Графы

Def Граф $G = (V, E)$, где

V - мн-во вершин
E - мн-во ребер: $v, u \in V$
$\exists (v, u)$, если $(v, u) \in E$

Def Степень вершины $deg(v)$ - кол-во ребер, инцидентных этой вершине

Теорема

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

$\square$ $\forall$ ребро (v, u) вносит вклад (1) и в $deg(v)$, и в $deg(u)$. $\blacksquare$

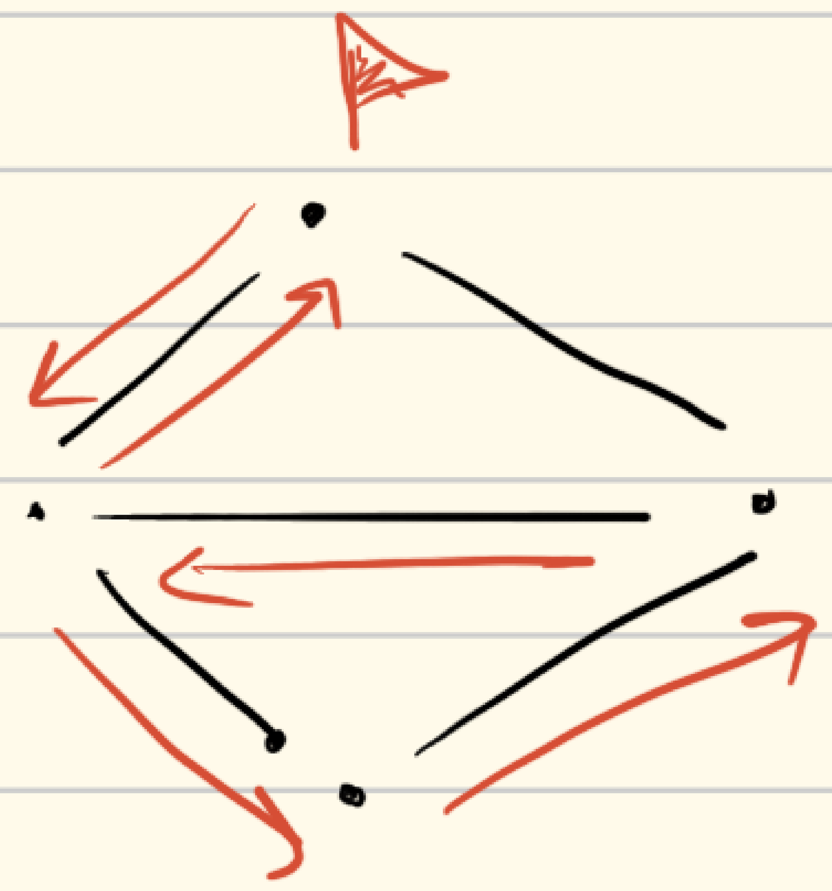
Следствие

Вершин с $deg(v) \% 2 = 1$ четное кол-во.

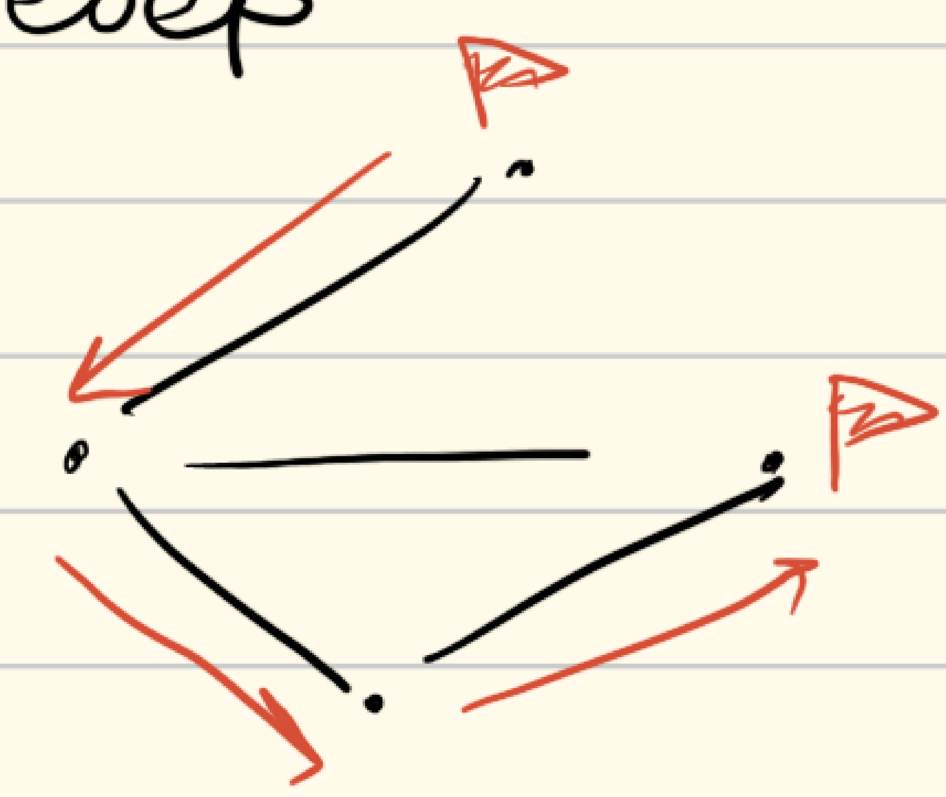
Def Подграф графа $G = (V, E)$ - это граф $H = (V', E')$, т.ч.

$$\begin{cases} V' \subseteq V \\ E' \subseteq E \\ E' \subseteq \{(u, v) \in E \mid u, v \in V'\} \end{cases}$$

