Билет 7. Мультипликативные функции, функции Мёбиуса и Эйлера

Определение

Функция $\theta(a)$ называется **мультипликативной**, если:

1. Она определена для всех целых положительных a и не равна нулю хотя бы при одном таком a

2. Для любых взаимно простых a_1, a_2: $\theta(a_1 \cdot a_2) = \theta(a_1) \cdot \theta(a_2)$

Свойство

Свойства мультипликативных функций:

- $\theta(1) = 1$

- Свойство 2 распространяется на любое $k > 2$ попарно простых чисел

- Для задания функции достаточно задать значения для степеней простых чисел

- Произведение двух мультипликативных функций — мультипликативная функция

Объяснение свойств

Свойство

Почему $\theta(1) = 1$?
Из условия 2: $\theta(a \cdot 1) = \theta(a) \cdot \theta(1)$
Но $\theta(a \cdot 1) = \theta(a)$, следовательно $\theta(a) = \theta(a) \cdot \theta(1)$
Отсюда $\theta(1) = 1$

Свойство

Распространение на k $>$ 2 чисел:
Если $a_1, a_2, \ldots, a_k$ попарно взаимно просты, то:

$$\theta(a_1 a_2 \cdots a_k) = \theta(a_1) \cdot \theta(a_2) \cdots \theta(a_k)$$

Доказательство по индукции:

$$\begin{aligned} \theta(a_1 a_2 \cdots a_k) &= \theta((a_1 \cdots a_{k-1}) \cdot a_k) \\ &= \theta(a_1 \cdots a_{k-1}) \cdot \theta(a_k) \\ &= \theta(a_1) \cdots \theta(a_{k-1}) \cdot \theta(a_k) \end{aligned}$$

Пример

Пример мультипликативной функции:
Зададим: $\theta(p^a) = 2$, $\theta(1) = 1$
Тогда для $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$:

$$\theta(a) = \theta(p_1^{a_1}) \cdot \theta(p_2^{a_2}) \cdots \theta(p_k^{a_k}) = 2^k$$

a	Разложение	$\theta(a)$
1	1	1
2	2^1	2
3	3^1	2
4	2^2	2
5	5^1	2
6	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 2 = 4$
12	$2^2 \cdot 3$	$2 \cdot 2 = 4$

Функция Мёбиуса

Определение

Функция Мёбиуса $\mu(n)$ — мультипликативная функция:

$$\mu(p^a) = \begin{cases} -1, & \text{если } a = 1 \\ 0, & \text{если } a > 1 \end{cases}$$

Для $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists a_i > 1 \\ (-1)^k, & \text{иначе} \end{cases}$$

Функция Эйлера

Определение

Функция Эйлера $\phi(a)$ — количество чисел в $\{0, 1, \dots, a-1\}$, взаимно простых с a.

Формула

Формулы для функции Эйлера:

1. **Мультипликативность:**

$$\phi(p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}) = \phi(p_1^{a_1}) \cdots \phi(p_k^{a_k})$$

2. **Через Мёбиуса:**

$$\phi(a) = \sum_{d|a} \mu(d) \cdot \frac{a}{d}$$

d|a означает "d делит a"(d — делитель a)

3. **Произведение по простым делителям:**

$$\phi(a) = a \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Свойство

Объяснение формулы $\phi(a) = a\prod\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$:

Для $a = p^k$: $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$

Из мультипликативности для $a = p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$:

$$\phi(a) = p_1^{a_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots p_k^{a_k}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = a\cdot\prod\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Пример

Пример вычисления:

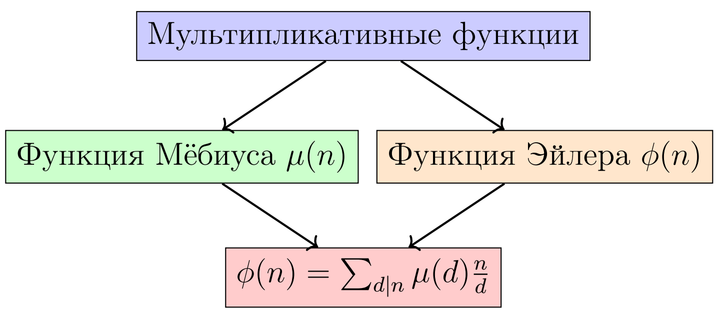
$\phi(60) = \phi(2^2\cdot 3\cdot 5) = 60\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{5}\right)$

$\phi(60) = 60\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = 60\cdot\frac{8}{30} = 16$

$\phi(5) = 5\cdot\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 5\cdot\frac{4}{5} = 4$

$\phi(6) = \mu(1)\cdot\frac{6}{1} + \mu(2)\cdot\frac{6}{2} + \mu(3)\cdot\frac{6}{3} + \mu(6)\cdot\frac{6}{6}$

$\phi(6) = 1 * 6 + (1) * 3 + (1) * 2 + 1 * 1 = 6 - 3 - 2 + 1 = 2$



Свойство

Важные значения:

- Если p — простое: $\phi(p) = p - 1$
- Если p — простое: $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$
- $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ если $(m,n) = 1$
- $\sum_{d|n}\mu(d) = 0$ для $n > 1$