbf{j} + c_3\,\mathbf{k}$. Këndej rrjedh se vijat vektoriale janë rrathët me qendër në drejtëzën e cila kalon nëpër fillimin e koordinatave dhe ka drejtimin e vektorit $\mathbf{c}$. Rrafshet e rrathëve janë normal në drejtëzën e tillë (fig. 6.8).

Shembulli 6.2.6 Të gjenden vijat vektoriale të fushës magnetike e cila lind nga kalimi i rrymës elektrike konstante me intensitet I, gjatë një përcjellësi drejtvizor të pafundmë.

Zgjidhja: Si bosht Oz marrim vet përcjellësin.Vektori i intensitetit të fushës magnetike shprehet me formulën:

$$\mathbf{H} = \frac{2I}{x^2 + y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

Kjo fushë vektoriale rrafshe ka si koordinata:

$$\frac{-2Iy}{x^2 + y^2}, \; \frac{2Ix}{x^2 + y^2}, \; 0,$$

prandaj ekuacionet diferenciale të vijave vektoriale do të jenë:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Këndej rrjedh se:

$$x^2 + y^2 = C_1$$
$$z = C_2,$$

ku C_1 e C_2 janë konstante. Prandaj vija vektoriale janë rrathët me qendër në boshtin Oz dhe perpendikularë në këtë bosht (fig. 6.9).

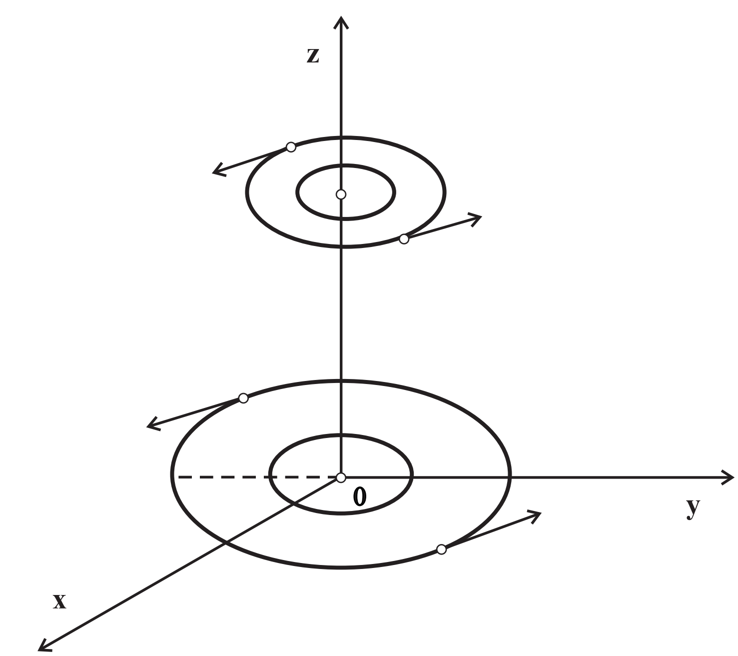


Fig. 6.9.

6.2.4 Fluksi i fushës vektoriale

Ndër konceptet themelore të teorisë së fushës është fluksi i fushës vektoriale. Më poshtë do të shohim se ky kuptim i ri është i lidhur ngushtë me integralet sipërfaqësorë (të dy tipave) të cilat i njohim nga kapitulli V.

Supozojmë se në fushën vektoriale $\mathbf{a}(M)$ është dhënë një sipërfaqe $\sum$ e kufizuar nga lakorja e mbyllur L. Shënojmë me $\mathbf{n}$ vektorin njësi të normales në çdo pikë të sipërfaqes $\sum$ të cilin e marrim sipas normales së jashtme kur $\sum$ është e mbyllur, ndërsa kur kjo sipërfaqe nuk është e mbyllur (sikur në rastin tonë) këtë vektor e marrim nga njëra anë e kësaj sipërfaqeje.

Sipërfaqen $\sum$ e ndajmë në n pjesë dhe me $\Delta \sum_i$ shënojmë pjesën e i-të të saj. Me ΔS_i shënojmë syprinën e sipërfaqes elementare $\Delta \sum_i, i = 0, 1, , ..., n-1$. Në pikën e çfarëdoshme M_i të sipërfaqes ndërtojmë: 1) vektorin normal $\mathbf{n}_i$ mbi sipërfaqen elementare, 2) vektorin $\mathbf{a}(M_i)$ të fushës, si dhe 3) vektorin $\Delta \mathbf{S}_i = \Delta S_i \circ \mathbf{n}_i$. Le të jenë φ_i këndet ndërmjet vektorëve $\mathbf{a}(M_i)$ dhe $\mathbf{\Delta S}_i$. Atëherë:

$$\mathbf{a}(M_i) \circ \mathbf{\Delta S}_i = |\mathbf{a}(M_i)| \cdot \Delta S_i \cdot \cos \varphi_i.$$

Duke shumuar për $i = 0, ..., n-1$, fitojmë shumën integrale:

$$F_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{a}(M_i) \circ \mathbf{\Delta S_i} = \sum_{i=1}^{n-1} |\mathbf{a}(M_i)| \cdot \Delta S_i \cdot \cos \varphi_i.$$

Përkufizimi 6.2.6 *Limitin e shumës F_n, kur $\max \Delta S_i \to 0$, në qoftë se ekziston, e shënojmë me F dhe e quajmë* **fluks të fushës vektoriale a** *në lidhje me sipërfaqen $\sum$.*

Pra:

$$F = \lim_{max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{a}(M_i) \circ \Delta \mathbf{S}_i.$$

Këtë limit e quajmë integral sipërfaqësorë të vektorit **a** sipas sipërfaqes $\sum$ dhe e shënojmë me simbolin $\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{a} \circ \mathbf{dS}$, ku $\mathbf{dS} = \mathbf{n} \cdot dS$. Meqenëse:

$$\mathbf{a}(M) \circ \mathbf{dS} = \mathbf{a}(M) \circ \mathbf{n} \cdot dS = a_n(M) dS,$$

ku me $a_n(M)$ shënuam projeksionin e vektorit $\mathbf{a}(M)$ në drejtim të vektorit $\mathbf{n}$, atëherë:

$$F = \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{a}(M) \circ \mathbf{dS} = \iint\limits_{\Sigma} a_n(M) \cdot dS.$$

Në qoftë se projeksionet e vektorit $\mathbf{a}(x, y, z)$ mbi boshtet koordinative janë:

$$P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z),$$

atëherë:

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{a}(M) \circ \mathbf{dS} = \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{a}(M) \circ \mathbf{n}\, dS = \iint\limits_{\Sigma} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta +$$

$$+ R(x, y, z) \cos \gamma] dS, \qquad (1)$$

ku α, β, γ janë këndet që i formon vektori $\mathbf{n}$ me boshtet Ox, Oy, Oz, përkatësisht. Nga ana tjetër dihet se:

$$\cos \alpha\ dS = dydz,\ \cos \beta\ dS = dxdz,\ \cos \gamma\ dS = dxdy,$$

prandaj kemi:

$$F = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy. \quad (2)$$

Integrali (1) ((2)) siç dihet është integral sipërfaqësor i llojit të parë (të dytë) llogaritjen e të cilit lexuesi i njeh. Po theksojmë se fluksi është madhësi skalare.

Shembulli 6.2.7 Të gjendet fluksi i fushës vektoriale:

$$\mathbf{a} = (x - 2x)\mathbf{i} + (x + 3y + z)\mathbf{j} + (5x + y)\mathbf{k}$$

sipas anës së sipërme të trekëndëshit ABC kulmet e të cilit janë $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

Zgjidhja: Ekuacioni i rrafshit në të cilin shtrihet trekëndëshi është $x+y+z=1$ prej nga $z = 1 - x - y$.

