Vorlesung 1
02.11.2020

Ziele:

1. Maßtheorie → Lebesgue-Maß
(Volumen von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ bestimmen)

2. Integralrechnung für Funktionen $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
→ Lebesgue-Integrale (Satz von Fubini, ...)

3. Version des Hauptsatzes → Satz von Gauß

I Maße und messbare Funktionen

Notation:
Menge X, Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ heißt Mengensystem

Def. I.1
Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **σ-Algebra**, falls:

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Das Paar $(X, \mathcal{A})$ heißt dann **messbarer Raum**.

Bem.:

1. $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$
   Denn: $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i = X \setminus (\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} X \setminus A_i)$
2. $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$
   Denn: $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$

Bsp.:

1. $\mathcal{P}(X)$ ist σ-Algebra, $\{\emptyset, X\}$ ist σ-Algebra
2. später: Menge aller messbaren Mengen eines äußeren Maßes bildet eine σ-Algebra.

Satz I.2
Jeder Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) σ-Algebren auf der selben Menge X ist wieder eine σ-Algebra.

Beweis. $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ sei eine Familie von σ-Algebren bezüglich X.
Offensichtlich gilt: $X \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$
Sei $A \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i \implies A \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I \implies X \setminus A \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I \implies X \setminus A \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$
Analog für die abzählbare Vereinigung. $\square$

Def. I.3
Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap\{\mathcal{A}|\mathcal{A}$ ist σ-Algebra in X mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$ die von $\mathcal{E}$ **erzeugte $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra**. Man nennt $\mathcal{E}$ das **erzeugende System** von $\sigma(\mathcal{E})$.

Bem.:
Dieser Durchschnitt ist nicht-trivial, denn $\mathcal{P}(X)$ ist σ-Algebra mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Bsp.:

1. Ist $E \subseteq X$ und $\mathcal{E} = \{E\} \implies \sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, E, X \setminus E, X\}$

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sei das System der offenen Mengen. Die von $\mathcal{O}$ erzeugte σ-Algebra heißt **Borel-$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra** $\mathbb{B}(\mathcal{O}) = \mathbb{B}$. Ihre Elemente heißen **Borelmengen**.

3. Seien $X \neq \emptyset$, $(Y, \mathcal{C})$ messbarer Raum, $f : X \to Y$ eine Abbildung und das Urbild von $C \subseteq Y$: $f^{-1}(C) := \{x \in X|f(x) \in C\}$. Dann ist $f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C)|C \in \mathcal{C}\}$ eine σ-Algebra bzgl. X.
   Begründung:

   - $X \in f^{-1}(\mathcal{C})$, denn $f^{-1}(Y) = X$ und $Y \in \mathcal{C}$
   - $f^{-1}(C) \in f^{-1}(\mathcal{C}) \iff C \in \mathcal{C}$,
     $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$
   - Erinnerung: $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

4. Sei X eine beliebige Menge und $(E)_i \subseteq \mathcal{P}(X)$, $i \in I$, Mengensysteme, dann gilt: $\sigma(\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{E}_i) = \sigma(\bigcup\limits_{i\in I} \sigma(\mathcal{E}_i))$
   Begründung:

   - Klar: $\subseteq$
   - Andererseits enthält $\sigma(\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{E}_i)$ das System $\bigcup\limits_{i\in I} \sigma(\mathcal{E}_i)$ und ist eine σ-Algebra
     $\implies \sigma(\bigcup\limits_{i\in I} \sigma(\mathcal{E}_i)) \subseteq \sigma(\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{E}_i)$

Notation:
$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ mit $-\infty < a < +\infty,\ \forall a \in \mathbb{R}$

Def. I.4
Eine Folge $(s_k) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ $(k \in \mathbb{N})$ konvergiert gegen $s \in \bar{\mathbb{R}}$, falls eine der folgenden Alternativen gilt:

(i) $s \in \mathbb{R}$ und $\forall \epsilon > 0$ gilt: $s_k \in (s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ für k hinreichend groß

(ii) $s = \infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in (r, \infty]$ für k hinreichend groß

(iii) $s = -\infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in [-\infty, r)$ für k hinreichend groß

$(s_k) \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergent, wenn sie entweder in $\mathbb{R}$ konvergiert, oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.

Bsp.:

- s_k monoton $\implies$ s_k konvergiert in $\bar{\mathbb{R}}$
- $a_k \geq 0 \implies \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} a_k \in \bar{\mathbb{R}}$
- Eine Menge $U \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann offen, wenn $U \cap \mathbb{R}$ offen ist und im Fall $+\infty \in U$ (bzw. $-\infty \in U$) ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $(a, \infty] \subseteq U$ (bzw. $[-\infty, a) \subset U$) ist.
- Die Borel-σ-Algebra $\bar{\mathbb{B}}$ auf $\bar{\mathbb{R}}$ wird durch die offenen Mengen in $\bar{\mathbb{R}}$ erzeugt. Es gilt: $\bar{\mathbb{B}} = \{B \cup E | B \in \mathbb{B}, E \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$

Notation:
Addition:

$+$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	/
$\mathbb{R}$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
$+\infty$	/	$+\infty$	$+\infty$

$\sup \emptyset := -\infty$, $\inf \emptyset := +\infty$ konsistent mit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ gilt $A \subseteq B \implies \sup A < \sup B$ und $\inf A \geq \inf B$

Def. I.5
Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, eine nicht-negative Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt **Maß** auf $\mathcal{A}$, falls:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) für beliebige paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, gilt:
$\mu(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$ (σ-Additivität)

Das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **Maßraum**.

Bem.:

1. Für endlich viele paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, ..., n$, folgt aus (ii) indem man $A_i = \emptyset$ für $i = n+1, ...$ setzt: $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

2. Monotonie des Maßes: $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

Def. I.6
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ heißt **endlich**, wenn $\mu(A) < \infty \ \forall A \in \mathcal{A}$ und **σ-endlich**, wenn es eine Folge $(X_i) \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X_i) < \infty$ gibt, sodass $X = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} X_i$.
Falls $\mu(X) = 1$, so wird μ **Wahrscheinlichkeits-Maß** genannt.

Bsp.:

1. Sei X eine beliebige Menge, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, für $x \in X$ sei $\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

   (**Dirac-Maß**)

   - Es gilt $\delta_x(A) \in \{0, 1\}$, $\delta_x(\emptyset) = 0$, $\delta_x(X) = 1$.
   - Sei $A = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$ gegeben mit A_k paarweise disjunkt und $x \in A \implies x \in A_k$ für genau ein $k \in \mathbb{N} \implies \sigma$-Additivität.
   - Für $x \notin A$ gilt sowieso $\delta_x A = 0$

   $\implies$ Das Dirac-Maß ist ein Wahrscheinlichkeits-Maß

2. **Zählmaß:** X beliebige Menge — Vorlesung 2, 06.11.2020

   $card : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$
   $card(A) := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von A}, & \text{falls A endlich} \\ \infty, sonst \end{cases}$
   Für $A = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$ endlich und paarweise disjunkt ist die σ-Additivität klar.

   Sei A unendlich und $A = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

   (a) nur endlich viele A_k nicht-trivial
   $\implies \exists k_0 : A_{k_0}$ ist unendlich
   (b) abzählbar viele A_k sind nicht-trivial $\implies$ Behauptung

   $\implies$ Behauptung

   Zählmaß ist σ-endlich $\Leftrightarrow X$ ist abzählbar
   Zählmaß ist endlich $\Leftrightarrow X$ ist endlich

Bsp.:
X beliebige Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-Algebra, $\mu(A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$

Satz I.7 (Stetigkeitseigenschaften von Maßen)
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann gelten für Mengen $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen:

(i) Aus $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ...$ folgt: $\mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i)$

(ii) Aus $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...$ mit $\mu(A_1) < \infty$, folgt: $\mu(\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i)$

(iii) $\mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$

Bem.:

1. (i) Stetigkeit von unten
   (ii) Stetigkeit von oben
   (iii) σ-Subadditivität von μ

2. Bedingung $\mu(A_i) \leq \infty$ in (ii) kann durch $\mu(A_k) \leq \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ersetzt werden, kann aber nicht weggelassen werden.
   Begründung:
   $A_k = k, k+1, ... \subseteq \mathbb{N}$
   $card(A_k) = \infty \ \forall k \in \mathbb{N}$
   Aber: $card(\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i) = card(\emptyset) = 0$

Beweis.

(i) $\tilde{A}_1 := A_1, \ \tilde{A}_k := A_k \setminus A_{k-1}, \ k \geq 2$
$\tilde{A}_i$ sind paarweise disjunkt.
$\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \tilde{A}_i = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$
$$\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \tilde{A}_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(\tilde{A}_i) = \lim_{k\to\infty} (\sum_{i=1}^{k} \mu(\tilde{A}_i)) = \lim_{k\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{k} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

(ii) $A'_k := A_1 \setminus A_k \implies A'_1 \subseteq A'_2 \subseteq ...$
Es gilt: $\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_k) + \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_k) + \mu(A'_k)$
$$\implies \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A'_k) \overset{(i)}{=} \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A'_i) = \mu(A_1 \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i)$$
$$= \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i)$$

(iii) Es genügt, die Folge $B_1 = A_1, \ B_i \overset{i\geq 2}{=} A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j$ zu betrachten.
$\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} B_i$ und (B_i) ist paarweise disjunkt.
$$\implies \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$$

□

Def. I.8
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.
Jede Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ heißt **μ-Nullmenge**. Das System aller μ-Nullmengen bezeichnen wir mit $\boldsymbol{\mathcal{N}(\mu)}$. Das Maß μ heißt **vollständig**, wenn gilt:

$$N \subseteq A \text{ für ein } A \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(A) = 0 \qquad \Longrightarrow N \in \mathcal{A} \text{ und } \mu(N) = 0$$

Bem.:
Nicht jedes Maß ist vollständig:

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X) \; \mu(A) = 0 \; \forall A \in \mathcal{A}$$

Allerdings lässt sich jedes Maß vervollständigen:
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $\mathcal{T}_\mu$ sei das System aller Mengen $N \subseteq X$ für die eine μ-Nullmenge $B \in \mathcal{N}(\mu)$ existiert mit $N \subseteq B$. Es gilt:

$$\mu \text{ vollständig } \Leftrightarrow \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{A}$$

Definiere auf $\bar{A}_\mu := \{A \cup N | A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu\}$ die Mengenfunktion $\bar{\mu}$ durch $\bar{\mu}(A \cup N) := \mu(A) \; \forall A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu$

Bem.:
$\bar{\mu}$ ist wohldefiniert: $A \cup N = B \cup P$ mit $A, B \in \mathcal{A}, \; P, N \in \mathcal{T}_\mu \implies \exists C \in \mathcal{A}, \mu(C) = 0 :$
$P \subseteq C \implies A \subseteq B \cup C \implies \mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C) = \mu(B)$
Symm $\implies \mu(A) = \mu(B)$
$\bar{\mu}$ heißt **Vervollständigung** von μ

Satz I.9
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ eine σ-Algebra und $\bar{\mu}$ ein vollständiges Maß auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$, welches mit μ auf $\mathcal{A}$ übereinstimmt.

Beweis. Offensichtlich:

1. $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}_\mu$
2. $\mathcal{T}_\mu$ ist abgeschlossen unter abzählbaren $\bigcup$

$\mathcal{A}$ ist auch abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung
$\implies \bar{\mathcal{A}}_\mu$ abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung
Sei $x \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$. Für $E \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$ ex. ein $A \in \mathcal{A}, \; N \in \mathcal{T}_\mu$ und $B \in \mathcal{A}$ und $N \subseteq B$ mit $\mu(B) = 0$, sodass $E = A \cup N$
$\implies B \setminus N \in \mathcal{T}_\mu$
$\implies X \setminus E = (X \setminus (A \cup B)) \cup (B \setminus N) \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$
$\implies \bar{\mathcal{A}}_\mu$ ist σ-Algebra
$\bar{\mu}$ ist Maß (ist klar)
Sei $M \subseteq B = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu$ und $\bar{\mu}(B) = \mu(A) = 0$
Aus $M = (M \cap A) \cup (M \cap N) \in \mathcal{T}_\mu \cup \mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}_\mu \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$
$\implies \bar{\mu}$ ist vollständig. □

Satz I.10
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $(X, \bar{\mathcal{A}}_\mu, \bar{\mu})$ sei Vervollständigung. Ferner sei $(X, \mathcal{B}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$ und $\bar{\mu} = \nu$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$.

Beweis. Aus $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$ folgt: $\mathcal{N}(\mu) \subseteq \mathcal{N}(\nu) \implies \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{T}_\nu$
ν vollständig $\implies \mathcal{T}_\nu \subseteq \mathcal{B} \implies \mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{B} \implies \bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$
Da $\bar{\mu}$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ vollständig durch μ auf $\mathcal{A}$ bestimmt ist, folgt sofort $\bar{\mu} = \nu$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$, da $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$. □

Def. I.11
$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **$\mathcal{A}-\mathcal{C}-$messbar**, falls $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$

Notation:
Falls $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ klar sind, bezeichnen wir f einfach als messbar.

Bsp.:

1. $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ beliebige messbare Räume.
   Sei $y_0 \in Y$ und $f : X \to Y,\ f(x) = y_0\ \forall x \in X$
   $\implies f$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}-$messbar
2. $\chi_R : X \to \mathbb{R},\ \chi_R(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x \in E \subseteq X \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$
   $\mathbb{R}$ wird versehen mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$. Für $(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum gilt:
   χ_R $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar $\Leftrightarrow\ E \in \mathcal{A}$
3. Komposition messbarer Abbildungen ist messbar.
   $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C}), (Z, \mathcal{D})$ messbare Räume.
   $f : X \to Y$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-messbar
   $g : Y \to Z$ $\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$-messbar
   $\implies g \circ f : X \to Z$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{D}$-messbar, denn:
   $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{D}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{D})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$

Lemma I.12
$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume und $\mathcal{C} := \sigma(\mathcal{E})$. Jede Abbildung $f : X \to Y$ mit $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-messbar.

Beweis. Es gilt: $f^{-1}(\mathcal{C}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \overset{s.Blatt1}{=} \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ □

Bsp.:

1. Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{B}^n$-$\mathbb{B}^n$-messbar
   (man sagt: f ist **borel-messbar**).
   Denn $\mathbb{B}^n = \sigma(\{\text{offene Teilmengen des } \mathbb{R}^n\})$ und Urbilder offener Mengen sind offen für f stetig (siehe. Ana 1)

2. Sei $X \neq \emptyset$ Menge, $(Y, \mathcal{C})$ messbarer Raum, $f : X \to Y$ Abbildung.
   Nach Bsp. aus 1. Vorlesung ist $f^{-1}(\mathcal{C})$ σ-Algebra.
   Offensichtlich ist $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{P}(X)$ die kleinste σ-Algebra und f messbar.

Notation:
Multiplikation und Division in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$s * (\pm\infty) = (\pm\infty) * s = \begin{cases} \pm\infty & \text{, falls } s \in (0, \infty] \\ 0 & \text{, falls } s = 0 \\ \mp\infty & \text{, falls } s \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

$\frac{1}{t} = 0$ für $t = \pm\infty$

Def. I.13
$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum und $D \in \mathcal{A}$.
Eine Funktion $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt **numerische Funktion**.

Lemma I.14
$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist $\mathcal{A}$-$\bar{\mathbb{B}}^1$-messbar

(ii) $\forall\, \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ und $f^{-1}(\{\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$

(iii) $\{f \leq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(iv) $\{f < s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s)\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(v) $\{f \geq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [s, \infty]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(vi) $\{f > s\} := \{x \in D \mid f(x) \in (s, \infty]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

Beweis. $\bar{\mathbb{B}}^1$ wird erzeugt durch die offenen Mengen und $\pm\infty \implies$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) $\Leftrightarrow$ (vi) denn:
(iv) $\implies$ (iii): $\{f \leq s\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f < s + \frac{1}{k}\}$
(iii) $\implies$ (vi): $\{f > s\} = D \setminus \{f \leq s\}$
(vi) $\implies$ (v): $\{f \geq s\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f > s - \frac{1}{k}\}\}$
(v) $\implies$ (iv): $\{f < s\} = D \setminus \{f \geq s\}$

(ii) $\implies$ (vi), denn: $\{f > s\} = f^{-1}(s, \infty) \cup f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{A}$

Für ein offenes Intervall (a, b) gilt: $f^{-1}((a, b)) = \{f > a\} \cap \{f < b\} \in \mathcal{A}$
Eine der Aussagen (und damit alle) (iii) - (vi) gelte.

Man kann zeigen: Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ lässt sich als abzählbare Vereinigung $\mathcal{U} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ von offenen Intervallen $I_k = (a_k, b_k)$ schreiben (siehe Blatt 2).

$\implies f^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(I_k) \in \mathcal{A}$

$f^{-1}(\{\infty\}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{f > k\} \in \mathcal{A}, \quad f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{f < -k\} \in \mathcal{A} \quad \implies$ (ii) $\square$

Bem.:
In (iii) - (vi) reicht es aus, $s \in \mathbb{Q}$, statt $s \in \mathbb{R}$ zu haben, denn es gilt z.B.:
$\{f \geq s\} = \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ s>q}} \{f > q\}$

Vorlesung 3
09.11.20

Lemma I.15
Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f, g : D \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar. Dann sind die Mengen $\{f < g\} := \{x \in D : f(x) < g(x)\}$ und $\{f \leq g\} := \{x \in D : f(x) \leq g(x)\}$ Elemente aus $\mathcal{A}$.

Beweis. Es gilt: $\{f < g\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (\{f < g\} \cap \{g > q\}) \in \mathcal{A}$, denn:
$\{f < g\}, \{g > q\} \in \mathcal{A}$ (s. Lemma I.14)
$\{f \leq g\} = D \setminus \{f > g\} \in \mathcal{A}$ $\square$

Bem.:
Im folgenden Satz sind die Grenzfunktionen paarweise definiert, z.B.:
$\liminf f_x : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ist definiert durch: $\quad (\liminf_{k\to\infty} f_k)(x) := \liminf_{k\to\infty} f_k(x)$

Satz I.16
$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f_k : D \to \bar{\mathbb{R}}$ Folge von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen. Dann sind auch folgende Funktionen $\mathcal{A}$-messbar:

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k, \ \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \ \liminf_{k\to\infty} f_k, \ \limsup_{k\to\infty} f_k$$

Beweis. Für $s \in \mathbb{R}$ gilt:
$\{\inf_k f_k \geq s\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{f_k \geq s\} \in \mathcal{A}$, denn nach Lemma I.14 ist $\{f_k \geq s\} \in \mathcal{A}$
$\{\sup_k f_k \leq s\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{f_k \leq s\} \in \mathcal{A}$
$\overset{\text{Lemma I.14}}{\implies} \inf f_k, \sup f_k$ sind $\mathcal{A}$-messbar
$\liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} (\inf_{l\geq k} f_l)$ ist $\mathcal{A}$-messbar.
$\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} (\sup_{l\geq k} f_l)$ ist $\mathcal{A}$-messbar. $\square$

Notation:
Seien $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$, dann sind $f^{\pm} : D \to [0, \infty]$ definiert durch:
$f^+ := max(f, 0) \geq 0$ und $f^- := max(-f, 0) = -min(f, 0) \geq 0$
$\implies f = f^+ - f^-, \ |f| = f^+ + f^-$

Satz I.17
$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$, $f, g : D \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann sind die Funktionen

$$f + g,\ \alpha f,\ f^{\pm},\ max(f, g),\ min(f, g),\ |f|,\ fg,\ \frac{f}{g}$$

auf ihren Definitionsbereichen, die in $\mathcal{A}$ liegen $\mathcal{A}$-messbar.

Beweis.

1. $\underline{f, g : D \to \mathbb{R}}$
   - $\{f + g < t\} = \bigcup\limits_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}\\ r+s<t}} \{f < r\} \cap \{g < s\} \in \mathcal{A}$
     $\{-f < t\} = \{f > -t\} \in \mathcal{A}$
     $\implies f + g, -f \mathcal{A}$-messbar. Ebenso αf für $\alpha \in \mathbb{R}$
   - Für $\mathcal{C} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ ist $\mathcal{C} \circ f$ messbar, denn für $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $\mathcal{C}^{-1}(\mathcal{U})$ offen und damit $(\mathcal{C} \circ f)^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathcal{C}^{-1}(\mathcal{U})) \in \mathcal{A}$
     $\implies f^{\pm}$ sind $\mathcal{A}$-messbar (wähle $\mathcal{C}(s)) = max(\pm s, 0))$
     $\implies |f| = f^+ + f^-$,
     $max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und
     $min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ sind $\mathcal{A}$-messbar
   - $f^2 = \mathcal{C} \circ f$ mit $\mathcal{C}(s) = s^2$ und
     $fg = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$ $\mathcal{A}$-messbar
   - $\frac{1}{g}$ ist $\mathcal{A}$-messbar, denn:
     $$\{\frac{1}{g} < s\} = \begin{cases} \{\frac{1}{s} < g < 0\} & , s < 0 \\ \{g < 0\} & s = 0 \\ \{g < 0\} \cup \{g > \frac{1}{2}\} & s > 0 \end{cases}$$
2. $\underline{f, g \text{ beliebig}}$
   Betrachte $f_k(x) = \begin{cases} k & , f(x) \geq k \\ -k & , f(x) \leq -k \in \mathbb{R} \\ f(x) & , \text{ sonst} \end{cases}$
   Analog $g_k(x)$. f_k, g_k sind $\mathcal{A}$-messbar $\forall k$
   Punktweise gilt: $f_k(x) \to f(x), g_k(x) \to g(x)$
   Ebenso: $f_k + g_k \to f + g, \alpha f_k \to \alpha f, ..., f_k g_k \to fg$ punktweise.

Der Allgemeine Fall folgt aus 1. und Satz I.16. ☐

Notation:
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Man sagt, die Aussage $A[x]$ ist wahr **für μ-fast alle** $x \in M \in \mathcal{A}$ oder **μ-fast überall** auf M, falls es eine μ-Nullmenge N gibt mit

$$\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\} \subseteq N$$

Dabei wird nicht verlangt, dass $\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\}$ selbst zu $\mathcal{A}$ gehört.
Zum Beispiel bedeutet für Funktionen $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ die Aussage „$f(x) \leq g(x)$ für μ-fast alle $x \in X$“, dass es eine Nullmenge N gibt, so dass $\forall x \in X \setminus N$ gilt: $f(x) \leq g(x)$.
Eine Funktion h ist „μ-fast überall auf X definiert“, wenn h auf $D \in \mathcal{A}$ definiert ist und $\mu(X \setminus D) = 0$.

Bsp.: („Konvergenz μ-fast überall “)
Eine Folge von Funktionen $f_k : D \to \bar{\mathbb{R}}$ konvergiert punktweise μ-fast überall gegen $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass $\forall x \in D \setminus N$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

Ziel:
Messbarkeit für Funktionen, die nur μ-fast überall definiert sind.

Def. I.18
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Eine auf $D \in \mathcal{A}$ definierte Funktion $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt **μ-messbar** (auf X), wenn $\mu(X \setminus D) = 0$ und f $\mathcal{A}|_\mathcal{D}$-messbar ist.
($\mathcal{A}|_D := \{A \cap D | A \in \mathcal{A}\}$, siehe Blatt 1)

Bem.:

1. Unterscheiden zwischen $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen (auf X), die überall auf X definiert sind, und μ-messbaren Funktionen (auf X), die in der Regel nur μ-fast überall definiert sind.

2. Analog zu $\mathcal{A}$-Messbarkeit verwenden wir μ-Messbarkeit auf für Funktionen, die nur auf Teilmengen definiert sind:
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $D \in \mathcal{A}$. $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt **μ-messbar** (auf D), wenn $E \subseteq D$ in $\mathcal{A}$ liegt mit $\mu(D \setminus E) = 0$ und f $\mathcal{A}|_E$-messbar.

3. „$f = g$ μ-fast überall“ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen

4. Sei $D \in \mathcal{A}, f : D \to \bar{\mathbb{R}}$ μ-messbar. Dann ex. eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion $g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $f = g$ auf D, z.B.: $g = \begin{cases} f & \text{, auf } D \\ 0 & \text{, auf } X \setminus D \end{cases}$
Somit übertragen sich die Sätze I.16 und I.17 auf μ-messbare Funktionen.

Vorlesung 4
13.11.20

Lemma I.19
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum. f μ-messbar auf X. Dann ist auch jede Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f} = f$ μ-fast überall μ-messbar.

Beweis. Sei f auf $D \in \mathcal{A}$ definiert mit $\mu(X \setminus D) = 0$ und sei $\tilde{f}$ auf $\tilde{D} \subseteq X$ definiert.
Vor. $\implies \exists$ Nullmenge N mit $X \setminus N \subseteq \cap \tilde{D}$ und $\tilde{f}(x) = f(x)\ \forall x \in X \setminus N$
$\implies X \setminus \tilde{D} \subseteq N$
$\overset{\mu\text{-vollständig}}{\implies} X \setminus \tilde{D} \in \mathcal{A} \implies \tilde{D} \in \mathcal{A}$.

