Билет № 20. Открытые и замкнутые множества. Критерий компактности. Лемма Гейне–Бореля.

Определение. $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$. Точка $x \in \mathbb{R}$ является **точкой прикосновения** множества E, если: $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow U_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$.

Определение. Множество **замкнуто**, если оно содержит все свои точки прикосновения ($\mathrm{cl}\ E \subset E$). Например: $E = [a, b]$.

Определение. $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$. Точка $x_0 \in E$ называется **внутренней точкой** E, если: $\exists \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(x_0) \subset E$.

Определение. Множество G **открыто**, если каждая его точка является его внутренней точкой ($G = \mathrm{int}\ G$). Например: $G = (a, b)$.

Теорема (Закон двойственности). $G \subset \mathbb{R}$ открыто $\iff$ $\mathbb{R} \setminus G$ замкнуто.

Доказательство: Пусть G открыто. Тогда $\forall x \in G\ \exists \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(x) \subset G \iff \forall x \in G\ \exists \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus G) = \varnothing$.

$G = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus G)$. Любой $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus G)$ не является точкой прикосновения $\mathbb{R} \setminus G$. Все точки $\mathbb{R} \setminus G$ лежат в $\mathbb{R} \setminus G$. Оно замкнуто.

Теорема.

1. $\{G_a\}_{a \in I}$ - семейство открытых множеств $\Rightarrow G = \bigcup\limits_{a \in I} G_a$ - открыто
2. $\{F_b\}_{b \in J}$ - семейство замкнутых множеств $\Rightarrow F = \bigcap\limits_{b \in J} F_b$ - замкнуто

Доказательство:

1. Пусть $x \in \bigcup G_a$. $\exists a' \in I$: $x \in G_{a'}$, но $G_{a'}$ открыто $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(x) \subset G_{a'} \subset \bigcup G_a$. x выбрано произвольно $\Rightarrow$ объединение открыто.
2. $\bigcap\limits_{b \in J} F_b = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup\limits_{b \in J} (\mathbb{R} \setminus F_b) \right)$, но $\mathbb{R} \setminus F_b$ - открыто $\forall b \in J \Rightarrow \bigcup(\mathbb{R} \setminus F_b)$ - открыто $\Rightarrow$ $\mathbb{R} \setminus (\bigcup(\mathbb{R} \setminus F_b))$ - замкнуто.

Замечание: Пересечение бесконечного числа открытых множеств может не быть открытым, а объединение бесконечного числа замкнутых может не быть замкнутым.

Лемма.

1. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто
2. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто

Доказательство для открытых: Пусть $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} G_k$, где G_k открыты. $\forall k \in \{1, \ldots, N\}$ $\exists \delta_k > 0$: $U_{\delta_k}(x) \subset G_k$.

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_N\} > 0$. Тогда $U_\delta(x) \subset G_k \; \forall k \Rightarrow U_\delta(x) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{N} G_k$. Пересечение открыто.

Определение компакта.

Множество $K \subset \mathbb{R}$ называется **компактом**, если $\forall \{x_n\} \subset K \; \exists x \in K$ и подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$: $\lim x_{n_j} = x$.

Примеры:

- **Компакты:** $[0, 1]$
- **Некомпакты:** $\mathbb{R}$, $(0, 1)$

Критерий компактности.

K - компакт $\iff$ K ограничено и замкнуто.

Замечание: $\varnothing$ - компакт.

Доказательство:

- $(\Rightarrow)$ Пусть K - компакт.
  1. **Ограниченность:** Предположим, K неограничено. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in K$: $|x_n| > n$. Тогда $\{x_n\}$ - бесконечно большая, $\lim |x_n| = +\infty$. Любая подпоследовательность $\{x_n\}$ - ББ. Нельзя выделить сходящуюся в K подпоследовательность. Противоречие.
  2. **Замкнутость:** Предположим, K не замкнуто. Тогда $\exists x'$ - предельная точка K: $x' \notin K$. По критерию предельной точки $\exists \{x_n\} \subset K$: $x_n \to x'$. Тогда любая подпоследовательность $\{x_n\}$ сходится к $x' \notin K$. Противоречие.

- $(\Leftarrow)$ Пусть K ограничено и замкнуто. Докажем, что K - компакт. Возьмём произвольную последовательность $\{x_n\} \subset K$. Т.к. K ограничено, то $\{x_n\}$ - ограниченная последовательность. По **теореме Больцано-Вейерштрасса** у ограниченной последовательности существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$:

  $$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x \in \mathbb{R}$$

  Т.к. все $x_{n_k} \in K$ и K замкнуто, то x - точка прикосновения K, а значит $x \in K$. Таким образом, для любой $\{x_n\} \subset K$ $\exists$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторому $x \in K$. Следовательно, K - компакт по определению.

Определение. $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$. $\{V_a\}_{a \in I}$ - система подмножеств в $\mathbb{R}$. Будем говорить, что $\{V_a\}$ является **покрытием** множества E, если $E \subset \bigcup\limits_{a \in I} V_a$.

Определение. $\{V_a\}_{a \in I}$ - покрытие E. Система $\{V_b\}_{b \in J}$ - **подпокрытие** покрытия $\{V_a\}$, если $J \subset I$ и $E \subset \bigcup\limits_{b \in J} V_b$.

Определение. Покрытие называется **открытым**, если $\forall a \in I$: V_a - открытое множество.

Лемма Гейне-Бореля.

Пусть $K \subset \mathbb{R}$ - непустой компакт. Тогда для любого открытого покрытия $\{V_a\}_{a \in I}$ множества K существует конечное подпокрытие $\{V_{a_i}\}_{i=1}^N$.

Доказательство: K - ограниченное множество $\Rightarrow \exists$ отрезок $I_0 \supset K$.

Поделим I_0 пополам: I_0^1, I_0^2. Рассмотрим $I_0^1 \cap K$ и $I_0^2 \cap K$. $\{V_a\}$ - покрытие $K \Rightarrow$ покрытие этих множеств.

Предположим, из $\{V_a\}$ нельзя выделить конечное подпокрытие $\Rightarrow$ хотя бы для одного из этих множеств нельзя выделить конечное подпокрытие. Выберем I_1 - ту половину, для которой нельзя выделить конечное подпокрытие.

По индукции: построена последовательность вложенных отрезков $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, $l(I_j) = \frac{l(I_0)}{2^j}$, причём из $\{V_a\}$ нельзя выделить конечное подпокрытие для $I_j \cap K$.

По теореме Кантора $\exists! x' = \bigcap\limits_{l=0}^{\infty} I_l$. Причём $x' \in K$, т.к. x' - точка прикосновения K, а K замкнуто.

Но $\{V_a\}$ покрывает $K \Rightarrow x' \in V_{a'}$ для некоторого $a' \in I$. $V_{a'}$ открыто $\Rightarrow \exists \varepsilon' > 0$: $U_{\varepsilon'}(x') \subset V_{a'}$.

Тогда $\exists l'$: $I_{l'} \subset U_{\varepsilon'}(x') \subset V_{a'} \Rightarrow I_{l'} \cap K$ покрывается конечным подпокрытием $\{V_{a'}\}$ - противоречие.