Calculus
Real Numbers & Cardinality

Elisa Doronina

27 декабря 2025 г.

1 Essentials

1.1 Supremum & Infimum

Note. Супремум - точная верхняя грань. Инфимум - точная нижняя грань.

Def. Будем говорить, что M $\in \mathbb{R}$ является супремумом мн-ва E (E $\subset \mathbb{R}$, E $\neq \emptyset$) и записывать M = supE, если:

1. $\forall a \in E : a <= M$
2. $\forall M' < M \ \exists a' \in E : M' < a' <= M$.
3. Единственность доказывается очевидно. Предположим, что M_1, M_2 - супремумы, тогда по определению...
4. Если E не ограничено сверху, то supE = $+\infty$

Def. Аналогично определяется inf.

1.2 Countability of the set of rational numbers, uncountability of the set of real numbers

Well, it's pretty simple. I'll proof the statement about the set of real numbers.

□

$\mathbb{R}$ бесконечно, т.к. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Предположим, что $\exists$ биекция из натуральных чисел на вещественные. Тогда:

$$\mathbb{R} = \{x_1, x_2, ...x_n, ...\}$$

Возьмём произоволньый отрезок $I_1, x_1 \notin I_1$. Внутри него возьмем отрезок $I_2 : x_2 \notin I_2$. Пусть построена последовательность вложенных отрезков: $I_n \subset I_{n-1} \subset ... \subset I_1$.
Тогда по теореме Кантора $\exists!$ общая точка последовательности вложенных отрезков с $= \bigcap_{n=1}^{\infty}$, которая не была занумерована. Но тогда с $\notin \mathbb{R}$. Противоречие.

$\mathbb{R}$ - несчетное множество.

■