Weiter gilt:
$\{x \in \tilde{D} | \tilde{f}(x) < s\} = \{x \in \tilde{D} \cap N |\ \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in \tilde{D} \cap (X \setminus N) |\ \tilde{f}(x) < s\}$
$= \{x \in \tilde{D} \cap N |\ \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in D \cap (X \setminus N) |\ f(x) < s\}$
$= \{x \in \tilde{D} \cap N |\ \tilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in D |\ f(x) < s\} \setminus \{x \in D \cap N |\ f(x) < s\}$
$=: A \cup B$
Da f μ-messbar ist, folgt, dass $B \in \mathcal{A}$
μ-vollständig $\implies A \in \mathcal{A} \implies \{x \in \tilde{D} |\ \tilde{f}(x) < s\} \in \mathcal{A}\ \forall s$

Weiter ist $\{x \in \tilde{D} |\ \tilde{f}(x) < s\} \subseteq \tilde{D} \implies \{x \in \tilde{D} |\ \tilde{f}(x) < s\} \in \mathcal{A}|_{\tilde{D}}$
$\overset{\text{Lemma I.14}}{\Leftrightarrow} \tilde{f}$ μ-messbar ☐

Satz I.20
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum und seien $f_k, k \in \mathbb{N}$, μ-messbar. Falls f_k punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert, dann ist f auch μ-messbar.

Beweis. Sei f_k auf $D_k \in \mathcal{A}$ definiert. Dann sind alle f_k, $k \in \mathbb{N}$, auf $D := \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} D_k$ definiert und $X \setminus D$ ist μ-Nullmenge $E := \{x \in D |\ \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) \neq f(x)\}$ und betrachte

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & , \forall x \in D \setminus E \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \forall x \in D \setminus E \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $\tilde{f} = \lim\limits_{k \to \infty} \tilde{f}_k \overset{\text{Satz I.16}}{\implies} \tilde{f}$ ist $\mathcal{A}$-messbar
Vor.: $(X \setminus D) \cup E$ ist μ-Nullmenge $\overset{\text{Lemma I.14}}{\implies} f$ ist μ-messbar. ☐

Satz I.21 (Egorov)
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $D \in \mathcal{A}$ Menge mit $\mu(D) < \infty$ und f_n, f μ-messbare, μ-fast überall endliche Funktionen auf D mit $f_n \to f$ μ-fast überall. Dann existiert $\forall \epsilon > 0$ eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq D$ und

(i) $\mu(D \setminus B) < \epsilon$

(ii) $f_n \to f$ gleichmäßig auf B

Beweis. $E := \{x \in D |\ f_n(x), f(x) \text{ sind endlich und } f_n(x) \to f(x)\}$
Vor. $\implies \exists$ μ-Nullmenge N mit $D \setminus E \subseteq N$
O.B. $E = D$ (sonst erstetze D durch $D \setminus N$)
Sei $C_{i,j} := \bigcup_{n=j}^{\infty} \{x \in D |\ |f_n(x) - f(x)| > 2^{-i}\},\ i, j \in \mathbb{N}$
Satz I.17 $\implies C_{i,j} \in \mathcal{A}$ und $C_{i,j+1} \subseteq C_{i,j}$ $\forall i, j \in \mathbb{N}$
$\mu(D) < \infty \overset{\text{Satz I.7}}{\implies} \lim_{j \to \infty} \mu(C_{i,j}) = \mu(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} C_{i,j}) = 0$, denn $f_n \to f$
Sei $\epsilon > 0$ gegeben
$\implies \forall i \in \mathbb{N}\ \exists N(i) \in \mathbb{N}$ mit $\mu(C_{i,N(i)}) < \epsilon * 2^{-i}$
Setze $B := D \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{i,N(i)} \in \mathcal{A}$ und $\mu(D \setminus B) = \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{i,N(i)}) \overset{\text{Satz I.7}}{\leq} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(C_{i,N(i)}) < \epsilon$
$\forall i \in \mathbb{N}\ \forall x \in B\ \forall n > N(i)$ gilt:
$|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-i} \implies f_n \to f$ auf B $\square$

II Äußere Maße

Def. II.1
Sei X eine Menge. Eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt **äußeres Maß** auf X, falls gilt:

$$A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$$

Bem.:

1. Die Begriffe σ-additiv, σ-subadditiv, σ-endlich, endlich, monoton sowie Nullmenge und μ-fast überall werden wie für Maße definiert. (Man ersetze überall $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{P}(X)$)
2. Ein äußeres Maß ist monoton, σ-subadditiv und insbesondere endlich subadditiv (d.h. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$)

Def. II.2
Sei μ äußeres Maß auf X. Die Menge $A \subseteq X$ heißt **$\boldsymbol{\mu}$-messbar**, falls $\forall S \subseteq X$ gilt:

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A).$$

Das System aller μ-messbaren Mengen wird mit $\boldsymbol{\mathcal{M}(\mu)}$ bezeichnet.

Bem.:
Da $S = (S \cap A) \cup (S \setminus A)$ folgt aus Def. II.1:

$$\mu(S) \leq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$$

d.h.: A messbar $\Leftrightarrow \mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \;\forall\; S \subseteq X$

Bsp.:
Jedes auf $\mathcal{P}(X)$ definierte Maß ist ein äußeres Maß (Satz I.7), also sind das DiracMaß und das Zählmaß äußere Maße.

Satz II.3
Sei $\mathcal{Q}$ ein System von Teilmengen einer Menge X, welches die leere Menge enthält, und sei $\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion auf $\mathcal{Q}$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Definiere die Mengenfunktion $\mu(E) := \inf\{\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(P_i) | \ P_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i\}$.
Dann ist μ ein äußeres Maß. $(\inf \emptyset = \infty)$

Beweis. Mit $\emptyset \subseteq \emptyset \in \mathcal{Q}$ folgt $\mu(\emptyset) = 0$.
Sei $E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ mit $E, E_i \subseteq X$ und $\mu(E_i) < \infty$.

<u>z.z.:</u> $\mu(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$
Wähle Überdeckungen $E_i \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} P_{i,j}$ mit $P_{i,j} \in \mathcal{Q}$, so dass zu $\epsilon > 0$ gegeben gilt:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(P_{i,j}) < \mu(E_i) + 2^{-i} * \epsilon \ , \forall i \in \mathbb{N}$$

$\implies E \subseteq \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} P_{i,j}$ und damit $\mu(E) \leq \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \lambda(P_{i,j}) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (\mu(E_i) + 2^{-i} * \epsilon) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i) + \epsilon$
Mit $\epsilon > 0$ folgt $\mu(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$ □

Satz II.4
Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ äußeres Maß auf X. Für M $\subseteq X$ gegeben erhält man durch $\mu \llcorner M : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty], \mu \llcorner M(A) := \mu(A \cap M)$ ein äußeres Maß $\mu \llcorner M$ auf X, welches wir **Einschränkung** von μ auf M nennen.
Es gilt:

$$A \ \mu\text{-messbar} \implies A \ \mu \llcorner M\text{-messbar}$$

Beweis. Aus der Definition folgt sofort, dass $\mu \llcorner M$ ein äußeres Maß ist. Weiter gilt für $A \subseteq X$ μ-messbar und $S \subseteq X$ beliebig:

$$\begin{aligned}
\mu \llcorner M(S) &= \mu(S \cap M) \\
&\geq \mu((S \cap M) \cap A) + \mu((S \cap M) \setminus A) \\
&= \mu((S \cap A) \cap M) + \mu((S \setminus A) \cap M) \\
&= \mu \llcorner M(S \cap A) + \mu \llcorner M(S \setminus A)
\end{aligned}$$

$\implies$ Behauptung □

Satz II.5
μ äußeres Maß auf X. Dann gilt:

$$N \ \mu\text{-Nullmenge} \implies N \ \mu\text{-messbar}$$
$$N_k, k \in \mathbb{N}, \mu\text{-Nullmengen} \implies \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k \ \mu\text{-Nullmenge}$$

Beweis. Sei $\mu(N) = 0$. Für $S \subseteq X$ folgt aus Monotonie:
$\mu(S \cap N) \leq \mu(N) = 0$, $\mu(S) \geq \mu(S \setminus N) = \mu(S \cap N) + \mu(S \setminus N) \implies N$ μ-messbar
Zweite Behauptung folgt aus σ-Subadditivität. □

Bem.:
$\mathcal{M}(\mu)$ enthält alle Nullmengen $N \subseteq X$ und damit auch deren Komplemente (siehe Satz II.7). Es kann sein, dass keine anderen Mengen μ-messbar sind.

Bsp.:
Auf X bel. definiere: $\beta(A) = \begin{cases} 0 & , A = \emptyset \\ 1 & , \text{ sonst} \end{cases}$ β ist äußeres Maß.
Es sind nur $\emptyset$ und X β-messbar, denn für $X = S$ folgt aus der Annahme, dass A β-messbar ist: $1 \geq \beta(A) + \beta(X \setminus A)$

Vorlesung 5
16.11.20

Lemma II.6
Seien $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$, $i = 1, ..., k$, paarweiße disjunkt und μ äußeres Maß. Dann gilt $\forall S \subseteq X$:

$$\mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(S \cap A_i)$$

Beweis. $\underline{k = 1}$: trivial
$\underline{k \geq 2}$: A_k μ-messbar

$$\begin{aligned}
\mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) &= \mu((S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) \cap A_k) + \mu((S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) \setminus A_k) \\
&= \mu(S \cap A_k) + \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_k) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \sum_{i=1}^{k} \mu(S \cap A_i)
\end{aligned}$$

□

Satz II.7
Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist $\mathcal{M}(\mu)$ eine σ-Algebra und μ ist ein vollständiges Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Beweis. Notation: Schreibe $\mathcal{M}$ statt $\mathcal{M}(\mu)$
Es gilt:

- $x \in \mathcal{M}$, denn: $\forall S \subseteq X$ ist:
  $\mu(S \cap X) + \mu(S \setminus X) = \mu(S) + \mu(\emptyset) = \mu(S)$
- Sei $A \in \mathcal{M} \implies X \setminus A \in \mathcal{M}$, denn $\forall S \subset X$ gilt:
  $\mu(S \cap (X \setminus A)) + \mu(S \setminus (X \setminus A)) = \mu(S \setminus A) + \mu(S \cap A) = \mu(S)$

Als nächstes zeigen wir:
$A, B \in \mathcal{M} \implies A \cap B \in \mathcal{M}$ $\forall S \subseteq X$ gilt:

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \\ \mu(S \cap A) &= \mu(S \cap A \cap B) + \mu((S \cap A) \setminus B) \\ \mu(S \setminus (A \cap B)) &= \mu((S \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu((S \setminus (A \cap B)) \setminus A) \\ &= \mu((S \cap A) \setminus B) + \mu(S \setminus A) \end{aligned}$$

$\implies \mu(S) = \mu(S \cap (A \cap B)) + \mu(S \setminus (A \cap B))$
$\implies A \cup B \in \mathcal{M}$, denn:
$A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))$

Per Induktion:
$\mathcal{M}$ ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten und Vereinigungen.

<u>Jetzt:</u> μ ist σ-additiv auf $\mathcal{M}$.
Seien $A_j, j \in \mathbb{N}$, paarweiße disjunkt mit $A_j \in \mathcal{M}$ $\forall j \in \mathbb{N}$
Wähle $S = A_1 \cup A_2$ und benutze $A_1 \in \mathcal{M}$
$\implies \mu(S) = \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ $(= \mu(S \cap A_1) + \mu(S \setminus A_1))$

Induktion: Dasselbe gilt für endliche disjunkte Vereinigungen.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) &= \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \lim_{k \to \infty} \mu(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) \\ &\leq \mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) \overset{\sigma\text{-Subadd.}}{\leq} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) \end{aligned}$$

$\implies \mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) \implies$ Behauptung

Als letztes: $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen
Seien $A_j \in \mathcal{M}, j \in \mathbb{N}$. O.B. seien A_j paarweise disjunkt, sonst betrachte

$\tilde{A}_i := A_i \setminus (A_1 \cup ... \cup A_{i-1})$
Für $S \subseteq X$ folgt mit $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{M}$:

$$\mu(S) = \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i)$$
$$\overset{\text{Lemma II.6}}{\geq} \sum_{i=1}^{k} \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Lasse $k \to \infty$

$$\implies \mu(S) \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)$$
$$\overset{\sigma\text{-Subadd.}}{\geq} \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (S \cap A_i)) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)$$
$$= \mu(S \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)) + \mu(S \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)$$
$$\implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}$$

Vollständigkeit von μ: siehe Lemma II.5 □

Lemma II.8
μ äußeres Maß, $A_i \in \mathcal{M}(\mu), i \in \mathbb{N}$.
Dann gelten:

i) Aus $A_1 \subseteq ... \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq ...$ folgt $\mu(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim\limits_{i \to \infty} \mu(A_i)$

ii) Aus $A_1 \supseteq ... \supseteq A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq ...$ mit $\mu(A_1) < \infty$ folgt $\mu(\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim\limits_{i \to \infty} \mu(A_i)$

Beweis. Folgt aus Satz I.7 und Satz II.7 □

Def. II.9
Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **$\bigcup$-stabil** (bzw. **$\bigcap$-stabil**, **$\setminus$-stabil**), wenn $A \cup B \in \mathcal{A}$ (bzw. $A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ gilt.

Bem.:
$\bigcup$-stabil impliziert Stabilität bzgl. endlicher Vereinigung. Ebenso $\bigcap$-stabil.

Def. II.10
Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Ring** über X, falls:

i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

ii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$

iii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

$\mathcal{R}$ heißt **Algebra**, falls zusätzlich $X \in \mathcal{R}$.

Bsp.:

i) Für $A \subset X$ ist $\{\emptyset, A\}$ ein Ring, aber für $A \neq X$ keine Algebra.

ii) System aller endlichen Teilmengen einer bel. Menge ist ein Ring.

iii) Ebenso System aller höchstens abzählbaren Teilmengen.

Bem.:
Für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$
Ringe sind $\bigcup$-stabil, $\bigcap$-stabil, $\setminus$-stabil

Def. II.11 (Im Aufschrieb II.10)
Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Ring. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ heißt **Prämaß** auf $\mathcal{R}$, falls:

i) $\lambda(\emptyset) = 0$

ii) Für $A_i \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{N}$, paarweiße disjunkt mit $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt:
$\lambda(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i)$

Bem.:
σ-subadditiv, subadditiv, σ-endlich, endlich, monoton, Nullmenge und fast-überall werden wie für Maße definiert.

Bsp.:

i) $\mathcal{R}$ Ring über X. $\lambda(A) = \begin{cases} 0 & H = \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

ii) $\mathcal{R}$ sei Ring der endlichen Teilmengen einer beliebigen Menge X und $\lambda = card|_{\mathcal{R}}$ ist Prämaß

iii) Alle Maße sind Prämaße. Inbesondere äußere Maße eingeschränkt auf die messbaren Mengen.

Def. II.12 (Im Aufschrieb II.11)
λ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ein äußeres Maß μ auf X (bzw. ein Maß auf $\mathcal{A}$) heißt **Fortsetzung** von λ, falls gilt:

i) $\mu|_{\mathcal{R}} = \lambda$, d.h. $\mu(A) = \lambda(A)\ \forall A \in \mathcal{R}$

ii) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$ (bzw. $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$), d.h. alle $A \in \mathcal{R}$ sind μ-messbar

Satz II.13 (Caratheodory-Fortsetzung — Im Aufschrieb II.12)
$\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ das in Satz II.3 aus $\mathcal{R}$ konstruierte äußere Maß, d.h. $\forall E \subseteq X$:

$$\mu(E) := inf\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\}$$

Dann ist μ eine Fortsetzung von λ.
μ heißt **induziertes äußeres Maß** oder **Caratheodory-Fortsetzung** von λ.

Beweis.

i) $\mu(A) = \lambda(A)\ \forall A \in \mathcal{R}$
Wir haben $\mu(A) \leq \lambda(A)$ aus Def. mit $A_1 = A, A_2 = ... = \emptyset$
Für $\lambda(A) \leq \mu(A)$ reicht es zz, dass:
$A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{R} \implies \lambda(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i)$
Betrachte paarweise disjunkte Mengen $B_i = (A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j) \cap A \in \mathcal{R}$
$\implies \lambda(A) = \lambda(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(B_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i)$

ii) Jedes $A \in \mathcal{R}$ ist μ-messbar.
Sei $A \in \mathcal{R}, S \subseteq X$ bel. mit $\mu(S) < \infty$. Zu $\epsilon > 0$ wähle $A_i \in \mathcal{R}$, sodass $S \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i \cap A)$ und $S \setminus A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i \setminus A)$

$$\begin{aligned}\implies \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i \cap A) + \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i \setminus A) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i) \leq \mu(S) + \epsilon\end{aligned}$$

Lasse $s \downarrow 0 \implies A \in \mathcal{M}(\mu)$
Für $\mu(S) = \infty$ ist das trivial.

□

Lemma II.14 (Im Aufschrieb II.13)
μ sei Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ auf dem Ring $\mathcal{R}$ über X. Sei $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\tilde{\mu} = \mu$ auf $\mathcal{R}$, dann gilt $\forall E \in \sigma(\mathcal{R})$:
$\tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$

Beweis. $\forall E \in \sigma(\mathcal{R}) : E \subseteq \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} P_i$ mit $P_i \in \mathcal{R}$
$\implies \tilde{\mu}(E) \leq \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(P_i) = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \lambda(P_i)$
Bilde Infimum über alle solche Überdeckungen
$\implies \tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$ □

Vorlesung 6
20.11.20

Satz II.15 (Im Aufschrieb II.14)
Sei $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ex. ein Maß μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu = \lambda$ auf $\mathcal{R}$. Diese Fortsetzung ist eindeutig, falls λ σ-endlich ist.

Beweis. Existenz folgt aus Satz II.13 und Satz II.7 ($\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}(\mu)$). Sei $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\tilde{\mu} = \lambda$ auf $\mathcal{R}$. Für $A_i \in \mathcal{R}$ und $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A \in \sigma(\mathcal{R})$ folgt aus Satz I.7. $\tilde{\mu}(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \tilde{\mu}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \mu(A)$. Für $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu(E) < \infty$ und $\epsilon > 0$ ex. Mengen $A_i \in \mathcal{R}, A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ mit $E \subseteq A$ und $\mu(A) \leq \mu(E) + \epsilon \implies \mu(A \setminus B) \leq \epsilon$.
Aus $\mu(A) = \tilde{\mu}(A)$ und Lemma II.14 (i.A. II.13) folgt
$\mu(E) \leq \mu(A) = \tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(E) + \tilde{\mu}(A \setminus E) \leq \tilde{\mu}(E) + \mu(A \setminus E) \leq \tilde{\mu}(E) + \epsilon$.
Lasse $\epsilon > 0$ und betrachte $\tilde{\mu}(E) \leq \mu(E)$(Lemma II.14 / i.A. II.13) $\implies \mu(E) = \tilde{\mu}(E)$.
Sei nun λ σ-endlich. Dann ex. o.B.d.A. paarweise disjunkte $X_n \in \mathcal{R}$ mit $\mu(X_n) < \infty$ und $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Für $E \in \sigma(\mathcal{R})$ bel. folgt:
$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(E \cap X_n) = \tilde{\mu}(E) \implies \mu = \tilde{\mu}$ auf $\sigma(\mathcal{R})$. □

Satz II.16 (Regularität der Caratheodory-Fortsetzung — i.A. II.15)
Sei μ Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ auf Ring $\mathcal{R}$ über X. Dann ex. $\forall D \subseteq X$ ein $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supseteq D$ und $\mu(E) = \mu(D)$.
(μ ist „reguläres “äußeres Maß)

Beweis.
$\mu(D) = \infty \to$ Wähle $E = X$

$\mu(D) \leq \infty$: Aus Def. von Caratheodory-Fortsetzung folgt $\forall n \in D \subseteq E^n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^n$ mit $A_i^n \in \mathcal{R}$ und $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i^n) \leq \mu(D) + \frac{1}{n}$. Wähle $E := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E^n \implies E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $D \subseteq E$ und

$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:
$\mu(D) \leq \mu(E) \leq \mu(E^n) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^n) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i^n) \leq \mu(D) + \frac{1}{n} < \infty$. $n \to \infty \implies \mu(E) = \mu(D)$. $\square$

Satz II.17 (i.A. II.16)
Sei λ ein σ-endliches Prämaß auf Ring $\mathcal{R}$ über X und sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ die Caratheodory-Fortsetzung von λ. Dann ist $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$ die Vervollständigung von $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}$ und $\mathcal{M}(\mu)$ ist die vervollständigte σ-Algebra von $\overline{\sigma(\mathbb{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathbb{R})}}$.
D.h. $\overline{\sigma(\mathbb{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathbb{R})}} = \mathcal{M}(\mu)$. Insbesondere ex. genau eine Fortsetzung von $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ zu einem vollständigen Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Beweis. Satz II.7 $\implies \mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$ ist vollständiges Maß.
Satz I.10 $\implies \sigma(\mathcal{R})_{\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$. Sei $D \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $\mu(D) < \infty$. Wähle $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $D \subseteq E$.
Aus Satz II.16 (i.A. II.15) $\implies \mu(D) = \mu(E) = \mu(E \cap D) + \mu(E \setminus D) = \mu(D) + \mu(E \setminus (D)) \implies \mu(E \setminus D) = 0$.
λ σ-endlich $\implies \exists X_n \in \mathcal{R}$ mit $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ und $\mu(X_n) < \infty \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Für $D \in \mathcal{M}(\mu)$ bel. setze $D_n := \bigcup\limits_{k=1}^{n} D \cap X_k \implies D_n \subseteq D_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(D_n) < \infty$, $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$.
Wie bewiesen ex. $E_n \supset D_n$ mit $E_n \in \sigma(\mathcal{R})$ und $\mu(E_n \setminus D_n) = 0$. Für $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \supset D$ folgt $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu(E \setminus D) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \setminus D_n) = 0$.
Satz II.16 (i.A. II.15) $\implies \exists N \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $N \supset (E \setminus D)$ und $\mu(E \setminus D) = \mu(N) = 0 \implies D = (E \setminus N) \cup (D \cap N) \implies \mathcal{M}(\mu) = \overline{\sigma(\mathbb{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathbb{R})}} \implies$ Vervollständigung von $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}$ ist $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$.
Eindeutigkeit folgt jetzt daraus und aus Satz II.15 (i.A. II.14). $\square$

Lemma II.18 (i.A. II.17)
$\lambda : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ σ-endliches Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit Caratheodory-Fortsetzung μ. $D \subseteq X$ ist genau dann μ-messbar, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

i) $\exists\, E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supseteq D$ und $\mu(E \setminus D) = 0$

ii) $\exists\, C \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $C \subseteq D$ und $\mu(D \setminus C) = 0$

Def. II.19
Ein Mengensystem $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **Halbring** über X, falls:

i) $\emptyset \in \mathcal{Q}$

ii) $P, Q \in \mathcal{Q} \implies P \cap Q \in \mathcal{Q}$

iii) $P, Q \in \mathcal{Q} \implies P \setminus Q = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ mit endlich vielen paarweise disjunkten $P_i \in \mathcal{Q}$

Bsp.:
X beliebige Menge. $\mathcal{Q} := \{\emptyset\} \cup \{\{a\} \mid a \in X\}$

Bem.:
$I \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Intervall**, wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gibt, sodass: $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$. Das System aller Intervalle bezeichnen wir mit $\mathcal{I}$.
Ein achsenparalleler n-dim. **Quader** (kurz: Quader) ist Produkt $Q = I_1 \times ... \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ von Intervallen. Das System aller Quader wird mit $\mathcal{Q}^n$ bezeichnet.

Satz II.20 (i.A. II.19)
$\mathcal{I}$ ist ein Halbring.

Beweis. $\varnothing \in \mathcal{I}$, denn $\varnothing = (a, a)$ für $a \in \mathbb{R}$ bel. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle mit Grenzen $a \leq b$ bzw. $c \leq d$. Für $I \cap J \neq \varnothing$ ist $max(a, c) \leq min(b, d)$ und $(max(a, c), min(b, d)) \subset I \cap J \subset [max(a, c), min(b, d)] \implies I \cap J \in \mathcal{I}$.
Wegen $I \setminus J = I \setminus (I \cap J)$ können wir o.B. $J \subset I$ annehmen.
Setze $I' = x \in I \setminus J : x \leq c$, $II' = x \in I \setminus J : x \geq d$.
Falls $I' \cap II' \neq \varnothing \implies c = d \in I \setminus J \implies J = \varnothing \implies I \setminus J = I$.
Andernfalls ($I' \cap II' = \varnothing$) gilt: $I \setminus J = I' \cup II'$ wobei $(a, c) \subset I' \subset [a, c]$, $(d, b) \subset II' \subset [d, d]$. $\square$

Satz II.21 (i.A. II.20)
Für $i = 1, ..., n$ sei $\mathcal{Q}_i$ Halbring über X_i. Dann ist $\mathcal{Q} := \{P_1 \times ... \times P_n \mid P_i \in \mathcal{Q}_i\}$ ein Halbring über $X_1 \times ... \times X_n$.