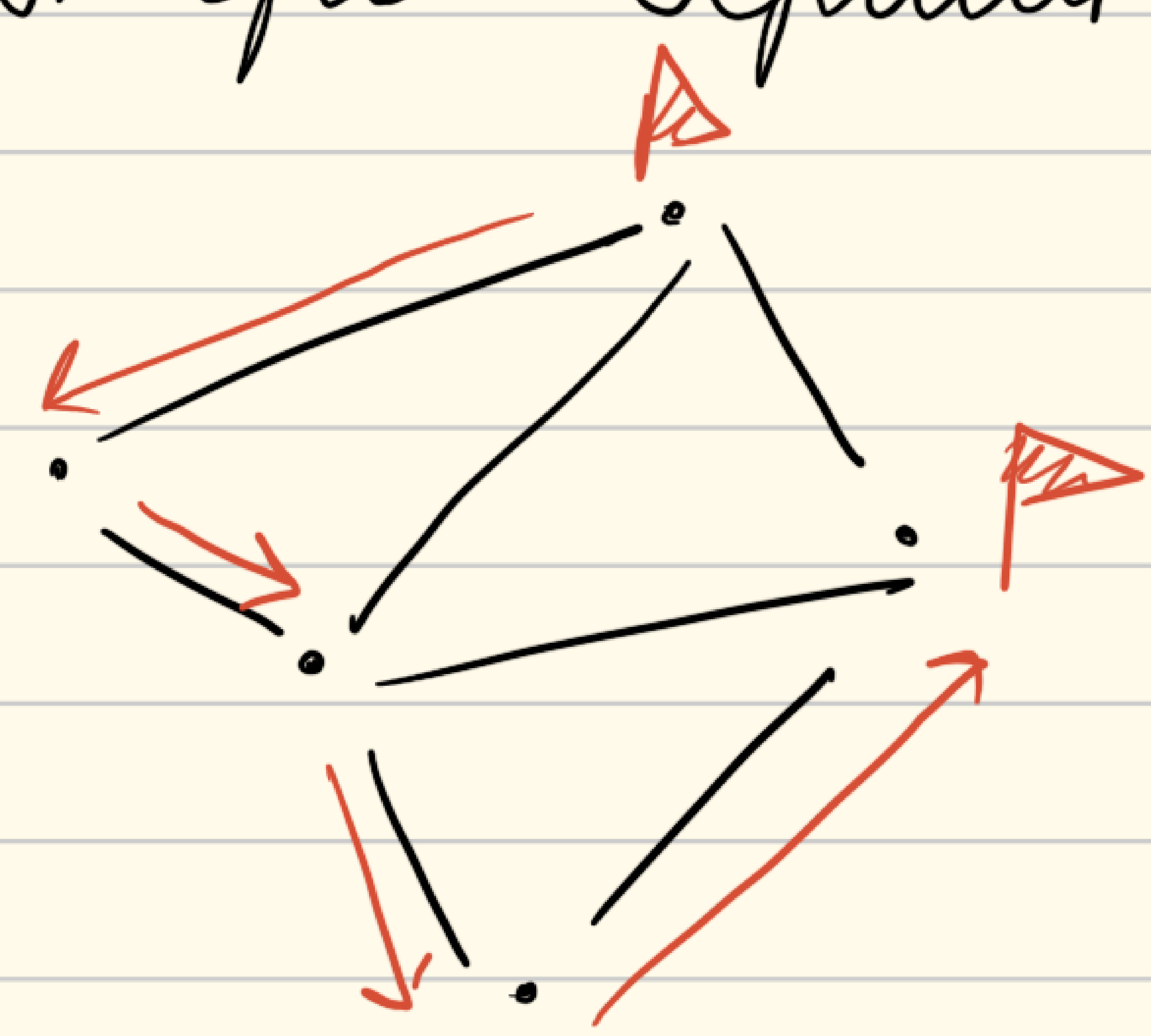
Def Маршрут — это посл-ть вершин и ребер.



Def. Путь — маршрут без повтора рёбер



Def Простой путь — маршрут без повтора вершин и ребер.



$\to A \to B \to C \to O \to D \to E \to O \to A$

Def Цикл - замкнутый путь

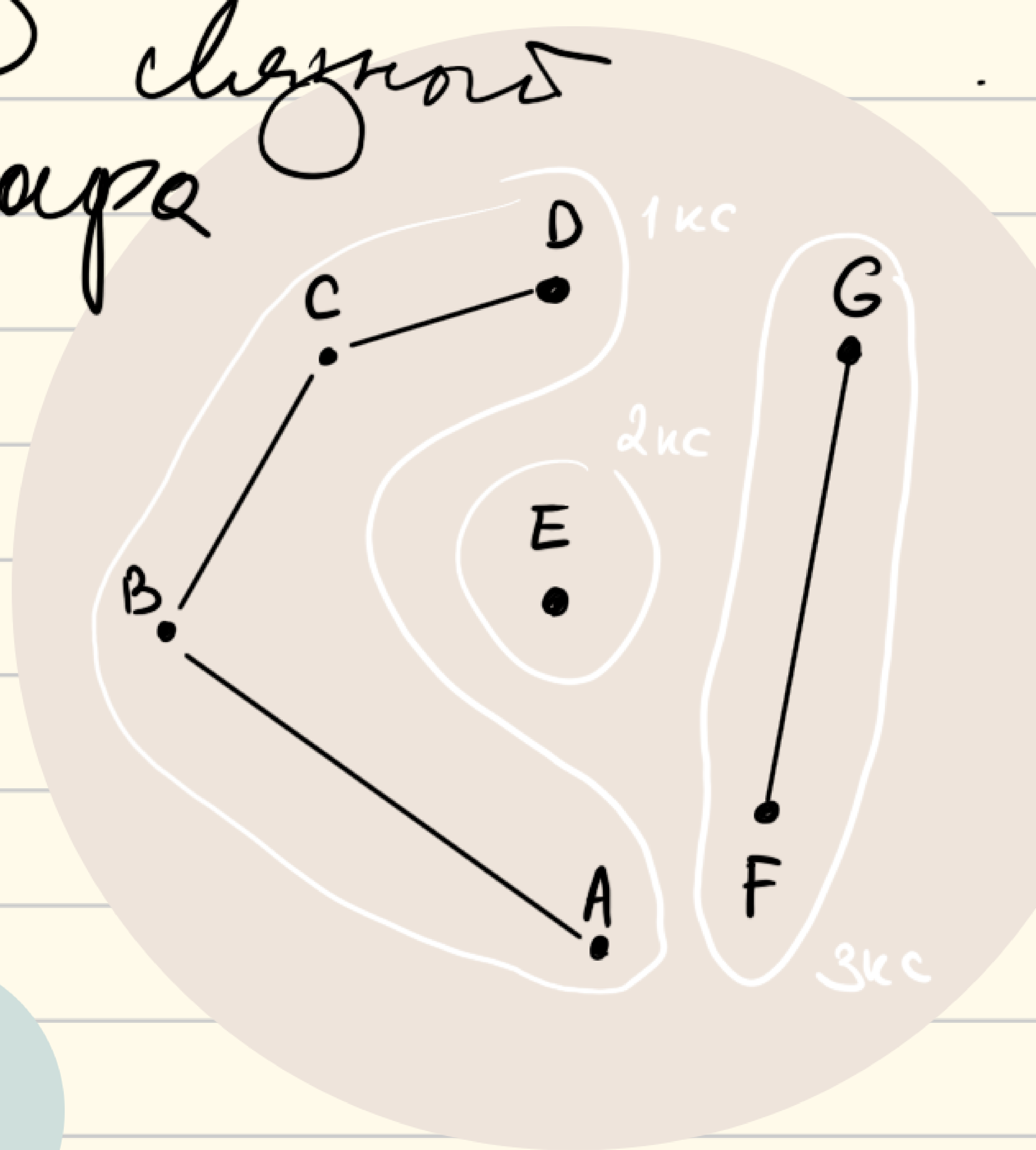
Def Простой цикл — простой путь, где совп-т только первая и посл. вершины.