Sipas kushtit normalja $\mathbf{n}$ në rrafshin në të cilin shtrihet trekëndëshi ABC formon kënd te ngushtë γ me boshtin Oz, prandaj vektori normal njësi $\mathbf{n}$ në sipërfaqen $z = f(x,y)$ llogaritet me formulën:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{3}}. \quad (3)$$

Gjejmë produktin skalar $\mathbf{a} \circ \mathbf{n}$:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{n} = (x - 2z)\frac{1}{\sqrt{3}} + (x + 3y + z)\frac{1}{\sqrt{3}} + (5x + y)\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7x + 4y - z}{\sqrt{3}}$$

Nga formula (3) shohim se $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, prandaj:

$$dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{3}\ dxdy,$$

Kështu, nëse me D shënojmë projeksionin e sipërfaqes Σ ne Oxy kemi:

$$F = \iint_{\Sigma} \mathbf{a} \circ \mathbf{n} dS = \iint_{D} [7x + 4y - (1 - x - y)]dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (8x + 5y - 1)dy = \frac{5}{3}.$$

Po theksojmë se fluksi i fushës vektoriale mund të llogaritet edhe me teoremën e riformuluar të Gausit (teorema 5.2.3):

Teorema 6.2.1 *Në qoftë se në ndonjë zonë G të hapësirës koordinatat e vektorit:*

$$\mathbf{a} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k},$$

janë funksione të vazhdueshme si dhe kanë derivate të pjesshme të vazhdueshme $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial z}$, *atëherë fluksi i vektorit* **a** *në lidhje me sipërfaqen pjesë-pjesë të lëmueshme të mbyllur* Σ *që shtrihet në* G *llogaritet me formulën*

$$F = \iint_{\Sigma} \mathbf{a} \circ \mathbf{n} dS = \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz, \tag{4}$$

ku V *është zona me konturin* Σ *dhe ana e sipërfaqes merret e jashtme.*

Shembulli 6.2.8 Të llogaritet fluksi i vektorit $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, në lidhje me sipërfaqen e mbyllur

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \ z = 0 \ (z > 0).$$

Zgjidhja: Sipas formulës (4) kemi:

$$F = \iiint_{V} (2x + 2y + 2z) \ dxdydz. \tag{5}$$

Marrim koordinatat sferike:

$$x = r \ \sin\theta \ \cos\varphi, \ y = r \ \sin\theta \ \sin\varphi, \ z = r \ \cos\varphi$$

ku siç dihet

$$dxdydz = r^2 \text{sin}\theta dr d\theta d\varphi.$$

atëherë nga (5) fitojmë:

$$F = 2 \iiint_{V} (r \ \text{sin}\theta \ \text{cos}\varphi + \text{r} \ \text{sin}\theta \ \text{sin}\varphi + \text{r} \ \text{cos}\theta) \text{d}\theta \int_0^{\text{R}} \text{r}^2 \text{sin}\theta \text{drd}\theta \text{d}\varphi =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sin}\theta (\text{sin}\theta \text{cos}\varphi + \text{sin}\theta \text{sin}\varphi + \text{cos}\theta) d\theta \int_0^{R} r^2 dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

6.2.5 Divergjenca e fushës vektoriale

Në pikën 6.2.4. pamë se fluksi si veçori e fushës vektoriale e shqyrton këtë të fundit në një zonë të tërë gjë që nuk është praktike. Në këtë pikë shqyrtojmë një veçori tjetër të fushës vektoriale e cila karakterizon fushën që shqyrtohet në çdo pikë të saj.

Përkufizimi 6.2.7 *Divergjencë e fushës vektoriale* $\mathbf{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ *quhet funksioni skalar* $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ *dhe shënohet me* div **a**.

Supozojmë se Σ është sipërfaqe e mbyllur dhe e kufizon trupin V në fushën vektoriale **a** dhe se P, Q, R së bashku me derivatet e pjesshme të rendit të parë janë funksione të vazhdueshme në V. Atëherë formula (5) e pikës së kaluar mund të shkruhet në formën vektoriale:

$$F = \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{a} \circ \mathbf{d}S = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \mathbf{a} dv = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \mathbf{a} dxdydz. \tag{1}$$

Në vazhdim japim një përkufizim të ri të divergjencës së fushës vektoriale i cili është ekuivalent me të parin, njëherësh tregon se përkufizimi i divergjencës nuk varet nga zgjedhja e sistemit koordinativ (siç është përshtypja nga përkufizimi 6.2.7). Le të jetë M një pikë e çfarëdoshme e fushës vektoriale **a**. Me sipërfaqen Σ të formës së çfarëdoshme e rrethojmë pikën M. Le të jetë V^* trupi, konturi i të cilit është Σ dhë me V^* shënojmë vëllimin e tij. Nga formula (1) dhe nga teorema mbi te mesmen rrjedh se:

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{a} \circ \mathbf{dS} = \mathrm{div}\ \mathbf{a}(\overline{\mathrm{M}}) \circ \mathrm{V}^*, \mathrm{mV} = \mathrm{V}^* \tag{2}$$

ku $\overline{M} \in V$. Nga (2) rrjedh se

$$\mathrm{div}\ \mathbf{a}(\overline{\mathrm{M}}) = \frac{\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{adS}}{\mathrm{V}^*} \tag{3}$$

Përkufizimi 6.2.7′. *Limitin e raportit të fluksit të vektorit* **a** *në lidhje me një sipërfaqe të mbyllur* Σ *që përmban brenda saj pikën* M *dhe vëllimit të zonës që kufizohet me* Σ, *kur* Σ *degjenerohet në pikën* M, ($\Sigma \to M$ ose $\mathrm{V}^* \to 0$), *e quajmë* **divergjencë** *e fushës* **a** *në pikën* M.Pra:

$$\mathrm{div}\ \mathbf{a}(\overline{\mathrm{M}}) = \lim_{\Sigma \to \mathrm{M}(\mathrm{V} \to 0)} \frac{\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{adS}}{\mathrm{V}^*}.$$

Duke marrë parasysh formulën (3) dhe faktin se kur $\Sigma \to M$ atëherë $\overline{M} \to M$ shohim e nga përkufizimi 6.2.7. rrjedh ai 6.2.7.′ lexuesit i mbetet të tregoj edhe të anasjelltën dhe kështu të kompletohet pohimi se përkufizimet 6.2.7. e 6.2.7′. janë ekuivalent.

Vetitë themelore të divergjencës së fushës vektoriale janë:

1. $\mathrm{div}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \mathrm{div}\ \mathbf{a}_1 + \mathrm{div}\ \mathbf{a}_2$;
2. $\mathrm{div}(\mathrm{u} \cdot \mathbf{a}) = \mathrm{u}\ \mathrm{div}\ \mathbf{a} + \mathbf{a}$ grad u, ku u(x, y, z) është funksion skalar;
3. $\mathrm{div}(\mathrm{u} \cdot \mathbf{c}) = \mathbf{c} \circ$ grad u, ku **c** është vektor konstant;
4. $\mathrm{div}(\mathrm{c} \cdot \mathbf{a}) = \mathrm{c}\ \mathrm{div}\ \mathbf{a}$, ku c është skalar konstant.

Sa për ilustrim po e vërtetojmë vetinë 2.

$$\operatorname{div}(u\cdot\mathbf{a})=\operatorname{div}(P\cdot u\cdot\mathbf{i}+Q\cdot u\cdot\mathbf{j}+R\cdot u\cdot\mathbf{k})=\frac{\partial(Pu)}{\partial x}+\frac{\partial(Qu)}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial(Ru)}{\partial z}=u\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+\left(P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}\right)=$$

$$=u\ \operatorname{div}\,\mathbf{a}+(P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j}+R\,\mathbf{k})\circ\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\,\mathbf{k}\right)=u\,\operatorname{div}\,\mathbf{a}+\mathbf{a}\ \operatorname{grad}\,u.$$

Shembulli 6.2.9 Duke përdorur përkufizimin 6.2.7′ të llogaritet divergjenca e vektorit $\mathbf{a}=x\mathbf{i}$ në pikën $0(0,\,0,\,0)$.