Beweis. Nur für $n = 2$ (Rest per Induktion)

1 Es ist $\varnothing = \varnothing \times \varnothing \in \mathcal{Q}$

2 Für $P = I_1 \times I_2$ und $Q = J_1 \times J_2$ gilt: $P \cup Q = (I_1 \cup J_1) \times (I_2 \cup J_2) \in \mathcal{Q}$

3 $P \setminus Q = ((I_1 \cup J_1) \times I_2 \setminus J_2) \cup ((I_1 \setminus J_1) \times I_2)$
Sowohl $I_2 \setminus J_2$ als auch $I_1 \setminus J_1$ sind als disjunkte Verbindungen darstellbar, da $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ Halbringe sind. $\implies$ $P \setminus Q \in \mathcal{Q}$. □

Satz II.22 (i.A. II.21)
$\mathcal{Q}^n$ ist ein Halbring.

Vorlesung 7
23.11.20

Satz II.23 (i.A. II.22)
$\mathcal{Q}$ Halbring über X und $\mathcal{F}$ sei das System aller endlichen Vereinigungen $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$ von Mengen $P_I \in \mathcal{Q}$. Dann ist $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring.

Beweis. Jeder Ring $\mathcal{R}$ mit $\mathcal{Q} \supset \mathcal{R}$ enthält $\mathcal{F}$ $\implies$ Reicht zu zeigen: $\mathcal{F}$ ist ein Ring.
Es gilt: $\varnothing \in \mathcal{F}$
$E, F \in \mathcal{F}$. Sei $E = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$, $F = \bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$, $P_1, Q_i \in \mathcal{Q}$
$\implies E \setminus F = (\bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i) \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} (P_i \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j)) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} (\bigcap\limits_{j=1}^{m} P_i \setminus Q_j)$
$E, F \in \mathcal{F} \implies E \cup F \in \mathcal{F}$.
z.z: $\mathcal{F}$ ist $\cap$-stabil
$E \cap F = (\bigcup\limits_{j=1} kP_i) \cap (\bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j) = \bigcup\limits_{i=1} k \bigcup\limits_{j=1}^{m} (P_i \cap Q_j) \in \mathcal{F}$. □

Bsp.:

1. $\mathcal{Q}^n$ alle Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$
   $\implies$ erzeugter Ring $\mathcal{F}^n$. Elemente davon nennen wir **Figuren**.

2. $\mathcal{Q} := \{\emptyset\} \cup \{\{a\} \mid a \in X\}$
   $\implies$ erzeugter Ring $\mathcal{F}$: Ring der endlichen Teilmengen von X.

Lemma II.24 (i.A. II.23)
$\mathcal{Q}$ Halbring über X, $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. $\implies$ $\sigma(\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{F})$

Beweis. $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F} \implies \sigma(\mathcal{Q}) \subset \sigma(\mathcal{F})$
$\sigma(\mathcal{Q})$ $\cup$-stabil $\implies \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{Q}) \implies \sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{Q})$ □

Lemma II.25 (i.A. II.24)
$\mathcal{Q}$ Halbring über X, $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. Zu jedem $F \in \mathcal{F}$ existieren paarweise disjunkte $P_1, ..., P_k \in \mathcal{Q}$ mit $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$

Beweis. Sei $F \in \mathcal{F}$.
Satz II.22 (i.A. Satz II.21) $\implies F = \bigcup\limits_{l=1}^{m} Q_l$ mit $Q_l \in \mathcal{Q} \implies F = \bigcup\limits_{l=1}^{m} (Q_l \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{l-1} Q_j)$,
(wobei $Q_l \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{l-1}$ paarweise disjunkt).
z.z. $Q \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} Q_i$ mit $Q, Q_1, ..., Q_n$ besitzt eine disjunkte Zerlegung in $\mathcal{Q}$.
Induktion: $n = 1$ Folgt aus Definition von Halbring. Sei $Q \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} Q_i$ disjunkte Zerlegung schon gefunden: $Q \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} Q_i = \bigcup\limits_{j=1}^{k} P_j$
$\implies Q \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} Q_i = (\bigcup\limits_{j=1}^{k} P_j) \setminus Q_{n+1} = \bigcup\limits_{j=1}^{k} (P_j \setminus Q_{n+1})$ ($P_j \setminus Q_{n+1}$ paarweise disjunkt).
Nach Def. von $\mathcal{Q}$ ist $P_j \setminus Q_{n+1}$ disjunkte Ver. von Elementen in $\mathcal{Q}$. $\square$

Def. II.26 (i.A. II.25)
Sei $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Halbring. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ heißt **Inhalt** auf $\mathcal{Q}$, falls:

i) $\lambda(\emptyset) = 0$

ii) Für $A_i \in \mathcal{Q}$ paarweiße disjunkt mit $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{Q}$ gilt: $\lambda(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda(A_i)$

λ heißt **Prämaß** auf $\mathcal{Q}$, falls λ σ-additiv auf $\mathcal{Q}$ ist.
D.h. für $A_i \in \mathcal{Q}$ paarweiße disjunkt ($i \in \mathbb{N}$) mit $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{Q} : \lambda(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$

Bem.:
σ-subadditiv, subadditiv, σ-endlich, endlich, monoton, ... sind wie vorher definiert.
Ist $\mathcal{Q}$ in Def. II.26 [i.A. II.25] ein Ring, so stimmt die Definition des Prämaßes mit Def. II.11 [i.A. II.10] überein.

Satz II.27 (i.A. II.26)
λ Inhalt auf Halbring $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. Dann ex. genau ein Inhalt $\bar{\lambda} : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ mit $\bar{\lambda}(Q) = \lambda(Q)\ \forall Q \in \mathcal{Q}$.

Beweis. $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$ mit $P_i \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt.
Lemma II.24 (i.A. Lemma II.23), so muss für jede Fortsetzung gelten:

$\bar{\lambda}(F) = \sum\limits_{i=1}^{k} \bar{\lambda}(P_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda(P_i)$
$\to$ Eindeutigkeit
Ex: Definiere $\bar{\lambda}$ durch $\bar{\lambda}(F) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda(P_i)$.
$\bar{\lambda}$ wohldefiniert. Sei $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i = \bigcup\limits_{j=1}^{l} Q_j$ paarweise disjunkt mit $Q_j \in \mathcal{Q}$.
$\implies Q_j = \bigcup\limits_{i=1}^{k} Q_j \cap P_i,\ j = 1, ..., l,\ P_i = \bigcup\limits_{j=1}^{l} P_i \cap Q_j,\ i = 1, ..., k$
$\implies \sum\limits_{j=1}^{l} \lambda Q_j = \sum\limits_{j=1}^{l} \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda(P_i \cap Q_j) = \sum\limits_{j=1}^{l} \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda(Q_k \cap P_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda(P_i)$
$\implies \bar{\lambda}$ wohldefiniert
Sei $F = \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ paarweise disjunkt mit $F_i \in \mathcal{F}$, $F \in \mathcal{F}$. Schreibe $F_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m_i} P_{i,j}$ mit $P_{i,j} \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt
$\implies \bar{\lambda}(F) = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{m_i} \bar{\lambda}(P_{i,j}) = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{m_i} \lambda(P_{i,j}) = \sum\limits_{i=1}^{k} \bar{\lambda}(F_i) \implies \bar{\lambda}$ Inhalt. □

Lemma II.28 (i.A. II.27)
λ Inhalt auf Halbring $\mathcal{Q}$ über X
$\implies \lambda$ ist monoton und subadditiv

Beweis. Satz II.27 (i.A. Satz II.26) $\implies$ o.B. $\mathcal{Q}$ ist Ring
$\implies P, Q \in \mathcal{Q},\ Q \supset P \implies \lambda(Q) = \lambda(P) + \lambda(Q \setminus P) \geq \lambda(P) \to \lambda$ ist monoton.
Für $P_i \in \mathcal{Q}$, $i = 1, ..., k$ folgt
$\lambda(\bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i) = \lambda(\bigcup\limits_{i=1}^{k} (P_i \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{i-1} P_j))) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda(P_i \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{i-1} P_j)) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda(P_i)$ □

Bsp.:
Auf $\mathcal{Q}^n$ elementargeometrisches Volumen vol^n.
Sei $Q \in \mathcal{Q}$ mit $Q = I_1 \times ... \times I_n, I_j \subseteq \mathbb{R}$ Intervall mit Intervallgrenzen $a_j \leq b_j$
$vol^n(Q) = \prod\limits_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \geq 0$

Satz II.29 (i.A. II.28)
$vol^n(.)$ ist ein Inhalt auf $\mathcal{Q}^n$

Beweis. $vol^n(\emptyset) = 0$
Endliche Additivität per Induktion
Für n=1 sind $\mathcal{Y}_{I_j}$ Riemann-Int. und für $I_1, ..., I_k$ paarweise disjunkt gilt:
$vol^1(\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i) = \int\limits_{\mathbb{R}} \sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{Y}_{I_i}(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{k} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{Y}_{I_i}(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{k} vol^1(I_i)$.
Sei jetzt Aussage für vol^{n-1} im $\mathbb{R}^{n-1}$ schon bewiesen. Betrachte für $Q = I_1 \times ... \times I_m \in \mathcal{Q}^n$ den y-Schnitt.

$Q^y = x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,y) \in Q = I_1 \times ... \times I_{n-1}$ falls $y \in I_n$ ($\varnothing$ sonst).
Es gilt: $vol^{n-1}(Q^y) = vol^{n-1}(I_1 \times ... \times I_{n-1})\mathcal{Y}_{I_n}(y)$ und für jede paarweise disjunkte Zerlegung von $Q = \bigcup i = 1^k Q_i$ mit $Q_i \in \mathcal{Q}^n$ gilt:

$$Q^y = (\bigcup_{i=1}^k Q_i)^y = \bigcup_{i=1}^k Q_i^y$$

$$\implies vol^n(\bigcup_{i=1}^k Q_i) = vol^n(Q) = vol^{n-1}(I_1 \times ... \times I_{n-q})vol^1(I_n)$$

$$= vol^{n-1}(I_1 \times ... \times I_{n-1}) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{Y}_{I_n}(y)dy = \int_{\mathbb{R}} vol^{n-1}(\bigcup_{i=1}^k Q_i^y)dy = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} vol^{n-1}(Q_i^y)dy$$

$$= \sum_{i=1}^l vol^n(Q_i)$$

□

Satz II.30 (i.A. II.29)
$\lambda : \mathcal{Q} \to [0,\infty]$ Prämaß auf Halbring $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring und $\bar{\lambda} : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ der eindeutig bestimmte Inhalt auf $\mathcal{R}$ mit $\bar{\lambda}|_{\mathcal{Q}} = \lambda$ (Satz II.27 / i.A. II.26), so ist $\bar{\lambda}$ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$.

Beweis. Sei $F = \bigcup_{i=1}^\infty F_i$ mit F, $F_i \in \mathcal{R}$ und F_i paarweise disjunkt.

Lemma II.25 (i.A. Lemma II.24) $\implies$ $\exists$ paarweise disjunkte Zerlegungen $F = \bigcup_{j=1}^k P_j$ und $F_i = \bigcup_{k=1}^{k_i} P_{i,k}$ mit P_j, $P_{i,k} \in \mathcal{Q}$

$$\implies P_j = \bigcup_{i=1}^\infty (P_j \cap F_i) = \bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{k=1}^{k_i} (P_j \cap P_{i,k}) \text{ paarweise disjunkt}$$

$$\lambda \text{ Prämass} \implies \lambda(P_j) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^{k_i} \lambda(P_j \cap P_{i,k}) = \sum_{i=1}^\infty \bar{\lambda}(P_j \cap F_i)$$

$$\implies \bar{\lambda}(F) = \sum_{j=1}^k \lambda(P_j) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^\infty \bar{\lambda}(P_j \cap F_i) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}(p_j \cap F_i) = \sum_{i=1}^\infty \bar{\lambda}(F_i)$$

$\implies$ $\bar{\lambda}$ ist Prämass. □

Vorlesung 8
27.11.20

Bem.:
Satz II.27 (i.A. II.26) $\implies$ $\bar{\lambda}(F) = \sum_{i=1}^n \lambda(Q_i)$ für $F \in \mathcal{R}$ mit $F = \bigcup_{i=1}^n Q_i$ mit paarweise disjunkten $Q_i \in \mathcal{Q}$ (Lemma II.25 / i.A. II.24). Betrachte äußere Maße für λ auf $\mathcal{Q}$ und $\bar{\lambda}$ auf $\mathcal{R}$ aus Satz II.3.

Es gilt: $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}, \lambda = \bar{\lambda}$ auf $\mathcal{Q}$

$$\begin{aligned}
&inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(Q_k) \mid Q_k \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k\} \\
&\geq inf\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(\bar{F}_i) \mid F_i \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\} \\
&= inf\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{j_i} \lambda(Q_{i,j}) \mid F_i = \bigcup_{j=1}^{j_i} Q_{i,j}, Q_{i,j} \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{j_i} Q_{i,j}\} \\
&= inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(Q_k) \mid Q_k \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k\}
\end{aligned}$$

Satz II.31 ((i.A. II.30))
$\lambda : \mathcal{Q} \to [0,\infty]$ Prämaß auf Halbring $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ das in Satz II.3 aus $\mathcal{Q}$ konstruierte äußere Maß, d.h. $\forall E \subseteq X$ ist:

$$\mu(E) = inf\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\}$$

Dann ist μ eine Fortsetzung von λ.

Bem.:
Satz II.16 (i.A. II.15) $\implies$ μ ist reguläres äußere Maß
Satz II.7 $\implies$ μ ist vollständiges Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$
$(X, \mathcal{M}(\mu), \mu|_{\mathcal{M}(\mu)})$ ist Vervollständigung von $(X, \sigma(\mathcal{Q}), \mu|_{\sigma\mathcal{Q}})$ und ist auf $\mathcal{M}(\mu)$ eindeutig bestimmt (Satz II.17 / i.A. II.16).
Speziell: $D \subseteq X$ μ-messbar $\Leftrightarrow \exists\, C \in \sigma(\mathcal{Q})$ mit $C \subseteq D$ und $\mu(D \setminus C) = 0$ (Lemma II.18 / i.A. II.17)

Satz II.32 ((i.A. II.31))
Für einen Inhalt λ auf Ring $\mathcal{R}$ und $A_i \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{N}$, betrachte:

i) λ ist Prämaß auf $\mathcal{R}$

ii) Für $A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq ...$ mit $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt: $\lambda(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$

iii) Für $A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq ...$ mit $\lambda(A_1) < \infty$ und $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt:
$\lambda(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$

iv) Für $A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq ...$ mit $\lambda(A_1) < \infty$ und $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset$ gilt: $\lim_{i\to\infty} \lambda(A_i) = 0$

Dann gilt: i) $\Leftrightarrow$ ii) $\implies$ iii) $\implies$ iv)
Ist λ endlich, d.h. $\lambda(A) < \infty\ \forall A \in \mathcal{R}$, dann sind i) - iv) äquivalent.

Beweis. i) $\implies$ ii) $\implies$ iii) Siehe Beweis von Satz I.7
iii) $\implies$ iv) ist trivial
ii) $\implies$ i) Seien $A_n \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt mit $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$
$\implies B_n := \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ erfüllt Bed. von ii) mit $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$
$\implies \lambda(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$
λ endlich. z.z. iv) $\implies$ ii)
Sei $(A_i) \subset \mathcal{R}$ monoton aufsteigende Folge mit $A := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$. Für $B_n := A \setminus A_n$ gilt $B_n > B_{n+1}$ und $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$.
iv) $\implies \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(B_n) = 0 \implies \lambda(B_n) = \lambda(A \setminus A_n) = \lambda(A) - \lambda(A_n)$
$\implies \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda(A) = \lambda(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) \implies$ ii) $\square$

III Das Lebesgue-Maß

Lemma III.1
Der elementargeometrische Inhalt $vol^n : \mathcal{Q}^n \to [0,\infty]$ ist ein Prämaß auf dem Halbring $\mathcal{Q}^n$ im $\mathbb{R}^n$

Beweis. Sei $P = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i$ mit $P_i \cap P_j = \varnothing$ für $i \neq j$, P,$P_i \in \mathcal{Q}^n$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Satz II.27 (i.A. Satz II.26) $\implies$ vol^n ist Inhalt auf Ring $\mathcal{F}^n$ $\implies$ $\sum\limits_{i=1}^{\infty} vol^n(P_i)$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{k} vol^n(P_i) = \lim\limits_{k\to\infty} vol^n(\bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i) \leq vol^n(P)$.
Wähle zu $\epsilon > 0$ offene Quader $Q_i \supset P_i$ und einen kompakten Quader $Q \subset P$ mit $\sum\limits_{i=1}^{\infty} vol^n(Q_i) < \sum\limits_{i=1}^{\infty} vol^n(P_i) + \frac{\epsilon}{2}$, $vol^n(P) < vol^n(Q) + \frac{\epsilon}{2}$.
Satz von Heine-Borel (Satz (XIV).22 Ana1): Q wird von endlich vielen Quadern
$Q_i \times ... \times Q_k$ überdeckt ($Q \subset P = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$)

$\implies vol^n(P) < vol^n(Q) + \frac{\epsilon}{2} \leq \sum\limits_{i=1}^{k} vol^n(Q_i) + \frac{\epsilon}{2} < \sum\limits_{i=1}^{\infty} vol^n(P_i) + \epsilon$.

Lasse $\epsilon > 0 \implies vol^n(P) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} vol^n(P_i)$. □

Def. III.2
Das **n-dimensionale äußere Lebesgue-Maß** einer Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\lambda^n(E) := inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} vol^n(Q_k) \mid Q_k \in \mathcal{Q}^n, E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k\}$$

$\lambda^n|_{\mathcal{M}(\lambda^n)}$ ist das **n-dimensionale Lebesguemaß**.

Bem.:
Bem nach Satz II.31 (i.A. II.30) $\implies$ λ^n regulär und vollständig auf $\mathcal{M}(\lambda^n)$

Lemma III.3
Betrachte für $k \in \mathbb{N}_0$ die Würfelfamilie $\mathcal{W}_k = \{Q_{k,m} := 2^{-k}(m + [0,1]^n) \mid m \in \mathbb{R}^n\}$ und definiere für $E \subseteq \mathbb{R}^n$ die Mengen

$$F_k(E) := \bigcup\{Q \in \mathcal{W}_k \mid Q \subseteq E\} \quad F^k(E) := \bigcup\{Q \in \mathcal{W}_k \mid Q \cap E \neq \emptyset\}$$

Dann gilt:

i) $F_k(E)$ und $F^k(E)$ sind abgeschlossene Vereinigungen von abzählbar vielen kompakten Quadern mit paarweise disjunktem Inneren.

ii) $F_1(E) \subseteq F_2(E) \subseteq ... \subseteq E \subseteq ... \subseteq F^2(E) \subseteq F^1(E)$

iii) $F_k(E) \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid dist(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > s^{-k}\sqrt{n}\}$
$F^k(E) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid dist(x, \mathbb{R}^n \setminus E) \leq s^{-k}\sqrt{n}\}$

iv) $\mathring{E} \subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} F_k(E) \subseteq E \quad , \quad \bar{E} \supseteq \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} F^k(E) \supseteq E$

Beweis. $\bigcup\{Q : Q \in W_k\} = \mathbb{R}^n \ \forall k \in \mathbb{N}$.
W_k hat abzählbar viele Elemente, die Würfel aus W_k sind kompakt mit paarweise disjunktem Inneren und jede beschränkte Menge wird nur von endlich vielen Würfeln aus W_k getroffen. $\implies F_k(E)$, $F^k(E)$ sind abgeschlossen $\implies$ i)
$Q_{k,m}$ ist Vereinigung der 2^n Teilwürfel $Q_{k+1,2m+l}$ mit $l \in \{0,1\}^n$ und es gilt
$Q_{k,m} \subset E \implies Q_{k+1,2m+l} \subset E \ \forall l \in \{0,1\}^n$
$Q_{k+1,2m+l} \cap E \neq \varnothing \implies Q_{k,m} \cap E \neq \varnothing$ wobei $l \in \{0,1\}^n$
$\implies F_k(E) \subset F_{k+1}(E)$, $F^k(E) \supset F^{k+1}(E) \implies$ ii)
Denn für $x \in E$ bel. existiert ein $Q \in W_k$ mit $x \in Q$.
Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ mit $dist(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > 2^{-k}\sqrt{n} \implies \exists Q \in W_k$ mit $x \in Q$ und aus $dist(Q) = 2^{-k}\sqrt{n}$ folgt $Q \subset E \implies x \in F_k(E) \implies \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > 2^{-k}\sqrt{n}\} \subset F_k(E)$.
Ist $x \in F^k(E) \implies \exists Q \in W_k$ mit $x \in Q$ und $Q \cap E \neq \varnothing \implies x \in F^k(E) \implies dist(x, E) \leq dist(Q) \leq 2^{-k}\sqrt{n} \implies$ iii)
iv) folgt sofort aus iii) und Def. von $\mathring{E}$ bzw. $\bar{E}$.

□

Vorlesung 9
30.11.20

Lemma III.4
Die Borelmengen $\mathcal{B}^n$ sind die vom Halbring $\mathcal{Q}^n$ der Quader, dem Ring $\mathcal{F}^n$ der Figuren, und dem System $\mathcal{C}^n$ der abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ erzeugten σ-Algebra, d.h. $\sigma(\mathcal{Q}^n) = \mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{Q}^n) = \sigma(\mathcal{F}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n)$

Beweis. Jeder Quader ist Borelmenge:
Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist entweder offen oder abzählbarer Schnitt von offenen Intervallen und liegt damit in $\mathcal{B}^1$, z.B. $[a,b) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (a - \frac{1}{k}, b)$.

Für einen Quader $Q = I_1 \times ... \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ schreibe $I_j = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} U_{j,k}$ und damit
$Q = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (U_{1,k} \times ... \times U_{n,k}) \in \mathcal{B}^n \implies \mathcal{Q}^n \subset \mathcal{F}^n \subset \mathcal{B}^n$.
Da Figuren endl. Vereinigungen von Quadern sind und $\mathcal{B}^n$ $\cup$-stabil ist $\implies \sigma(\mathcal{Q}^n) \subset \sigma(\mathcal{F}^n) \subset \mathcal{B}^n$.
Andererseits folgt aus Lemma III.3, dass $U \subset \mathbb{R}^n$ offen als abzählbare Vereinigung von kompakten Würfeln geschrieben werden kann.
$\implies \mathcal{O}^n \subset \sigma(\mathcal{Q}^n) \implies \mathcal{B}^n \subset \sigma(\mathcal{Q}^n) \subset \sigma(\mathcal{F}^n)$
$\implies \mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{Q}^n) = \sigma(\mathcal{F}^n)$
Abgeschlossene mengen sind Komplemente von offenen Mengen
$\implies \sigma(\mathcal{C}^n) = \sigma(\mathcal{O}^n) = \mathcal{B}^n$ □

Satz III.5
Für λ^n gilt:

1. Alle Borelmengen sind Lebesgue-messbar
2. Zu $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\exists$ Borelmenge $B \supseteq E$ mit $\lambda^n(B) = \lambda^n(E)$
3. $\lambda^n(K) < \infty$ $\forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt

Beweis.

1 Satz II.31 (i.A. Satz II.30) $\implies \mathcal{Q}^n \subset \mathcal{M}(\lambda^n) \implies \sigma(\mathcal{Q}^n) = \mathcal{B}^n \subset \mathcal{M}(\lambda^n)$ nach Lemma III.4

2 Folgt aus Bem. nach Satz II.31 (i.A. Satz II.30)

3 Es gilt $\lambda^n = vol^n$ auf $\mathcal{Q}^n$
$\implies$ Für $a > 0$ bel. ist $\lambda^n([-a,a]^n) = vol^n([-a,a]^n) = (2a)^n < \infty$ $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\exists a < \infty : K \subset [-a,a]^n \implies$ Beh. □

Lemma III.6
Für $E \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig gilt:

i) $\lambda^n(E) = inf\{\lambda^n(U) \mid U \text{ offen }, U \supset E\}$

ii) $\lambda^n(E) = inf\{\lambda^n(K) \mid K \text{ kompakt }, K \subset E\}$, falls E λ^n-messbar

Beweis.

i) Trivial: $\lambda^n(E) \leq inf\{\lambda^n(U) : U \text{ offen}, U \supset E\}$
"$\geq$": O.B. $\lambda^n(E) < \infty$. Def. von $\lambda^n \implies$ Zu $\epsilon > 0$ $\exists$ Überdeckung $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i$ mit $P_i \in \mathcal{Q}^n$, sodass gilt: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} vol^n(P_i) < \lambda^n(E) + \epsilon$.
O.B. $\forall P_i$ sind offen

$\implies U = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ offen

$\implies E \subset U$ und $\lambda^n(U) \leq \sum_{i=1}^{\infty} vol^n(P_i) < \lambda^n(E) + \epsilon$.

ii) Klar: $\lambda^n(E) \geq sup\{\lambda^n(K) : K \text{ kompakt}, K \subset E\}$
"$\leq$":

a) B beschränkt
Wähle $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $E \subset K_0 \implies$ Zu $\epsilon > 0$ $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $U \supset K_0 \setminus E$ und $\lambda^n(U) < \lambda^n(K_0 \setminus E) + \epsilon = \lambda^n(K_0) - \lambda^n(E) + \epsilon$
Nun ist $K := K_0 \setminus U \subset K_0 \setminus (K_0 \setminus E) = E$ kompakt
$\implies \lambda^n(K) = \lambda^n(K_0) - \lambda^n(K_0 \cap U) \geq \lambda^n(K_0) - \lambda^n(U) > \lambda^n(E) - \epsilon$
$\epsilon \to 0 \implies$ Beh.

b) E λ^n-messbar beliebig
Betrachte $E_j := E \cap \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq j\}$ E_j beschränkt und λ^n-messbar
$\implies \lambda^n(E_j) = sup\{\lambda^n(K) : K \text{ kompakt}, K \subset E_j\} \leq sup\{\lambda^n(K) : K \text{ kompakt}, K \subset E\}$
Aber $\lambda^n(E_j) \to \lambda^n(E)$ mit $j \to \infty$ nach Satz I.7 $\implies$ Beh.