$A \to B \to C \to A$

Связные графы

Def G связен, если $\forall u,v \in V$ $\exists$ путь (простой путь) $u \leftrightarrow v$

Def компонента связности - это макс. по включению связный подграф данного графа



Деревья

Def Дерево - это связный ациклический граф.

Теорема След. утв-я ~

1) G - связный и ацикл-й
2) G - связный и им. $(n-1)$ ребро
3) G - ацикл. и им. $(n-1)$ ребро
4) $\forall u,v \in V_G$ $\exists!$ простой путь $u \leftrightarrow v$

□ 1 → 2 Дано: G — связный и ацикл.
Т.д.: (n−1) ребро.

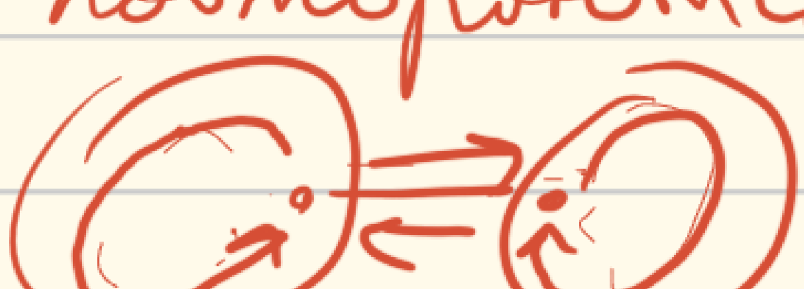
База: n = 1. Одна вершина, 0 ребер.

Шаг: Пусть верно для n ≤ K.

Рассмотрим граф на K+1 вершинах. Удалим (K+1) вместе со всеми ребрами в нее вход-ми / вых-ми.
Имеем граф на K вершинах.
В нем K−1 ребро, он связный и ацикл.
Тогда возьмем и подвесим K+1 вершину на одну из висячих вершин (она есть в графе, ведь иначе мы бы могли ∞ гулять по графу => по принципу Дирихле нашелся бы цикл).
Подвесили, сделали K ребер. Опа. ■

□ 2 → 3. Дано: связ. и (n−1) ребро
Т.д.: ацикл.

А пусть цикл есть. Т.к. граф связен, если мы удалим ребро цикла, он останется связным.
От противного: удалили и он распался: значит, это ребро соединяло 2 КС, но в цикле не повторяются ребра. А так получается что:



Но тогда мы получили связный граф на n−2 ребрах. Противоречие с 1→2.
=> G — ацикл-й ■

□ 3 → 4 Дано: G - ацикл., $(n-1)$ ребро
Т.д.: ∃! простой путь из u в v
для любых u, v

Докажем, что G - дерево. Надо д-ть, что
G - связен.

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k$$ - суммарно ребер,
где K - кол-во КС

$n - k = n - 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$ G - связен
$\Rightarrow$ G - дерево. По опр.

$\forall u, v$ ∃! путь $u \leftrightarrow v$. Но почему единств-ть?
Иначе: ∃ путь_1 $u \leftrightarrow v$, ∃ путь_2 $u \leftrightarrow v$
Тогда ∃ цикл: $u \to v \to u$, но
G - ацикл. ■

□ 4 → 1 Дано: $\forall u, v$ ∃! простой
путь $u \leftrightarrow v$.

Т.д. G - ацикл. и связен.

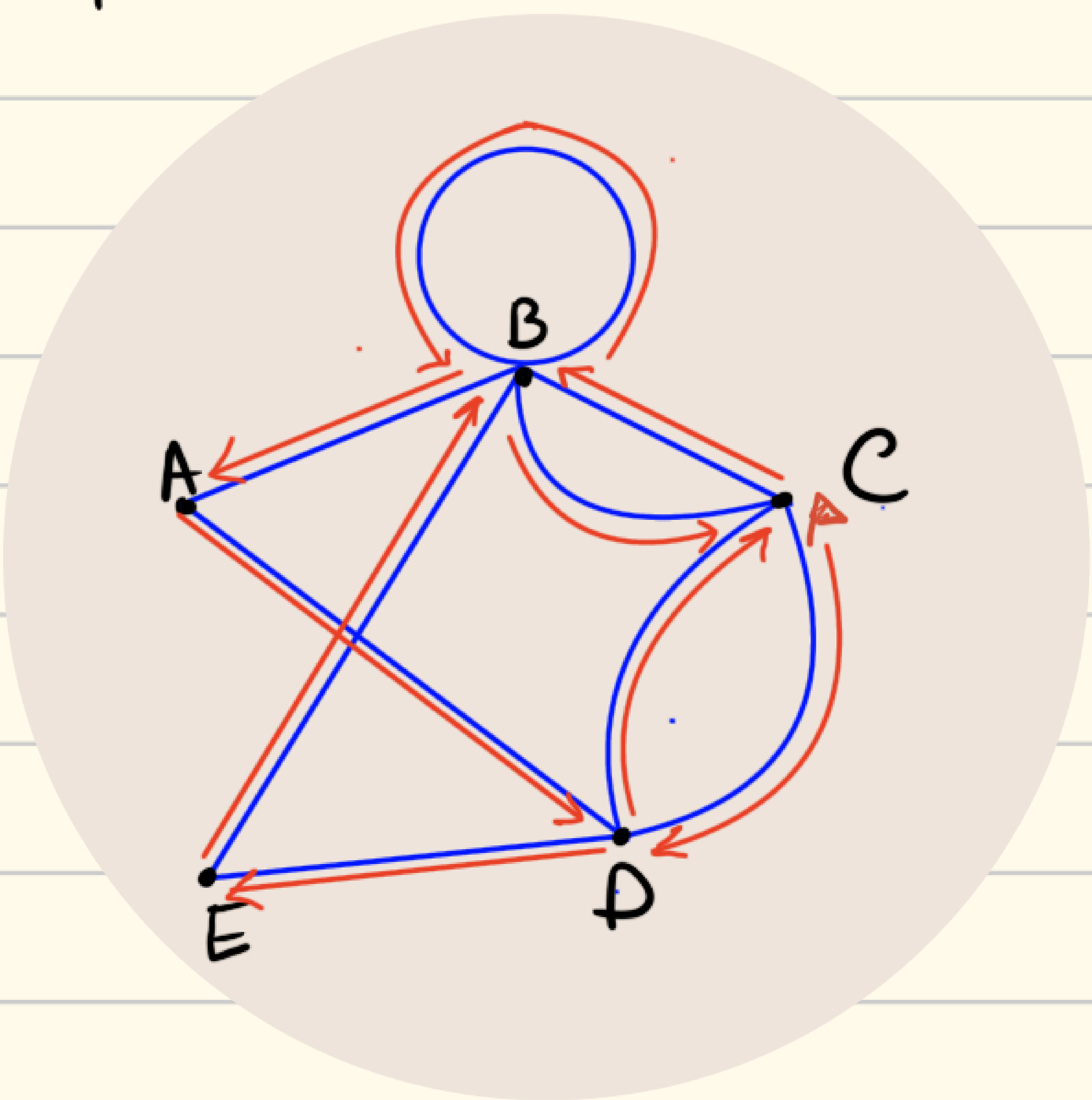
✓ Связность сразу следует из условия.
Пусть G имеет цикл. Тогда найдутся
такие u, v, что $u \to v \to u$, но
тогда ∃ путь_1 $u \leftrightarrow v$ и ∃ путь_2 $u \leftrightarrow v$.
Противоречие
✓ G - ацикл-й ■

