Анализ модельного риска
Лабораторная работа №3

Долгих Елизавета

Задание 1

Рассмотрим SABR модель:

$$\begin{cases} dS_t = v_t S_t^\beta dW_t^1, \\ dv_t = \eta v_t dW_t^2, \\ dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt. \end{cases}$$

Предполагается нулевая процентная ставка ($r = 0$).

(a) Вывести разложение ошибки хеджирования в SABR модели.

(b) Вывести разложение ошибки хеджирования в модели Хестона.

(c) Выполнить качественную оценку компонент ошибок.

Решение:

(a) Разложение ошибки хеджирования в SABR модели

В модели SABR риск-нейтральная динамика актива (в риск-нейтральной мере $\mathbb{Q}$) задается системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dS_t = v_t S_t^\beta dW_t^1, \\ dv_t = \eta v_t dW_t^2, \\ dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt. \end{cases}$$

Согласно условию, процентная ставка $r(u) = r = 0$, следовательно, дрейф волатильности в риск-нейтральной мере отсутствует ($\tilde{\alpha}_t = 0$).

Выпишем квадратичные вариации и ковариации процессов, используя таблицу умножения Ито:

$$(dS_t)^2 = v_t^2 S_t^{2\beta} dt,$$
$$(dv_t)^2 = \eta^2 v_t^2 dt,$$
$$(dS_t)(dv_t) = \rho \eta v_t^2 S_t^\beta dt.$$

Обозначим модельные квадратичные ковариации, которые используются в уравнении в частных производных (PDE) для цены опциона $V(t, S, v)$:

$$[dS, dS]^{model} = v^2 S^{2\beta} dt,$$
$$[dS, dv]^{model} = \rho \eta v^2 S^\beta dt,$$
$$[dv, dv]^{model} = \eta^2 v^2 dt.$$

Воспользуемся общей формулой разложения ошибки хеджирования Z_t, полученной в лекциях, подставив в неё параметры модели SABR. Учитывая $r = 0$, компонента финансирования (Funding) упрощается.

Ошибка хеджирования Z_t представима в виде:

$$
\begin{aligned}
Z_t = Z_0 &- \int_0^t r_u^f \left(V_u - \varphi_u^1 V_u^1 - \left(\frac{\partial V}{\partial s} - \varphi_u^1 \frac{\partial V^1}{\partial s} \right) S_u \right) du \quad \text{(Funding Component)} \\
&+ \int_0^t \left(\Delta_u^h + \varphi_u^1 \frac{\partial V^1}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial s} \right) dS_u \quad \text{(Delta Component)} \\
&+ \int_0^t \left(\varphi_u^1 \frac{\partial V^1}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial v} \right) dv_u \quad \text{(Vega Component)} \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - \varphi_u^1 \frac{\partial^2 V^1}{\partial s^2} \right) \left(v_u^2 S_u^{2\beta} du - (dS_u)^2 \right) \quad \text{(Gamma Component)} \\
&+ \int_0^t \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial v} - \varphi_u^1 \frac{\partial^2 V^1}{\partial s \partial v} \right) \left(\rho \eta v_u^2 S_u^{\beta} du - (dS_u)(dv_u) \right) \quad \text{(Vanna Component)} \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} - \varphi_u^1 \frac{\partial^2 V^1}{\partial v^2} \right) \left(\eta^2 v_u^2 du - (dv_u)^2 \right) \quad \text{(Volga Component).}
\end{aligned}
$$

Здесь V^1 — цена хеджирующего инструмента, φ^1 — количество единиц этого инструмента в портфеле. Заметим, что если реальный процесс в точности следует модели SABR с теми же параметрами, то подынтегральные выражения в компонентах Gamma, Vanna и Volga зануляются (так как $(dS)^2$ совпадает с модельным и т.д.), и эти интегралы равны нулю.

(b) Разложение ошибки хеджирования в модели Хестона

Динамика базового актива в риск-нейтральной мере в модели Хестона задается системой СДУ:

$$
\begin{cases}
dS_t = \sqrt{v_t} S_t d\overline{W}_t^1, \\
dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \eta \sqrt{v_t} d\overline{W}_t^2, \\
d\overline{W}_t^1 d\overline{W}_t^2 = \rho dt,
\end{cases}
$$

где ρ — корреляция, κ — скорость возврата к среднему, θ — долгосрочный уровень дисперсии.

