Exercises 3 for the lecture
"Mathematische Modellierung in der Klimaforschung W16/17"

Due to Tuesday, 2016-12-06, Room A011 or via e-mail to
`nadolski@math.fu-berlin.de`

Exercise 1. *(Lineares Wasser)* [5 Punkte]
Wir betrachten die Flachwassergleichungen in 1d, zur Erinnerung

$$U_t + f(U)_x = 0$$

mit $U = (h,q)^t \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$, und

$$f(h,q) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 \end{pmatrix}.$$

Sei $U \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ ein fester Zustand. Für "kleine" u haben wir dann doch

$$\begin{aligned} u_t &= (U+u)_t \\ &= -f(U+u)_x \\ &\approx -\big(f(U) + Df(U)u\big)_x \\ &= -Df(U)u_x, \end{aligned}$$

so dass $u_t + Df(U)u_x = 0$ gilt. Diese Gleichung heißt linearisierte Flachwassergleichung. Löse das Riemann-Problem für die linearisierte Flachwassergleichung.

Exercise 2. *(Wasser im Rechner!)* [15 Punkte]
Die grundlegende Idee des Gudonov-Verfahrens, Lösungen lokaler Riemann-Probleme zusammenzusetzen und dann zu mitteln, funktioniert auch für Systeme. Wir betrachten das Verfahren

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\big(g_{i+\frac{1}{2}}^n - g_{i-\frac{1}{2}}^n\big)$$

auf $[0,1]$ mit periodischen Randbedingungen (also so wie immer, nur dass die u_i^n jetzt höher-dimensional sind. Dabei ist für das Gudonov-Verfahren

$$g_{i+\frac{1}{2}}^n = f\left(\text{Lösung des Riemann-Problems } (u_i^n, u_{i+1}^n) \text{ auf der Geraden } x = 0\right).$$

Implementiere das Gudonov-Verfahren für die linearisierten Flachwassergleichungen und teste Deine Implementierung mit $U = (10,0)$ als festem Hintergrundzustand, $u_0(x) = (\sin 2\pi x, 0)$ und $u_1(x) = (\chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}(x), 0)$ als Anfangsdaten.