Zgjidhja: Për sipërfaqe Σ zgjedhim sferën Σ_ε me qendër në pikën 0 e me rreze ε. Atëherë:

$$\operatorname{div}\,\mathbf{a}(0)=\lim_{\Sigma_\varepsilon\to 0}\frac{\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\mathbf{a}\circ\ \mathbf{dS}}{V^*}=\lim_{\Sigma_\varepsilon\to 0}\frac{\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\mathbf{a}\circ\mathbf{n}\,dS}{V^*},$$

ku V_ε është vëllimi i rruzullit konturi i të cilit është Σ_ε, ose:

$$\lim_{\Sigma_\varepsilon\to 0}\frac{\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\mathbf{a}\circ\mathbf{n}\,dS}{V_\varepsilon}.$$

Llogarisim fluksin $\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\mathbf{a}\circ\mathbf{n}dS$ në lidhje me sferën Σ_ε. Vektori i normales së sferës ka drejtimin e e rrezes së sferës, prandaj:

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{n}|}=\frac{\mathbf{r}}{\varepsilon},$$

ose, meqë $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{k}+z\mathbf{k}$,

$$\mathbf{n}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{k}+z\mathbf{k}}{\varepsilon}$$

Atëherë:

$$F=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{x^2}{\varepsilon}dS.$$

Duke kaluar në koordinatat sferike:

$$x=\varepsilon\ \cos\varphi\ \sin\theta,\ y=\varepsilon\ \sin\varphi\ \sin\theta,\ z=\varepsilon\ \cos\theta,$$

fitojmë:

$$F=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\mathbf{a}\circ\mathbf{n}dS=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\varepsilon^2\cos^2\varphi\cdot\sin^2\theta\cdot\varepsilon^2\cdot\ \sin\theta\ d\varphi\ d\theta}{\varepsilon}=$$

$$= \varepsilon^3 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin^3 \ \varphi d\varphi = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3.$$

Duke marrë parasysh se edhe $V_\varepsilon = \frac{4}{3}\pi \ \varepsilon^3$, kemi:

$$\text{div } \mathbf{a}(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} = 1.$$

Shembulli 6.2.10 Të llogaritet div $\mathbf{r}$.

Zgjidhja: Kemi $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ dhe meqë $P = x$, $Q = y$, $R = z$, duke përdorur përkufizimin 2.7. fitojmë:

$$\text{div } \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

6.2.6 Integrali linear. Cirkuiti i fushës vektoriale

Le të jetë $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ fushë vektoriale e vazhdueshme dhe në të lakorja L e cila është e lëmueshme dhe e orientuar.

Përkufizimi 6.2.8 **Integrali linear** *i vektorit* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ *gjatë lakores* L *quhet integrali vijëpërkulët i llojit të parë i produktit skalar* $\mathbf{a} \circ \tau^{\mathbf{0}}$, *d.m.th.:*

$$\int_L \mathbf{a} \circ \tau^{\mathbf{0}} ds,$$

ku $\tau^0 = \tau^0(M)$ *është vektori njësi i tangjentes së lakores L orientimi i të cilit përputhet me orientimin e L, ndërsa ds diferenciali i gjatësisë së harkut s të lakores L.*

Duke marrë parasysh se $\tau^0 = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$, ku $\mathbf{r}$ është rreze-vektore e pikës së çfarëdoshme M të lakores L, atëherë:

$$\int_L \mathbf{a} \circ \tau^{\mathbf{0}} ds = \int_L \mathbf{a} \circ d\mathbf{r}, \tag{1}$$

Integrali i anës së djathtë të (1) mund të shkruhet edhe në dy trajta tjera. Në qoftë se lakorja L jepet me ekuacionin $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, ku parametri t merr vlera në segmentin $[\alpha, \beta]$, atëherë vektori:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt = [x'(t) \ \mathbf{i} + y'(t) \ \mathbf{j} + z'(t) \ \mathbf{k}] \ dt = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

është i drejtuar sipas tangjentes ndaj lakores L. Intensiteti i këtij vektori është:

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \ dt = ds.$$

Meqë produkti skalar i dy vektorëve është i barabartë me gjatësinë e njërit të shumëzuar me projeksionin e vektorit tjetër mbi të parin, do të kemi:

$$\mathbf{a} \circ d\mathbf{r} = |d\mathbf{r}| \cdot \text{proj}_{\ \mathbf{r'(t)}} \mathbf{a} = a_r \cdot ds,$$

ku me a_r është shënuar projeksioni i vektorit $\mathbf{a}$ sipas tangjentes. Pra:

$$\int_L \mathbf{a} \circ d\mathbf{r} = \int_L a_r \cdot ds. \qquad (2)$$

Nga ana tjetër nëse:

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

atëherë:

$$\int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \qquad (3)$$

Barazimet (2) e (3) tregojnë se integrali (1) mund të shprehet me integralin vijëpërkulët të llojit të parë dhe të llojit të dytë.

Po theksojmë se kur $\mathbf{a}$ është fusha e forcës, atëherë integrali linear numerikisht është i barabartë me punën e forcës për zhvendosjen e pikës materiale prej fillimit të lakores L deri te mbarimi i saj.

Në teorinë e fushës rëndësi të veçantë paraqet rasti kur lakorja L është e mbyllur dhe integrali linear merret sipas asaj lakoreje.

Përkufizimi 6.2.9 Cirkuiti *C i fushës vektoriale $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ quhet integrali linear gjatë lakores së mbyllur e të orientuar L.*

Pra:

$$C = \oint_L \mathbf{a} \circ d\mathbf{r},$$

ku $\oint_L$ simbolizon integralin sipas lakores së mbyllur L.

Duke marrë parasysh formulat (2) e (3) shohim se:

$$C = \oint_L a_r ds, \quad C = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Shembulli 6.2.11 Të llogaritet cirkuiti i fushës vektoriale $\mathbf{a} = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ gjatë elipsës $L : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{b^2}{b^2} = 1$.

Zgjidhja: Kemi:

$$C = \oint_L \mathbf{a} \circ \mathbf{r} = \oint_L -y^3 dx + x^3 dy.$$

Ekuacionet parametrike të elipsës janë:

$$\begin{aligned} x &= a\ \mathrm{cos}t \\ y &= b\ \mathrm{sin}t \end{aligned}$$

Prandaj:

$$C = ab\oint_0^{2\pi}(b^2\mathrm{sin}^4 t + a^2\mathrm{cos}^4 t)dt = \frac{3}{4}\pi ab(a^2+b^2),$$

6.2.7 Rotori i fushës vektoriale

Le të jetë dhënë fusha vektoriale:

$$\mathbf{a}(M) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k},$$

ku funksionet P, Q, R së bashku me derivatet e pjesshme të rendit të parë janë të vazhdueshme.

Përkufizimi 6.2.10 Rotor *i vektorit* $\mathbf{a}(M)$ *quhet vektori, të cilin e shënojmë me* rot $\mathbf{a}(M)$*, i dhënë me barazimin*

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{1}$$

Që ky vektor të mbahet në mend përdoret edhe shënimi:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

ku përcaktori i cili zhvillohet sipas elementeve të rreshtit të parë dhe shumëzimin simbolik të elementeve të rreshtit të dytë me ato të rreshtit të tretë, duhet kuptuar si derivat i pjesshëm$\left(\text{p.sh. } \dfrac{\partial}{\partial y}\cdot R = \dfrac{\partial R}{\partial y}\right)$.