Эйлеровы графы

Def Эйлеров граф – граф, содержащий эйлеров цикл.

Def Эйлеров маршрут – маршрут, проходящий через каждое ребро ровно 1 раз.

Def Эйлеров цикл – эйлеров маршрут, где нач. и кон. вершина ==.



Критерий Эйлеровости.

След. утв-я ~:

1) G - эйлеров
2) Все степени вершин четные
3) Ребра можно разбить на непересек. по ребрам циклам.

▷ 1 -> 2. Степень вершины должна быть четной, чтобы при „обходе" графа мы могли „зайти" и „выйти" из нее ∎

2 -> 3

□ 1) Стартуем из рандомной вершины, идем, пока не вернемся в нее.

2) Остались еще вершины? Повторяем 1)
Иначе: готово!

* мы можем собирать циклы благодаря их четности. После того, как собрали i-й цикл, удаляем его ребра из графа

∎

□ $2 \to 1$

1) Выходим из v ходим-ходим. Возвращаемся в v, т.к. из $\forall u$ можно войти (кроме v, ведь мы там уже исп-ли „выход". Поэтому неизбежно вернемся

2) Если еще остались вершины со степ. >0 ($\sim \geq 2$), учтите в ш.1 был построен цикл $C(v)$
Удалим все его ребра из G. $G' = G / C(v)$.

G':

1) несвязный
2) $\forall$ вершина им. чет. ст.
3) хотя бы одна из КС G' им. общую вершину с $C(v)$. Пусть это $v_1 \in C(v)$ $(*)$

Рассматриваем все КС и делаем то же, что 1, 2) для G делали.

Получим некоторые

$C_1, C_2, \ldots C_L$. Заметим, что из $(*)$ следует, что циклы, им. общие вершины, можно объединить. $\Rightarrow$
все L циклов объединятся в 1 большой C_G

Это и будет эйлеров цикл. ∎

□ 3 → 2. Заметим, что ∀ вершина участвует в цикле, если для ∀ захода в нее она асс. 2 ребра (вход-выход). => степени могут быть 2, 4, 6... (смотря сколько циклов проходят через вершину. 2k.

