Домашка 5 Долгих Елизавета

1. Consider the following estimator of volatility:

$$\sigma_t^\pi = \sqrt{\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{n}(\Delta \ln S_{t_k})^2}$$

where $\pi = (t_0, \ldots, t_n)$ is a partition of the time segment $[t-\tau, t]$, and the price of the underlying asset follows the process

$$d\ln S_t = b_t dW_t.$$

- (1 point) Derive expressions for $\mathrm{Bias}(\sigma_t^\pi)$ and $\mathrm{Var}(\sigma_t^\pi)$ for the case of piecewise constant volatility, i.e., b_t is constant on each $[t_{k-1}, t_k]$.

▷ а) $\mathrm{Bias}(\sigma_t^\pi) = \mathbb{E}((\sigma_t^\pi)^2 \mid b_t^2) - b_t^2 = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{n}(\Delta \ln S_{t_k})^2 \mid b_t^2\right) - b_t^2 \ominus$

$(\sigma_t^\pi)^2 = \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{n}(\Delta \ln S_{t_k})^2$

$\Delta \ln S_{t_k} \sim \mathcal{N}(0, b_{t_k}^2 \Delta t_k)$

$\ominus \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left((\Delta \ln S_{t_k})^2 \mid b_{t_k}^2\right) - b_t^2 = \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{n} b_{t_k}^2 \Delta t_k - b_t^2$

$\mathrm{Var}(\sigma_t^\pi) = \mathbb{D}((\sigma_t^\pi)^2 \mid b_t^2) = \mathbb{D}\left(\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{n}(\Delta \ln S_{t_k})^2 \mid b_t^2\right) = \{$т.к. приращения независимы$\}$

$= \frac{1}{\tau^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{D}\left((\Delta \ln S_{t_k})^2 / b_{t_k}^2\right) \ominus$

$(\Delta \ln S_{t_k})^2 \sim b_{t_k}^2 \Delta t_k \cdot \chi_1^2 \;;\; \mathbb{D}(\chi_1^2) = 2$

$\hookrightarrow \mathbb{D}\left((\Delta \ln S_{t_k})^2 / b_{t_k}^2\right) = b_{t_k}^4 (\Delta t_k)^2\, \mathbb{D}(\chi_1^2) = 2 b_{t_k}^4 (\Delta t_k)^2$

$\ominus \frac{2}{\tau^2}\sum_{k=1}^{n} b_{t_k}^4 (\Delta t_k)^2$

В итоге, $\mathrm{Bias}(\sigma_t^\pi) = \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{n} b_{t_k}^2 \Delta t_k - b_t^2$

$\mathrm{Var}(\sigma_t^\pi) = \frac{2}{\tau^2}\sum_{k=1}^{n} b_{t_k}^4 (\Delta t_k)^2$

б)
- (0.5 point) Analyze how $\mathrm{Bias}(\sigma_t^\pi)$ and $\mathrm{Var}(\sigma_t^\pi)$ change under the following conditions:
  - The partition size $||\pi||$ decreases while τ is held fixed;
  - Time length τ increases while $||\pi||$ is held fixed.

предположим, что у нас равномерное разбиение и $\Delta t = \frac{\tau}{n}$

- если τ - фиксир., $||\pi|| \searrow$: тогда у нас возрастает n

(увеличивается число точек разбиения) и величина $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ уменьшается для каждого k.

Рассмотрим сумму: $\sum_{k=1}^{n} b_{t_k}^2 (\Delta t_k)$.

Поскольку Δt_k пропорциональны $\frac{1}{n}$ (при равномерном разбиении), каждое слагаемое (Δt_k) имеет порядок $O(\frac{1}{n})$.

Кол-во слагаемых n штук $\Rightarrow$ сумма имеет порядок $O(1)$.

$\Rightarrow$ при увеличении n сумма не меняется,

$\Rightarrow$ $Bias(\sigma_t^\pi)$ не меняется

Аналогично для $Var(\sigma_t^\pi)$: $(\Delta t_k)^2 = O(\frac{1}{n^2})$, n слагаемых

$\Rightarrow$ сумма имеет порядок $O(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow$ $Var(\sigma_t^\pi)$ уменьшается

– Time length τ increases while $||\pi||$ is held fixed.