Vërejtje. Duke përdorur këtë vektor të ri formula e Stoksit (teorema 5.2.5.) mund të shkruhet kështu:

$$\oint_L \mathbf{a}\circ d\mathbf{r} = \iint_\Sigma \mathrm{rot}\ \mathbf{a}\circ \mathbf{dS} = \iint_\Sigma (\mathrm{rot}\ \mathbf{a}\circ\mathbf{n})dS, \tag{2}$$

dhe interpretohet kështu: cirkuiti i vektorit $\mathbf{a}$(x, y, z) sipas një konturi të mbyllur L është i barabartë me fluksin e vektorit rot $\mathbf{a}$ në lidhje me sipërfaqen Σ konturi i së cilës është L.

Vetitë themelore të rotorit janë:

1. $\text{rot}\,(\mathbf{a_1} \pm \mathbf{a_2}) = \text{rot}\,\mathbf{a_1} \pm \text{rot}\,\mathbf{a_2}$;

2. $\text{rot}\,(u \cdot \mathbf{a}) = u\,\text{rot}\,\mathbf{a} + (\text{grad} \;\; u) \times \mathbf{a}$, ku u(x, y, z) është funksion skalar;

3. $\text{rot}(\mathbf{c} \cdot u) = (\text{grad}\ u) \times \mathbf{c}$, ku $\mathbf{c}$ është vektor konstant;

4. $\text{rot}(c \cdot \mathbf{a}) = c\,\text{rot}\ \mathbf{a}$, ku c është skalar konstant;

5. $\text{rot}\ \mathbf{r} = 0$ ku $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Sa për ilustrim po vërtetojmë vetinë 2.

$$\text{rot}(u \cdot \mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ uP & uQ & uR \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial uR}{\partial y} - \frac{\partial uQ}{\partial z}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial uR}{\partial x} - \frac{\partial uP}{\partial z}\right) +$$

$$+\mathbf{k}\left(\frac{\partial uQ}{\partial x} - \frac{\partial uP}{\partial y}\right) = \mathbf{i}\left(R\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial R}{\partial y} - Q\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial Q}{\partial z}\right) -$$

$$-\mathbf{j}\left(R\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial R}{\partial x} - P\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial P}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(Q\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial Q}{\partial x} - P\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Këndej rrjedh se:

$$\text{rot}\,(u \cdot \mathbf{a}) = u\ \ \text{rot}\,\mathbf{a} - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P & Q & R \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = u\,\text{rot}\ \mathbf{a} + \text{grad}\ u \times \mathbf{a}$$

Shembulli 6.2.12 Të gjendet rotori i vektorit

$$\mathbf{a} = (x + z)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x^2 + z)\mathbf{k}.$$

Zgjidhja: Kemi:

$$\text{rot}\,\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + z & y + z & x^2 + z \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - (2x - 1)\mathbf{j}$$

Shembulli 6.2.13 Të gjendet rotori i vektorit të shpejtësisë së pikave të ndryshme të një trupi të ngurtë që rrotullohet rreth pikës O(0, 0, 0).

Zgjidhja: Nga fizika dihet se vektori i shpejtësisë $\mathbf{v}$ të pikës së çfarëdoshme $M(x, y, z)$ jepet me formulën $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ ku ω është vektori i shpejtësisë këndore, kurse **r** rreze-vektore e pikës M. Në qoftë se me $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ shënojmë kooordinatat e vektorit ω atëherë:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{v} &= \operatorname{rot}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ x & y & z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z\omega_2 - y\omega_3 & x\omega_3 - z\omega_1 & y\omega_1 - x\omega_2\end{vmatrix} = \\ &= 2\omega_1\mathbf{i} + 2\omega_2\mathbf{j} + 2\omega_3\mathbf{k} = 2\omega\end{aligned}$$

Këndej shohim se vektori i shpejtësisë këndore shprehet me anën e vektorit **v** në këtë mënyrë:

$$\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v}.$$

6.2.8 Fusha potenciale dhe solenoidale

Përkufizimi 6.2.11 *Fusha* $\mathbf{a}(M) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$, *e dhënë në zonën* $V \subset \mathbf{R^3}$, *quhet* **potenciale,** *në qoftë se ekziston funksioni skalar* $\varphi(M)$ *ashtu që në të gjitha pikat e zonës* V *plotësohet barazimi:*

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad}\varphi(M). \tag{1}$$

Funksioni $\varphi(x,y,z)$ i cili në zonën V plotëson barazimin (1) quhet **funksioni potencial** i fushës vektoriale **a**.

Relacioni (1) është ekuivalent me këto tri barazime skalare:

$$P(x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ Q(x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ R(x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{2}$$

Është e qartë se funksioni potencial nuk është në mënyrë të vetme i përcaktuar. Ekzistojnë pakufi shumë funksione potenciale që plotësojnë (1) të cilat ndryshojnë ndërmjet veti për konstantë.

Po theksojmë se fusha potenciale është plotësisht e përcaktuar me një funksion skalar, ndërsa për të dhënë një fushë vektoriale kërkohet të njihen tri funksione skalare, që janë projeksionet e vektorit mbi boshtet koordinative.

Kriteri i më poshtëm tregon se kur fusha është potenciale.

Teorema 6.2.2 *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që fusha* $\mathbf{a}(M)$, *e dhënë në zonën e njëlidhshme* V *të jetë potenciale, është që në çdo pikë të zonës të plotësohet kushti:*

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Vërtetimi. Supozojmë se fusha vektoriale **a** është potenciale. Atëherë ekziston funksioni φ i tillë që:

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Këndej rrjedh se:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \text{rot grad } \varphi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Anasjelltas, le të jetë rot $\mathbf{a} = 0$, $\sum$ sipërfaqe që shtrihet në V kurse L konturi i saj. Atëherë nga supozimi dhe formula (2) e pikës së kaluar kemi:

$$\oint_L \mathbf{a} \circ d\mathbf{r} = \iint_\Sigma \text{rot } \mathbf{a} \circ \mathbf{dS} = 0.$$

Nga $\oint_L \mathbf{a} \circ d\mathbf{r} = 0$ rrjedh se ekziston një funksion skalar $\varphi\ (x, y, z)$ i tillë që $\mathbf{a} \circ d\mathbf{r} = d\varphi(x, y, z)$. Meqë:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \text{grad } \varphi \circ d\mathbf{r}$$

fitojmë:

$$\mathbf{a} = \text{grad } \varphi$$

çka synuam të tregojmë.

Shembulli 6.2.14 Të tregohet se fusha vektoriale:

$$\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

është potenciale.
Zgjidhje: Kemi:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} z^2 - \frac{\partial}{\partial z} y^2 \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x} z^2 - \frac{\partial}{\partial z} x^2 \right) \mathbf{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x} y^2 - \frac{\partial}{\partial y} x^2 \right) \mathbf{k} = 0$$

Prandaj, sipas teoremës 6.2.2, fusha $\mathbf{a}$ është potenciale. Lehtë shihet se funksioni

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + C,$$

ku $C-$është konstante, është funksioni potencial i fushës së dhënë.

Po e marrim pa vërtetim këtë teoremë:

Teorema 6.2.3 *Në qoftë se* **a** *është fushë potencale, atëherë integrali linear i kësaj fushe llogaritet me formulën:*

$$\int_{\overset{\frown}{M_0M_1}} \mathbf{a} \circ d\mathbf{r} = \varphi(M_1) - \varphi(M_0),$$

ku M_0 është pika e fillimit ndërsa M_1 pika e fundit e rrugës së integrimit.

Shembulli 6.2.15 Të llogaritet integrali linear i fushës:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

gjatë segmentit me skajet $M_1(-1, 0, 3)$ dhe $M_2(2, -1, 0)$.

Zgjidhja: Tregojmë se fusha e vektorit të dhënë është potenciale. Kemi:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \equiv 0$$

Funksioni potencial është:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + C.$$

Duke e përdorur formulën (2) fitojmë:

$$\int_{M_0}^{M_1} \mathbf{a} \circ d\mathbf{r} = \varphi\ (2, -1, 0) - \varphi\ (-1, 0, 3) = \frac{5}{2} - 5 = -\frac{5}{2}.$$

Përkufizimi 6.2.12 *Fusha vektoriale* $\mathbf{a}(x, y, z)$ *quhet* **solenoidale** *në qoftë se në çdo pikë të saj divergjenca e fushës është e barabartë me zero, d.m.th.:*

$$\text{div } \mathbf{a} = 0.$$

P.sh. fushë solenoidale është fusha rotore.