□

Satz III.7
$D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann λ^n-messbar, wenn eine der beiden Bedingungen gilt:

i) $\exists$ Borlemenge $E \supset D$ mit $\lambda^n(E \setminus D) = 0$

ii) $\exists$ Borlemenge $C \subset D$ mit $\lambda^n(D \setminus C) = 0$

Es kann $E = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$ mit U_i offen und $C = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ mit A_j abgeschlossen gewählt werden.

Beweis. Äquivalenz von i) bzw. ii) mit λ^n-Messbarkeit von (?) wurde in Lemma II.18 (i.A. Lemma II.17) gezeigt.
Sei D λ^n-messbar. Schreibe $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ mit $D_j = \{x \in D : j-1 \leq ||x|| < j\}$
Lemma III.6 $\implies \exists U_{i,j}$ offen bzw. $K_{i,j}$ kompakt mit $U_{i,j} \supset D_j \supset K_{i,j}$ und $\lambda^n(U_{i,j}) < \lambda^n(D_j) + \frac{2^{-j}}{i}$, $\lambda^n(K_{i,j}) > \lambda^n(D_j) - \frac{2^{-j}}{i}$
$\implies U_i := \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{i,j}$ offen und $A_i := \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{i,j}$ abgeschlossen ($K_{i,j} \cap K_{i,m} = \varnothing$ for $j \neq m$)
und es gilt: $U_i \supset D \supset A_i$
Mit $E := \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, $C := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gelten für $i \in \mathbb{N}$:

$\lambda^n(E \setminus D) \leq \lambda^n(U_i \setminus D) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(U_{i,j} \setminus D_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^n(U_{i,j}) - \lambda^n(D_j)) \leq \frac{1}{i}$

$\lambda^n(D \setminus C) \leq \lambda^n(D \setminus A_i) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(D_j \setminus K_{i,j}) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^n(D_j) - \lambda^n(K_{i,j})) \leq \frac{1}{i}$

Mit $i \to \infty$ folgt Beh. □

Satz III.8 (Satz von Lusin)
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $\lambda^n(A) < \infty$ und sei f λ^n-messbar auf A mit Werten in $\mathbb{R}$. Dann existiert $\forall \epsilon > 0$ ein $K = K_\epsilon \subseteq A$ kompakt, mit:

i) $\lambda^n(A \setminus K) < \epsilon$

ii) $f|_k$ ist stetig

Beweis. Kap II. $\implies$ oBdA ist f auf ganz A definiert, d.h. $f : A \to \mathbb{R}$. Für $i \in \mathbb{N}$ setze
$B_{i(2k+1)} := [\frac{k}{i}, \frac{k+1}{i}]$, $k \in \mathbb{N}_0$
$B_{i(2k)} := [-\frac{k}{i}, -\frac{k-1}{i}]$, $k \in \mathbb{N}_0$
$B_{i(j)}$, $j \in \mathbb{N}_0$, sind paarweise disjunkt mit $\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}_o} B_{i(j)} = \mathbb{R}$ und (?)($B_{i(j)} = \frac{1}{i}$)
$A_{i,j} := f^{-1}(B_{i(j)})$ sind λ^n-messbar und $A = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}_0} A_{ij}$.
Lemma III.6 ii) $\implies \exists K_{ij} \subset A_{ij}$ kompakt mit $\lambda^n(A_{ij \setminus K_{ij}}) < \frac{\epsilon}{2^{i+j}}$
$\implies \lambda^n(A \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} K_{il}) = \lambda^n(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{ij} \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} K_{il}) \leq \lambda^n(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (A_{ij} \setminus K_{ik})) < \frac{\epsilon}{2^i}$
Satz I.7 ii) $\implies \lim\limits_{N \to \infty} \lambda^n(A \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{N} K_{il}) = \lambda^n(A \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} K_{il}) < \frac{\epsilon}{2^i}$
$\implies \exists N(i)$ mit $\lambda^n(A \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{N(i)} K_{ij}) < \frac{\epsilon}{2^i}$
$\implies D_i := \bigcup\limits_{j=1}^{N(i)} K_{ik}$ ist kompakt.
$\forall i, j$ wählen wir $b_{ij} \in B_{i(j)}$ und definiere $g_i : D_i \to \mathbb{R}$ durch $g_i(x) := b_{ij}$ $\forall x \in K_{ij}$ $(j \leq N(i))$
$K_{i1}, ..., K_{iN(i)}$ sind kompakt, paarweise disjunkt
$\implies$ Sie haben positiven Abstand voneinander
$\implies$ g_i ist stetig
Aus Konstruktion folgt

$$|f(x) - g_i(x)| \leq \frac{1}{i} \; \forall x \in D_i \tag{III.1}$$

Setze $K := \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i \implies K$ ist kompakt und $\lambda^n(A \setminus K) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda^n(A \setminus D_i) < \epsilon$
Aus III.1 und Def von K folgt: g_i konvergiert gleichmäßig gegen f auf K $\implies$ f ist stetig auf K. $\square$

Vorlesung 10
4.12.20

Def. III.9
Ein äußeres Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt **Borelmaß**, falls gilt:

1. Alle Borelmengen sind μ-messbar
2. $\mu(K) < \infty \ \forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt

Bem.:
λ^n ist Borelmaß nach Satz III.5.
Ein äußeres Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt **translationsinvariant**, falls
$\mu(E+a) = \mu(E) \ \forall E \subset \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$ mit $E + a := \{x + a \mid x \in E\}$
Bemerke: $vol^n : \mathcal{Q}^n \to [0,\infty]$ ist translationsinvariant $\implies$ λ^n ist translationsinvariant.

Lemma III.10
Ist μ translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$, so ist jede Koordinaten-Hyperebene $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = c\}(i = 1, ..., n)$ eine μ-Nullmenge.

Beweis. Sei $Q = [0,1]^n$ und $F = \{x \in Q : x_i = 0\}$. Für $a \in \mathbb{R}^n$ ist $F + a$ abgeschlossen $\implies$ μ-messbar. Für $\{s_i, ..., s_k\} \subset [0,1]$ folgt:
$k\mu(F) = \sum\limits_{j=1}^{k} \mu(s_j e_i + F) = \mu(\bigcup\limits_{j=1}^{k} (s_j e_i + F)) \le \mu(Q) < \infty$
k kann beliebig groß gewählt werden $\implies$ $\mu(F) = 0$.
H ist Vereinigung abzählbar vieler Translationen von F $\implies$ $\mu(H) = 0$ □

Satz III.11
Sei μ translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt mit $\theta := \mu([0,1]^n)$:

$$\mu(E) = \theta\lambda^n(E) \quad \forall\ \lambda^n\text{-messbaren } E \subseteq \mathbb{R}^n$$

Beweis. Setze $Q_{k,j} = 2^{-k}(j + [0,1]^n)$ für $k \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{R}^n$ $\implies$ $[0,1]^n$ ist Vereinigung der 2^{nk} abgeschlossenen Teilwürfel $\{Q_{k,j} : j \in J_k\}$ mit $J_k = \{j = (j_1, ..., j_n) \in \mathbb{R}^n : 0\ leq j_i \le 2^k - 1\}$ mit paarweise disjunktem Inneren. Lemma III.10
$\implies \mu([0,1]^n) = \sum\limits_{j \in J_k} \mu(Q_{k,j})$
$\lambda^n([0,1]^n) = \sum\limits_{j \in J_k} \lambda^n(Q_{k,j})$
Translationsinvarianz $\implies$ $\mu(Qk,j) = \mu(Q_{k,0})$
$\lambda^n(Q_{k,j}) = \lambda^n(Q_{k,0}) \ \forall j \in \mathbb{R}^n$
$\implies \theta = \frac{\mu([0,1]^n)}{\lambda^n([0,1]^n)} = \frac{\mu(Q_{k,0})}{\lambda^n(Q_{k,0})} = \frac{\mu(Q_{k,j})}{\lambda^n(Q_{k,j})} \ \forall j \in \mathbb{R}^n$
Lemma III.3, Lemma III.10 $\implies$ $\mu(U) = \theta\lambda^n(U) \ \forall U \supset \mathbb{R}^n$ offen
$\implies$ Beh. gilt für alle $Q \in \mathcal{Q}^n$ und damit $\forall\ \lambda^n$-messbaren Teilmengen nach Eindeutigkeit der Massfortsetzung, Satz II.17 (i.A. Satz II.16). □

Lemma III.12
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ lipschitz-stetig mit Konstante Λ bzgl. $||.||_\infty$. Dann gilt:

$$\lambda^n(f(E)) \leq \Lambda^n \lambda^n(E) \quad \forall E \subseteq U$$

Beweis. O.E. $\lambda^n(E) < \infty$
Setze $Q_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0||_\infty < \rho\}$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$
Vor $\implies ||f(x) - f(x_0)||_\infty \leq \Lambda ||x - x_0||_\infty$ für $x, x_0 \in U$
Also $Q_\rho(x_0) \subset U \implies f(Q_{rho}(x_0)) \subset Q_{\Lambda\rho}(f(x_0))$
Lemma III.6 $\implies \exists V$ offen mit $E \subset V$ und $\lambda^n(V) < \lambda^n(E) + \epsilon \;\forall\; \epsilon > 0$.
(O.E. $V \subset U$)
Weiter existiert Q_j Würfel mit paarweise disjunktem Inneren und $V = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$
$\implies \lambda^n(f(E)) \leq \lambda^n(f(V)) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda^n(f(Q_j)) \leq \Lambda^n \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda^n(Q_j) \leq \Lambda^n(\lambda(E) + \epsilon)$
Lasse $\epsilon \to 0 \implies$ Beh. □

Satz III.13
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

1. $N \subseteq U$ λ^n-Nullmenge $\implies f(N)$ λ^n-Nulllmenge
2. $E \subseteq U$ λ^n-messbar $\implies f(E)$ λ^n-messbar

Beweis. Lemma III.3 $\implies U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$, K_i kompakte Würfel
$\implies N = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i \cap N$
$f|_K$ ist Lipschitz $\forall\; K \subset U$ Kpt
$\implies$ 1) folgt aus Lemma III.12
zu 2): O.B. E beschränkt (sonst betrachte $E_m := \{x \in E : ||x|| \leq m\}$ $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$)
Satz III.7 $\implies \exists\; A_j$ kompakt und λ^n-Nullmenge N mit $E = (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j)$ und $f(A_j)$ ist kompakt und $\lambda^n(f(N)) = 0$ nach 1)
$\implies f(E) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} f(A_j) \cup f(N) \implies \lambda^n$-messbar □

Satz III.14
Sei $S \in O(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$\lambda^n(S(E) + a) = \lambda^n(E) \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n$$

Beweis. λ^n translationsinvariant $\implies$ O.E. $a = 0$.
Sei jetzt $S \in GL(\mathbb{R}^n)$ und $T := S^{-1}$.

Definiere $\mu := T(\lambda^n) : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, $E \to \mu(E) := \lambda^n(T^{-1}(E))$, d.h.
$\lambda^n(S(E)) = \mu(E)$.
Beh.: μ ist translationsinvariantes Borelmaß.
Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ Borelmenge $\to B$ λ^n-messbar (Satz III.5) $\implies T^{-1}(B) = S(B)$ λ^n-messbar (Satz III.13) $\implies B$ ist μ-messbar (s. Blatt 2)
Für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist $T^{-1}(K) = S(K)$ kompakt $\implies \mu(K) < \infty \implies \mu$ Borelmaß.
Sei $b \in \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ beliebig
$\implies \mu(E + b) = \lambda^n(S(E + b)) = \lambda^n(S(E) + S(b)) = \lambda^n(S(E)) = \mu(E) \implies$ Beh.
Satz III.11 $\implies \mu(E) = \theta(S)\lambda^n(E)$ $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ λ^n-messbar, wobei $\theta(S) = \mu([0, 1]^n) = \lambda^n(S([0, 1]^n)) \in [0, \infty]$.
Für $E \subset \mathbb{R}^n$ bel. gilt mit Lemma III.6
$\mu(E) = \lambda^n(S(E)) = inf\{\lambda^n(V) : S(E) \subset V \text{ offen}\} = inf\{\lambda^n(S(U)) : E \subset U \text{ offen}\}$
$= \theta(S)inf\{\lambda^n(U) : E \subset U \text{ offen}\}$
$\implies \mu(E) = \lambda^n(S(E)) = \theta(S)\lambda^n(E)$ $\forall E \subset \mathbb{R}^n$
Ist $S \in O(\mathbb{R}^n)$, so wähle $E = B_1(O) \implies S(B_1(O) = B_1(O))$
$\implies \mu(B_1(O)) = \lambda^n(B_1(O)) \implies \theta(S) = 1$ $\forall S \in O(\mathbb{R}^n)$
$\implies \lambda^n(S(E)) = \lambda^n(E)$ $\forall S \in O(\mathbb{R}^n)$ □

Lemma III.15 (Polarzerlegung)
$\forall S \in GL(\mathbb{R}^n)$ $\exists$ Diagonalmatrix Λ mit Einträgen $\lambda_i > 0, i = 1, ..., n$ und
$T_1, T_2 \in O(\mathbb{R}^n)$, sodass $S = T_1\Lambda T_2$

Beweis. S^TS ist symmetrisch und hat positive EW, denn für
$v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : < S^TSv, v >= ||Sv||^2 > 0$
$\implies \exists T \in O(\mathbb{R}^n)$ und Λ Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_i > 0$ $i = 1, ..., n$, sodass $S^TS = T\Lambda^2T^{-1}$.
$R := T\Lambda T^{-1}$ ist symmetrisch mit $R^2 = S^TS \implies$ mit $Q := SR^{-1}$ gilt
$Q^TQ = (R^{-1})^TS^TSR^{-1} = R^{-1}R^2R^{-1} = \mathbb{I}_n \implies Q \in O(\mathbb{R}^n)$
$\implies S = QR = QT\Lambda T^{-1} = T_1\Lambda T_2$ mit $T_1 := QT \in O(\mathbb{R}^n)$, $T_2 := T^{-1} \in O(\mathbb{R}^n)$ □

Satz III.16 (Lineare Transformationsformel)
Für eine lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lambda^n(S(E)) = |det(S)|\ \lambda^n(E) \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n$$

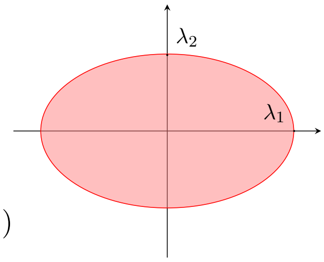
Beweis. Ist $det(S) = 0 \implies S(E)$ liegt in Hyperebene $\implies$ Beh. folgt aus Lemma III.10.
Ist $det(S) \neq 0 \implies$ (*) aus Beweis von Satz III.14, d.h. $\lambda^n(S(E)) = \theta(S)\lambda^n(E)$
z.z. $\theta(S) = |det(S)|$
i) S diagonal mit Einträgen $\lambda_i > 0 \implies \theta(S) = \lambda^n(S([0, 1]^n)) = \lambda^n([0, \lambda_1]\times...\times[0, \lambda_n]) = \Pi_{i=1}^n\lambda_i = |det(S)|$
ii) $S \in GL(\mathbb{R}^n)$ bel. $\implies S = T_1\Lambda T_2$ s.Lemma III.15, T_1, $T_2 \in O(\mathbb{R}^n)$
$\implies \theta(S) = \lambda^n(T_1\Lambda T_2([0, 1]^n)) = \lambda^n(\Lambda T_2([0, 1]^n)) = |det(\Lambda)|\lambda^n(T_2([0, 1]^n))$
$= |det(\Lambda)|\lambda^n([0, 1]^n) = |det(S)|$ □

Bsp.:

$\lambda_1, ..., \lambda_n > 0,\ E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\frac{x_1}{\lambda_1})^2 + ... + (\frac{x_n}{\lambda_n})^2 < 1\}$

mit $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{R}^n)$ gilt $E = \Lambda(B_1(0))$

Satz III.16 $\implies \lambda^n(E) = \lambda^n(\Lambda(B_1(0))) = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n \cdot \lambda^n(B_1(0))$



Vorlesung 11
04.12.2020

Bsp.: (Vitali 1905)
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{M}(\lambda^n)$
Beweis siehe Aufschrieb.

IV Lebesgue-Integral

Def. IV.1
X Menge, μ äußeres Maß. Eine funktion $\zeta : X \to \mathbb{R}$ heißt ***μ*-Treppenfunktion**, wenn sie μ-messbar ist und nur eindlich viele Funktionswerte annimmt.
Die Menge $\mathcal{T}(\mu)$ der μ-Treppenfunktionen ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir setzen

$$\mathcal{T}^+(\mu) = \{\zeta \in \mathcal{T}(\mu) \mid \zeta \geq 0\}$$

Bsp.:
$E \subseteq X, \psi_E : X \to \mathbb{R}, \psi_E(x) = \begin{cases} 1 & , x \in E \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$ Es ist: ψ_E μ-Treppenfunktion $\Leftrightarrow E \in \mathcal{M}(\mu)$

Sei $\zeta \geq 0, \zeta = \sum\limits_{i=1}^{k} s_i \psi_{A_i}$ mit A_i messbar und $s_i \geq 0$ und die A_i sind paarweise disjunkt.
So eine Darstellung heißt **einfach**.
Wir setzen:

$$(\star)\ I(\zeta) := \sum_{i=1}^{k} s_i \mu(A_i)$$

Für $\zeta = 0$ folgt $I(\zeta) = 0 \cdot \mu(X) = 0$
Jedes $\zeta \in \mathcal{T}^+(\mu)$ besitzt eine einfache Darstellung, z.B. können wir für s_i die endlich vielen Funktionswerte wählen und $A_i = \{\zeta = s_i\}$

Lemma IV.2
Das Integral $I : \mathcal{T}^+(\mu) \to [0, \infty]$ ist durch $(\star)$ wohldefiniert. Für $\zeta, \phi \in \mathcal{T}^+(\mu)$ und $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ gilt:

i) $I(\alpha\zeta + \beta\psi) = \alpha I(\zeta) + \beta I(\psi)$

ii) $\zeta \leq \psi \implies I(\zeta) \leq I(\psi)$

Beweis. Sei $\zeta = \sum\limits_{i=1}^{k} s_i \psi_{A_i}$ einfach $\implies \{\zeta > 0\} = \bigcup\limits_{i; s_i > 0} A_i$.
Ist $\mu(\{\zeta > 0\}) = \infty \implies s_i \mu(A_i) = \infty$ für mindestens ein i und damit $I(\zeta) = \infty$.
Sei nun $\mu(\{\zeta\}) < \infty$ und $\zeta = \sum\limits_{j=1}^{l} t_j \psi_{B_j}$ eine zweite einfache Darstellung.

z.z. $\sum\limits_{i=1}^{k} s_i\mu(A_i) = \sum\limits_{j=1}^{l} t_j\mu(B_j)$
$\implies I$ wohldefiniert $\implies A_i \cap B_j$ sind messbar und paarweise disjunkt und es gilt
$0 = \sum\limits_{i=1}^{k} s_i\psi_{A_i} - \sum\limits_{j=1}^{l} t_j\psi_{B_j} = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{l}(s_i - t_j)\psi_{A_i\cap B_j}$.
Für $A_i \cap B_j \neq \varnothing \implies s_i = t_j$
$\implies \sum\limits_{i=1}^{k} s_i\mu(A_i) - \sum\limits_{j=1}^{l} t_j\mu(B_j) = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{l}(s_i - t_j)\mu(A_i \cap B_j) = 0$
Sei nun $\zeta = \sum\limits_{i=1}^{k} s_i\psi_{A_i}$, $\Psi = \sum\limits_{j=1}^{l} t_j\psi_{B_j}$ einfache Darstellungen von ζ,$\psi \in \mathcal{T}^+(\mu)$
$\implies \alpha\zeta + \beta\Psi = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{l}(\alpha s_i + \beta t_j)\psi_{A_i\cap B_j}$. Das ist einfach.
$\implies I(\alpha\zeta + \beta\Psi) = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{l}(\alpha s_i + \beta t_j)\mu(A_i \cap B_j) = \alpha I(\zeta) + \beta I(\Psi) \implies$ i)
In ii) gilt $\Psi - \zeta \in \mathcal{T}^+(\mu)$ und damit $I(\Psi) = I(\zeta + (\Psi - \zeta)) \overset{i)}{=} I(\zeta) + I(\Psi - \zeta) \geq I(\zeta)$ □

Bem.:
Für A_i messbar und $s_i \geq 0$ folgt aus i) auch für A_i nicht disjunk:

$$I(\zeta) = \sum_{i=1}^{k} s_i\mu(A_i) \quad \text{für } \zeta = \sum_{i=1}^{k} s_i\psi_{A_i}$$

Def. IV.3 (Lebesgue-Integral)
Für $f : X \to [0,\infty]$ μ-messbar, setze

$$\int f d\mu = sup\{I(\zeta) \mid \zeta \in \mathcal{T}^+(\mu), \zeta \leq f\}$$

ζ heißt **Unterfunktion** von f.
Ist $f : X \to [-\infty,\infty]$ μ-messbar und sind die Integrale von $f^\pm$ nicht beide unendlich, so setzen wir

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \quad \in [-\infty,\infty]$$

Bem.:
Für $f \geq 0$ sind beide Schritte kompatibel, denn dann gilt $f = f^+$ und $f^- = 0$

Lemma IV.4
Für $f \in \mathcal{T}^+(\mu)$ gilt: $\int f d\mu = I(f)$

Beweis. f ist Unterfunktion von $f \implies \int f d\mu \geq I(f)$.
Lemma IV.2 ii) $\implies I(\zeta) \leq I(f)\ \forall\zeta$ Unterfunktion von f $\implies \int f d\mu \leq I(f)$. □

Bsp.:
$\chi_\mathbb{Q}$ ist eine λ^1-Treppenfunktion und es gilt:
$\int \chi_\mathbb{Q} d\lambda^1 = I(\chi_\mathbb{Q}) = 0 \cdot \lambda^1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) + 1 \cdot \lambda^1(\mathbb{Q}) = 0 + 1 \cdot 0 = 0$

Def. IV.5
$f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt **integrierbar** bzgl. μ, wenn sie μ-messbar ist und wenn gilt:

$$\int f d\mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < \infty$$

Bsp.:
$\mu = card, X = \mathbb{N}_0$
z.z.: $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ ist bzgl. $card$ auf $\mathbb{N}_0$ integrierbar $\implies \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} f(k)$ absolut konvergent
Dann gilt: $\int f dcard = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} f(k)$

i) $f : \mathbb{N}_0 \to [0, \infty]$

Betrachte $f_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $f_n(k) = \begin{cases} f(k) & ,k \leq n \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

f_n sind Unterfunktionen von f mit $I(f_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$
$\implies \int f dcard \geq \lim\limits_{n \to \infty} I(f_n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k)$
Umgekehrte Abschätzung:
Dazu sei O.E. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k) < \infty \implies f(k) \to 0$ mit $k \to \infty$
ζ Unterfunktion von f, so ist $\zeta(k) \neq 0$ nur für endlich viele k und damit $\zeta \leq f_n$ für n hinreichend groß.
$\implies I(\zeta) \leq I(f_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k) \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k)$
$\implies \int f dcard \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k)$

Äquivalend von Integrierbarkeit und absolute Konvergenz:
$\inf f^+ dcard + \inf f^- dcard = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f^+(k) + \sum\limits_{k=0}^{\infty} f^-(k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |f(k)|$
Und weiter

ii) $f : \mathbb{N}_0 \to \bar{\mathbb{R}}$

$\int f dcard = \inf f^+ dcard - \int f^- dcard = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f^+(k) - \sum\limits_{k=0}^{\infty} f^-(k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k)$

Satz IV.6
$f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ μ-messbar. Ist $f \leq g$ μ-fast überall und $\int f^- d\mu < \infty$, so existieren beide Integrale und es ist: $\int f d\mu \leq \int g d\mu$
„$\geq$"gilt entsprechend wenn $f^+ d\mu < \infty$

Beweis.

i) $f, g \geq 0$. Ist $\zeta = \sum\limits_{i=1}^{k} s_i \psi_{A_i}$ Unterfunktion von $f \implies \Psi := \psi_{\{f\leq g\}}\zeta = \sum\limits_{i=1}^{k} s_i \psi_{\{f\leq g\}\cap A_i}$
Unterfunktion von g
$\implies I(\zeta) = \sum\limits_{i=1}^{k} s_i \mu(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} s_i \psi(\{f \leq g\} \cap A_i) = I(\Psi) \leq \int g d\mu$
$\implies \int f d\mu \leq \int g d\mu$

ii) f, g beliebig.
Es gilt: $f^+ > 0 \implies f = f^+$
$f^+ > g^+ \implies f = f^+ > g^+ \geq g$
$f^- < g^- \implies f \geq f^- > -g^- = g$
Aus $f \leq g$ folgt $f^+ \leq g^+$ und $f^- \geq g^-$ fast überall.
$\implies \int f^+ d\mu \leq \int g^+ d\mu,\ \infty > \int f^- d\mu \geq \int g^- d\mu$
$\implies \int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \leq \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int g d\mu$

□

Bem.:
$f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$, f μ-messbar und $g = f$ μ-fast überall $\overset{\text{Kapitel II}}{\implies}$ g μ-messbar
Satz IV.6 $\implies \int g^\pm d\mu = \int f^\pm d\mu \implies \int f d\mu = \int g\ d\mu$

Vorlesung 12
11.11.2020

Bem.:
Einschub: zum Beweis von Satz III.7
D λ^n-messbar
Schreibe $D = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_j$ mit $D_j = \{x \in D : j - 1 \leq ||x|| < j\}$
Lemma III.6 $\implies \exists U_{i,j}$ offen bzw. $K_{i,j}$ kompakt mit $K_{i,j} \subset D_j \subset U_{i,j}$ und
$\lambda^n(U_{i,j}) < \lambda^n(D_j) + \frac{2^{-j}}{i}$, $\lambda^n(K_{i,j}) > \lambda^n(D_j) - \frac{2^{-j}}{i}$
$\implies U_i := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} U_{i,j}$ offen und $A_i := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_{i,j}$ abgeschlossen.