Если $\tau \nearrow$ и $\Delta t = \frac{\tau}{n}$ фиксир., то $\tau \nearrow$ и $n \nearrow$

$$Bias(\sigma_t^\pi) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{n} b_{t_k}^2 \Delta t_k - b_t^2$$

за счет этого $Bias(\sigma_t^\pi)$ возрастёт

фиксир.

$$Var(\sigma_t^\pi) = \frac{2}{\tau^2} \sum_{k=1}^{n} b_{t_k}^4 (\Delta t_k)^2 \Rightarrow Var(\sigma_t^\pi) \text{ уменьшается}$$

фиксир.

2. Suppose that at the initial time we have estimated $\sigma(t)$ for the model

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(t) S_t dW_t.$$

Now consider two option pricing models:

- $V_{mod} \rightarrow$ The modified Black-Scholes-Merton model[1] with the underlying asset process using the estimated $\sigma(t)$;
- $V_{const} \rightarrow$ The Black-Scholes-Merton model with constant volatility $\sigma = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2(u)du}$.

Your tasks are to determine and explain:

- (0.5 point) Will the option's delta computed at the initial time differ between these models?

□ Воспользуемся формулой (7) со стр. 21, лек 5:

$$V_{mod}(t, S_t) = \bar{V}(t, S_t / \bar{\sigma}(t,T), \bar{r}(t,T)),$$

где $\bar{\sigma}(t,T) = \sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma^2(u)du}$

$$\bar{r}(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r(u)du = \left\{\begin{matrix}\text{в нашей модели} \\ r = const\end{matrix}\right\} = r$$

В начальный момент времени $t=0$:

$$\bar{\sigma}(0,T) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2(u)du} = \sigma$$ (то же самое σ из условия)

Получается, что в момент времени $t=0$ обе модели используют одинак. параметры:

- волат-сть: $\bar{\sigma}(0,T) = \sigma$
- процентная ставка: r

$$\Rightarrow V_{mod}(0, S_0) = V_{const}(0, S_0)$$

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Т.к. цены опционов совпадают и явл-ся функциями от одних и тех же параметров, их производные по S тоже совпадают.

Ответ: дельты совпадают ⊠

- (0.5 point) Will it differ at an arbitrary time $t > 0$?

Пользуемся всё той же формулой:

$$V_{mod}(t, S_t) = \bar{V}(t, S_t \mid \bar{\sigma}(t,T), \bar{r}(t,T)),$$

где $\bar{\sigma}(t,T) = \sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma^2(u)\,du}$

$$\bar{r}(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r(u)\,du = \left\{\begin{array}{c}\text{в нашей модели}\\ r = const\end{array}\right\} = r$$

При этом $\sigma = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2(u)\,du}$

Заметим, что процентные ставки снова совпадают

$\bar{r}(t,T) = r$;

$$V_{mod}(t, S_t) = \bar{V}(t, S_t \mid \bar{\sigma}(t,T), \bar{r}(t,T))$$

$$V_{const}(t, S_t) = \bar{V}(t, S_t \mid \sigma, r)$$

Но в общем случае $\bar{\sigma}(t,T) \neq \sigma$. Например, пусть $\sigma(t)$ убывает со временем. Тогда $\bar{\sigma}(t,T)$ будет меньше, т.к. усредняем по оставшемуся периоду с меньшей волат-ью, но σ остается const.

$$\Delta_{mod} = \frac{\partial V_{mod}(t, S_t)}{\partial S_t} \neq \frac{\partial V_{const}(t, S_t)}{\partial S_t} = \Delta_{const}$$

из-за разных волатильностей.

Ответ: дельты отличаются

- (0.5 point) Will the option's theta differ between these models?

Ранее в какой-то домашке мы находили:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -S N'(d_1) \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} - r K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Для V_{mod}: $V_{mod}(t, S_t) = \bar{V}(t, S_t \mid \bar{\sigma}(t,T), \bar{r}(t,T))$,

где $\bar{\sigma}(t,T) = \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(u)\,du}$

$$\bar{r}(t,T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r(u)\,du = r$$

?