Shembull tjetër i fushës solenoidale është fusha e intensitetit magnetik që formohet nga kalimi i rrymës sipas një përcjellësi drejtvizor të pafundmë:

$$\mathbf{H} = 2I\frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

Me të vërtetë, në qoftë se përjashtojmë origjinën e koordinatave $O(0, 0)$, ku kjo fushë nuk është e përcaktuar, atëherë në çdo pikë tjetër të rrafshit Oxy kemi:

$$\text{div } \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2Iy}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2Ix}{x^2 + y^2}\right) = 0$$

Me përkufizim **tub vektorial** quhet bashkësia e vijave vektoriale që i takojnë sipërfaqes e cila shtrihet në fushën vektoriale.

Le të jetë **a** fushë solenoidale dhe në të marrim një pjesë të një tubi që kufizohet me prerjet Σ_1 e Σ_2 (fig. 6.10). Le të jetë Σ sipërfaqja e këtij tubi, ndërsa V trupi me konturin Σ. Atëherë, duke zbatuar formulën (1) të pikës 1.5. kemi:

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{a}\circ\mathbf{dS} = \iint\limits_{\Sigma_1\cup\ \Sigma_2} \mathbf{a}\circ\mathbf{dS} = 0$$

(sepse integrali sipërfaqsor sipas sipërfaqes anësore të tubit vektorial është i barabartë me zero sepse $\mathbf{a}\circ d\mathbf{s} = 0$ mbi këtë sipërfaqe). Këndej rrjedh se:

$$\iint\limits_{\Sigma_2} \mathbf{a}\circ\mathbf{dS} = -\iint\limits_{\Sigma_1} \mathbf{a}\circ\mathbf{dS}$$

dhe, mbasi të ndërrojmë kahun e normales mbi $\sum_1$, fitojmë:

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \mathbf{a}\circ\mathbf{dS} = \iint\limits_{\Sigma_2} \mathbf{a}\circ\mathbf{dS}$$

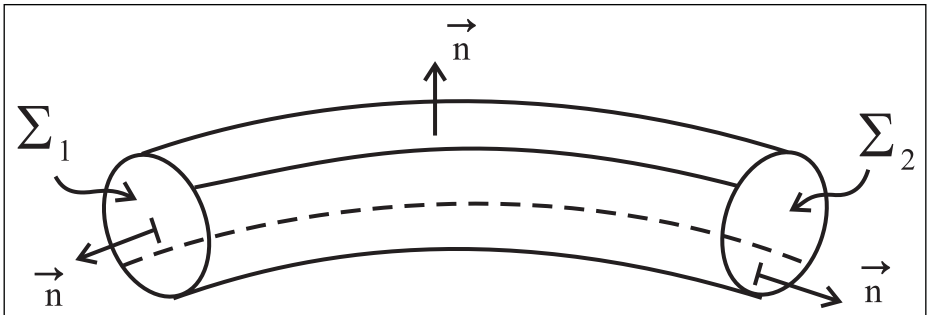


Fig. 6.10.

Kështu fituam që fluksi i vektorit **a** (të fushës soleniodale) për çdo prerje të tubit vektorial është i barabartë.

6.2.9 Operatori i Hamiltonit "NABLLA"

Të shkruarit e shumë kuptimeve të fushës vektoriale e lehtëson shumë operatori simbolik i Hamiltonit "nablla":

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1}$$

Me marrëveshje, sikur në pikën 2.7, prodhimin e $\dfrac{\partial}{\partial x}$ me funksionin $f(x,y,z)$ e shikojmë si derivat të pjesshëm $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Veprimet me operatorin "nablla" do t'i bëjmë sikur ai të ishte vektor. Kështu:

1. Në qoftë se $u = u(x, y, z)$ është fushë skalare e diferencueshme, sipas rregullës për shumëzimin e vektorit me skalar kemi:

$$\nabla u = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) u = \mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \text{grad } u \tag{2}$$

2. Në qoftë se $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, ku P, Q, R janë funksione të diferencueshme, atëherë:

$$\nabla \circ \mathbf{a} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \circ (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \mathbf{a}, \tag{3}$$

ku "$\circ$ " është shenja për produktin skalar. Në veçanti kemi $\nabla \circ \mathbf{c} = 0$ ku $\mathbf{c}$ është vektor konstant.

3. Në qoftë se $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, atëherë:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{a}. \tag{4}$$

Në veçanti $\nabla \times \mathbf{c} = 0$, ku $\mathbf{c}$ është vektor konstant.

Nga vetitë e produktit skalar dhe atij vektorial fitojmë:

$$\nabla \circ (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \nabla \circ \mathbf{a} \pm \nabla \circ \mathbf{b}$$

d.m.th. $\text{div}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \text{div } \mathbf{b} \pm \text{div } \mathbf{a}$,

$$\nabla \times (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{a} \pm \nabla \times \mathbf{b}$$

d.m.th. $\text{rot}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \text{rot } \mathbf{a} \pm \text{rot } \mathbf{b}$. Po theksojmë se edhe pse te ∇ veprohet sikur me vektor ai **nuk është vektor** meqë ai nuk ka as intensitet as drejtim si dhe p.sh. vektori $\nabla \times \mathbf{a} = \text{rot}\,\mathbf{a}$, në rastin e përgjithshëm, nuk është normal në vektorin $\mathbf{a}$. Prandaj gjatë operimit me simbolin ∇ duhet të jemi të kujdesshëm.

Veprimet e vektorit "nablla" mbi një skalar apo vektor që përmendëm më lart ((2),(3) e (4)), quhen **veprime diferenciale të rendit të parë.** Tash shohim **veprimet diferenciale të rendit të dytë** të operatorit ∇ ndaj fushave skalare apo vektoriale që dalin si rezultat i veprimit dy herë të ∇ ndaj atyre fushave.

Gradienti është vektor prandaj ai mund të shumëzohet skalarisht dhe vektorialisht me vektorin simbolik ∇:

$$\nabla \circ \text{grad } u = \nabla \circ (\nabla u) = \text{div grad } u,$$

$$\nabla \times \text{grad } u = \nabla \times (\nabla\ u) = \text{rot grad } u.$$

div **a** është skalar, prandaj ai mund të shumëzohet vetëm në një mënyrë me ∇:

$$\nabla \text{ div } \mathbf{a} = \nabla\ (\nabla \circ \mathbf{a}) = \text{grad div } \mathbf{a}.$$

Meqë rot **a** është vektor atëherë

$$\nabla \circ \text{rot } \mathbf{a} = \nabla \circ (\nabla \times \mathbf{a}) = \text{div rot } \mathbf{a},$$

$$\nabla \times \text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \text{rot rot } \mathbf{a}$$

Shembulli 6.2.16 Supozojmë se funksioni $u = u(x, y, z)$ ka derivate të pjesshme të vazhdueshme deri te rendi i dytë. Të tregohet se:

$$\text{rot grad } u \equiv 0.$$

Zgjidhje: Mënyra e parë. Kemi:

$$\text{rot grad } u = \nabla \times \nabla u = (\nabla \times \nabla) u = 0,$$

sepse $\nabla \times \nabla = 0$, si produkt vektorial i dy "vektorëve".