Bsp.:
$K_n = \{\frac{1}{n}\}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\}$ nicht abgeschlossen.

Beweis Sei $x \in \bar{A}_i \implies \exists K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $x \in \mathring{K}$ (z.B. $K = \overline{B_{\frac{1}{2}}(x)}$).
$\implies \exists x_n \in A_i$ mit $x_n \to x$ O.E. $x_n \in A_i \cap K$
K schneidet höchstens endlich viele $K_{i,j}$
endliche Vereinigung von diesen $K_{i,j}$ und K ist abgeschlossen
$\implies x \in A_i \implies A_i = \overline{A_i} \implies A_i$ abgeschlossen.

Lemma IV.7 (Tschebyscheff-Ungleichung)
Für $f : X \to [0, \infty]$ μ-messbar mit $\int f d\mu < \infty$ gilt:

$$\mu(\{f \geq s\}) \leq \begin{cases} \frac{1}{s} \cdot \int f d\mu & \text{für } s \in (0, \infty) \\ 0 & \text{für } s = \infty \end{cases}$$

Beweis. Für $s \in (0, \infty)$ ist $s\psi\ f \geq s\}$ eine Unterfunktion von f
$\implies s\mu(\{f = \infty\}) \leq s\mu(\{f \geq s\}) = I(s\psi_{\{f \geq s\}}) \leq \int f d\mu$ □

Lemma IV.8
Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ μ-messbar.

i) ist $\int f d\mu < \infty \implies \{f = \infty\}$ ist μ-Nulllmenge

ii) ist $f \geq 0$ und $\int f d\mu = 0 \implies \{f > 0\}$ ist μ-Nullmenge

Beweis.

i) Folgt mit $s = \infty$ aus Lemma IV.7 angewand auf f^+

ii) Lemma IV.7 $\implies \mu(\{f \geq s\}) = 0$ für $s > 0 \overset{\text{Lemma II.8}}{\implies} \mu(\{f > 0\}) = 0$ □

Satz IV.9
Zu $f : X \to [0, \infty]$ μ-messbar gibt es eine Folge $f_k \in \mathcal{T}^+(\mu)$ mit $f_0 \leq f_1 \leq ...$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\ \forall x \in X$.

Beweis. Sei $c_k > 0$ eine Nullfolge mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = \infty$ (z.B. $c_k = \frac{1}{k}$)
Setze $f_0 := 0$ und definiere für $k \geq 1$ induktiv $E_k = \{f_{k-1} + c_k \leq f\}$ sowie
$f_k = f_{k-1} + c_k\psi_{E_k} \implies f_k = \sum\limits_{j=1}^{k} c_j\psi_{E_j}$
$\implies f_k$ sind Treppenfunktionen mit $f_0 \leq f_1 \leq ...$ und $f_k \leq f\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Denn ist $x \in E_k$, so gilt $f_k(x) = f_{k-1}(x) + c_k \leq f(x)$ nach Definition.
Ist $x \notin E_k \implies f_k(x) = f_{k-1}(x) \leq f(x)$.
Nach Induktion $\implies \lim\limits_{j\to\infty} f_k(x) \leq f(x)\ \forall x \in X$.

Sei $\lim\limits_{l\to\infty} < \infty$. Da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = \infty$ existiert ∞-viele $k \in \mathbb{N}$ mit $x \notin E_k$.
$\implies f_{k-1}(x) > f(x) - c_k$ für ∞-viele $k \implies \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) \geq f(x)$ □

Satz IV.10 (Monotonie Konvergenz / Beppo-Levi)
Seien $f_k : X \to [0,\infty]$ μ-messbar mit $f_1 \leq f_2 \leq ...$ und $f : X \to [0,\infty]$ mit $f(x) := \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$. Dann gilt:

$$\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu$$

Beweis. Seien f ist μ-messbar nach Satz I.16. Mit Satz IV.6 gilt:
$0 \leq \int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu \leq ... \leq \int f d\mu \implies \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k d\mu \leq \int f d\mu$
Sei ζ Unterfunktion von f mit Wertemenge $\{s_1, ..., s_m\}$. Setze $E_i = \{\zeta = s_i\}$ für $i = 1, ..., m$.
Betrachte für $\Theta \in (0,1)$ die Mengen $E_{i,k} = E_i \cap \{f_k \geq \Theta s_i\}$
$\implies \sum\limits_{k=1}^{m} \Theta s_i \psi_{E_i,k}$ ist Unterfunktion von f_k
$\overset{\text{Lemma IV.2}}{\implies} \sum\limits_{i=1}^{m} \Theta s_i \mu(E_{i,k}) = I(\sum\limits_{i=1}^{m} \Theta_i s_i \psi_{E_{i,k}}) \leq \int f_k d\mu$
Jetzt gilt: $E_i = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{i,k}$, denn für $s_i > 0$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\ \forall x \in E_i$.
Außerdem: $E_{i,1} \subset E_{i,2} \subset ...$" $\overset{\text{Satz I.7}}{\implies} \mu(E_i) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(E_{i,k})$
$\implies \Theta I(\zeta) = \sum\limits_{i=1}^{m} \Theta s_i \mu(E_i) = \lim\limits_{k\to\infty}^{m} \Theta s_i \mu(E_{i,k}) \leq \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k d\mu$
Mit $\Theta \to 1$ und nach Bildung des Supremums über alle Unterfunktionen ζ gilt:
$\int f d\mu \leq \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k d\mu$. $\square$

Satz IV.11
$f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar bzgl. μ, so ist auch $\alpha f + \beta g$ integrierbar $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und es gilt:

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$$

Beweis.

I. $f \geq 0$, $\alpha > 0 \implies \int (\alpha f) d\mu = \alpha \int f d\mu$.
Sei dazu ζ Unterfunktion von $f \implies \alpha\zeta$ ist Unterfunktion von αf und mit Lemma IV.2 folgt: $\alpha I(\zeta) = I(\alpha\zeta) \leq \int (\alpha f) d\mu$. Also: $\alpha \int f d\mu \leq \int (\alpha f) d\mu$.
Ersetze α durch $\frac{1}{\alpha}$ von f durch $(\alpha f) \implies \alpha \int f d\mu \geq \int (\alpha f) d\mu$.

II. f integrierbar, $\alpha > 0 \implies \alpha \int f d\mu = \int (\alpha f) d\mu$.
Denn $(\alpha f)^{\pm} = \alpha f^{\pm}$
$\implies \int (\alpha f) d\mu = \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu \overset{\text{I}}{=} \alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu = \alpha \int f d\mu$.

III. $\int (-f) d\mu = -\int f d\mu$, denn $(-f)^{\pm} = f^{\mp}$
$\implies \int (-f) d\mu = \int (-f)^+ d\mu - \int (-f)^- d\mu = \int f^- d\mu - \int f^+ d\mu = -\int f d\mu$

z.z. Linearität für $f + g$

i) $f, g \geq 0$
Satz IV.9 $\implies \exists \zeta_k, \Psi_k \in \mathcal{T}^+(\mu)$ mit $\zeta_k \to f$, $\Psi_k \to g$ punktweise. $\implies \zeta_k + \Psi_k \to f + g$
Satz IV.10 und Lemma IV.2
$\int (f+g)d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int (\zeta_k + \Psi_k)d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} (\int \zeta_k d\mu + \int \Psi_k d\mu) = \int f d\mu + \int g d\mu$

ii) $f, g : X \to \mathbb{R}$ integrierbar
Betrachte $\phi = f^+ + g^+ - (f+g)^+ \geq 0$, $\psi = f^- + g^- - (f+g)^- \geq 0$
$\implies \phi - \psi = f^+ - f^- + g^+ - g^- - (f+g)^+ + (f+g)^- = f + g - (f-g) = 0$
$\implies \int (f^+ + g^+)d\mu \overset{\text{i)}}{=} \int (f+g)^+ d\mu + \int \phi d\mu$
$\implies \int (f^- + g^-)d\mu \overset{\text{i)}}{=} \int (f+g)^- d\mu + \int \psi d\mu$
$\implies$ Beh.

iii) $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$
O.E. $\int f d\mu + \int g d\mu > -\infty$.
Also $\int f^- d\mu + \int g^- d\mu < \infty$.
(Sonst gehe zu $-f$, $-g$ über und benutze den ersten Teil mit $\alpha = -1$)
Lemma IV.8 $\implies \mu(\{f = -\infty\} \cup \{g = -\infty\}) = 0 \implies \{(f,g) = \pm(\infty, -\infty)\} \in \mathcal{M}(\mu)$
ist eines μ-Nullmenge.
Aus $(f+g)^- \leq f^- + g^-$ und Monotonie folgt:
$\int (f+g)^- d\mu \leq \int (f^- + g^-)d\mu \overset{\text{i)}}{=} \int f^- d\mu + \int g^- d\mu < \infty \implies \int (f+g)d\mu$ ist definiert.
Es gilt:
$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$ bzw.
$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$
$\overset{\text{i)}}{\implies} \int (f+g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int (f+g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu$.
Ist $\int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu < \infty$, so sind alle Integrale endlich und
$\int (f+g)d\mu = \int (f+g)^+ d\mu - \int (f+g)^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.
Ist $\int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu = \infty \implies \int (f+g)^+ d\mu = \infty$
$\implies \int (f+g)d\mu = \infty = \int f d\mu + \int g d\mu$ □

Def. IV.12
Sei μ ein äußeres Maß auf X und $E \subseteq X$ sei μ-messbar. Dann setzen wir, falls das rechte Integral existiert

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$$

f heißt **auf *E* integrierbar**, wenn $f\chi_E$ integrierbar ist.

Bem.:
Wegen $(f\chi_E)^\pm = f^\pm \chi_E \leq f^\pm$ existiert das Integral von f über E auf jeden Fall dann, wenn $\in f d\mu$ existiert. (Speziell für $f \geq 0$)

Bsp.:
$\alpha \in \mathbb{R},\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = ||x||^{-\alpha}$

Beh:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} f d\lambda^n < \infty \Leftrightarrow \alpha > n$$

$$\int\limits_{B_1(0)} f d\lambda^n < \infty \Leftrightarrow \alpha < n$$

Vergleiche dazu f mit $g = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k\alpha}\psi_{A_k}$, $A_k = \{2^k \leq ||\alpha|| < 2^{k+1}\}$
Es gilt:
$2^{-\alpha} g \leq f \leq g$ für $\alpha > 0$
$2^{-\alpha} g \geq f \geq g$ für $\alpha \leq 0$
Monotonie $\implies$ Reicht die Aussagen für g zu zeigen.
$A_k = 2^k A_0, Y_n := \lambda^n(A_0) \in (0,\infty)$
$\overset{\text{Satz III.16}}{\implies} \lambda^n(A_k) = (2^l)\lambda^n(A_0) = 2^{nk} Y_n$
$\sum\limits_{k=0}^{l} 2^{-k\alpha}\psi_{A_k}$ konv. punktweise auf $\mathbb{R}^n$ gegen $g\psi_{\mathbb{R}^n\setminus B_1(0)}$. Folge ist monoton wachsend.

$$\overset{\text{Satz über Mon. Konvergenz}}{\implies} \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_1(0)} g d\lambda^n = \sum_{k=0}^{\infty} \int 2^{-k\alpha}\psi_{A_k} d\lambda^n = Y_n \sum_{k=0}^{\infty} 2^{n-\alpha)k} = \begin{cases} Y_n \frac{1}{1-2^{n-\alpha}} \text{falls } \alpha \geq n \\ \infty \text{ sonst} \end{cases}$$

Entsprechend gilt auf $B_1(0)$

$$\int\limits_{B_1(0)} g d\lambda^n = \sum_{-\infty}^{\infty} \int 2^{-k\alpha}\psi_{A_k} d\lambda^n = Y_n \sum_{k=-1}^{\infty} 2^{(n-\alpha)k} = \begin{cases} Y_n \frac{1}{2^{n-\alpha}-1} \text{ falls } \alpha < n \\ \infty \text{ sonst} \end{cases}$$

Vorlesung 13
14.12.20

Satz IV.13
Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ μ-messbar. Dann gelten:

i) f integrierbar $\Leftrightarrow |f|$ integrierbar

ii) Es gilt: $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$, falls das Integral von f existiert

iii) Ist $g : X \to [0,\infty]$ μ-messbar mit $|f| \leq g$ μ-fast überall und $\int g d\mu < \infty$, so ist f integrierbar

Beweis. Es gilt $|f| = f^+ + f^-$ und Satz IV.11 impliziert $\int |f| d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \implies$ i)
Ist $\int f d\mu$ definiert, so gilt $|\int f d\mu| = |\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu \implies$ ii)
Sei g wie in iii) $\overset{\text{Satz IV.6}}{\implies} \int |f| d\mu \leq \int g d\mu \implies f$ ist integrierbar. □

Bsp.:
$f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ λ^n-messbar und es gelte für ein $C \in [0,\infty]$:
$|f(x)| \leq C||x||^{-\alpha}$ fast überall in $B_\epsilon(0)$ mit $(\alpha < n)$ bzw.
$|f(x)| \leq C||x||^{-\alpha}$ fast überall in $\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)$ mit $\alpha > n$
$\implies f$ ist auf $B_\epsilon(0)$ bzw. $\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)$ integrierbar

V Konvergenzsätze und L^n-Räume

Bsp.:
Punktweise Konvergenz reicht nicht für Konvergenz der Integrale.
Für $\epsilon > 0$ sei $f_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_\epsilon = \dfrac{1}{2\epsilon}\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}$
Es gilt $f_\epsilon(x) = 0$ für $\epsilon < |x|$
$\implies f(x) := \lim\limits_{\epsilon\downarrow 0} f_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{, für } x \neq 0 \\ \infty & \text{, für } x = 0 \end{cases}$
Weiter $\int f_\epsilon d\lambda^1 = \dfrac{1}{2\epsilon}\lambda^1([-\epsilon,\epsilon]) = 1 \ \forall \epsilon > 0$
$\implies \int f d\lambda^1 = 0 < 1 = \lim\limits_{\epsilon\downarrow 0} f_\epsilon d\lambda^1$

Satz V.1 (Lemma von Fatou)
$f_k : X \to [0,\infty]$ Folge von μ-messbaren Funktionen.
Für $f : X \to \bar{\mathbb{R}}, f(x) = \liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ gilt:

$$\int f d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k d\mu$$

Beweis. Definiere $g_k := \inf\limits_{j\geq k} f_j \implies g_{k+1} \geq g_k \ \forall k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} g_k = f$
$\overset{\text{Satz IV.10}}{\implies} \int f d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int g_k d\mu \leq \liminf\limits_{k\to\infty} \int f_k d\mu$, da $g_k \leq f_k \ \forall k \in \mathbb{N}$ □

Satz V.2 (Dominierte Konvergenz bzw. Satz von Lebesgue)
$f_1, f_2, ...$ Folge von μ-messbare Funktionen und $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ für μ-fast alle $x \in X$. Es gebe eine integrierbare Funktion $g : X \to [0,\infty]$ mit $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| \leq g(x)$ für μ-fast alle x. Fann ist f integrierbar und $\int f d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k d\mu$.
Es gilt sogar $||f_k \cdot f||_{L^1(y)} := \int |f_k - f| d\mu \to 0$

Beweis. Folge $2g - |f - f_k| \geq 0$ konvergiert punktweise fast überall gegen $2g$.
$\overset{\text{Satz V.i}}{\implies} \limsup |\int f d\mu - \int f_k d\mu| \leq \limsup \int |f - f_k| d\mu$
$= \int 2g d\mu - \liminf \int (2g - |f - f_k|) d\mu$
$\leq 2g d\mu - \int \liminf(2g - |f - f_k|) d\mu = 0$ □

Bem.: (Anwendung)
Vergleich Riemann-$\int$ mit Lebesgue-$\int$
Sei $I = [a,b]$ kompaktes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Unterteilungspunkte $a = x_0 \leq ... \leq x_N = b \to$ Zerlegung Z von I mit Teilintervallen $I_j = [x_{j-1}, x_j]$
$\bar{S}_Z(f) = \sum\limits_{j=1}^{N} (\sup\limits_{I_j} f)(x_j - x_{j-1})$, $\quad \underline{S}_Z(f) = \sum\limits_{j=1}^{N} (\inf\limits_{I_j} f)(x_j - x_{j-1})$
Für Zerlegungen Z_1, Z_2 mit Verfeinerung $Z_1 \cup Z_2$
$\implies \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \cup Z_2}(f) \leq \bar{S}_{Z_1 \cup Z_2}(f) \leq \bar{S}_{Z_2}(f)$
f heißt **Riemann-integrierbar** mit Integral $\int\limits_a^b f(x)dx = S$, falls gilt:
$\sup\limits_Z \underline{S}_Z(f) = \inf\limits_Z \bar{S}_Z(f) = S$

Satz V.3
$f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt auf kompaktem Intervall $I = [a,b]$. Dann gilt:
f Riemann-integrierbar $\Leftrightarrow \lambda^1(\{x \in I \mid f \text{ ist nicht stetig in } x\}) = 0$
In diesem Fall ist f auch Lebesgue-integrierbar und die Integrale stimmen überein.

Beweis. Für Zerlegung Z mit Teilintervallen $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq N$.
Definiere Riemann-Treppenfunktion:
$\bar{f}_z(x) = \max\limits_{x \in I_j} \sup_{I_j} f \geq \limsup\limits_{y \to x} f(y)$, $\underline{f}_z(x) = \min\limits_{x \in I_j} \inf\limits_{I_j} f \leq \liminf\limits_{y \to x} f(y)$.
Sei $N_f(s) = \{x \in I : \limsup\limits_{y \to x} f(y) - \liminf\limits_{y \to x} f(y) \geq s\}$ für $s > 0$.
Sind Z_1, Z_2 bel. Zerlegungen $\implies \bar{f}_{Z_2}(x) - \underline{f}_{Z_1}(x) \geq s \ \forall x \in N_f(s)$.
$\implies \bar{S}_{Z_2}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) = \int\limits_I (\bar{f}_{Z_2}(x) - \underline{f}_{Z_1}(x)) d\lambda^1 \geq s\lambda^1(N_f(s))$
Ist f Riemann-integrierbar, so bilde Infimum über alle Z_1, Z_2 und schließe $\lambda^1(N_f(s)) = 0$ $\forall s > 0 \implies$ "$\implies$".
Sei nun f λ^1-fast überall stetig und Z_i Folge von Zerlegungen mit Feinheit
$\delta_i := \max\limits_{1 \leq j \leq N_i} |x_{i,j} - x_{i,j-1}| \to 0$
Ist f stetig in x, so folgt $\bar{f}_{Z_i}(x) \geq \inf\limits_{|y-x| \leq \delta_i} f(y) \to f(x)$ und $\underline{f}_{Z_i}(x) \geq \inf\limits_{|y-x| \leq \delta_i} f(y) \to f(x)$ mit $i \to \infty \implies \bar{f}_{Z_i}$, $\underline{f}_{Z_i}$ konvergiert punktweise λ^1-fast überall gegen $f \implies f$ ist λ^1-messbar nach Kapitel I.
Aus $|\bar{f}_{Z_i}|, |\underline{f}_{Z_i}| \leq \sup\limits_I |f| < \infty$ folgt aus Satz V.2 $\bar{S}_{Z_i}(f) = \int\limits_I \bar{f}_{Z_i} d\lambda^1 \to \int\limits_I f d\lambda^1$,
$\underline{S}_{Z_i}(f) = \int\limits_I \underline{f}_{Z_i} d\lambda^1 \to \int\limits_I f d\lambda^1 \implies f$ ist Riemannint. mit $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_I f d\lambda^1$. $\square$

Satz V.4
X metrischer Raum, μ Maß auf Y und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot)$ integrierbar bzgl. μ $\forall x \in X$.
Betrachte $F : X \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x,y) d\mu(y)$
Sei $f(\cdot, y)$ stetig in $x_0 \in X$ für μ-fast alle $y \in Y$. Weiter gebe es eine μ-integrierbare

Funktion $g : Y \to [0, \infty]$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $|f(x, y)| \le g(y)$ $\forall y \in Y \setminus N_X$ mit einer μ-Nullmenge N_x.
Dann ist F stetig in x_0.

Beweis. Sei $\alpha_k \to x_0$ Folge $\implies \exists \mu$-Nullmenge N, so dass $\forall y \in y \setminus N$ gilt:
$f(x_k, y) \to f(x_0, y)$ und $|f(x_k, y)| \le g(y)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
$\overset{\text{Satz V.2}}{\implies} F(x_0) = \int f(x_0, y) d\mu(y) = \lim_{k\to\infty} \int f(x_k, y) d\mu(y) = \lim_{k\to\infty} F(x_k)$. □

Vorlesung 14
18.12.20

Satz V.5
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, μ Maß auf Y und $f : I \times Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot)$ integrierbar bzgl. μ für alle $x \in I$.
Setze $F : U \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x, y) d\mu(y)$
Es sei $f(\cdot, y)$ in x_0 differenzierbar für μ-fast alle $y \in Y$ und es existiere $g : Y \to [0, \infty]$ μ-integrierbar mit

$$\frac{|f(x, y) - f(x_0, y)|}{|x - x_0|} \le g(y) \ \forall x \in I \ \forall y \in Y \setminus N_x$$

mit einer μ-Nullmenge N_x. Dann folgt:

$$F'(x_0) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) d\mu(y)$$

Beweis. Zu jeder Folge $x_k \to x_0$ existiert μ-Nullmenge $N \subset Y$, sodass $\forall y \in Y \setminus N$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k, y) - f(x_0, y)}{x_k - x_0} = \frac{\partial f}{\partial_x}(x_0, y)$$

$$\frac{|f(x_k, y) - f(x_0, y)|}{|x_k - x_0|} \le g(y)$$

$$\overset{\text{Satz V.2}}{\implies} \frac{F(x_k) - F(x_0)}{x_k - x_0} = \int \frac{f(x_k, y) - f(x_0, y)}{x_k - x_0} d\mu(y) \to \int \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y) d\mu(y)$$

□

Lemma V.6
$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, μ Maß auf Y und $f : \mathcal{U} \times Y \to \mathbb{R}$ mit f integrierbar bzgl. μ $\forall x \in \mathcal{U}$.
Betrachte $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x,y)d\mu(y)$
Es gebe eine μ-Nullmenge $N \subseteq Y$, so dass $\forall y \in Y \setminus N$ gilt:

$$f(\cdot, y) \in C^1(\mathcal{U}) \text{ und } |D_x f(x,y)| \leq g(y) \text{ mit } g : Y \to [0,\infty] \text{ integrierbar}$$

$\implies F \in C^1(\mathcal{U})$ und $\forall x \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)d\mu(y)$$

Beweis. Nach Vor. gilt $\forall y \in Y$ mit Ausnahme einer μ-Nullmenge N:

$$\frac{|f(x+hc_i, y) - f(x,y)|}{h} \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + tc_i, y) \right| dt \leq g(y)$$

Satz V.5 $\implies$ F ist in allen $x \in \mathcal{U}$ nach x_i partiell differenzierbar mit gewünschten Ableitung.
Satz V.4 $\implies$ partielle Ableitungen sind stetig auf U $\implies$ $F \in C^1(\mathcal{U})$. $\square$

Bsp.:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = ? \qquad \text{Betrachte } F : [0,\infty] \to \mathbb{R}, F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$$

$f(t,x) := e^{-tx}\dfrac{\sin(x)}{x}$ hat für $t \geq \delta$ die Abschätzungen
$|f(t,x)|, |\partial_t f(t,x)| \leq e^{-\delta x} =: g(x) \in L^1([0,\infty))$
Lemma V.6 $\implies$ $\forall t > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \int_0^\infty e^{-tx}(-\sin x)dx \\
&= [e^{-tx}\cos x]_{x=0}^{x=\infty} + t\int_0^\infty e^{-tx}\cos x dx \\
&= -1 + t^2 \int_0^\infty e^{-tx} \sin x dx \\
&= -1 - t^2 F'(t)
\end{aligned}$$

$\implies F'(t) = \dfrac{-1}{1+t^2}$
Weiter ist $\lim\limits_{t\to\infty} f(t,x) = 0$ $\forall x > 0$ mit Majorante e^{-x}

Satz V.2 $\implies \lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 0 \implies F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t \ \forall t > 0$.
Für $t > 0$ und $0 < r < R < \infty$ gilt mit $\sin x = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{ix})$:
$\int\limits_r^R \mathrm{e}^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx = \mathrm{Im} \int\limits_r^R \mathrm{e}^{(i-t)x} \frac{dx}{x} = \mathrm{Im} \ \frac{\mathrm{e}^{(i-t)x}}{(i-t)x} |_{x=r}^{x=R} + \mathrm{Im} \int\limits_r^R \frac{\mathrm{e}^{(i-t)x}}{(i-t)} \frac{dx}{x^2}$
Mit $R \to \infty$ sehen wir im Fall $t = 0$ die Existenz von $F(0) = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_0^R \frac{\sin x}{x} dx$. Weiter folgt für $t \geq 0$ die Abschätzung $\left| \int\limits_r^\infty \mathrm{e}^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{r}$ (denn $|i-t| \geq 1$). Somit folgt $|F(0) - F(t)| \leq \left| \int\limits_0^r (1 - \mathrm{e}^{-tx}) \frac{\sin x}{x} dx \right| + \frac{4}{r}$.
Satz V.2 $\implies \limsup\limits_{t\to 0} |F(0) - F(t)| \leq \frac{4}{r}$.
Mit $r \to \infty$ folgt

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = F(0) = \lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{t\to 0} \Big(\frac{\pi}{2} - \arctan t\Big) = \frac{\pi}{2}$$

Def. V.7 (L^p-Norm)
Für μ-messbares $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ und $1 \leq p \leq \infty$ setzen wir

$$||f||_{L^p(\mu)} := \begin{cases} (\int |f|^p d\mu)^{1/p} & \text{, für } 1 \leq p < \infty \\ \inf\{s > 0 \mid \mu(\{|f| > s\}) = 0\} & \text{, für } p = \infty \end{cases}$$

auf $\mathcal{L}^p(\mu) = \{f : X \to \bar{\mathbb{R}} \mid f\mu - \text{messbar}, ||f||_{L^p(\mu)} < \infty\}$
Betrachte Äquivalenzrelation $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ für μ-fast alle $x \in X$, und definiere den $\boldsymbol{L^p}$**-Raum** durch $\mathcal{L}^p(\mu)/_\sim$.