Все ребра разбиваются на непересек. циклы по ребрам =>

∀ вершина задействована хотя бы в 1 C_i => Все вершины четных степеней ■

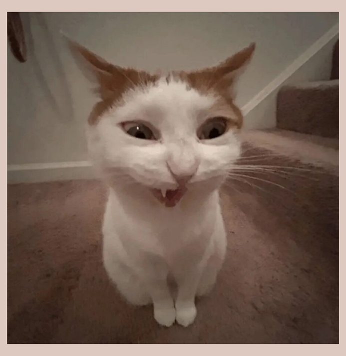
Гамильтоновы графы

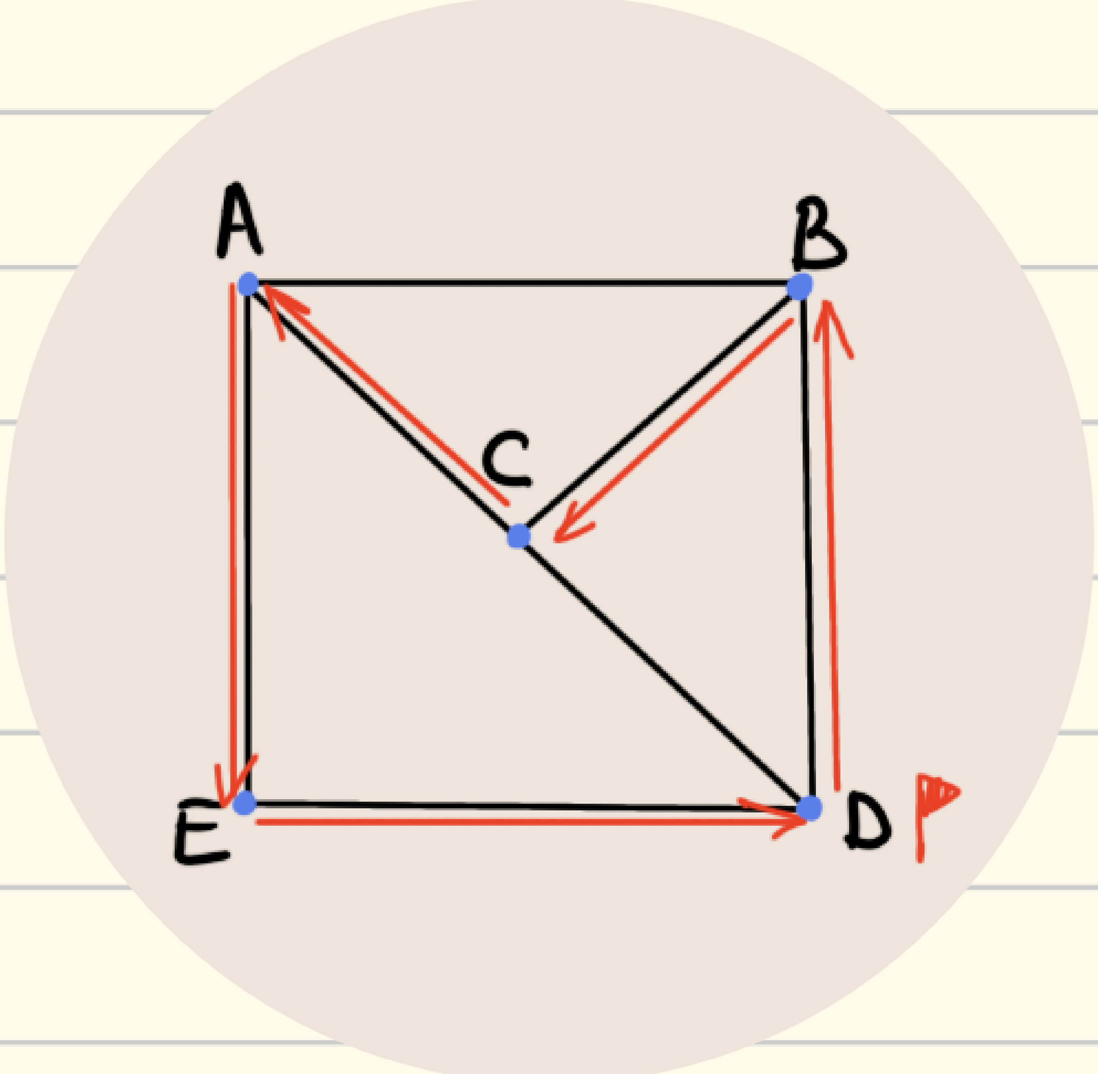
Def Гамильтонов путь - это простой путь, прох-й через каждую вершину 1 раз.

Def Гамильтонов цикл - это простой цикл, пр-й через все вершины графа.

Def Гамильтонов граф - граф, содерж-й гамильтонов цикл.

Deepseek говорит, что в наст. время не сущ-т полного крит-я для Г.Г.





Двудольные графы

Def Двудольный граф — это граф G такой, что $V = L \cup R$ $(L \cap R = \varnothing)$. Причем $(v_L, v_R) \in E \Leftrightarrow v_L \in L, v_R \in R$.

Def Назовем граф k-раскрашиваемым, если $\exists$ правильная k-раскраска для него. т.е. $\forall$ 2 смежных ребра разных цветов.

St. $\forall$ дерево 2-раскрашиваемо.

Theorem:
След. утв-я $\sim$:
1) граф G — двудольный
2) граф G — 2-раскр-й
3) в графе нет циклов нечетной длины.

! $\forall$ дерево 2-раскрашиваемо

Def Остовное дерево графа G — подграф G, явл-ся деревом.

$\square$ $1 \to 2$. Ну.. раскрасим $\forall v_L \in L$ в зелёный, а $\forall v_R \in R$ в красный. Чекни. $\blacksquare$

$\square$ $2 \to 1$ Ну тоже очев $\blacksquare$

$\square$ $1 \to 3$. G — двуд-й. Рассм-м произвольного цикл:

$$v_{L_1} \to v_{R_1} \to v_{L_2} \to \ldots \to v_{R_k} \to v_{L_1}$$

Если посл. вершина в цикле $\in L$, то предыд-я из R. $\Rightarrow$ четное кол-во ребер. Также с $v_R \in R$. $\blacksquare$