Доманка 6 Долгих Елизавета

Consider an Asian call option with payoff at time T and strike K. Assume the underlying asset S_t follows a geometric Brownian motion in risk-neutral measure:

$$dS_t = \sigma(t) S_t d\widetilde{W}_t.$$

where $\sigma(t)$ — determenistic function. Consider the quantity $M_t = \frac{1}{t}\int_0^t S_u du$ and

$$U_t = \frac{tM_t + (T-t)S_t}{T}.$$

1. (0.2 point) Is it true that $U_0 = S_0$ and $U_T = M_T$? Justify your answer.

□ • Рассмотрим M_t и U_t при $t=T$:

$$U_T = \frac{T\cdot M_T + (T-T)S_T}{T} = \frac{T\cdot M_T + 0\cdot S_T}{T} = M_T \Rightarrow U_T = M_T \text{ верно}$$

• При $t=0$: просто подставить нельзя, т.к. возникает неопределенность вида $0\cdot\infty$ в $t\cdot M_t$.

Рассмотрим $\lim\limits_{t\to 0} U_t$:

$$U_t = \frac{t\cdot M_t + (T-t)S_t}{T} = \frac{1}{T}\left(\int_0^t S_u du\right) + \frac{T-t}{T} S_t$$

$$\lim_{t\to 0} U_t = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{T}\int_0^t S_u du + \frac{T-t}{T} S_t\right) = \left\{\begin{array}{l} 1)\ \int_0^0 S_u du = 0 \\ 2)\ S_t \text{ - непрерывен} \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} S_t = S_0 \end{array}\right\} = \frac{1}{T}\cdot 0 + \frac{T-0}{T} S_0 = S_0$$

Т.е. $U_0 = S_0$ (понимая $U_0 = \lim\limits_{t\to 0} U_t$)

Ответ: Оба утверждения верны ⊠

2. (0.2 point) Can U_t be replicated using a position in asset S over an infinitesimal interval $[t, t+dt]$? If yes, what position is required for replication?

См. пункт 3: $dU_t = \frac{T-t}{T}\sigma(t) S_t dW_t = \frac{T-t}{T} dS_t$

Рассмотрим реплицирующий портфель Π_t, состоящий из Δ_t акций актива S_t и β_t единиц безрискового актива.

Т.к. $r=0$, то $d\Pi_t = \Delta_t dS_t$. Хотим: $d\Pi_t = dU_t$, т.е.

$$\Delta_t dS_t = dU_t = \frac{T-t}{T} dS_t \Rightarrow \Delta_t = \frac{T-t}{T}$$

(полный портфель включает позицию $\beta_t = \frac{t\cdot M_t}{T}$ в денежном счёте, чтобы стоимости U_t и Π_t совпали, но нас, кажется, спрашивают только про S_t)

Ответ: да, репликация возможна; позиция: $\Delta_t = \frac{T-t}{T}$ в активе S. ⊠

3. (0.3 point) Find the stochastic differential equation for U_t.

$$U_t = \frac{t M_t + (T-t) S_t}{T} \quad ; \quad M_t = \frac{1}{t}\int_0^t S_u du$$

Введем $Y_t = t M_t = \int_0^t S_u du$. Тогда $dY_t = S_t dt$.

Тогда $U_t = \frac{1}{T} Y_t + \frac{(T-t)}{T} S_t$

$$dU_t = \frac{1}{T} dY_t + \underbrace{d\left(\frac{(T-t)}{T} S_t\right)}_{\text{применим правило продиф-ия Ито}} = \frac{1}{T} S_t dt + S_t d\left(\frac{T-t}{T}\right) + \frac{T-t}{T} dS_t + d\left(\frac{T-t}{T}\right) dS_t =$$

$$= \cancel{\frac{1}{T} S_t dt} - \cancel{\frac{1}{T} S_t dt} + \frac{T-t}{T} dS_t - \frac{1}{T} dt \cdot dS_t = \frac{T-t}{T} dS_t - \frac{1}{T} \sigma(t) S_t \underbrace{d\tilde{W}_t dt}_{=0} =$$

$dS_t = \sigma(t) S_t dW_t$

$$= \frac{T-t}{T} dS_t = \frac{T-t}{T} \sigma(t) S_t dW_t$$

Ответ: $dU_t = \frac{T-t}{T} \sigma(t) S_t dW_t$ ⊠

4. (0.3 point) Assuming that $S_t/U_t = 1$, find the price of the Asian call option. Compare the obtained price with the price of a vanilla European call option with the same parameters.