Def. V.8
Für $E \subseteq X$ messbar und $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ sei $f_0 : X \to \bar{\mathbb{R}}$ die **Fortsetzung** mit $f_0(x) = 0 \ \forall x \in X \setminus E$. Wir setzen dann

$$\mathcal{L}^p(E) := \{f : E \to \bar{\mathbb{R}} \mid f_0 \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$$

und $L^p(E, \mu) := \mathcal{L}^p(E)/_\sim$.

Proposition V.9
Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(L^p(\mu), ||\cdot||_{L^p(\mu)})$ ein normierter Vektorraum. Insbesondere gelten für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g \in L^p(\mu)$:

1. $||f||_{L^p} = 0 \implies f = 0$ μ-fast überall
2. $f \in L^p(\mu), \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f \in L^p(\mu)$, $||\lambda f||_{L^p} = |\lambda| \ ||f||_{L^p}$

3. $f, g \in L^p(\mu) \implies f+g \in L^p(\mu)$ und $||f+g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}$

Beweis. Sei $1 \leq p > \infty \implies ||f||_{L^p}$ ist wohldefiniert nach Satz IV.6.
1. folgt aus Lemma IV.8
2. folgt aus Linearität des Integralt.
$t \mapsto t^p$ ist konvex auf $[0, \infty) \implies |f+g|^p = 2^p \left|\frac{f+g}{2}\right|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p) \implies$ Aus $f, g \in L^p(\mu)$ folgt $f+g \in L^p(\mu)$.
Δ-Ungleichung folgt später.

$p = \infty$:

1) ist klar

2) O.E. $\lambda > 0 \to \{|\lambda f| > \lambda s\} = \{|f| > s\}$

3) $\{|f+g| > s_1 + s_2\} \subset \{|f| > s_1\} \cup \{|g| > s_2\}$ □

Lemma V.10 (Youngsche Ungleichung)
Für $1 < p, q < \infty$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ und $x, y \geq 0$ gilt: $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$

Beweis. Sei $y \geq 0$ fest und $f(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q - xy \implies f'(x) = \alpha^{p-1} - y \begin{cases} < 0 \text{ für } x < y^{\frac{1}{p-1}} \\ > 0 \text{ für } x > y^{\frac{1}{p-1}} \end{cases}$
$\implies \forall x \geq 0$: $f(x) \geq f(y^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{1}{p}y^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}y^{\frac{p}{p-1}} - y^{\frac{p}{p-1}} = 0$ □

Satz V.11 (Höldersche Ungleichung)
Für μ-messbare $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt: $|\int fg d\mu| \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^p}$,
falls $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

Beweis. O.E. $f, g \geq 0$ und $||f||_{L^p} = ||g||_{L^q} = 1$ (sonst $\tilde{f} = \dfrac{f}{||f||_{L^p}}$, $\tilde{g} = \dfrac{g}{||g||_{L^q}}$)
Lemma V.10 $\implies \int fg d\mu \leq \int \left(\frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q}\right) d\mu = 1 = ||f||_{L^p}||g||_{L^q}$
$\implies$ Beh. für $1 < p, q < \infty$.
Fall $p = 1, q = \infty$ folgt sofort aus Satz IV.6. □

Satz V.12 (Minkowski-Ungleichung)
Für $f, g \in L^p(\mu)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ gilt: $||f+g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}$

Beweis.
$$||f+g||^p_{L^p}$$
$$= \int |f+g|^p d\mu \leq |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int |g||f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\leq ||f||_{L^p}||f+g||_{L^p}^{p-1} + ||g||_{L^p}||f+g||_{L^p}^{p-1}$$
$$\overset{\text{Kürzen}}{\Longrightarrow} ||f+g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}$$

□

Lemma V.13
Sei $1 \leq p < \infty$ und $f_k = \sum_{j=1}^{k} u_j$ mit $u_j \in L^p(\mu)$. Falls $\sum_{j=1}^{k} ||u_j||_{L^p} < \infty$, so gelten:

i) $\exists$ μ-Nullmenge N: $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ $\forall x \in X \setminus N$ ex.

ii) mit $f := 0$ auf gilt $f \in L^p(\mu)$

iii) $||f - f_k||_{L^p} \to 0$ mit $k \to \infty$

Beweis. Betrachte $g_k := \sum_{j=1}^{k} |u_j|$, $g := \sum_{j=1}^{\infty} |u_j|$
Es gilt: $g_1 \leq g_2 \leq ...$ und $g_k(x) \to g(x) \in [0,\infty]$ mit $k \to \infty$ $\forall x \in X$
Satz IV.10 $\implies ||g||_{L^p} = \lim_{k\to\infty} ||g_k||_{L^p} \overset{\text{Satz V.12}}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} ||u_j||_{L^p} < \infty$
Lemma IV.8 $\implies N := \{g = \infty\}$ ist μ-Nullmenge.
Für $x \in X \setminus N$ ist $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)$ absolut konvergent. $\implies (f_k(x))$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$
$\implies f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existiert $\forall x \in X \setminus N$.
Weiter ist $|f_k|^p \leq |g|^p \in L^1(\mu)$, sowie $|f - f_k|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |f_k|^p) \leq 2^p g^p$
Satz V.2 $\implies f \in L^p(\mu)$ und $||f - f_k||_{L^p} \to 0$ □

Vorlesung 15
21.12.20

Satz V.14 (Satz von Riesz-Fischer)
$(L^p(\mu), ||\cdot||_{L^p})$ ist vollständig, also ein Banachraum. $(1 \leq p \leq \infty)$

Beweis. Sei $f_k \in L^p(\mu)$ Cauchyfolge bzgl $||\cdot||_{L^p}$.
Es reicht zu zeigen: $\exists$ Teilfolge, welche in $L^p(\mu)$ konvergiert.

1) $1 \leq p < \infty$:
Nach Wahl einer Teilfolge sei $||f_{k+1} - f_k||_{L^p} \leq 2^{-k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
Mit $f_0 := 0 \implies f_k = \sum_{j=1}^{k} u_k$ mit $u_j = f_j - f_{j-1}$.
Lemma V.13 $\implies$ f_k konvergiert in $L^p(\mu)$ bzw. punktweise μ-fast überall gegen $f \in L^p(\mu) \implies$ Beh.

2) $p = \infty$
Wegen $|||f_k||_{L^\infty} - ||f_l||_{L^\infty}| \leq ||f_k - f_k||_{L^\infty}$ existiert $\lim_{k\to\infty} ||f_k||_{L^\infty}$.
Die Mengen $N_k = \{|f_k| > ||f_k||_{L^\infty}\}$ sowie $N_{k,l} = \{|f_k - f_l| > ||f_k - f_l||_{L^\infty}\}$ haben μ-Maß

Null $\implies N = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} N_k \cup \bigcup\limits_{k,l=1}^{\infty} N_{k,l}$ ist μ-Nullmenge.
Für $x \in X \setminus N$ gilt: $|f_k(x) - f_l(x)| \leq ||f_k - f_l||_{L^\infty} < \epsilon$ für $k, l \geq k(\epsilon)$
$\implies f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ ist definiert $\forall x \in X \setminus N$.
Weiter gilt für $x \in X \setminus N$:
$|f(x)| = \lim\limits_{k\to\infty} |f_k(x)| \leq \lim\limits_{k\to\infty} ||f_k||_{L^\infty}$ und $|f_k(x) - f(x)| = \lim\limits_{l\to\infty} |f_k(x) - f_l(x)| \leq \lim\limits_{l\to\infty} ||f_k - f_l||_{L^\infty} \leq \epsilon$ für $k \geq k(\epsilon)$
$\implies ||f||_{L^\infty} \leq \lim\limits_{k\to\infty} ||f_k||_{L^\infty} < \epsilon$ und $||f_k - f||_{L^\infty} \to 0$ mit $k \to \infty$. $\square$

Lemma V.15
Konvergiert f_k gegen f in $L^p(\mu)$, so konvergiert eine Teilfolge f_{k_j} punktweise μ-fast überall gegen f.

Bsp.:
Im Fall $p < \infty$ kann im Allgemeinen nicht auf die Wahl einer Teilfolge verzichtet werden:
Jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt die eindeutige Darstellung $n = 2^k + j$ mit $k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq j < 2^k$
Definiere damit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } j \cdot 2^{-k} \leq x \leq (j+1)2^{-k} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$
$\int\limits_0^1 f_n(x)dx = 2^{-k} < \frac{2}{n} \to 0$ mit $n \to \infty$
Andererseits: $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \; \forall x \in [0,1)$, denn zu $x \in [0,1), k \in \mathbb{N}$ können wir
$j \in \{0, 1, ..., 2^k - 1\}$ wählen mit $j \cdot 2^{-k} \leq x < (j+1)2^{-k}$
$\implies f_n(x) = 1$ für $n = 2^k + j$
$\implies$ Folge konvergiert nicht punktweise λ^1-fast überall gegen 0.

Bem.:
Jetzt betrachten wir $\mu = \lambda^n$ im $\mathbb{R}^n$.
Im $\mathbb{R}^n$ haben wir eine Metrik.

Def. V.16
Der **Träger** einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ist die Menge

$$spt(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$$

Der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω wird mit $C_c^0(\Omega)$ bezeichnet.
Für $K \subseteq \Omega$ kompakt sei $dist(\cdot, K) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty), dist(x, K) = \inf\limits_{z \in K} ||x - z||$ die **Abstandsfunktion** von K.
Wir benötigen:

1. $dist(\cdot, K)$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante 1

2. $dist(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, K) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega} dist(x, K) > 0$

Satz V.17
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann existiert zu jedem $f \in C^p(\Omega)$ eine Folge $f_k \in C_c^0(\Omega)$ mit $||f_k - f||_{L^p(\Omega)} \to 0$ mit $k \to \infty$.

Beweis.

1) $f = \psi_E$ mit $E \subset \Omega$ messbar mit $\lambda^n(E) < \infty$
Sei $\epsilon > 0$. Lemma III.6 $\implies \exists K \subset E$ kompakt mit $\lambda^n(E \setminus K) < \frac{\epsilon}{2}$
Setze $f_\rho : \Omega \to [0,1]$, $f_\rho(x) = \left(1 - \frac{dist(x,K)}{\rho}\right)^+$
$\overset{1),2)}{\implies} f_\rho \in C^0(\Omega)$, $sptf_\rho = \{x : dist(x,K) \leq \rho\}$ ist kompakte Teilmenge von Ω für ρ hinreichend klein. $\implies f_\rho \in C_c^0(\Omega)$ für $\rho << 1$ und $f_\rho = f$ auf K.

$$\begin{aligned}\implies \int_\Omega |f_\rho - f|^p d\lambda^n &\leq 2^{p-1} \int_{\Omega \setminus K} (|f_\rho|)^p + |f|^p d\lambda^n \\ &\leq 2^{p-1}(\lambda^n(\{0 < dist(\cdot, K) \leq \rho\}) + \lambda^n(E \setminus K)) \\ &< 2^{p-1}\epsilon \text{ für } \rho \text{ hinreichend klein}\end{aligned}$$

$\implies$ Beh.

2) f beliebig, $f \in L^p(\Omega)$
O.E. $f \geq 0$ sonst betrachte f^+ und f^-.
Nach Satz IV.9 existiert Folge von Treppenfunktionen $f_1 \leq f_2 \leq ...$ mit $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)\ \forall x \in \Omega$.
Satz V.2 $\implies f_k \to f$ in $L^p(\Omega)$.
Verwende dazu Majorante $|f - f_k|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |f_k|^p) \leq 2^p|f|^p \in L^p(\Omega)$.
Für die Treppenfunktion f_k gilt nach Lemma IV.7

$$\lambda^n(\{f_k \geq s\}) \leq \frac{1}{s^p} \int_\Omega |f_k|^p d\lambda^n \leq \frac{1}{s^p} \int_\Omega |f|^p d\lambda^n < \infty$$

Da f_k endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen ist, folgt die Behauptung. □

Bem.:
$BC^0(\Omega)$ bezeichnet die Menge der beschränkten, stetigen Funktionen auf Ω. Mit Supremumsnorm $||\cdot||_{\sup}$ ist diese ein Banachraum. Für $f \in BC^0(\Omega)$ gilt

$$\{|f| > s\} \neq \varnothing \Leftrightarrow \lambda^n(\{|f| > s\}) > 0$$

$\implies ||f||_{L^\infty} = ||f||_{\sup}\ \forall f \in BC^0(\Omega)$.
Angenommen $f \in L^\infty(\Omega)$ kann durch $f_k \in BC^0(\Omega)$ bzgl der L^∞-Norm approximiert werden, dann wäre f_k eine Cauchyfolge bzgl sup-Norm
$\implies \exists \tilde{f} \in BC^0(\Omega)$ mit $f_k \to \tilde{f} = f$ fast überall, aber L^∞-Funktion ohne stetigen Repräsentanten.

Fourier-Reihen:
Betrachte Funktionen $f \in L^2(I, \mathbb{C})$ mit $I = (-\pi, \pi) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in L^2(I)$
Satz V.14 $\implies L^2(I, \mathbb{C})$ ist vollständig bzgl L^2-Norm. Also ein Hilbertraum mit dem hermitischen Skalarprodukt

$$< f, g >_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

$w_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$ bilden ein Orthonormalsystem und spannen den Raum $\mathbb{P}$ der Trigonometrischen Polynome auf.
Das n-te Fourierpolynom f_n ist definiert als die Orthonormalprojektion von f auf den Raum $\mathbb{P}^n$ der trigonometrischen Polynome von Grad $\leq n.$, Also

$$f_n = \sum_{k=-n}^{n} < f, w_k >_{L^2} w_k = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\mathrm{e}^{ik}$$

$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < f, w_k >_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}dx$. Die Folge f_n heißt Fourier-Reihe von f.
Wegen $f - f_n \perp_{L^2} \mathbb{P}_n$ gilt $\forall p \in \mathbb{P}_n$:

$$(*) \qquad |f - p||_{L^2}^2 = ||(f - f_n) + (f_n - p)||_{L^2}^2 = ||f - f_n||_{L^2}^2 + ||f_n - p||_{L^2}^2$$

Mit $p = 0$ folgt die Besselsche Ungleichung

$$(**) \qquad 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 = ||f_n||_{L^2}^2 \overset{(*)}{\leq} ||f||_{L^2}^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$\implies f_n$ ist eine L^2-Cauchyfolge, denn für $m \geq n$ folgt
$||f_m - f_n||_{L^2}^2 = 2\pi \sum\limits_{k=n+1}^{m} |\hat{f}(k)|^2 + 2\pi \sum\limits_{k=-m}^{-(n+1)} |\hat{f}(k)|^2 < \epsilon$ für n groß genug.
$\overset{\text{Riesz-Fischer (Satz V.14)}}{\implies} f_n$ konvergiert in $L^2(I, \mathbb{C})$ gegen eine Funktion $\in L^2(I, \mathbb{C})$.
Frage: Konvergiert f_n gegen f?

Satz V.18
Für $f \in L^2(I, \mathbb{C})$ konvergiert f_n gegen f in $L^2(I, \mathbb{C})$? (bezieht sich auf Bem. vorher)

Beweis. Wegen $(*)$ gilt

$$||f - f_n||_{L^2} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} ||f - p||_{L^2}$$

z.z. $\mathbb{P}$ liegt dicht in $L^2(I, \mathbb{C})$
Satz V.17 $\implies C_c^0(I, \mathbb{C})$ dicht in $L^2(I, \mathbb{C})$ und jede stetige Funktion kann gleichmäßig und damit auch in L^2 durch stückweise konstante Funktionen approximiert werden. Für f stückweise C^1 haben wir in Analysis II gezeigt: $f_n \to f$ gleichmäßig, also auch in L^2. $\square$

Bem.:
Sei $\ell^2(\mathbb{C})$ der Raum aller komplexen Folgen $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $||c||_{\ell^2}^2 = 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$
$\ell^2(\mathbb{C})$ ist vollständig (folgt aus Riesz-Fischer angewandt auf das Zählmaß auf $\mathbb{Z}$)

Lemma V.19
Die Abbildung $\mathcal{F} : (L^2(I,\mathbb{C}), ||\cdot||_{L^2}) \to (\ell^2(\mathbb{C}), ||\cdot||_{\ell^2}), \mathcal{F}(f) = (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ ist eine Isometrie von Hilberträumen.

Beweis. Aus Satz V.18 folgt mit $p = 0$ in $(*)$:

$$||\mathcal{F}(f)||_{l^2}^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \lim_{n\to\infty} ||f_n||_{L^2}^2 \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(||f||_{L^2}^2 - ||f - f_n||_{L^2}^2\right) = ||f||_{L^2}^2$$

$\implies \mathcal{F}$ ist isometrisch und damit injektiv.
Für $c \in l^2(\mathbb{C})$ ist $f_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{-ikx}$ eine Cauchyfolge in $L^2(I,\mathbb{C})$ und konvergiert nach Riesz-Fischer gegen $f \in L^2(I,\mathbb{C}) \implies \mathcal{F}(f) = c \implies \mathcal{F}$ ist surjektiv. □

Bem.:
Die Konvergenz der Fourierreihe ist ein Spezialfall des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren. Dieser verallgemeinert die Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen (siehe LA) auf ∞-dimensionalen Räume.
Hier ist der Operator $H = -\frac{d^2}{dx^2}$ ein Endomorphismus auf $C^\infty_{Per}(I)$
$H : C^\infty_{Per}(I) \to C^\infty_{Per}(I), Hf = -\frac{d^2 f}{dx^2}$
Part. Int. $\implies \langle Hf, g\rangle_{L^2} = \langle f, Hg\rangle_{L^2}\ \forall f,g \in C^\infty_{Per}(I)$ sowie $\langle Hf, f\rangle_{L^2} = ||\frac{df}{dx}||_{L^2}^2 \geq 0$
Die w_k sind Eigenfunktionen von den Eigenvektoren $\lambda_k = k^2$:
$Hw_k = \lambda^2 w_k\ \forall k \in \mathbb{Z}$
Satz V.18: Der von den Eigenfunktionen w_k aufgespannte Raum ist dicht in $L^2(I,\mathbb{C})$

Vorlesung 16
08.01.21

Satz V.20 (Vitali)
Sei $f_n \in L^p(\mu), 1 \leq p \leq \infty$, eine Folge mit $f_n \to f$ punktweise fast überall. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $f \in L^p(\mu)$ und $||f_n - f||_{L^p} \to 0$

b) Mit $\lambda(A) = \limsup \int\limits_A |f_n|^p d\mu$ gilt:

  1) zu $\epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ mit $\lambda(A) < \epsilon\ \forall A$ messbar mit $\mu(A) < \delta$
  2) zu $\epsilon > 0\ \exists\ E$ messbar mit $\mu(E) < \infty$ und $\lambda(X \setminus E) < \epsilon$

Im Fall $p = 1$ heißt eine Folge mit 1) und 2) **gleichgradig integrierbar**.

Beweis.

a) $\implies$ b):

Sei $f_n \to f$ in $L^p(\mu)$. FÜr A messbar gilt:

$$\big| ||f_n||_{L^p(A)} - ||f||_{L^p(A)} \big| \leq ||f_n - f||_{L^p(A)} \leq ||f_n - f||_{L^p} \to 0$$

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} ||f_n||_{L^p(A)} = ||f||_{L^p(A)}$ und damit $\lambda(A) = \int\limits_A |f|^p d\mu$

1) gilt dann nach Blatt 6, Aufgabe 2,3

(3) $\implies$ λ äußeres Maß, 2) $\implies$ Beh 1)

Weiter ist mit Lemma IV.7 $\mu(E_\delta) \leq \frac{1}{\delta} \int |f|^p d\mu < \infty$für $E_\rho = \{|f|^p \geq \delta\}$

$\implies$ $\psi_{X \setminus E_\delta} |f|^p \leq \delta \to 0$ mit $\delta \to 0$, wobei $|f|^p$ integrierbare Majorante ist $\implies$ $\lambda(X \setminus E_j) = \int\limits_{X \setminus E_j} |f|^p d\mu < \epsilon$ für δ klein genug.

b) $\implies$ a):

Zu $\epsilon > 0$ wähle E wie in 2) sowie $\delta > 0$ wie in 1). Da $\mu(E) < \infty$ existiert nach Egorov, Satz I.21 $A \subset E$ messbar mit $\mu(E \setminus A) < \delta$, sodass $f_n \to f$ gleichmäßig auf A.

Hier wenden wir Satz I.21 auf das Maß $\mu_E = \mu|_{\mathcal{D}(E)}$ an. Die Menge A ist dann μ_E-messbar und damit auch μ-messbar, denn $S \subset X$ und $E\mu$-messbar:

$$\begin{aligned}
\mu(S) &\geq \mu(S \cap E) + \mu(S \setminus E) \\
&\geq \mu(S \cap A) + \mu(S \cap E \setminus A) + \mu(S \setminus E) \\
&\geq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)
\end{aligned}$$

Nun gilt $|f_n - f|^p \leq \psi_A |f_n - f|^p + (\psi_{X \setminus E} + \psi_{E \setminus A}) 2^{p-1} (|f|^p + |f_n|^p)$

Lemma von Fatou impliziert für B messbar

$$\int\limits_B |f|^p d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_B |f_n|^p d\mu \leq \lambda(B)$$

Mit $n \to \infty$ folgt aus 2) und 1)

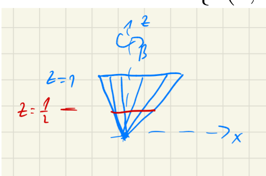
$$\limsup \int |f_n - f|^p d\mu \leq 2^p (\lambda(x \setminus E) + \lambda(E \setminus A)) < 2^{p+1} \epsilon$$

□

VI Satz von Fubini

Bem.: (Prinzip von Cavalieri)
Haben zwei Körper in jeder Höhe Schnitte von gleichem Flächeninhalt, so haben sie auch auch das gleiche Volumen.

Bsp.:
1. Volumen eines Kegels.
   Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit Flächeninhalt $|B| = A$.
   Betrachte $C = \{s(b,1) \mid b \in B, 0 \leq s \leq 1\}$

   Für $k \in [0,1]$ ist der k-Schnitt von C die Menge
   $C_k = \{a \in \mathbb{R}^2 \mid (a,b) \in C\} = \{h \cdot b \mid b \in B\} = kB$
   $|C_k| = k^2 A$ Nach Cavalieri hängt $vol(C)$ nur von A ab.
   Wir schreiben $vol(C) = V(A)$. Es gilt $V(kA) = kV(A)$ für $k \in \mathbb{N}$, betrachte dazu ... (siehe Aufschrieb)

2. Betrachte in $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ die Mengen und die Inhalte der Zugehörigen z-Schnitte:

$$\text{Zylinder } Z = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}, |Z_z| = \pi$$
$$\text{Kegel } C = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z, 0 \leq z \leq 1\}, |C_z| = \pi z^2$$
$$\text{Halbkugel } H = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{1-z^2}, 0 \leq z \leq 1\}, |H_z| = \pi(1-z^2)$$

$\implies |Z_z| = |C_z| + |H_z| \overset{Cavalieri}{\implies} vol(H) = vol(Z) - vol(C) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$
$\implies vol(C) : vol(H) : vol(Z) = 1 : 2 : 3$ (Archimedes)

Def. VI.1
Seien α, β äußere Maße auf X, Y. Das **Produktmaß** $\alpha \times \beta$ einer Menge $E \subseteq X \times Y$ ist

$$(\star) \quad \alpha \times \beta(E) = inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(A_j)\beta(B_j) \mid A_j, B_j \text{ messbar}, E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j\}$$

Lemma VI.2
$\alpha \times \beta$ ist ein äußeres Maß

Beweis.

