# Билет № 15. Непрерывность функции в точке. Непрерывность сложной функции. Полунепрерывность функции в точке.

## Непрерывность в точке

**Классическое определение:** $\exists \delta_0 > 0,\ f : U_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$.
$f$ непрерывна в $x_0$, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

**Общее определение:** $f : X \to \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $x_0$ — точка прикосновения $X$.
$f$ непрерывна в $x_0$ по множеству $X$, если:

- $x_0$ — изолированная точка $X$, **или**
- $x_0$ — предельная точка $X$ и $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$

**По Коши:** $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
**По Гейне:** $\forall \{x_n\} \subset X$: $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

## Непрерывность на множестве

$f : X \to \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$.
$f$ непрерывна на $X$ ($f \in C(X)$), если $\forall x_0 \in X$: $f$ непрерывна в $x_0$ по множеству $X$.

## Полунепрерывность

**Определение 1:** $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$.
$f$ **полунепрерывна снизу** в $x_0$ по $X$, если:

$$\varliminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) \geq f(x_0)$$

**Определение 2:** $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$.
$f$ **полунепрерывна сверху** в $x_0$ по $X$, если:

$$\varlimsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) \leq f(x_0)$$