Квадратичные вариации процессов:

$$
\begin{aligned}
(dS_t)^2 &= v_t S_t^2 dt, \\
(dv_t)^2 &= \eta^2 v_t dt, \\
(dS_t)(dv_t) &= \rho \eta v_t S_t dt.
\end{aligned}
$$

Модельные квадратичные ковариации из PDE:

$$
\begin{aligned}
[dS, dS]^{model} &= v S^2 dt, \\
[dS, dv]^{model} &= \rho \eta v S dt, \\
[dv, dv]^{model} &= \eta^2 v dt.
\end{aligned}
$$

Дрейф волатильности в риск-нейтральной мере: $\tilde{\alpha}_t = \kappa(\theta - v_t)$.

Подставляем в общую формулу разложения ошибки (сгруппируем Premium и Delta компоненты):

$$
\begin{aligned}
Z_t = Z_0 &+ \int_0^t \left(\Delta_u^h + \varphi_u^1 \frac{\partial V^1}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial s} \right) dS_u \quad \text{(Premium + Delta Component)} \\
&+ \int_0^t \left(\varphi_u^1 \frac{\partial V^1}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial v} \right) (dv_u - \kappa(\theta - v_u)du) \quad \text{(Vega Component)} \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - \varphi_u^1 \frac{\partial^2 V^1}{\partial s^2} \right) \left(v_u S_u^2 du - (dS_u)^2 \right) \quad \text{(Gamma Component)} \\
&+ \int_0^t \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial v} - \varphi_u^1 \frac{\partial^2 V^1}{\partial s \partial v} \right) (\rho \eta v_u S_u du - (dS_u)(dv_u)) \quad \text{(Vanna Component)} \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} - \varphi_u^1 \frac{\partial^2 V^1}{\partial v^2} \right) \left(\eta^2 v_u du - (dv_u)^2 \right) \quad \text{(Volga Component)}.
\end{aligned}
$$

(c) Качественная оценка компонент

Рассмотрим полученные компоненты ошибки:

1. **Delta component**: Ошибка, возникающая из-за несовпадения реальной дельты и модельной, а также дискретности хеджирования.

2. **Vega component**: Ошибка из-за неточного хеджирования волатильности и расхождения между фактическим дрейфом dv и модельным $\tilde{\alpha} dt$. В модели Хестона этот риск выше из-за наличия параметра mean-reversion.

3. **Gamma component**: Ошибка из-за расхождения фактической и модельной квадратичной вариации цены.

4. **Vanna component**: Ошибка из-за расхождения фактической и модельной ковариации между ценой и волатильностью.

5. **Volga component**: Ошибка из-за расхождения фактической и модельной волатильности волатильности (vol of vol).

Сравнение моделей SABR и Heston:

- **Gamma Risk:**
  - SABR: $[dS, dS]^{model} = v^2 S^{2\beta} dt$. При $\beta < 1$ зависимость от цены S слабее (CEV-подобное поведение).
  - Heston: $[dS, dS]^{model} = v S^2 dt$. При малых v гамма-риск затухает.
- **Vanna Risk:**
  - SABR: Зависит от $\rho \eta v^2 S^\beta$.
  - Heston: Зависит от $\rho \eta v S$. При отрицательном ρ (эффект рычага, leverage effect) этот риск становится значительным.
- **Volga Risk:**
  - SABR: Зависит от $\eta^2 v^2$ (квадратично по v). Это означает высокую чувствительность к большим значениям волатильности.
  - Heston: Зависит от $\eta^2 v$ (линейно по v).
- **Vega (Drift) Risk:**

- SABR: $\tilde{\alpha} = 0$. Vega-компонента зависит только от dv и качества хеджа.
- Heston: $\tilde{\alpha} = \kappa(\theta - v)$. Ошибка в калибровке параметров mean-reversion (κ, θ) напрямую влияет на Vega-компоненту, создавая дополнительный источник модельного риска.

Вывод: В SABR основные риски сконцентрированы в неточности оценки η и ρ, особенно в режимах высокой волатильности (из-за квадратичной зависимости в Volga). В модели Хестона добавляется существенный риск неправильной оценки параметров возврата к среднему. Обе модели требуют хеджирования вторым инструментом (например, опционом другой серии или Variance Swap) для управления Vega-риском.