- $\alpha \times \beta(\varnothing) \leq \alpha(\varnothing)\beta(\varnothing) = 0$
- Sei $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E, E_i \subset X \times Y$. Wähle zu $\epsilon > 0$ Überdeckungen $E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \times B_{i,j}$

wie in $(*)$, sodass $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(A_{i,k})\beta(B_{i,j}) < \alpha \times \beta(E_i) + 2^{-i}\epsilon$

$\implies E \subset \bigcup_{i,j=1}^{\infty} A_{i,j} \times B_{i,j}$

$\implies \alpha \times \beta(E) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha(A_{i,j})\beta(B_{i,j}) < \sum_{i=1}^{\infty} \alpha \times \beta(E_i) + \epsilon$ □

Lemma VI.3
Sei $P = A \times B$. Eine Produktmenge, d.h. A, B sind messbar bzgl. α bzw. β. Dann gilt $\alpha \times \beta(P) = \alpha(A)\beta(B)$ und P ist $\alpha \times \beta$-messbar.

Beweis. A, B messbar $\implies alpha \times \beta(P) \overset{(*)}{\leq} \alpha(A)\beta(B)$

<u>z.z:</u> $\alpha(A)\beta(B) \leq \alpha \times \beta(P)$

Der y-Schnitt von P ist $P_y = \{x \in X : (x,y) \in P\} = \begin{cases} A, \text{ für } y \in B \\ \varnothing \text{ sonst} \end{cases}$

Ist $P \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ mit $P_j = A_j \times B_j$, so folgt $P_y \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (P_j)_y$ und mit Fatou

$\alpha(A)\beta(B) = \int_y \alpha(P_y) d\beta(y) \leq \int_y \sum_{j=1}^{\infty} \alpha((P_j)_y) d\beta(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_y \alpha((P_j)_y) d\beta(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(A_j)\beta(B_j)$

$\implies \alpha(A)\beta(B) \leq \alpha \times \beta(P)$

Messbarkeit:
Sei $S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_k$ mit $P_j = A_j \times B_j$ wie in $(*)$.
Es gilt:

$$(**) \quad P_j \cap P = (A_j \cap A) \times (B_j \cap B) \quad P_j \setminus P = (A_j \cap A) \times (B_j \setminus B) \cup (A_j A) \times B_j$$

$\implies$

$$\begin{aligned} \alpha \times \beta(P_j \cap P) + \alpha \times \beta(P_j \setminus P) &\leq \alpha(A_j \cap A)\beta(B_j \cap B) + \alpha(A_j \cap A)\beta(B_j \setminus B) + \alpha(A_j \setminus A)\beta(B_j) \\ &= \alpha(A_j \cap A)\beta(B_j) + \alpha(A_j \setminus A)\beta(B_j) \\ &= \alpha(A_j)\beta(B_j) \end{aligned}$$

$$\implies \alpha\times\beta(S\cap P)+\alpha\times\beta(S\setminus P) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha\times\beta(P_j\cap P)+\sum_{j=1}^{\infty} \alpha\times\beta(P_j\setminus P) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(A_j)\beta(B_j)$$

$$\overset{(*)}{\implies} \alpha\times\beta(S\cap P)+\alpha\times\beta(S\setminus P) \leq \alpha\times\beta(S) \qquad \square$$

Satz VI.4 (Cavalierisches Prinzip)
Seien α und β σ-endliche äußere Maße auf X bzw. Y, und $D \subseteq X\times Y$ sei $\alpha\times\beta$-messbar. Dann ist $D_y = \{x\in X \mid (x,y)\in D\}$ α-messbar für β-fast alle $y\in Y$. Die Funktion $y\mapsto \alpha(D_y)$ ist β-messbar und es gilt:

$$(\alpha\times\beta)(D) = \int_Y \alpha(D_y)\, d\beta(y)$$

Vorlesung 17
11.01.21

Beweis.

I $(\alpha\times\beta)(D)<\infty$

Nach $(*)$ und Lemma VI.3 existiert zu $r\in\mathbb{N}$ eien Überdeckung $E^r = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i^r$ von D mit Produktmenge P_i^r, sodass $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha\times\beta(P_i^r) < \alpha\times\beta(D)+\frac{1}{r}$

a) P_i^r, $i\in\mathbb{N}$, sind disjunkt, sonst betrachte induktiv $P^r\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{i-1} P_j^r$. Nach $(**)$ ist dies eine disjunkte Vereinigung von Produktmengen.

b) $E^r\subset E^{r-1}$ $\forall r$, sonst gehe über zur disjunkten Überdeckung $P_i^r\cap P_j^{r-1}$ mit $i,j\in\mathbb{N}$. Nach $(**)$ sind dies Produktmengen und
$\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} \alpha\times\beta(P_i^r\cap P_j^{r=1}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha\times\beta(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_i^r\cap P_j^{r-1}) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha\times\beta(P_i^r) < \alpha\times\beta(D)+\frac{1}{r}$
Mit $E := \bigcap\limits_{r=1}^{\infty} E^r$ folgt: $D\subset\bigcap\limits_{r=1}^{\infty} E^r = E$ und $\alpha\times\beta(E)=\alpha\times\beta(D)$. Da D messbar ist, gilt $\alpha\times\beta(E\setminus D) = \alpha\times\beta(E)-\alpha\times\beta(D)=0$.

Wir wollen 3 Aussagen zeigen

1) $E_y = \{x\in X : (x,y)\in E\}$ ist α-messbar $\forall y\in Y$
2) $f_k : Y\to[0,\infty]$, $y\mapsto\alpha(E_y)$ β-messbar
3) $\gamma(?)(E) := \int\limits_Y f_k d\beta = \alpha\times\beta(E)$

Sei ϵ das System aller $\alpha\times\beta$-messbaren Mengen, welche 1), 2) und 3) erfüllen. Für Produktmenten $A\times B$ gilt:
$(A\times B)_y = A$ falls $y = B$ und $(A\times B)_y=\varnothing$, falls $y\notin B \implies A\times B\in\epsilon$, denn $f_{A\times B} = \alpha(A)\psi_B$ und $\gamma(A\times B) = \alpha(A)\beta(B) = \alpha\times\beta(A\times B)$.

Jetzt betrachte disjunkte Vereinigung $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E_i \in \epsilon$ $\forall i \in \mathbb{N}$.
$\Longrightarrow$ $E_y = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (E_i)_y$ α-messbar
$f_E = \sum\limits_{i=1} f_{E_i}$ ist β-messbar und
$\gamma(E) = \int\limits_Y \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_{E_i} d\beta \overset{\text{Satz von der Mon. Konv.}}{=} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_Y f_{E_i} d\beta = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha \times \beta(E_i) = \alpha \times \beta(E)$
Schließlich sei $E^1 \supset E^2 \supset ...$ mit $E^r \in \epsilon$ und $\alpha \times \beta(E^1) < \infty$.
Für $E = \bigcap\limits_{r=1}^{\infty} E^r$ ist $E_y = \bigcap_{r=1}^{\infty} (E^r)_y$ α-messbar $\forall y \in Y$. Lemma II.8 impliziert
$f_E(y) = \alpha(E_y) = \lim\limits_{r \to \infty} \alpha((E^r)_y) = \lim\limits_{r \to \infty} f_{E^r}(y)$ für β-fast alle $y \in Y$.
$\Longrightarrow$ f_E ist β-messbar.
Zuletzt folgt aus Satz von Lebesgue wegen $f_{E^r} \leq f_{E^1}$
$\gamma(E) = \int\limits_Y f_E d\beta = \lim\limits_{r \to \infty} \int\limits_Y f_{E^r} d\beta = \lim\limits_{r \to \infty} \alpha \times \beta(E^r) = \alpha \times \beta(E)$
$\Longrightarrow$ Für E wie oben gelten somit die Aussagen 1), 2), und 3).
Jetzt wende das Argument auf eine $\alpha \times \beta$ Nullmenge N statt D an. Erhalte $C \supset N$ mit $C \in \epsilon$ und $\alpha \times \beta(C) = 0$. Also
$0 = \alpha \times \beta(C) = \int\limits_Y \alpha(C_y) d\beta(y) \implies \alpha(N_y) \leq \alpha(C_y) = 0$ für fast alle $y \in Y$.
Wähle $N = E \setminus D$. Dann folgt für β-fast alle $y \in Y$:
$D_y = E_y \setminus N_y$ ist α-messbar und es gilt: $f_D(y) = f_E(y)$ ($\implies$ f_D ist β-messbar)
$\int\limits_Y f_D d\beta = \int\limits_Y f_E d\beta = \alpha \times \beta(E) = \alpha \times \beta(D)$.

II Sei $D \subset X \times Y$ nur messbar.
Nach Vor. gilt $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ mit A_n, B_n messbar und $\alpha(A_n)$, $\beta(B_n) < \infty$.
O.E. A_n, B_n aufsteigend. $D_n = D \cap (A_n \times B_n)$ ist $\alpha \times \beta$-messbar mit $(\alpha \times \beta)(D_n) < \infty$
$\overset{\text{I}}{\Longrightarrow}$ Dann ist $D_y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (D_n)_y$ α-messbar für β-fast alle y. Es gilt $f_{D_1} \leq f_{D_2} \leq ...$ und
$f_D(y) = \alpha(D_y) = \lim\limits_{n \to \infty} (\alpha(D_n)_y) = \lim\limits_{n \to \infty} f_{D_n}(y)$
$\Longrightarrow$ f_D β-messbar und $\int\limits_Y f_D d\beta \overset{\text{mon.konv.}}{=} \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_Y f_{D_n} d\beta = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha \times \beta(D_n) = \alpha \times \beta(D)$ $\square$

Bem.:
Die Rollen von α und β können vertauscht werden, d.h. man betrachtet das β-Maß des X-Schnittes $D_x 0\{y \in Y \mid (x, y) \in D\}$ und integriert bzgl. α

$$\Longrightarrow \alpha \times \beta(D) = \int\limits_Y \alpha(D_y)\ d\beta(y) = \int\limits_X \beta(D_x)\ d\alpha(x)$$

Bsp.:
Man kann nicht auf die σ-Endlichkeit verzichten.

$$D := \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x = y\} \subseteq \mathbb{R} \times [0, 1]$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}} card(D_x) d\lambda^1(x) = 1 \neq 0 = \int\limits_{[0,1]} \lambda^1(D_y)\ dcard(y)$$

Mit $I_k = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ gilt $D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k \times I_k) \implies D$ ist messbar bzgl. $\lambda^1 \times card$

Lemma VI.5
Es gilt $\lambda^n = \lambda^k \times \lambda^m$ für $k + m = n$

Beweis. Quader im $\mathbb{R}^n$ sind Produkte $P \times Q$ von Quadern im $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^m$ und es gilt $vol^n(P \times Q) = vol^k(P)vol^m(Q)$. Somit ist $\lambda^n(E) = \inf\{\sum\limits_{j=1}^{\infty} vol^k(P_j)vol^m(Q_j) : P_j, Q_j$ Quader, $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j \times Q_j\}$
Es folgt direkt $\lambda^k \times \lambda^m \leq \lambda^n$.

z.z $\lambda^n \leq \lambda^k \times \lambda^m$
Reicht dies für Produktmengen zu zeigen, d.h. $\lambda^n(A \times B) \leq \lambda^k(A)\lambda^m(B)$, denn daraus folgt für $E \subset \mathbb{R}^n$ bel.:

$$\lambda^n(E) \leq \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(A_j \times B_j) : A_j, B_j \text{ messbar }, E \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j\} \leq (\lambda^k \times \lambda^m)(E)$$

Betrachte nun $A \times B$ mit $\lambda^k(A)$, $\lambda^m(B) < \infty$. Zu $\epsilon > 0$ existiert Quader P_i, Q_i mit $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i$, $B \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$, sodass $\sum\limits_{i=1}^{\infty} vol^k(P_i) < \lambda^k(A) + \epsilon$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} vol^m(Q_j) < \lambda^m(B) + \epsilon$.
$\implies A \times B \subset \bigcup\limits_{i,j=1}^{\infty} (P_i \times Q_j)$
$\implies \lambda^n(A \times B) \leq \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} vol^k(P_i)vol^m(Q_j) < (\lambda^k(A) + \epsilon)(\lambda^m(B) + \epsilon) \overset{\epsilon \to 0}{\to} \lambda^k(A)\lambda^m(B)$.
Für $\lambda^k(A)\lambda^m(B) = \infty$ ist nichts zu zeigen.
Bleibt der Fall $\lambda^k(A) = \infty$, $\lambda^m(B) = 0$ (oder umgekehrt).
Mit $A_l = \{x \in A : l - 1 \leq ||x|| \leq l\}$ folgt

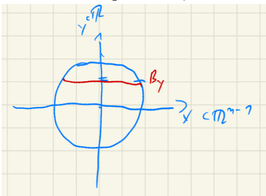
$$\lambda^n(A \times B) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^n(A_l \times B) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^k(A_l)\lambda^m(B) = 0$$

□

Vorlesung 18
15.01.21

Bsp.:

1. Volumen α_n der Kugel $B = \{z \in \mathbb{R}^n \mid ||z|| < 1\}$.
   Für $y \in [-1, 1)$ ist $B_y = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid ||x|| < |1 - y^2|^{1/2}\}$



$$\alpha_n = \int_{-1}^{1} \lambda^{n-1}(B_y)\, dy = \alpha_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{\frac{n-1}{n}}\, dy$$

$$\overset{y=\cos\theta}{=} \alpha_{n-1} A_n, \text{ mit } A_n = \int_0^{\pi} \sin^n \theta\, d\theta$$

$$\overset{part.Int.}{\Longrightarrow} A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}\ \forall\ n \geq 2, \text{ dabei sind } A_0 = \pi, A_1 = 2$$

$$\Longrightarrow A_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} A_0 = \pi \prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1}$$

$$A_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} A_1 = 2 \prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1}$$

$$\Longrightarrow A_{2k+1} A_{2k} = \frac{2\pi}{2k+1} \text{ bzw. } A_{2k} A_{2k-1} = \frac{\pi}{k}$$

$$\Longrightarrow \alpha_{2k} = (A_{2k} A_{2k-1}) \ldots (A_3 A_2) \alpha_0 = \frac{\pi^k}{k!}$$

$$\alpha_{2k+1} = (A_{2k} A_{2k-1}) \ldots (A_3 A_2) \alpha_1 = \frac{\pi^k}{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})\ldots\frac{1}{2}}$$

   Bem: $\alpha_k \to 0$ mit $k \to \infty$

2. Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $K(A) = \{y(x, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n-1} \mid 0 < y < 1, x \in A\}$
   Beh: A messbar bzgl. $\lambda^n \implies K(A)$ λ^{n+1}-messbar und $\lambda^{n+1}(K(A)) = \frac{1}{n+1}\lambda^n(A)$ (siehe Aufschrieb)

Def. VI.6
Eine Funktion $f : X \to [-\infty, \infty]$ heißt ***σ*-endlich** bzgl. des äußeren Maßes μ, falls gilt:

$$f \text{ ist } \mu\text{-messbar und } \{f \neq 0\} \text{ ist } \sigma\text{-endlich}$$

Satz VI.7 (Fubini)
Seien α, β äußere Maße auf X bzw. Y und $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ sei σ-endlich bzgl. $\alpha \times \beta$. Ist das Integral $\int f \; d(\alpha \times \beta)$ definiert, so gilt:

1. Für β-fast alle $y \in Y$ ist $f(\cdot, y)\alpha$-messbar, und $\int\limits_X f(x,y) \; d\alpha(x)$ existiert.
2. $y \mapsto \int\limits_X f(x,y) \; d\alpha(x)$ ist β-messbar und $\int\limits_Y \int\limits_X f(x,y) \; d\alpha(x) \; d\beta(y)$ existiert.
3. $\int\limits_{X \times Y} f \; d(\alpha \times \beta) = \int\limits_Y \int\limits_X f(x,y) \; d\alpha(x) \; d\beta(y)$

Der Satz gilt auch mit vertauschten Reihenfolgen der Integrationen, also folgt:

$$\int\limits_{X \times Y} f \; d(\alpha \times \beta) = \int\limits_Y \int\limits_X f(x,y) \; d\alpha(x) \; d\beta(y) = \int\limits_X \int\limits_Y f(x,y) \; d\beta(y) \; d\alpha(x)$$

Zusatz: Ist $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ σ-endlich und $\int\limits_Y \int\limits_X |f(x,y)| \; d\alpha(x) \; d\beta(y) < \infty$, so ist f integrierbar bzgl. $\alpha \times \beta$ und der Satz damit anwendbar.

Beweis. Für $f = \psi_E$ mit $E \subset X \times Y$ σ-endlich gelten 1)-3) nach Satz VI.4

- Für β-fast alle $y \in Y$ ist $f(\cdot, y) = \psi_{E_y}$ α-messbar mit $\int\limits_X f(x,y) d\alpha(x) = \alpha(E_y)$
- $y \mapsto \alpha(E_y)$ ist β-messbar mit $\int\limits_Y \alpha(E_y) d\beta(y)$
- $\int\limits_{X \times Y} f d(\alpha \times \beta) = (\alpha \times \beta)(E) = \int\limits_Y \alpha(E_y) d\beta(y) = \int\limits_Y \int\limits_X f(x,y) d\alpha(x) d\beta(y)$

Sei jetzt $f \leq 0$. Satz IV.9 $\implies$ $\exists \alpha \times \beta$-Treppenfunktion $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ...$ mit $f_k(x,y) \to f(x,y)$ auf $X \times Y$. Die f_k sind ebenfalls σ-endlich, und es gilt:

- $f(\cdot, y)$ ist monotoner Grenzwert der $f_k(\cdot, y)$. Für β-fast alle $y \in Y$ ist damit $f(\cdot, y)$ α-messbar und $\int\limits_X f(\cdot, y) d\alpha = \lim\limits_{k \to \infty} \int\limits_x f_k(\cdot, y) d\alpha$ (Satz IV.10)
- $y \mapsto \int\limits_X f(\cdot, y) d\alpha$ ist monotoner Grenzwert von $y \mapsto \int\limits_X f_k(\cdot, y) d\alpha$ für β-fast alle $y \in Y$
  $\implies y \mapsto \int\limits_X f(\cdot, y) d\alpha$ ist β-messbar und $\int\limits_Y \int\limits_X f(x,y) d\alpha(x) d\beta(x) = \lim\limits_{k \to \infty} \int\limits_Y \int\limits_X f_k(x,y) d\alpha(x) d\beta(y)$
- $\int\limits_{X \times Y} f d(\alpha \times \beta) = \lim\limits_{k \to \infty} \int\limits_{X \times Y} f_k d(\alpha \times \beta) = \lim\limits_{k \to \infty} \int\limits_Y \int\limits_X f_k(x,y) d\alpha(x) d\beta(y) = \int\limits_Y \int\limits_X f(x,y) d\alpha(x) d\beta(y)$

$\implies$ Fubini für $f \geq 0$
Sei f nun σ-endlich und $\int f^- d(\alpha \times \beta) < \infty$.
$\implies$ $f^{\pm}$ sind auch σ-endlich und $\int\limits_Y \int\limits_X f^-(x,y) d\alpha(x) d\beta(y) = \int -X \times Y f^- d(\alpha \times \beta) y \infty$
$\implies$ Für β-fast alle $y \in Y$ gilt $\int\limits_X f^-(x,y) d\alpha(x) < \infty$ und $f^-(x,y) < \infty$ für α-fast alle $x \in X$.

- Für β-fast alle $y \in Y$ ist $f(\cdot,y) = f^+(\cdot,y) - f^-(\cdot,y)$ α-messbar, mit Integral $\int_X f(\cdot,y)d\alpha = \int_X f^+(\cdot,y)d\alpha - \int_X f^-(\cdot,y)d\alpha$
- $y \mapsto \int_X f(\cdot,y)d\alpha$ ist Differenz zweier messbarer Funktionen, also messbar und ihr Integral existiert, denn $s \mapsto s^-$ fallend, gilt $\int_Y \left(\int_X f(x,y)d\alpha(x)\right)^- d\beta(y) \leq \int_Y \left(-\int_X f^-(x,y)d\alpha(x)\right)^- d\beta(y)$ $= \int_Y \int_X f^-(x,y)d\alpha(x)d\beta(y) < \infty$
- $$\begin{aligned}\int_{X\times Y} fd(\alpha\times\beta) &= \int_{X\times Y} f^+d(\alpha\times\beta) - \int_{X\times Y} f^-d(\alpha\times\beta)\\ &= \int_Y\int_X f^+(x,y)d\alpha(x)d\beta(y) - \int_Y\int_X f^-(x,y)d\alpha(x)d\beta(y)\\ &= \int_Y\int_X \big(f^+(x,y) - f^-(x,y)\big)\, d\alpha(x)d\beta(y)\\ &= \int_Y\int_X f(x,y)d\alpha(x)d\beta(y)\end{aligned}$$

  $\Longrightarrow$ Beh.

Zusatz: Folgt durch Anwendung auf $|f|$, dann gilt:

$$\int_{X\times Y} |f|d(\alpha\times\beta) = \int_Y\int_X |f(x,y)|d\alpha(x)d\beta(y) < \infty$$

$\Longrightarrow$ Integral von f bzgl $\alpha\times\beta$ ist definiert. $\square$

Bsp.:

1. $\left.\begin{array}{l}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ dy\ dx = \pi\\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ dx\ dy = -\pi\end{array}\right\}$ denn $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\arctan(\frac{x}{y})$ für $y \neq 0$

   Fubini $\Longrightarrow$ Integral bzgl. $\lambda^2 = \lambda^1 \times \lambda^1$ ex nicht!

2. $$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\ dx\ dy = 0 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\ dy\ dx$$

   Aber das λ^2-Integral über $[-1,1)^2$ ex. nicht, da

   $$\int_{[0,1)^2} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\ d\lambda^2(x,y) = \int_0^1\int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\ dx\ dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2})\ dy = \infty$$

Bsp.:
μ äußeres Maß auf X und $f : X \to [0,\infty]$ sei σ-endlich bzgl. μ. Ist $\mathcal{C} : [0,\infty] \to [0,\infty]$ stetig mit $\mathcal{C}(0) = 0$, sowie auf $(0,\infty)$ stetig differenzierbar mit $\mathcal{C}'(t) \geq 0$, so gilt:

$$\int\limits_X \mathcal{C}(f(x))\ d\mu(x) = \int\limits_0^\infty \mathcal{C}'(t)\mu(\{f > t\})\ dt$$

(Begründung siehe Aufschrieb)

Vorlesung 19
18.01.21

Satz VI.8
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $f \in C^1_C(\Omega)$ und $g \in C^1(\Omega)$ gilt:

$$\int\limits_\Omega (\partial_j f) g dx = -\int\limits_\Omega f(\partial_j g) dx \quad \forall\ 1 \leq j \leq n\ (dx \mathrel{\hat{=}} d\lambda^n)$$

Beweis. Es reicht die Aussage $(*)$ zu zeigen:

$$(*) \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_j f dx = 0\ \forall f \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$$

Denn setzen wir fg durch 0 zu einer Funktion $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ fort, so folgt

$$0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_j \phi dx = \int\limits_\Omega \partial_j (fg) dx = \int\limits_\Omega (\partial_j f) g dx + \int\limits_\Omega f \partial_j g dx$$

Fubini für $f \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ liefert mit $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x) dx &= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_j f(x', x_n) dx' dx_n \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \partial_j f(x', x_n) dx_n dx'\end{aligned}$$

Für $j = n$ ist das letzte Integral 0 nach Hauptsatz. Für $1 \leq j \leq n-1$ verschwindet das mittlere Integral nach Induktion. □

Bem.:

1. partielle Integration wird oft mit ∇ und *div* formuliert:
   $f \in C^1_C(\Omega), X \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$
   $\int\limits_\Omega < \nabla f, x > dx = -\int\limits_\Omega f(divX) dx$
   $(< \nabla f, X > = \sum\limits_{i=1}^n \partial_i f X_i\ ,\ f divX = \sum\limits_{i=1}^n f \partial_i X_i)$
2. Der Satz von Fubini gilt auch für kartesische Produkte mit endlich vielen (statt nur zwei) Faktoren. Man zeige analog zu Lemma VI.5, dass in einem endlichen Produkt von Maßen beliebig Klammern gesetzt oder weggelassen werden können. Fubini wird dann per Induktion über die Anzahl der Faktoren bewiesen.

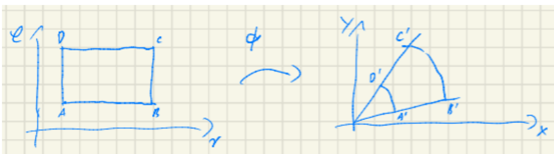
VII Der Transformationssatz

Def. VII.1
Eine Abbildung $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$,$\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, heißt C^1-Diffeomorphismus, falls Φ bijektiv ist und Φ, Φ^{-1} stetig differenzierbar sind.

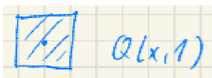
Bsp.: (Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^n$)
$\Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) = \mathcal{U} \to \mathcal{V} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$

$$\Phi(r, \mathcal{C}) = (r\cos(\mathcal{C}), r\sin(\mathcal{C}))$$
$$\Phi^{-1}(x, y) = \begin{cases} (r, \arccos(\frac{x}{r})) & \text{, falls } y \geq 0 \\ (r, 2\pi - \arccos(\frac{x}{r})) & \text{, falls } y < 0 \end{cases}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Für $x < 0$ filt alternativ $\Phi^{-1}(x, y) = (r, \frac{\pi}{2} + \arccos(\frac{x}{r}))$
$\implies$ Φ^{-1} glatt auf ganz $\mathcal{V}$ $\implies$ Φ^{C^1} Diffeomorphismus.



Bem.: (Notation)
$x \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$
$Q(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid ||y - x||_\infty \leq \delta\}, ||x||_\infty = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|$



Lemma VII.2
Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \mathcal{U}$ und $\Phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ mit $D\Phi(x_0) \in GL_n(\mathbb{R})$. Gegeben sei eine Folte $Q_j = Q(x_j, \phi_j) \subseteq \mathcal{U}$ mit $\phi_j \to 0$ und $x_0 \in Q_j$ $\forall$ $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{\lambda^n(\Phi(Q_j))}{\lambda^n(Q_j)} \leq |detD\Phi(x_0)|$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz VII.3 (Transformationsformel)
$\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ C^1-Diffeomorphismus. Ist $A \subseteq \mathcal{U}$ λ^n-messbar, so ist auch $\Phi(A)$ λ^n-messbar und es gilt:

1. $\lambda^n(\Phi(A)) = \int\limits_A |\det D\Phi(x)| dx$

Weiter gilt für jede λ^n-messbare Funktion $f : \mathcal{V} \to \bar{\mathbb{R}}$

2. $\int\limits_{\mathcal{V}} f(y) dy = \int\limits_{\mathcal{U}} f(\Phi(x)) \, |\det D\Phi(x)| \, dx \quad (dy \mathrel{\hat{=}} d\lambda^n(y))$

falls eines der Integrale definiert ist.

Beweis. siehe Aufschrieb ☐

Vorlesung 20
22.01.2021

Bsp.:

1.
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-||(x,y)||^2}$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2 \overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} (\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy) dx = (\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx)^2$$

Für Polarkoordinaten $\Phi : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$ gilt:
$$\det D\Phi(r,\Theta) = r$$

Da $\{(x,0) \mid x \geq 0\}$ eine λ^2-Nullmenge ist, folgt aus der Transformationsformel:
$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2 &= \int\limits_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} e^{-r^2} r \; d\lambda^2(r,\Theta) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_0^\infty e^{-r^2} r (\int\limits_0^{2\pi} d\Theta) dr \\
&= 2\pi \int\limits_0^\infty e^{-r^2} r \; dr \\
&= 2\pi [-\frac{1}{2} e^{-r^2}]_{r=0}^{r=\infty} \\
&= \pi
\end{aligned}$$
$$\implies \int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. Spezialfall $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V} C^1$-Diffeomorphismus ist Einschränkung einer linearen Abbildung.

$$\begin{aligned} &\implies \Phi(x) = Sx \text{ mit } S \in GL_n(\mathbb{R}) \\ &\implies D\Phi(x) = S \ \forall\ x \in \mathcal{U} \\ &\overset{Trafo}{\implies} \lambda^n(S(D)) = |\det S|\lambda^n(D) \text{ (siehe Satz ???)} \end{aligned}$$

$$\text{bzw. } \int\limits_{\mathcal{V}} f(y) d\lambda^n(y) = |\det S| \int\limits_{\mathcal{U}} f(Sx) d\lambda^n(x)$$

3. Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$

$$\Phi(r, \Theta, \phi) = (r\sin(\Theta)\cos(\phi), r\sin(\Theta)\sin(\phi), r\cos(\Theta))$$

ist C^∞-Diffeomorphismus der offenen Mengen $\mathcal{U} = (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0, 2\pi)$ und $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\}$
Inverse:
$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \Theta = \arccos(\frac{z}{r})$
$$\phi = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{, für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{, für } y \leq 0 \end{cases}$$
$$D\Phi(r, \Theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin(\Theta)\cos(\phi) & r\cos(\Theta)\cos(\phi) & -r\sin(\Theta)\sin(\phi) \\ \sin(\Theta)\sin(\phi) & r\cos(\Theta)\sin(\phi) & r\sin(\Theta)\cos(\phi) \\ \cos(\Theta) & -r\sin(\Theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\implies \det D\Phi = r^2\sin(\Theta) \\ &E := [r_1, r_2] \times [\Theta_1, \Theta_2] \times [\phi_1, \phi_2] \end{aligned}$$
$$\lambda^3(\Phi(E)) = \int\limits_{r1}^{r2}\int\limits_{\Theta_1}^{\Theta_2}\int\limits_{\phi_1}^{\phi_2} r^2 \sin(\Theta) d\phi d\Theta dr = \frac{r_2^3 - r_1^3}{3}(\cos(\Theta_1) - \cos(\Theta_2))(\phi_2 - \phi_1)$$

Bem.:
Ziel: Umrechnung von Differentialoperatoren
Begriff: $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ C^k-Diffeomorphismus zwischen $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ offen.
Gramsche Matrix $g \in C^{k-1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{n\times n}), g = (g_{i,j})$

$$g(x) = D\Phi(x)^\top D\Phi(x) \text{ bzw.} g_{i,j}(x) =< \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(x) >$$

Für Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$(g_{i,j}(r, \Theta, \phi))_{1\leq i,j\leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\Theta) \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt:
$g(x)$ ist symmetrisch und strikt positiv definit, denn

$$< g(x)v, v > = < D\Phi(x)^\top D\Phi(x)v, v > = |D\Phi(x)v|^2 > 0$$

für $v \neq 0$ und $D\Phi(x) \in GL_n(\mathbb{R}) \implies g(x)$ ist invertierbar.

Wir setzen: $g^{ij}(x) = (g(x)^{-1})_{ij}$
... (Rest siehe Aufschrieb)

Satz VII.4
Sei $\Phi \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ Diffeomorphismus zwischen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit gramscher Matrix (g_{ij})

1. Für $v \in C^1(\mathcal{V})$ gilt mit $\mu = v \circ \Phi$:

$$(\nabla v) \circ \Phi = D\Phi \cdot \nabla_g u \quad , \quad \nabla_g u := \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} e_j$$

2. Für $y \in C^1(\mathcal{V}, \mathbb{R}^n)$ gilt mit $y \circ \Phi = D\Phi x$:

$$(div(y)) \circ \Phi = div_g x := \frac{1}{\sqrt{det(g)}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sqrt{det(g)} x_j)$$

3. Ist $\Phi \in C^2(\mathcal{U}, \mathcal{V}), v \in C^2(\mathcal{V}), u = v \circ \Phi$

$$\implies (\triangle v) \circ \Phi = div_g \nabla_g u = \frac{1}{\sqrt{det(g)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{det(g)} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j})$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bsp.: (Laplace in Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{aligned}
\nabla_g u &= \frac{\partial u}{\partial r} e^r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \Theta} e^\Theta + \frac{1}{r^2 \sin^2(\Theta)} \frac{\partial u}{\partial \phi} e^\phi \\
div_g x &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 x^r) + \frac{1}{\sin(\Theta)} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin(\Theta) x^\Theta) + \frac{\partial x^\phi}{\partial \phi} \\
\triangle_g u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin(\Theta)} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin(\Theta) \frac{\partial u}{\partial \Theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\Theta)} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

e^r, e^Θ, e^ϕ Standardbasis im (r, Θ, ϕ)-Raum und x^r, x^Θ, x^ϕ sind zugehörige Koordinaten

$$v(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \implies u = r^{-1}$$

$$\implies \triangle v \circ \Phi = \triangle_g u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

VIII Das Flächenmaß auf Untermannigfaltigkeiten

Vorlesung 21
25.01.2021

Def. VIII.1
Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{n+k})$ heißt **Immersion**, wenn gilt:

$$Rang\ Df(x) = n \Leftrightarrow Ker\ Df(x) = \{0\}\ \forall\ x \in \mathcal{U}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$ bilden eine Basis von $Bild\ Df(x) \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$. n heißt **Dimension**, k die **Kodimension** von f.
Wir definieren die **Gramsche Matrix** oder **induzierte Metrik**

$$g(x) = Df(x)^\top Df(x)$$

$$\text{bzw. } g_{ij}(x) =< \frac{\partial f}{\partial x_i}|x|, \frac{\partial f}{\partial x_j}|x| >$$

$\rightarrow (g_{ij})$ ist für $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{n+k})$ beliebig definiert und positiv semidefinit.
Die Matrix ist genau dann strikt positiv definit und damit invertierbar, wenn f eine Immersion ist:

$$< g(x)v, v >= |Df(x)v|^2 \geq 0$$

$$\implies Ker\ g(x) = Ker\ Df(x)$$

Def. VIII.2
Flächenformel $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{n+k})$ eine n-dimensionale Immersion mit Gramscher Matrix g, und $E \subseteq \mathcal{U}$ sei λ^n-messbar.
Der (n-dimensionale) **Flächeninhalt** von f auf E ist definiert durch

$$A(f, E) = \int\limits_E Jf(x)\ dx$$

$$\text{mit } Jf = \sqrt{det\ g}$$

Jf heißt **Jacobische** von f.

Bsp.:

1. $f = S \circ \Phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n+k}, \Phi \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ Diffeomorphismus zwischen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $S : \mathbb{R}^n \to Y \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ lineare Isometrie, $E \subseteq \mathcal{U}$ messbar, $Df(x) = S\ D\Phi(x)$

$$\begin{aligned} \implies A(f, E) &= \int\limits_E \sqrt{det\ D\Phi(x)^\top S^\top S D\Phi(x)} dx \\ &= \int\limits_E |det\ D\Phi(x)| dx \overset{Trafo}{=} \lambda^n(\Phi(E)) \end{aligned}$$

2. 1-dim Immersion $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}^n$ $f = f(A)$ heißt **reguläre Kurve** Gramscher Matrix $g_{11} =< f'(A), f'(A) >= ||f'(A)||^2$

   Länge von Kurve $\to L(f) = \int\limits_a^b ||f'(A)|| dt$

$$f(A) = (cos(t), sin(t)) \quad L(f, [0, 3\pi]) = 3\pi$$

3. 2-dim Immersion in $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, k = 1)$ $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3, f = f(x, y)$ heißt **reguläre Fläche**

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} ||\frac{\partial f}{\partial x}||^2 & < \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} > \\ < \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} > & ||\frac{\partial f}{\partial y}||^2 \end{pmatrix}$$

$\implies Jf = \sqrt{||\frac{\partial f}{\partial x}||^2 ||\frac{\partial f}{\partial y}||^2 - < \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} >^2} = ||\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}||$
$(||a||^2||b||^2 - < a, b >^2 = ||a \times b||^2$ siehe LA)

Polarkoordinaten:
$f : \mathcal{U} = (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$
$f(\theta, \phi) = \big(sin(\theta)cos(\phi) \quad sin(\theta)sin(\phi) \quad cos(\theta)\big)$
$\overset{\text{Kap. VII}}{\implies} Jf(\theta, \phi) = sin(\theta) \implies f$ reguläre Fläche

$$A(f) = \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} sin(\theta)\ d\phi\ d\theta = 4\pi$$

4. siehe Aufschrieb

Satz VIII.3
$\Phi \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ Diffeomorphismus, $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\mathcal{V}, \mathbb{R}^{n+k})$ Immersion. Dann gilt:

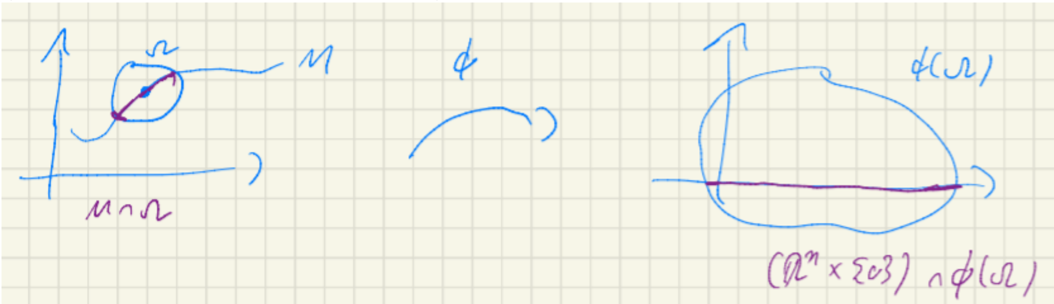
$$A(f, \Phi(E)) = A(f \circ \Phi, E) \quad \forall\ E \subseteq \mathcal{U}\ \lambda^n\text{-messbar}$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Def. VIII.4 (Untermannigfaltigkeiten)
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ heißt **Untermannigfaltigkeit** des $\mathbb{R}^{n+k}$, der Klasse C^r, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ offen (mit $M \in \Omega$) und $\exists\ \Phi : \Omega \to \Phi(\Omega)$
C^r-Diffeomorphismus mit

$$\Phi(M \cap \Omega) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap \Phi(\Omega)$$

(Φ heißt **lokale Plättung** von M)



Satz VIII.5
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$. Dann sind äquivalent:

1. M ist n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^r
2. $\forall p \in M\ \exists\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ offene Umgebung vvon p und $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$ mit $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ und $Rang\ Df = k$ auf Ω
3. $\forall p \in M\ \exists$ offene Umgebungen $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^k$ und $g \in C^r(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, so dass nach geeigneter Permutation der Koordinaten gilt:
$$M \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{V}) = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathcal{U}\}$$
4. $\forall p \in M\ \exists$ offene Umgebung $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{C} \in C^r(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{n+k})$ mit $\mathcal{C}(x_0) = p$ für ein $x_0 \in \mathcal{U}$ und $Rang\ D\mathcal{C}(x) = n\ \forall\ x \in M$, so dass $\mathcal{C}$ offene Teilmengen von $\mathcal{U}$ in relativ offene Teilmengen von M abbildet.

Vorlesung 22
29.01.2021

Satz VIII.6
Jede n-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ ist als abzählbare Vereinigung $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ von kompakten Mengen darstellbar.

Beweis. siehe Aufschrieb □

Def. VIII.7
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1. Eine **lokale Parametrisierung** von M ist eine injektive Immersion $f : \mathcal{U} \to M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$, wobei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1$.

Lemma VIII.8
Für jede Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ der Klasse C^1 gibt es lokale C^1-Parametrisierungen $f_i : \mathcal{U}_i \to M$, wobei $i \in \mathbb{N}$, sodass $M = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i(\mathcal{U}_i)$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz VIII.9
$M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ C^1-Untermannigfaltigkeit. Dann gelten:

1. Ist $f : \mathcal{U} \to M$ lokale Parametrisierung von M, so ist $f(\mathcal{U})$ offen in M und $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ ist homeomorph, d.h. f^{-1} ist stetig bzgl. euklidischer Metrik auf $f(\mathcal{U})$.
2. Sind $f_i : \mathcal{U}_i \to f(\mathcal{U}_i) = \mathcal{V}_i$ für $i = 1, 2$ lokale C^1-Parametrisierung von M, so ist $f_2^{-1} \circ f_1 : f_1^{-1}(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2) \to f_2^{-1}(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2)$ ein C^1-Diffeomorphismus.

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz VIII.10 (Flächenmaß)
$M \subseteq \mathbb{R}^{n+k} C^1$-Untermannigfaltigkeit. Dann heißt $E \subseteq M$ messbar, falls gilt:

$$f^{-1}(E) \text{ ist } \lambda^n\text{-messbar für jede lokale Parametrisierung } f : \mathcal{U} \to M$$

Das System $\mathcal{M}$ der messbaren Teilmengen von M ist eine σ-Algebra. Diese enthält die Borelmengen in M. Weiter gibt es genau ein Maß μ_M auf $\mathcal{M}$, so dass für jede lokale Parametrisierung $f : \mathcal{U} \to M$ und jedes $E \subseteq f(\mathcal{U})$ messbar gilt:

$$\mu_M(E) = \int\limits_{f^{-1}(E)} Jf(x)\, dx$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz VIII.11 (Oberflächenintegral)
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k} n$-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit und $M = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i$ eine paarweiße disjunkte, messbare Zerlegung mit $M_i \subseteq \mathcal{V}_i$ für lokale Parametrisierungen $f_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}_i$. Für eine messbare Funktion $u : M \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\int\limits_M u \; d\mu_M = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_{f_i^{-1}(M_i)} u(f_i(x)) \; Jf_i(x) \; dx$$

Vorlesung 23
01.02.2021

Lemma VIII.12
Sei $T : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine **Ähnlichkeitsabbildung**, d.h. $\exists \lambda > 0, Q \in O(n+k)$ und $a \in \mathbb{R}^{n+k}$ mit $T(p) = \lambda Q(p+a)$. Ist $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, so auch $N = T(M)$ und für μ_M bzw. μ_N gilt:

1. Ist $A \subseteq M$ messbar $\implies T(A) \subseteq N$ messbar und
$$\mu_N(T(A)) = \lambda^n(\mu_M(A))$$
2. Ist $u : N \to \bar{\mathbb{R}}$ μ_N-messbar, so ist $u \circ T : M \to \bar{\mathbb{R}}$ μ_M-messbar und es gilt, sofern eines der Integrale existiert:
$$\int\limits_N u(q) \; d\mu_N(q) = \lambda^n \int\limits_M u(T(p)) \; d\mu_M(p)$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz VIII.13 (Zwiebelformel)
Für $u \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$ ist $u|_{\partial B_r(0)} \subseteq L^1(\mu_{\partial B_r(0)})$ für fast alle $r > 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} u(p) \; dp &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{\partial B_r(0)} u(p) \; d\mu_{\partial B_r(0)}(p) \; dr \\ &= \int\limits_0^\infty r^n \int\limits_{S^n} u(rw) \; d\mu_{S^n}(w) \; dr\end{aligned}$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bsp.:
Mit $u = \psi_{B_1(0)}$ folgt für $w_n = \mu_{S^n}(S^n)$:

$$\alpha_{n+1} = \lambda^{n+1}(B_1(0)) = \int\limits_0^1 \mu_{\partial B_r(0)}(\partial B_r(0))\ dr = \int\limits_0^1 w_n r^n\ dr = \frac{w_n}{n+1}$$

$\implies w_n = (n+1)\alpha_{n+1}$
z.B. $w_1 = 2\pi, w_2 = 4\pi, w_3 = 2\pi^2, ...$

IX Der Integralsatz von Gauß

(Einleitung siehe Aufschrieb)

Satz IX.1
Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sind äquivalent:

1. Plättung:
   $\forall\ p \in \partial\Omega\ \exists\ W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in W$ und $\Phi : W \to \Phi(W)$
   C^1-Diffeomorphismus mit:

   $$\Phi(W \cap \Omega) = \mathbb{H}^n \cap \Phi(W) \text{ wobei } \mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0)$$

   `img/IX_1_Pl\protect \unhbox \voidb@x \bgroup \U@D 1ex{\setbox \z@ \hbox`

   ättung.png

2. Subniveau:

$\forall p \in \partial\Omega\ \exists W \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in W$ und $h \in C^1(W)$ mit $Dh(q) \neq 0)$ $\forall q \in W$, sodass $\Omega \cap W = \{q \in W \mid h(q) < 0\}$

3. Subgraph:
$\forall p \in \partial\Omega\ \exists \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen $\exists$ offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}\ \exists C^1$-Funktion $u : \mathcal{U} \to I$, sodass nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten gilt:

$$\Omega \cap (\mathcal{U} \times I) = \{(x, y) \in \mathcal{U} \times I \mid y < u(x)\}$$

Die Menge Ω hat C^1-Rand wenn eines (und damit jedes) der drei Kriterien erfüllt ist.

Beweis. siehe Aufschrieb $\square$

Lemma IX.2
In der Situation von Satz IX.1,3) gilt:

$$\partial\Omega \cap (\mathcal{U} \times I) = \{(x,y) \in \mathcal{U} \times I \mid y = u(x)\}$$
$$(\mathbb{R} \setminus \bar{\Omega}) \cap (\mathcal{U} \times I) = \{(x,y) \in \mathbb{U} \times I \mid y > u(x)\}$$

$\implies$ $\partial\Omega$ ist $(n-1)$-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ nach dem Graphenkriterium bei Untermannigfaltigkeiten.

Beweis. siehe Aufschrieb □

Vorlesung 24
05.02.2021

Lemma IX.3
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit C^1-Rand. Dann gibt es zu $p \in \partial\Omega$ genau einen Vektor $\nu(p) \in \mathbb{R}^n$ mit

1. $\nu(p) \perp T_p(\partial\Omega)$ und $||\nu(p)|| = 1$
2. $p + t\nu(p) \notin \Omega$ für t hinreichend klein

$\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n, n \mapsto \nu(p)$ ist stetig und heißt **äußere Normale** von Ω.

Bem.: (Erinnerung: Tangentialraum)
$\nu \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentialvektor** von $M \subseteq R^n, C^1$-Untermannigfaltigkeit in $p \in M$, falls $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ existiert mit $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = \nu$
$T_pM = \{$Alle Tangentualvektoren$\}$ $(n-1)$-dimensionaler Untervektorraum.

Def. IX.4
Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $C^1(\bar{\Omega})$ der Unterraum aller $f \in C^1(\Omega)$, für die f und Df stetige Fortsetzungen auf $\partial\Omega$ besitzen. Die **Fortsetzung** wird wieder mit f bezeichnet.

Lemma IX.5
Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathcal{U} \times T \mid y < u(x)\}$ wobei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ und $u \in C^1(\mathcal{U}, I)$. Hat $X \in C^1(\Omega, \bar{\mathbb{R}}^n)$ kompakten Träger in $\mathcal{U} \times I$, so gilt:

$$\int_\Omega div\ X\ d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} < X, \nu > \ d\mu$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Lemma IX.6
Sei $W_\lambda, \lambda \in \Lambda$, eine offene Überdeckung der kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine **untergeordnete Teilung der Eins**, d.h. es gibt eine endliche Familie von Funktionen $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), j \in J$, so dass gilt:

1. $\sum\limits_{j \in J} \psi_j(p) = 1 \quad \forall\, p \in K$
2. $\forall\, j \in J\ \exists\, \lambda = \lambda(j)$ mit *spt* $\psi_j \subseteq W_\lambda$

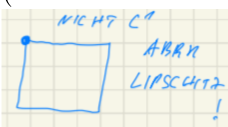
Beweis. siehe Aufschrieb □

Satz IX.7 (Integralsatz von Gauß)
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit C^1-Rand und äußere Normale $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $X \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$:

$$\int\limits_{\Omega} div\ X\ d\lambda^n = \int\limits_{\partial\Omega} < X, \nu >\ d\mu$$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bem.:
Gilt auch für Gebiete, deren Rand lokal lipschitz ist (d.h. u in Satz IX.1,3) ist lipschitz (siehe Buch von H.W. Alt: Lineare Funktionalanalysis)



Vorlesung 25
08.02.2021

Bsp.:
Wähle $X(x) = x \implies \lambda^n(\Omega) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} div\ X\ dx = \frac{1}{n} \int\limits_{\partial\Omega} < x, \nu(x) >\ d\mu(x)$

Speziell: $\alpha = \frac{\omega_{n-1}}{n}$
$\Omega = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n \to \nu(x) = x, \partial\Omega = S^{n-1}$

Lemma IX.8 (Greensche Formeln)
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Dann gilt für $u \in C^1(\bar{\Omega})$ und $v \in C^2(\bar{\Omega})$

1. $\int\limits_{\Omega} (u \triangle v + < \nabla u, \nabla v >) \; d\lambda^n = \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \; d\mu \quad (\frac{\partial v}{\partial \nu} =< \nabla v, \nu >)$

Weiter folgt für $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$

2. $\int\limits_{\Omega} (u \triangle v - v \triangle u) \; d\lambda^n = \int\limits_{\partial\Omega} (u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}) \; d\mu$

Beweis. siehe Aufschrieb □

Bsp.:
Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen
Sei $\mu \in C^2(\Omega)$ eine **harmonische Funktion**, d.h. $\triangle u = 0$ in Ω.
Für $x_0 \in \Omega$ und $0 < r < dist(x_0, \partial\Omega)$ gilt:

$$\int\limits_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \; d\mu \overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{B_r(x_0)} \triangle u \; d\lambda^n = 0 \qquad \triangle u = div \; (\nabla u)$$

Auf $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ betrachte weiter $v(x) = \gamma(||x - x_0||)$ mit $\gamma(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho^{2-n}}{2-n} & , n \geq 3 \\ \log(\rho) & , n = 2 \end{cases}$

$\overset{\text{Ana II}}{\Longrightarrow}$ v ist harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$

... Rest siehe Aufschrieb

Bsp.:
siehe Aufschrieb