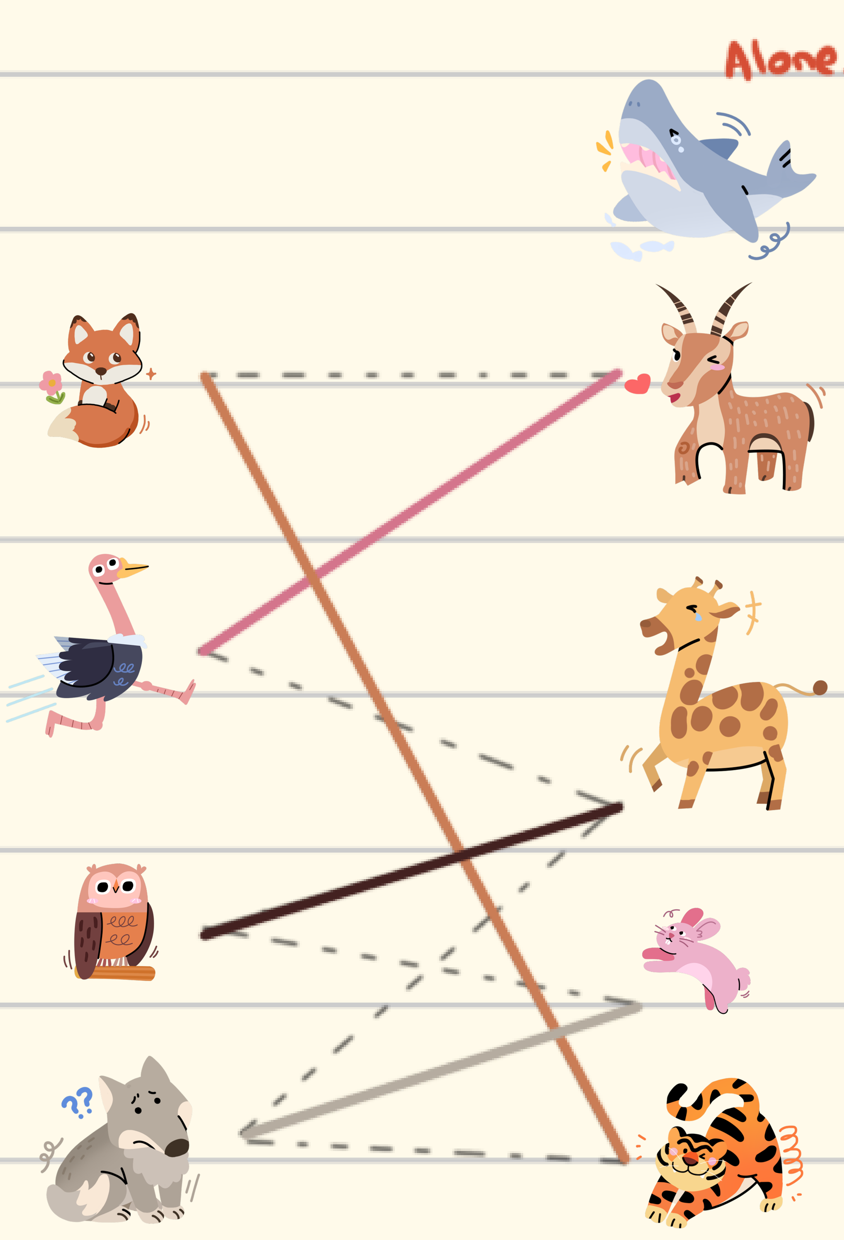
$\square$ $3 \to 2$

Берём остовное дерево графа G и красим в 2 цвета.

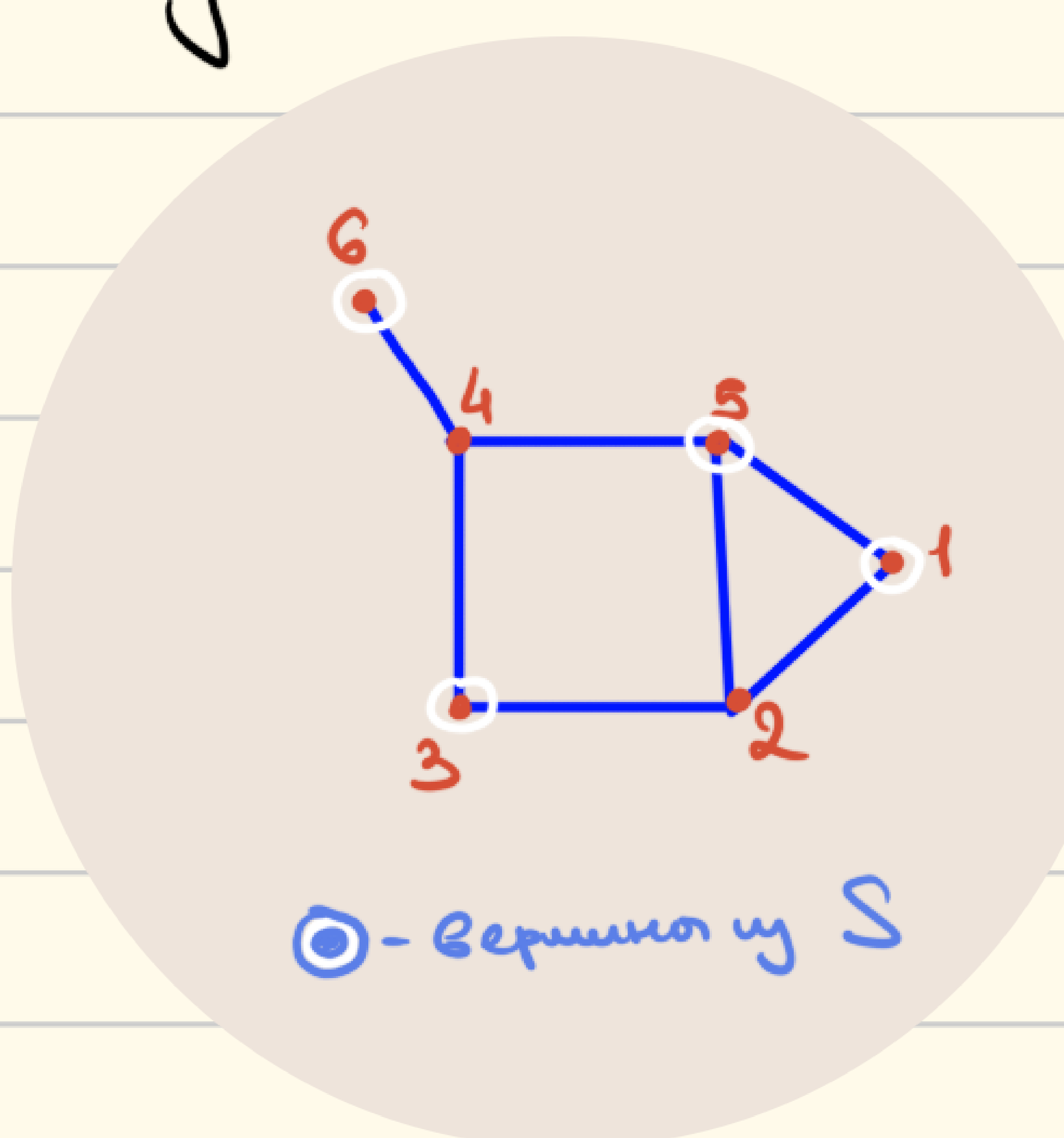
Пусть это нетребуемая раскраска. Тогда в G есть ребро, которое помимо наличия пути чётной длины $u \to v$ из ост. дерева имеет $u \to v$ неч. длины (другой). Но тогда в G есть цикл неч. длины. противоречие! ■

Паросочетание — подмножество рёбер $M \subseteq E$ т.ч. никакие два разл. ребра из M не имеют общей вершины.

<u>Def</u> Назовем паросочетание совершенным (пусть $|L| \leq |R|$) если $\forall v_L \in L \ \exists v_R \in R$: $(v_L, v_R) \in E$.



Вершинное покрытие $S \subseteq V$ - это подмножество вершин G такое, что $\forall$ ребро инцидентно по кр. мере 1 вершине из S.



Теорема Холла

В двуд. графе G ($|L| \le |R|$) $\exists$ совершенное паросочетание $\Leftrightarrow$ $\forall X \subseteq L$ смежно не менее $|X|$ вершин из R.

Вершину считаем смежной с X, если она смежно с ≥ 1 вершиной $\in X$.

□ $\Rightarrow$ Пусть $\exists$ соверш. паросочетание. $\Rightarrow$ для $\forall X \subseteq L$ найдется не менее $|X|$ вершин, смежных с X по ребрам паросочетания.

$\Leftarrow$ Утверждение: Если в графе построено соверш. паросочетание на $K < |L|$ вершинах, то можно и на $K+1$.

□□

База: $n = 0$, между L и R есть ребра. Проведем ребро. Получим паросочетание размера 1.