Mënyra e dytë. Duke shprehur rotorin e gradientit në koordinata të Dekartit kemi:

$$\text{rot grad } u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathbf{j} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\mathbf{k} = 0,$$

sepse:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Në qoftë se funksioni $u(x, y, z)$ ka derivate të pjesshme deri te rendi i dytë, atëherë:

$$\nabla \circ (\nabla u) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \circ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u,$$

Kështu:

$$\nabla \circ (\nabla u) = \Delta u,$$

ku simboli:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

quhet **operatori i Laplasit**. Atë mund ta paraqesim si produkt skalar të operatorit të Hamiltonit me vetveten, d.m.th.:

$$\Delta = \nabla \circ \nabla = \nabla^2.$$

Operatori Δ luan rol të rëndësishëm në matematikën fizike.

6.2.10 Potenciali vektorial

Supozojmë se fusha

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(M) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

është solenoidale në zonën G, d.m.th. div $\mathbf{a}(M) = 0$ në G.

Përkufizimi 6.2.13 Potencial vektorial *të fushës vektoriale* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ *quhet vektori* $\mathbf{b}(M) = P_1(x,y,z)\mathbf{i} + Q_1(x,y,z)\mathbf{j} + R_1(x,y,z)\mathbf{k}$ *i cili në* G *plotëson kushtin:*

$$\text{rot } \mathbf{b}(M) = \mathbf{a}(M) \tag{1}$$

ose:

$$\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial x} = P,\ \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = Q,\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = R. \tag{2}$$

Duke marrë parasysh se rot grad $f(M) = 0$ për çdo funksion të diferencueshëm skalar $f(M)$, edhe vektori:

$$\mathbf{B}(M) = \mathbf{b}(M) + \text{grad } f(M),$$

plotëson barazimin (1). Kjo tregon se potenciali vektorial i fushës solenoidale $\mathbf{a}(M)$ nuk është i përcaktuar në mënyrë të vetme.

Kështu dy potenciale vektoriale të fushës solenoidale $\mathbf{a}(M)$ ndryshojnë ndërmjet veti për gradientin e fushës skalare.

Gjetja e potencialit vektorial $\mathbf{b}(M)$ të fushës solenoidale $\mathbf{a}(M)$ kthehet në gjetjen e cilësdo zgjidhje të pjesshme të sistemit (2). Në vazhdim tregojmë një rrugë për gjetjen e potencialit vektorial. Meqë $\mathbf{b}(M)$ nuk është në mënyrë të vetme i përcaktuar për thjeshtësi marrim $P_1(x,y,z) \equiv 0$. Në këtë rast sistemi (2) merr trajtën:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} = P, \\ &\frac{\partial R_1}{\partial x} = -Q, \\ &\frac{\partial Q_1}{\partial x} = R. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Nga ekuacioni i dytë dhe i tretë i sistemit (3) fitojmë:

$$R_1(x,y,z) = -\int Q(x,y,z)dx + C_1(y,z), \tag{4}$$

$$Q_1(x,y,z) = \int R(x,y,z)dx + C_2(y,z), \tag{5}$$

ku $C_1(y,z)$ e $C_2(y,z)$ janë çfarëdo funksione të diferencueshme sipas y e z. Për thjeshtësi marrim $C_2(y,z) \equiv 0$ dhe funksionin $C_1(y,z)$ e marrim të tillë që të plotësojë edhe ekuacionin e parë të sistemit (3). Nga ekuacioni i parë i sistemit (3) dhe nga (4) e (5) gjejmë:

$$-\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x,y,z)dx + \frac{\partial C_1}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\int R(x,y,z)dx = P(x,y,z).$$

Këndej fitojmë:

$$\frac{\partial C_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int Q(x,y,z)dx + \frac{\partial}{\partial z}\int R(x,y,z)dx + P(x,y,z). \tag{6}$$

Që të tregohet se ana e djathtë e barazimit (6) nuk varet nga x, mjafton të tregojmë se derivati i pjesshëm i saj sipas x është zero. Kjo është e qartë duke marrë parasysh kushtin div $\mathbf{a}(M) = 0$ në G.

Integrojmë barazimin (6) sipas y dhe gjejmë:

$$\left.\begin{aligned} C_1(y,z) \quad &= \int \left[\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x,y,z)dx + \frac{\partial}{\partial z}\int R(x,y,z)dx + \right. \\ &\left. + P(x,y,z)\right] dy + C_3(z), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ku $C_3(z)$ është funksion i çfarëdoshëm i diferencueshëm sipas z. Duke marrë $C_3(z) \equiv 0$ dhe duke zëvëndësuar (7) në (4) fitojmë zgjidhjen e sistemit (3):

$$P_1 = 0 \tag{8}$$

$$Q_1 = \int R(x,y,z)dx \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \int \left[\frac{\partial}{\partial y} \int Q(x,y,z)dx + \frac{\partial}{\partial z} \int R(x,y,z)dx + P(x,y,z) \right] dy - \\ &- \int Q(x,y,z)dx. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Vektori $\mathbf{b}(M)$, koordinatat e të cilit gjenden me formulat (8), (9), (10) është potenciali vektorial i fushës solenoidale $\mathbf{a}$ sepse plotësohet kushti rot $\mathbf{b} = \mathbf{a}$.

Vërejtje. Për gjetjen e potencialit vektorial mund të veprohet edhe kështu: në vend të kushtit $P_1(x,y,z) \equiv 0$ marrim $Q_1(x,y,z) \equiv 0$ ose $R_1(x,y,z) \equiv 0$. Atëherë sistemi (3) dhe formulat (8), (9), (10) gjenden në mënyrë analoge si më sipër.

Shembulli 6.2.17 Të gjendet potenciali vektorial $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x,y,z)$ për fushën solenoidale:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Zgjidhje: Është e qartë se fusha $\mathbf{a}$ është solenoidale. Potencialin $\mathbf{b}$ e marrim në formën:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(x,y,z) = Q_1(x,y,z)\mathbf{j} + R_1(x,y,z)\mathbf{k}$$

ku Q_1 e R_1 i gjejmë nga formulat (9), (10). Meqë $P = Q = R = 1$, kemi:

$$Q_1(x,y,z) = \int dx = x,$$

$$R_1(x,y,z) = \int \left[\frac{\partial}{\partial y} \int dx + \frac{\partial}{\partial z} \int dx + 1 \right] dy - \int dx = \int dy - \int dx = y - x.$$

Kështu:

$$\mathbf{b}\,(x,y,z) = x\,\mathbf{j} + (y-x)\,\mathbf{k}.$$

Lehtë provohet se rot $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, dhe me të vërtetë $\mathbf{b}$ është potenciali vektorial i fushës së dhënë.

6.2.11 Detyra për ushtrime

1. Të gjenden sipërfaqet niveli të fushave skalare:

   a) $u = x^2 + y^2 - z$;

   b) $u = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16}$;

   c) $u = 2y^2 + 9z^2$;

   d) $u = 3^{x+2y-z}$;

   e) $u = \dfrac{\mathbf{a} \circ \mathbf{r}}{\mathbf{b} \circ \mathbf{r}}$ ku $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ janë vektorë konstantë;

   f) $u = \ln |\mathbf{r}|$;

2. Të gjenden vijat niveli të fushave:

   a) $u = 2x - y$;

   b) $u = \ln \sqrt{\dfrac{y}{2x}}$;

   c) $u = \dfrac{y^2}{x}$;

   d) $u = e^{x^2} - y^2$;

3. Të gjendet gradienti i fushës skalare $u = z\ e^{x^2+y^2+z^2}$ në pikën $0(0,0,0)$.

4. Të gjendet këndi ndërmjet gradientëve të funksioneve $u = \text{arc tg}\dfrac{y}{x}$ në pikat $M_1(1,1)$ dhe $M_2(-1,-1)$.

5. Të gjendet këndi φ ndërmjet gradientëve të funksioneve $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ dhe $v = \ln\ (x^2+y^2+z^2)$ në pikën $M_0(0,0,1)$.

6. Le të jetë $w = f(u,v)$, ku $u = u(x,y,z), v = v(x,y,z)$. Të tregohet se

$$\text{grad}\ w = \frac{\partial f}{\partial u}\text{grad}\ u + \frac{\partial f}{\partial v}\text{grad}\ v,$$

   nëse f, u, v janë funksione të diferencueshme.