1) С лекции 6, слайд 24:

$\text{Payoff} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K\right)^+$; цена опциона в $t=0$ равна

$$C_{Asian} = e^{-r(T-0)} \tilde{E}_0 \left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K\right)^+ = \{r=0\} = \tilde{E}\left(\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T S_u du}_{=M_T} - K\right)^+ =$$

$$= \tilde{E}(M_T - K)^+ = \{\text{из п.1: } M_T = U_T\} = \tilde{E}(U_T - K)^+$$

т.е. $C_{Asian} = \tilde{E}(U_T - K)^+$. Чтобы это посчитать, надо знать распределение U_T.

Из п.3: $dU_t = \frac{T-t}{T} \sigma(t) S_t dW_t$
по условию $U_t / S_t \simeq 1$
$\Rightarrow dU_t = \frac{T-t}{T} \sigma(t) U_t dW_t$

$\Rightarrow$ У нас GBM с $r=0$ и зависящей от времени волатильностью $\sigma_U(t) = \frac{T-t}{T}\sigma(t)$

Цена европ. колл-опциона $(U_T - K)^+$ на актив U_t в BSM с $\sigma_U(t)$ вычисляется как: (см. лекцию 5, слайд 21)

$$V(t, U_t) = \bar{V}(t, U_t | \bar{\sigma}(t,T), \bar{r}(t,T)),$$

где $\bar{\sigma}(t,T)=\sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma_y^2(u)du}$

$$\bar{r}(t,T)=\frac{1}{T-t}\int_t^T r(u)\,du \equiv 0 \text{ у нас}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma}^2_{Asian}(0,T)=\frac{1}{T-0}\int_0^T \sigma_y^2(u)\,du=\frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{T-u}{T}\sigma(u)\right)^2du=\frac{1}{T^3}\int_0^T (T-u)^2\sigma^2(u)du$$

Цена опциона C_{Asian} равна цене ванильного опциона $BSM(S_0,K,T,r=0)$, т.к. $Y_0=S_0$ из п.1

$$C_{Asian}=S_0N(d_1)-KN(d_2), \text{ где } d_1=\frac{\ln(S_0/K)+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2_{Asian}T}{\bar{\sigma}_{Asian}\sqrt{T}};$$

$$d_2=d_1-\bar{\sigma}_{Asian}\sqrt{T}$$

---

2) Цена ванильного европейского call-опциона $C_{vanilla}$ с теми же S_0, K, T и $r=0$ имеет payoff $(S_T-K)^+$; $dS_t=\sigma(t)S_t\,dW_t$

Это GBM с $r=0$ и $\sigma(t)$. $\Rightarrow$

$$\bar{\sigma}^2_{Vanilla}=\frac{1}{T-0}\int_0^T\sigma^2(u)du=\frac{1}{T}\int_0^T\sigma^2(u)\,du$$

---

3) Цена опциона явл-ся возрастающей функцией волатил.

(на семинаре 4 обсуждали $Vega=\frac{\partial C}{\partial\sigma}=S_t\varphi(d_1)\sqrt{T-t}>0$)

$\Rightarrow$ сравним

$$\bar{\sigma}^2_{Asian}=\frac{1}{T^3}\int_0^T(T-u)^2\sigma^2(u)du$$

$$\bar{\sigma}^2_{Vanilla}=\frac{1}{T}\int_0^T\sigma^2(u)\,du=\frac{1}{T^3}\int_0^T T^2\sigma^2(u)du$$

Мы сравниваем $\int_0^T(T-u)^2\sigma^2(u)du$ и $\int_0^T T^2\sigma^2(u)du$. Т.к. $\sigma^2(u)\geq 0$

и т.к. $(T-u)^2<T^2$ при $u>0$ $\Rightarrow$ $\bar{\sigma}^2_{Asian}<\bar{\sigma}^2_{Vanilla}$

(при условии $\sigma(u)\neq 0$) $\Rightarrow \bar{\sigma}_{Asian}<\bar{\sigma}_{Vanilla} \Rightarrow C_{Asian}<C_{vanilla}$

Ответ: • $C_{Asian}=S_0N(d_1)-KN(d_2)$; $d_1=\frac{\ln(S_0/K)+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2_{Asian}T}{\bar{\sigma}_{Asian}\sqrt{T}}$

$$d_2=d_1-\bar{\sigma}_{Asian}\sqrt{T}$$

• $C_{Asian}<C_{vanilla}$ ☒

P.S. это интуитивно понятно, т.к. усреднение цены снижает волатильность по сравнению с использованием только конечной цены.

Домашка 7 Долгих Елизавета

1. (0.25 point) Derive the expression for $\frac{\partial V}{\partial S}$ for a geometric Asian call option within the modified Black-Scholes- Merton model with estimated volatility function from GARCH(1,1).

2. (0.25 point) Derive the expression for $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ for a geometric Asian call option within the modified Black-Scholes- Merton model with estimated volatility function from GARCH(1,1).

Из лабораторной работы:

$$V(t, S_t, Y_t) = e^{-r(T-t)}\left(e^{\mu_G + \frac{1}{2}\sigma_G^2} N(d_1) - KN(d_2)\right)$$

где

$$d_1 = \frac{\mu_G + \sigma_G^2 - \ln K}{\sigma_G} = \frac{\frac{Y_t}{T} + \frac{T-t}{T}\ln S_t + \frac{1}{T}\int_t^T (T-s)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds + \sigma_G^2(t) - \ln K}{\sigma_G(t)}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_G(t)$$

$$\sigma_G^2(t) = \frac{D(t)}{T^2} = \frac{\int_t^T (T-s)^2\sigma^2(s)ds}{T^2}$$

$$\mu_G(t) = \frac{Y_t + M(t)}{T} = \frac{Y_t + (T-t)\ln S_t + \int_t^T (T-s)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds}{T}$$

Эта формула согласуется с решением из семинара.

1. Подготовка формулы

Для удобства дифференцирования перепишем результат Задачи 1, введя вспомогательную переменную F_t (форвардная цена геометрического среднего).

Введем обозначение времени до экспирации $\tau = T - t$. Из Задачи 1 мы получили:

$$V = e^{-r\tau}\left(F_t N(d_1) - KN(d_2)\right)$$

Где $F_t = \exp\left(\mu_G + \frac{1}{2}\sigma_G^2\right)$. В явном виде:

$$F_t = S^{\frac{\tau}{T}} \exp\left(\frac{Y_t}{T} + \frac{1}{T}\int_t^T (T-s)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds + \frac{1}{2T^2}\int_t^T (T-s)^2\sigma^2(s)ds\right)$$

Параметры d_1, d_2:

$$d_1 = \frac{\ln F_t - \ln K}{\sigma_G} + \frac{1}{2}\sigma_G, \quad d_2 = d_1 - \sigma_G$$

$$\sigma_G = \frac{1}{T}\sqrt{\int_t^T (T-s)^2\sigma^2(s)ds}$$

Согласно Лекции 6, слайд 27, прогноз волатильности (на время u, скалиброванный в момент t, $t \le u$) для GARCH(1,1) имеет вид:

$$\sigma_t^2(u) = \sigma_L^2 + e^{-\lambda(u-t)}(\sigma_t^2(t) - \sigma_L^2)$$

где $\lambda = \frac{\ln(1/(\alpha+\beta))}{\Delta t}$.

В нашем случае, раз мы калибруем в нулевой момент времени, то:

$$\sigma^2(u) = \sigma_L^2 + e^{-\lambda u}(\sigma_0^2 - \sigma_L^2)$$

где $\lambda = \frac{\ln(1/(\alpha+\beta))}{\Delta t}$.

Также нам понадобится важное тождество для формул типа Блэка-Шоулза:

$$F_t N'(d_1) = KN'(d_2)$$

Доказательство тождества: $\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{e^{-d_1^2/2}}{e^{-(d_1-\sigma_G)^2/2}} = e^{d_1\sigma_G - \sigma_G^2/2} = \exp(\ln(F_t/K) + \sigma_G^2/2 - \sigma_G^2/2) = \frac{F_t}{K}$.

2. Вычисление частных производных

А. Производные по S (Delta и Gamma)

Заметим, что S входит только в множитель $S^{\tau/T}$ внутри F_t. Параметр σ_G от S не зависит. Найдем $\frac{\partial F_t}{\partial S}$:

$$\frac{\partial F_t}{\partial S} = F_t \cdot \frac{\partial (\ln F_t)}{\partial S} = F_t \cdot \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\tau}{T}\ln S\right) = F_t \frac{\tau}{TS}$$

Теперь дифференцируем V:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = e^{-r\tau}\left(\frac{\partial F_t}{\partial S}N(d_1) + F_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - KN'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}\right)$$

Так как $\partial_S d_1 = \partial_S d_2$ (разница константа), а $F_t N'(d_1) - KN'(d_2) = 0$, то члены с производными от d сокращаются:

$$Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = e^{-r\tau}N(d_1)\frac{\partial F_t}{\partial S} = e^{-r\tau}N(d_1)F_t\frac{\tau}{TS}$$

Найдем вторую производную (Gamma):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(e^{-r\tau}N(d_1)F_t\frac{\tau}{TS}\right) = e^{-r\tau}\frac{\tau}{T}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{F_t N(d_1)}{S}\right)$$

Используем правило производной произведения:

$$\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{F_t N(d_1)}{S}\right) = -\frac{F_t N(d_1)}{S^2} + \frac{1}{S}\left(\frac{\partial F_t}{\partial S}N(d_1) + F_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S}\right)$$

Подставим $\frac{\partial F_t}{\partial S} = F_t\frac{\tau}{TS}$ и $\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{\sigma_G}\frac{\partial \ln F_t}{\partial S} = \frac{\tau}{TS\sigma_G}$:

$$= \frac{F_t}{S^2}\left[-N(d_1) + \frac{\tau}{T}N(d_1) + N'(d_1)\frac{\tau}{T\sigma_G}\right]$$

Итого:

$$Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = e^{-r\tau}\frac{F_t}{S^2}\frac{\tau}{T}\left[\left(\frac{\tau}{T} - 1\right)N(d_1) + \frac{\tau}{T\sigma_G}N'(d_1)\right]$$

Ответ:

$$Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = e^{-r(T-t)}N(d_1)F_t\frac{(T-t)}{TS}$$

$$Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = e^{-r(T-t)}\frac{F_t}{S^2}\frac{(T-t)}{T}\left[\left(\frac{(T-t)}{T} - 1\right)N(d_1) + \frac{(T-t)}{T\sigma_G}N'(d_1)\right]$$

3. (0.5 point) Consider the instantaneous forward rate $f(t,T) = \lim_{\delta\to 0} F(t,T,T+\delta)$. Find the relationship between the rates $f(t,T_1)$ and $f(t,T_2)$, where $T_1 < T_2$, in the Hull-White model[1] with parameters $\theta(t) = \theta$ and $\sigma(t) = \sigma$.

В модели Hull-White цена дисконтной облигации может быть представлена в виде:

$$P(t,T) = e^{-A(t,T) r_t + B(t,T)}$$

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T} \quad \left(f(t,T) = \lim_{\delta\to 0} F(t,T,T+\delta) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,T+\delta)} - 1\right) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T} \right)$$

$$\Leftrightarrow f(t,T) = \frac{\partial A(t,T)}{\partial T} r_t - \frac{\partial B(t,T)}{\partial T}$$

$$\begin{cases} A(t,T) = \dfrac{1-e^{-k(T-t)}}{k} \\ B(t,T) = \displaystyle\int_t^T \left(\frac{1-e^{-k(T-u)}}{k}\right)^2 \sigma^2(u)\,du - \frac{1-e^{-k(T-t)}}{k} g(t) \end{cases}$$

(лекция 7, слайд 6)

$$\frac{\partial A(t,T)}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k}\right) = \frac{-(-k)e^{-k(T-t)}}{k} = e^{-k(T-t)}$$

$$\Rightarrow f(t,T) = e^{-k(T-t)} r_t \underbrace{- \frac{\partial B(t,T)}{\partial T}}_{=:\alpha(t,T)} = e^{-k(T-t)} r_t + \alpha(t,T)$$

$$\begin{cases} f(t,T_1) = e^{-k(T_1-t)} r_t + \alpha(t,T_1) \\ f(t,T_2) = e^{-k(T_2-t)} r_t + \alpha(t,T_2) \end{cases} \Rightarrow r_t = e^{k(T_1-t)}\left(f(t,T_1) - \alpha(t,T_1)\right)$$

и подставим

$$f(t,T_2) = e^{-k(T_2-t)} \cdot e^{k(T_1-t)} \left(f(t,T_1) - \alpha(t,T_1)\right) + \alpha(t,T_2)$$

$$f(t,T_2) = e^{-k(T_2-T_1)} f(t,T_1) + \underbrace{\left[\alpha(t,T_2) - e^{-k(T_2-T_1)}\alpha(t,T_1)\right]}_{\text{детерминир. функция, которая зависит только от параметров модели и } t, T_1, T_2}$$

Т.е. $f(t,T_2)$ и $f(t,T_1)$ связаны линейно!

$\boxtimes$

$$dV_t = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS_t + \frac{\partial V}{\partial Y}dY_t + \frac{\partial V}{\partial \sigma}d\sigma_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS_t)^2$$

Выразим $\frac{\partial V}{\partial t}$ из PDE и подставим в dV_t:

$$dV_t = \left(r(t)(V - S\frac{\partial V}{\partial S}) - \frac{1}{2}\sigma^2_{model}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS_t + \frac{\partial V}{\partial \sigma}d\sigma_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS_t)^2$$

Теперь найдем дифференциал дисконтированной цены $d(D_tV_t)$:

$$d(D_tV_t) = D_t(-r_t^f V_t dt + dV_t)$$

Группируем слагаемые, выделяя разницу ставок $(r(t) - r_t^f)$ и разницу дисперсий:

$$d(D_tV_t) = D_t\left[-r_t^f V_t dt + r(t)V\,dt - r(t)S\frac{\partial V}{\partial S}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}((dS_t)^2 - \sigma^2_{model}S^2dt) + \frac{\partial V}{\partial \sigma}d\sigma_t\right]$$

Добавим и вычтем $r_t^f S\frac{\partial V}{\partial S}dt$: $-$ $+$

$$d(D_tV_t) = D_t\frac{\partial V}{\partial S}(dS_t - r_t^f Sdt) + D_t(r(t) - r_t^f)(V - S\frac{\partial V}{\partial S})dt + \frac{1}{2}D_t\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}((dS_t)^2 - \sigma^2_{model}S^2dt) + D_t\frac{\partial V}{\partial \sigma}d\sigma_t$$

3. Ошибка хеджирования (Z_t)

Ошибка хеджирования $Z_t = X_t - V_t$. Тогда $d(D_tZ_t) = d(D_tX_t) - d(D_tV_t)$. Вычитая полученные выражения, получаем итоговую декомпозицию:

$$d(D_tZ_t) = D_t\left(\Delta_t^h - \frac{\partial V}{\partial S}\right)(dS_t - r_t^f S_t dt)$$

Delta

$$d(D_tZ_t) = d(D_tX_t) - d(D_tV_t) = \Delta_t^h\, dD_tS_t - \frac{\partial V}{\partial S}d\,D_tS_t -$$

$$- D_t(r(t) - r_t^f)(V - S\frac{\partial V}{\partial S})dt - \frac{1}{2}D_t\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}((dS_t)^2 - \sigma^2_{model}S^2dt) -$$

funding

Gamma

$$-D_t\frac{\partial V}{\partial \sigma}d\sigma_t$$

Vega

Домашка 8 Долгих Елизавета

1. Consider a vanilla call option on an underlying asset S with expiration date T and strike K under Black-Scholes-Merton model.

(a) (0.5 point) At what price of the underlying asset is the gamma of this option maximized at time t? Justify your answer.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{(уже находили много раз)}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

Хотим Γ-max $\Rightarrow \frac{\partial \Gamma}{\partial S} = 0$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial S} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{T-t}}}_{=A} \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{S}\right) = A\cdot\left(\frac{-d_1 (d_1)'_S e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot S - e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{S^2}\right) =$$

$$= A\cdot\left(\frac{-d_1\cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}\cdot S} e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot S - e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{S^2}\right) = A\cdot\frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{S^2}\left(-\frac{d_1}{\sigma\sqrt{T-t}} - 1\right)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial S} = 0 \iff A\cdot\frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{S^2}\left(-\frac{d_1}{\sigma\sqrt{T-t}} - 1\right) = 0$$

Если $S \neq 0 \Rightarrow d_1 = -\sigma\sqrt{T-t}$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = -\sigma\sqrt{T-t}$$

$$\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t) = -\sigma^2(T-t)$$

$$\ln(S/K) = -(r + \tfrac{3}{2}\sigma^2)(T-t)$$

$$S = K\cdot \exp\{-(r + \tfrac{3}{2}\sigma^2)(T-t)\}$$

Ответ: $S = K\cdot \exp\{-(r + \frac{3}{2}\sigma^2)(T-t)\}$

(b) (0.5 point) Find the value of t at which the gamma reaches its maximum, given that the price of the underlying asset is equal to the option's strike price.

□ Если $S=K$, то $\ln(S/K)=0 \Rightarrow d_1 = \frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \underbrace{\frac{r+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}}_{=:A}\sqrt{T-t}$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{S\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{A^2}{2}(T-t)}$$

Хотим $\Gamma \to \max\limits_t \Rightarrow \frac{\partial\Gamma}{\partial t}=0$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\underbrace{\frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi}}}_{=:B}\cdot\frac{1}{\sqrt{T-t}}e^{-\frac{A^2}{2}(T-t)}\right] =$$

$$= B\cdot\frac{1}{2(T-t)^{3/2}}e^{-\frac{A^2}{2}(T-t)} + \frac{A^2}{2}\cdot B\frac{1}{\sqrt{T-t}}e^{-\frac{A^2}{2}(T-t)}$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2(T-t)^{3/2}} + \frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{T-t}} = 0$$

нет решений, т.е. $\frac{\partial\Gamma}{\partial t} > 0$ всегда

$\Rightarrow \Gamma(t)$ монотонно возрастает по t $\Rightarrow$ max достигается при $t\to T$

Ответ: максимум Γ достигается при $t\to T$ ⊠

2. (1 point) Let $x\in\mathbb{R}^n$, and consider a function $f(x,z)\in\mathbb{R}$ where $z\in\mathbb{R}^m$. Let $g(x)\in\mathbb{R}^m$ be a vector function of a vector argument and define the composite function $h(x)=f(x,g(x))$, so that $h(x)\in\mathbb{R}$. Using the notation from the lecture, prove that the following holds:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

What additional terms must be included on the right-hand side to obtain equality? Justify your answer.

□ $\frac{\partial h}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{(1\times n)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}}_{(1\times m)}\frac{\partial g}{\partial x}$, где x – вектор-строка $1\times n$

$\frac{\partial g}{\partial x}$ – матрица Якоби функции g $(m\times n)$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$$

вторая частная производная только по 1ому аргументу

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial g}{\partial x} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_k} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x^2} =$$

пр-ло произведения

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \frac{\partial g}{\partial x} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial g}{\partial x} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_k} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x^2}$$

Для гладких функций:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)^T = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$$

В итоге:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \frac{\partial g}{\partial x} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial g}{\partial x} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_k} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x^2}}_{\text{дополнительные слагаемые}}$$

(которые нужно добавить)