Шаг: Пусть построено паросочетание размера $K < |L|$. В L есть x, не уч-щее в паросочетании (иначе - противоречие, что $K < |L|$)

Пусть ребра паросочетания ориентированы $R \to L$, а ост-ые: $L \to R$. Пойдем от x. Пусть $H_L \subseteq L$ - мн-во достижимых из x вершин $\in L$, H_R - соотв. из R.

$\exists y \in H_R$: y не уч-т в паросочетании

(иначе: $|H_L| > |H_R|$ - противоречие)

Рассмотрим путь $x \to y$.

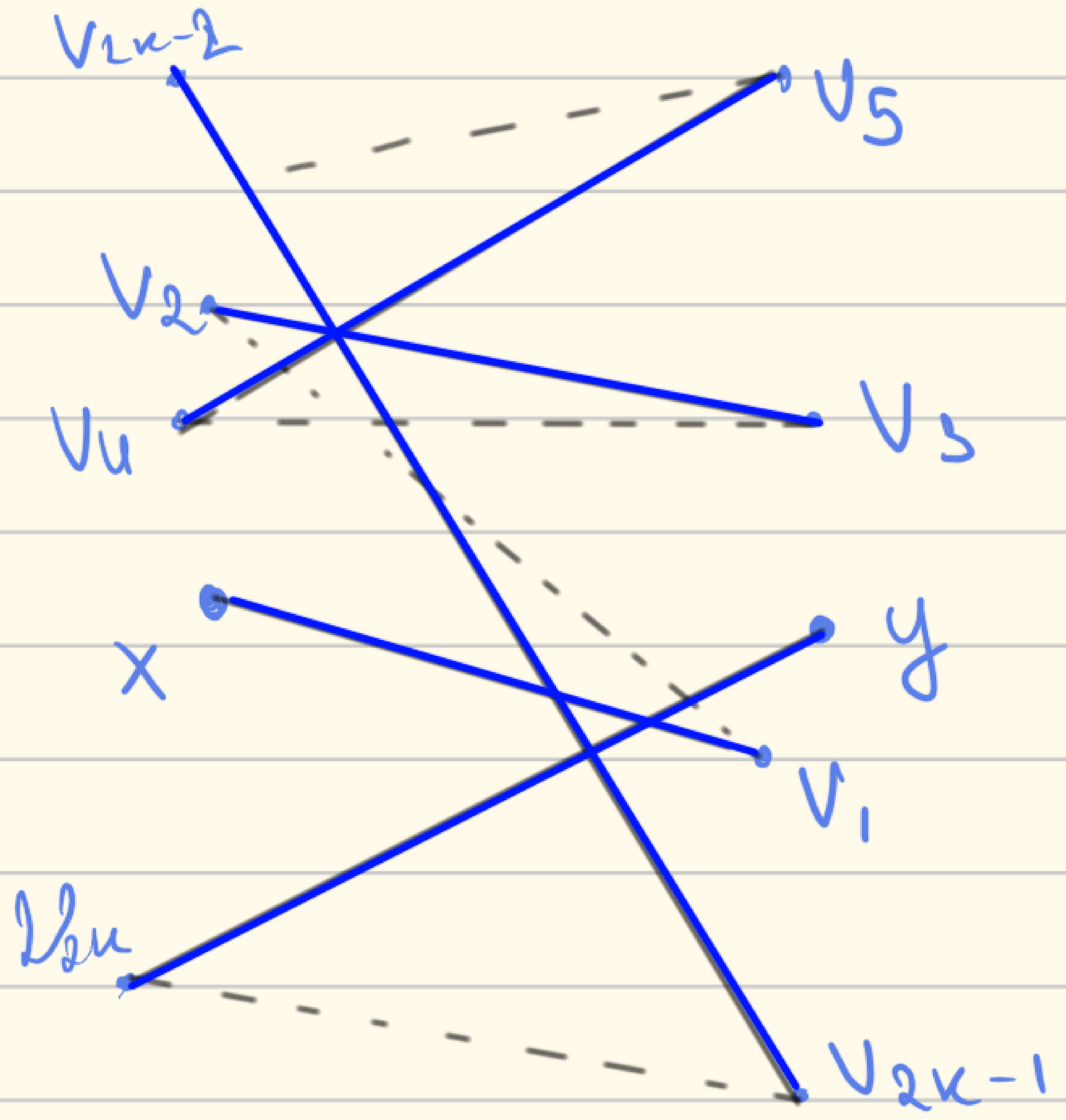
$e_1 \to e_2 \to \ldots \to e_n$

Заметим, что нечётные номера $\notin$ паросочетанию, а чётные – $\in$ пар-ю.

Исключим: $\underbrace{(v_1, v_2), (v_3, v_4), \ldots (v_{2k-1}, v_{2k})}^{2k-1 \text{ шт.}}$

и добавим: $\underbrace{(x, v_1), (v_2, v_3) \ldots (v_{2k}, y)}_{2k \text{ шт.}}$

Мы увеличим кол-во ребер паросочетания на 1.



Core Concept: удаляем все ребра паросочетания, по которым шел путь $x \to y$ и вместо них, пока был, разворачиваем ребра $L \to R$

$x \to v_1$
$v_2 \to v_3$
$v_{2k} \to y$

Заметим, что в $x \to y$ ребер паросочетания было k, а не-паросочетания было $k+1$ => удаляем эти k и поворачиваем эти $k+1$.

Отношения ЧП.

Отношение $<(\leq)$ наз-ют отношением част. порядка, если :

строгое	нестрогое
1) $x \nless x$ антирефл-ть	1) $x \leq x$ рефлекс-ть
антисимметричность	симметричность
2) $(x<y)\wedge(y<x)$ не может быть.	2) $(x\leq y)\wedge(y\leq x) \Rightarrow x=y$
3) $(x<y)\wedge(y<z)\Rightarrow(x<z)$	3) $(x\leq y)\wedge(y\leq z)\Rightarrow(x\leq z)$

транзитивность

Отношение ЧП - линейно, если

$\forall x,y \hookrightarrow (x\leq y)\vee(y\leq x)$

Def Отношение непоср.-го следования $\gg_n$ (для $\ll$)