7. Të gjenden vijat vektoriale të këtyre fushave vektoriale:

   a) $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$;

   b) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, ku a_1, a_2, a_3 janë konstante;

   c) $\mathbf{a} = (z-y)\mathbf{i} + (x-z)\mathbf{j} + (y-z)\mathbf{k}$;

8. Të gjenden vija vektoriale e fushës

$$\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

   e cila kalon nëpër pikën $A\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

9. Të gjenden vijat vektoriale të fushave vektoriale:

   a) $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}$;

   b) $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{k}$;

   c) $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$;

   d) $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$.

10. Të gjendet fluksi i vektorit $\mathbf{a} = y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ nëpër pjesën e sipërfaqes $z = x^2 + y^2$, të ndërprerë me rrafshin $z = 2$, sipas anës së jashtme të saj.

11. Të llogaritet fluksi i fushës vektoriale $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ në lidhje me anën e sipërme të trekëndëshit të kufizuar me rrafshet
$$x + y + z = a,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$$

12. Të llogaritet fluksi i fushës vektoriale $\mathbf{a} = xz\mathbf{i}$ në lidhje me anën e jashtme të paraboloidit $z = 1 - x^2 - y^2$, të kufizuar me rrafshin $z = 0 \ \ (z \geq 0)$.

13. Të llogaritet fluksi i fushës vektoriale $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ në lidhje me pjesën anësore të cilindrit rrethor $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, të kufizuar me rrafshin $z = 0,\ z = h\,(h > 0)$.

14. **14.** Të llogaritet fluksi i fushës vektoriale $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ në lidhje me anën e sipërme të qarkut që fitohet si ndërprerje e konit $z = \sqrt{x}^2 + y^2$ me rrafshin $z = h\,(h > 0)$.

15. Të llogaritet fluksi i fushës vektoriale $\mathbf{a} = 3x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ në lidhje me anën e jashtme të paraboloidit $x^2 + y^2 = 9 - z$, që gjendet në oktantin e parë.

16. Duke përdorur formulën e Gausit të llogaritet fluksi i fushës vektoriale
$$\mathbf{a} = \left(\frac{x^2y}{1+y^2} + 6yz^2\right)\mathbf{i} + 2x\,\mathrm{arctg}\ y\mathbf{j} - \frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\mathbf{k},$$
në lidhje me anën e jashtme të pjesës së sipërfaqes $z = 1 - x^2 - y^2$ që gjendet mbi rrafshin Oxy.

17. Duke përdorur formulën e Gausit të llogariten flukset e fushave vektoriale në lidhje me sipërfaqen e mbyllur S:
    a) $\mathbf{a} = (1+2x)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $S : x^2 + y^2 = z^2,\ z = \mathbf{4}, z \geq 0$;

    b) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; $S : x^2 + y^2 = 4 - z,\ z = 0, z \geq 0$.

    c) $\mathbf{a} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$; $S : x^2 + z^2 = y^2, y = 1,\ y \geq 0$.

18. Të llogaritet divergjenca e vektorit
    $\mathbf{a} = \varphi(r) \cdot \mathbf{r} = \frac{\varphi(r)}{r}\mathbf{r}$,

    ku $r = |r|$ është distanca nga fillimi i koordinatave deri te pika e ndryshueshme $M(x, y, z)$.

19. Të llogaritet divergjenca e fushës vektoriale
    $\mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$, ku $\mathbf{c}$ është vektor konstant.

20. **20.** Çfarë duhet të jetë funksioni $\psi(z)$ ashtu që divergjenca e fushës

    $\mathbf{a} = xz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \psi(z)\mathbf{k}$

    të jetë e barabartë me z?

21. Cilat nga fushat e mëposhtme

    $\mathbf{a} = x(z^2 - y^2)\mathbf{i} + y(x^2 - z^2)\mathbf{j} + z(y^2 - x^2)\mathbf{k}$;

    $\mathbf{a} = y^2\mathbf{i} - (x^2 + y^3)\mathbf{j} + z(3y^2 + 1)\mathbf{k}$;

    $\mathbf{a} = (1 + 2xy)\mathbf{i} - y^2z\mathbf{j} + (z^2y - 2zy + 1)\mathbf{k}$, janë solenoidale?

22. Të tregohet se fusha

    $E = \frac{q}{r^2} r^0 \ (r = \sqrt{x}^2 + y^2 + z^2)$

    është solenoidale në çdo zonë e cila nuk e përmban pikën 0(0,0,0).

23. Të llogaritet integrali linear i vektorit $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}}{|r|}$, ku $\mathbf{r}$ është rreze-vektore në lidhje me segmentin e drejtëzës nga pika $A(\mathbf{r}_A)$ deri te pika $B(\mathbf{r}_B)$.

24. Të llogaritet integrali linear në lidhje me segmentin me pikat e skajshme $A(\mathbf{r}_1)$ dhe $B(\mathbf{r}_2)$ për fushat vektoriale:

    a) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$;

    b) $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$;

    c) $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}}{|r|^2}, \mathbf{r}^0$ -vektor-njësi.

25. Të llogaritet integrali linear në lidhje me segmentin me skajet $0(0,0,0)$ e $M_1(1,1,1)$ të orientuar nga 0 në M_1, nëse $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{r}$, ku $\mathbf{b}$ është vektor-njësi.

26. Të vërtetohet formula:

$$\int\limits_{AB} \text{grad } u \circ d\mathbf{r} = u(B) - u(A),$$

    ku $\circ$ është shenja e produktit skalar.

27. Të llogaritet puna e fushës së forcës $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k}$, në lidhje me segmentin M_1M_2, ku $M_1(2,3,4)$ kurse $M_2(3,4,5)$.

28. Të llogaritet integrali linear për fushën vektoriale rrafshe $\mathbf{a} = (x^2 - 2xy)\mathbf{i} + (y^2 - 2xy)\mathbf{j}$

    a) në lidhje me parabolën $y = x^2$ nga pika $A(-1,1)$ deri te pika $B(1,1)$.

    b) në lidhje me segmentin CD, ku$C(-1,1)$ dhe $D(1,1)$.

29. Të llogaritet cirkuti i fushës vektoriale $\mathbf{a} = ye^x y\mathbf{i} + xe^x y\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$, në lidhje me vijën L e cila fitohet me ndërprerjen e konit $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ me rrafshet koordinative (fig.6.11).

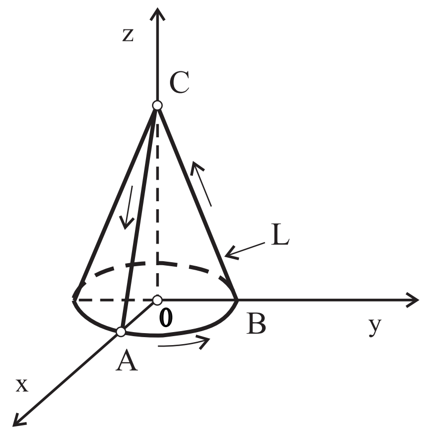


Fig. 6.11.

30. Të llogaritet cirkuiti i fushës vektoriale

$$\mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k},$$

nëse

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

31. Të llogaritet cirkuiti i vektorit **a** në lidhje me vijën L

a) $\mathbf{a} = (xz + y)\mathbf{i} + (yz - x)\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k}$,

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases};$$

b) $\mathbf{a} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$,

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 = R_x z \geq 0 \end{cases}.$$

c)$\mathbf{a} = (2x + z)\mathbf{i} + (2y - z)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$,

ku L është vija ndërprerëse e paraboloidit $x^2 + y^2 = 1 - z$ me rrafshet koordinative.

32. Të llogaritet rotori i vektorëve:

    a) $\mathbf{a} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$;

    b)$\mathbf{a} = z^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$;

    c) $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(-y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j})$.

33. Të tregohet se nëse koordinatat e vektorit $\mathbf{a}$(M) kanë derivate të pjesshme të rendit të dytë atëherë:

    div rot $\mathbf{a} = 0$,

    d.m.th. fusha e vektorit rot a është solenoidale.

34. Të tregohet se:

    div $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \circ \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a}\,\text{rot } \circ \mathbf{b}$.

35. Çfarë duhet të jetë funksioni $f(x, z)$ ashtu që rotori i fushës vektoriale

    $\mathbf{a} = yz\mathbf{i} + f(x, z)\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

    të përputhet me vektorin **k-i**?

36. Të tregohet cila nga fusha e mëposhtme është potenciale:

    a) $\mathbf{a} = xzi + 2y\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$;

    b) $\mathbf{a} = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} + (2xz + y^2)\mathbf{k}$;

    c) $\mathbf{a} = \frac{1}{3}(x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + xz^3\mathbf{k})$;

    d) $\mathbf{a} = yz\cos xy\mathbf{i} + xz\cos xy\mathbf{j} + \sin xy\mathbf{k}$;

    e) $\mathbf{a} = \ln(1 + z^2)\mathbf{i} + \ln(1 + x^2)\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$;

    f)
    $$\mathbf{a} = \left(\frac{z}{x^2} + \frac{1}{y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x}\right)\mathbf{k}$$

    k) $\mathbf{H} = \frac{2i}{r^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}),\ r^2 = x^2 + y^2,\ r \neq \mathbf{0}$.

37. Të tregohet se fusha $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$, ku f(r) është funksion i diferencueshëm është potenciale.

38. Të tregohet se fusha $\nabla u \times \nabla v$ është solonoidale në qoftë se u e v janë funksione skalare të diferencueshme.

39. Të tregohet se

    rot $\mathbf{a} \times \mathbf{r} = \mathbf{2a}$,

    ku $\mathbf{a}$ është vektor konstant.

40. Të tregohet se vektori $\mathbf{a} = u$ grad v është normal në vektorin rot $\mathbf{a}$.

41. Të tregohet se $\Delta(uv) = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \mathbf{2}(\nabla u \circ \nabla v)$.

42. Për fushën skalare $u = u(x, y, z)$, që plotëson kushtin $\triangle u = 0$ thuhet se është e **Laplasit** ose **harmonike**. Të tregohet se cila nga fushat e mëposhtme janë harmonike:

    a) $u = x^2 + \mathbf{2}xy - y^2$

    b)$u = x^2y + y^2z + z^2x$,

    c) $u = x^2 + y^2$.

43. Të llogaritet potenciali vektorial $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x, y, z)$ për fushën solenoidale të dhënë me vektorin

    $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + \mathbf{2}x\mathbf{k}$.

44. Të gjenden potencialet vektoriale për fushat solenoidale:

    a) $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i}$;

    b) $\mathbf{a} = (e^x - e^y)\mathbf{k}$;

    c) $\mathbf{a} = 6y^2\mathbf{i} + 6z\mathbf{j} + 6x\mathbf{k}$;

    d) $\mathbf{a} = 3y^2\mathbf{i} - 3x^2\mathbf{j} - (y^2 + \mathbf{2}x)\mathbf{k}$;

    e)$\mathbf{a} = ye^{x\,2}\mathbf{i} + \mathbf{2}yz\mathbf{j} - (\mathbf{2}xyze^{x\,1} + z^2)\mathbf{k}$.

45. Të llogariten:

    a) div ($u$grad u); b) div ($u$grad v).

46. Të vërtetohet barazimi:

    rot $(u\mathbf{R}) = u$rot $\mathbf{R}$ + grad $u \times \mathbf{R}$.

47. Të llogaritet rot $(f(r)\mathbf{r})$, ku $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

48. Të llogaritet:

    a) rot $\mathbf{c}f(r)$;

    b) rot $(\mathbf{c} \times f(r)\mathbf{r})$,

    ku $\mathbf{c}$ është vektor konstant.

49. Të tregohet formula:

    $\mathbf{n}$(grad $\mathbf{R} \times \mathbf{n}$) − rot $\mathbf{R} \times \mathbf{n}$ = div $\mathbf{R}$,

    nëse $\mathbf{n}$ është vektor-njësi.

50. Të tregohet formula: rot rot$\mathbf{R}$ = grad div $\mathbf{R} - \triangle\mathbf{R}$.

Literatura

[1] Bogdanov, Ju. S, Lejkcij po matematiqeskomu analizu, Minsk, 1978.

[2] Bolijtanski-Efremoviq, Što je topolagija, Zagreb, 1973.

[3] Çifligu, A, Elemente të teorisë së fushës, Tiranë, 1977.

[4] Fihtengolc, G. M., Kurs diferencialnovo i integralnovo isqislenija, (I-III), Moskë,

[5] Fempl, S, Teorija redova, Beograd, 1969.

[6] Hamiti, E, Matematika 3, Prishtinë, 1981.

[7] Fatkiq, H ; Dragiqeviq, V, Diferencijalni raqun-funkcie dvije i vishe promeneljivih, Sarajevë, 1979.

[8] lljin V. A; Sadovniqij; V.A. Sendov, BI.H, Matematiqeskij analiz, Moskë, 1979.

[9] Kraja, O; Bukuroshi, K, Analiza matematike (dispensa 1 dhe 2), Tiranë, 1977.

[10] Kudrjavcev, L. D, Matematiqeskij analiz, (1 dhe 2), Moskë,1973.

[11] Krasnov, M; Kiselev, A, J; Makarenko, G. J, Vektornëj analiz, Moskë, 1977.

[12] Kurepa, S, Matematiqka analiza (pjesa e parë dhe e dytë), Zagreb, 1978.

[13] Ljashko, I. I; Borjaquk, A. K; Gaj, Ja. G; Kalaida, A. F, Matematiqeskij analiz, (pjesa II), Kijevë 1983.

[14] Ljashko, I. I.; Borjaquk, A. K; Gaj, Ja. G; Golavaq, G. F, Matematiqeskij analiz v primerah i zadoqah (2), Kijevë ,1977.

[15] Mardeshiq, S, Matematiqka analiza u n-dimenziolnom realnom prostoru (pjesa e parë), Zagreb, 1977.

[16] Nikolskij, S. M, Kurs matematiqeskovo analiza (1 dhe 2), Moskë, 1973.

[17] Pejoviq, T, Matematiqka analiza (3-4), Beograd, 1962.

[18] Piskunov, N. S, Diferencijalnje i integralnje isqilenija, (1 dhe 2),

[19] Rudin, U, Osnovi metematiqeskovo analiza, Moskë, 1976.

[20] Shvarc, L 1, Analiz (1 dhe 2),Moskë, 1977.

[21] Zoriq, V. A., Matematiqeskij analiz, Moskë, 1981.

Indeksi

Dr. sc. Minir EFENDIJA

ANALIZA MATEMATIKE III & IV

Lektor
Ali Llunji

Korrektor
Autori

Përgatitja kompjuterike
Autori

Vizatimet i punoi
Fitim I. Halili

Tirazhi ??? copë

Formati 17×24

U shtyp në ????Shtator të vitit ????
në Shtypshkronjën ????
TETOVË

Katalogimi në publikim – (CIP)
Biblioteka Kombëtare dhe Universitare e Kosovës

51 (075.8)

EFENDIJA, Minir
Analiza matematike III & IV / Minir Efendija ; [Vizatimet i i punoi Fitim I. Halili]. - (Botim i tretë). - Prishtinë : Universiteti i Prishtinës : Fakulteti i Shkencave Matemetike-Natyrore, 2005 (Gjakovë: "Blini BK"). - IX, 483, [14] fletë me vizatime : ilustr.;24cm.

Parathënie : fq.III-IV. – Literatura : fq.[484]

ISBN 9951-00-046-0

ISBN 9951-00-046-0