Билет 2. Мастер-теорема о рекурсии

Мастер-теорема

Пусть $a \geq 1$, $b > 1$, и $T(n)$ задаётся рекуррентным соотношением:

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c)$$

Тогда:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & \text{если } a > b^c \\ \Theta(n^c \log n), & \text{если } a = b^c \\ \Theta(n^c), & \text{если } a < b^c \end{cases}$$

Доказательство

Доказательство через раскрытие рекуррентности

Шаг

Раскрываем рекуррентность:

$$\begin{aligned} T(n) &= n^c + a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) \\ &= n^c + a\left[\left(\frac{n}{b}\right)^c + a \cdot T\left(\frac{n}{b^2}\right)\right] \\ &= n^c + a\left(\frac{n}{b}\right)^c + a^2 \cdot T\left(\frac{n}{b^2}\right) \\ &= n^c + a\left(\frac{n}{b}\right)^c + a^2\left(\frac{n}{b^2}\right)^c + a^3 \cdot T\left(\frac{n}{b^3}\right) \\ &\vdots \\ &= n^c\left[1 + \frac{a}{b^c} + \left(\frac{a}{b^c}\right)^2 + \left(\frac{a}{b^c}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{a}{b^c}\right)^k\right] \end{aligned}$$

где k — число итераций до достижения базового случая.

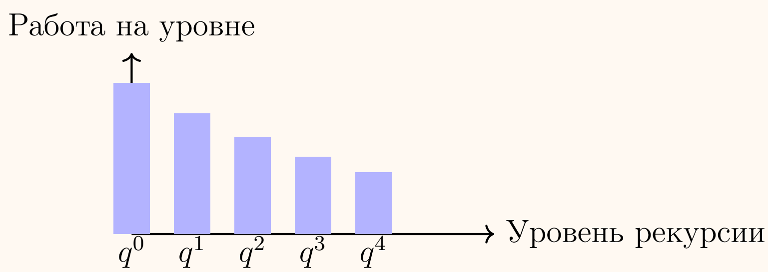
Шаг

Вводим обозначение: $q = \frac{a}{b^c}$
Тогда сумма принимает вид:

$$T(n) = n^c \cdot S(q) = n^c \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^k)$$

Количество членов: $k = \Theta(\log_b n)$

Геометрическая прогрессия: $1 + q + q^2 + \ldots$



Шаг

Анализируем три случая:

1. **Случай 1:** $q = 1$ $(a = b^c)$

   Сумма геометрической прогрессии:

   $$S(q) = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = k + 1 = \Theta(\log n)$$

   $$T(n) = n^c \cdot \Theta(\log n) = \Theta(n^c \log n)$$

2. **Случай 2:** $q < 1$ $(a < b^c)$

   Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия:

   $$S(q) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^k \leq \frac{1}{1-q} = \Theta(1)$$

   $$T(n) = n^c \cdot \Theta(1) = \Theta(n^c)$$

3. **Случай 3:** $q > 1$ $(a > b^c)$

   Сумма растёт экспоненциально:

   $$S(q) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^k = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} = \Theta(q^k)$$

   Выразим через исходные параметры:

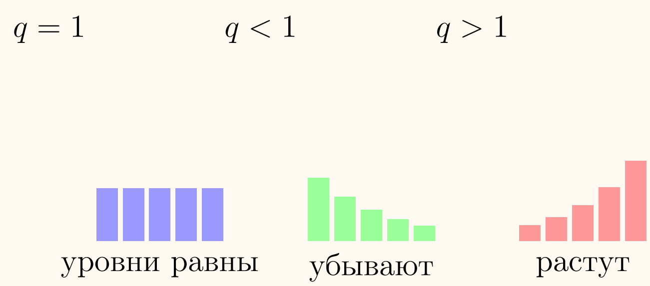
   $$q^k = \left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n} = \frac{a^{\log_b n}}{(b^c)^{\log_b n}} = \frac{n^{\log_b a}}{n^c}$$

   Следовательно:

   $$T(n) = n^c \cdot \Theta\left(\frac{n^{\log_b a}}{n^c}\right) = \Theta(n^{\log_b a})$$

Шаг

Визуализация трёх случаев:



Шаг

Итоговое соответствие:

Условие	$q = a/b^c$	Асимптотика
$a > b^c$	$q > 1$	$\Theta(n^{\log_b a})$
$a = b^c$	$q = 1$	$\Theta(n^c \log n)$
$a < b^c$	$q < 1$	$\Theta(n^c)$