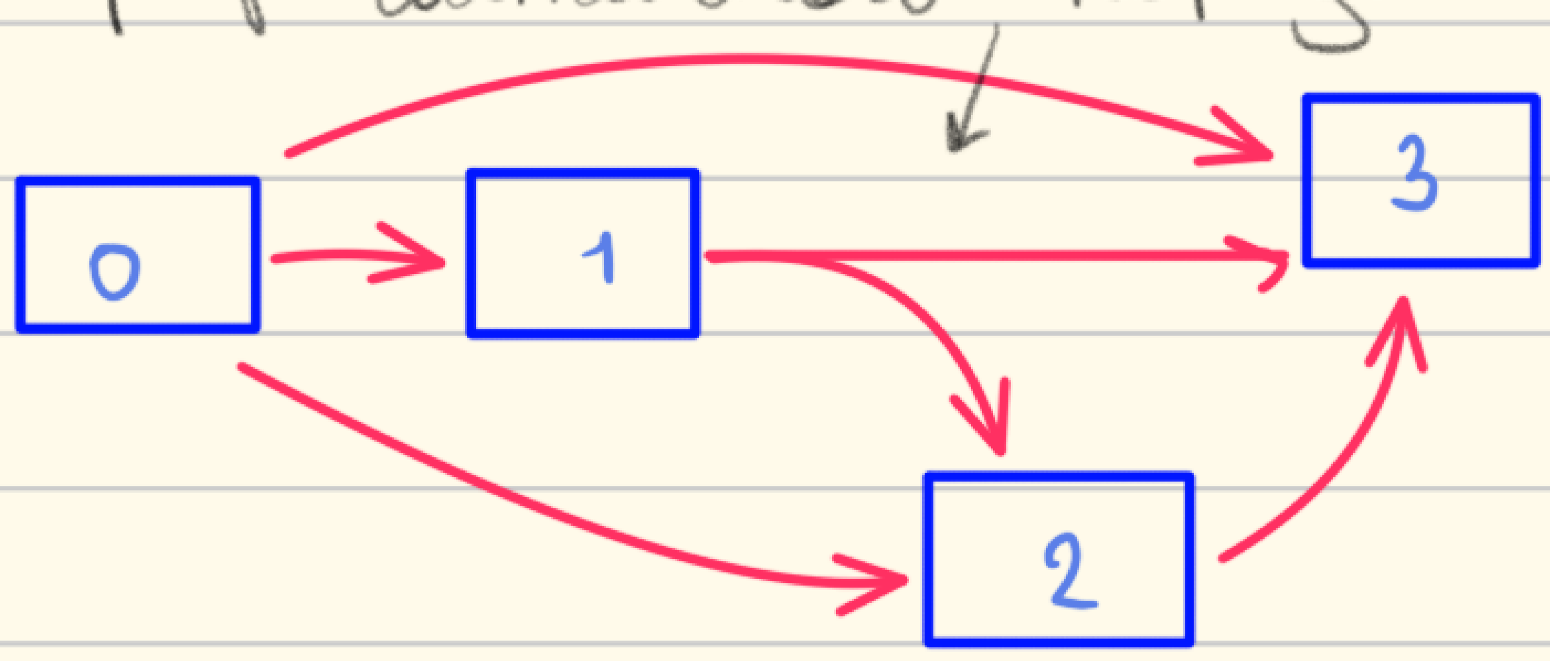
Б.г., что y непоср-но след за x, если

$$\begin{cases} x \gg y \\ \text{Нет такого } z:\ z\neq x, z\neq y \text{ и } x\ll z, z\ll y. \end{cases}$$

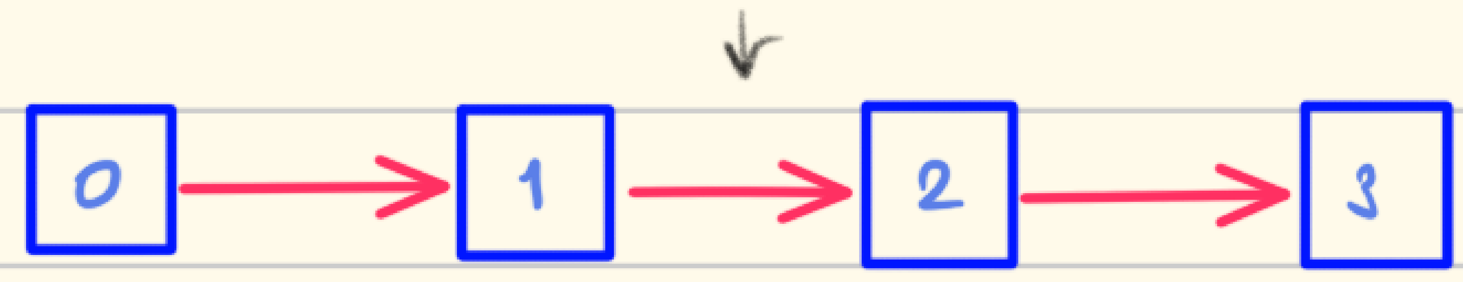
Def Ор. граф частичного порядка $G(V,E)$,

$V \leftrightarrow M$, где $(u,v)\in E \Leftrightarrow u \prec v$ $(\ll)$

граф частичного порядка



тоже граф ЧП

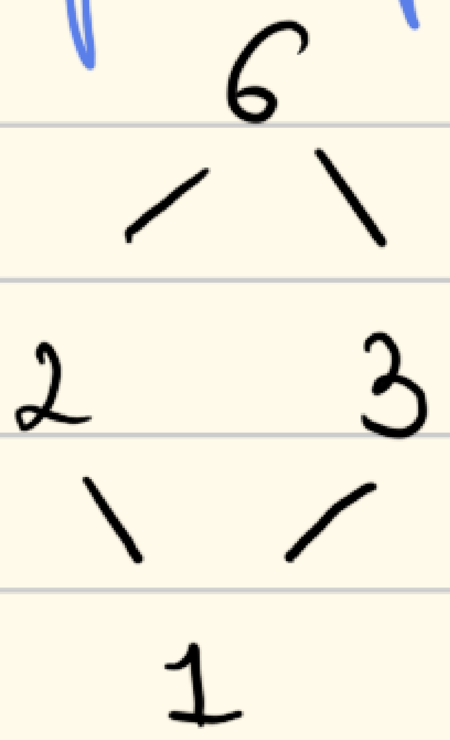


и граф непосредственного следования.

Def Диаграмма Хассе — это граф отношения непосредственного следования для частичного порядка.

1) Вершины — эл-ты мн-ва A
2) если $a < b$, то b выше a и соед-ся с ней отрезком
3) Транзитивные замыкания не рисуются

Пример: $A = \{1, 2, 3, 6\}$ с отн-м делимости



Ну и такие примеры: