Билет №1

Аксиоматика действительных (вещественных) чисел

Введём 15 аксиом:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a$ (нейтральный по сложению)
4. $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists (-a) \in \mathbb{R} : -a + a = 0$ (противоположный элемент)
5. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения)
6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения)
7. $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0 : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$ (нейтральный по умножению)
8. $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$ (обратный элемент)
9. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность)
10. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$ или $b \leq a$ (связность)
11. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leq b$ и $b \leq c) \Rightarrow a \leq c$ (транзитивность)
12. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ (монотонность сложения)
13. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall c \geq 0 : a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ (монотонность умножения)
14. $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \leq b$ и $b \leq a) \Rightarrow a = b$ (антисимметричность)
15. **Аксиома непрерывности:**
    Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ — непустые множества, причём $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall b \in B : a \leq c \leq b$.

Аксиомы 1-14 удовлетворяют множеству $\mathbb{Q}$. Покажем, что $\mathbb{Q}$ не удовлетворяет аксиоме 15:

Возьмем множества:

$$A = \{x > 0 : x^2 < 2\}, \quad B = \{x > 0 : x^2 > 2\}$$

Если бы для рациональных чисел верно, то существовало бы разделительное число $c \in \mathbb{Q}$ такое, что $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq c \leq b$. Тогда $c^2 \geq 2$ и $c^2 \leq 2 \Rightarrow c^2 = 2$.

Пусть есть такая несократимая дробь m/n: $(m/n)^2 = 2$. m^2=2 $* n^2$. Следовательно, m - четное. Но тогда и n - четное. Значит дробь сократима. Противорение.

$\mathbb{Q}$ не удовлетворяет аксиоме непрерывности.

Билет №2

Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел

Определение. Множество является **счётным**, если оно равномощно множеству натуральных чисел.

Теорема 1. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётно.

Доказательство: Построим таблицу: в строках будут значения n (натуральные числа от 1 до бесконечности), а в столбцах — m (все целые числа, записанные по типу: $0, -1, 1, -2, 2, \ldots$).

	$m=0$	$m=-1$	$m=1$	$m=-2$	$\cdots$
$n=1$	$\frac{0}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\cdots$
$n=2$	$\frac{0}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$\cdots$
$n=3$	$\frac{0}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

На пересечении в клетках получаем дроби вида $\frac{m}{n}$. Будем двигаться по змейке, пропуская уже встретившиеся дроби. Таким образом получим биекцию $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Q}$.

- **Инъекция:** т.к. все повторы пропущены
- **Сюръекция:** т.к. каждое рациональное число попадет в некоторую клетку и змейка по ней пройдет

Теорема 2. Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ несчётно.

Доказательство: $\mathbb{R}$ бесконечно, т.к. содержит $\mathbb{N}$.

Предположим, существует биекция из натуральных чисел в вещественные. Тогда можем представить:

$$\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

Возьмём произвольный отрезок I_1, $x_1 \notin I_1$. Внутри него возьмем отрезок I_2, $x_2 \notin I_2$. Пусть построены отрезки $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$. Тогда в I_n не входят $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Возьмём отрезок $I_{n+1} \subset I_n$, $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. По индукции построена последовательность вложенных отрезков.

По теореме Кантора $\exists!$ общая точка последовательности отрезков $c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, которая не была занумерована: $c \neq x_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

То есть $c \notin \{x_1, x_2, \ldots\}$, но ведь это и есть $\mathbb{R}$. Следовательно, $c \notin \mathbb{R}$ — противоречие.

Значит, $\mathbb{R}$ — несчётное множество.

Билет №3

**Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани множества.
Эквивалентные формулировки принципа непрерывности вещественной прямой.
Теорема Кантора о вложенных отрезках.**

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — непустое множество. Будем говорить, что $M \in \mathbb{R}$ является **точной верхней гранью** (супремумом E) и записывать $M = \sup E$, если:

1. $\forall a \in E : a \leq M$
2. $\forall M' < M \ \exists a' \in E : M' < a' \leq M$

Определение. Будем говорить, что $m \in \mathbb{R}$ является **точной нижней гранью** (инфимумом E) и записывать $m = \inf E$, если:

1. $\forall a \in E : a \geq m$
2. $\forall m' > m \ \exists a' \in E : m' > a' \geq m$

Теорема. (о существовании точной верхней грани)
Доказательство: Докажем для супремума. Для инфимума аналогично.

1. Если E ограничено сверху, то существует хотя бы одна верхняя грань. Пусть B — множество верхних граней, оно не пусто. B правее $E \Rightarrow$ по аксиоме непрерывности существует $c \in \mathbb{R}$: $\forall a \in E, \forall b \in B : a \leq c \leq b$. Покажем, что $c = \sup E$.

   (a) Пункт первый из определения супремума выполнен, т.к. $a \leq c$ для любого $a \in E$. Следовательно, c — верхняя грань множества E.

   (b) Пункт второй из определения выполнен, т.к. $\forall M' < c$ (M' не является верхней гранью) $\exists a' \in E : M' < a' \leq c$.

   Единственность: От противного: пусть супремум не единственен. Тогда $\exists M_1, M_2 = \sup E$. Из определения супремума для M_1 получаем, что $M_1 \leq M'$, где M' — верхняя грань $E \Rightarrow M_1 \leq M_2$. Аналогично для M_2 получаем, что $M_2 \leq M_1 \Rightarrow M_1 = M_2$. Супремум единственен.

2. Если E не ограничено сверху, то $\sup E = +\infty$. Никакое число не может быть супремумом неограниченного сверху множества. Пункты из определения супремума выполнены для $+\infty$.

Теорема Кантора. (о вложенных отрезках)
Любая последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ имеет хотя бы одну общую точку. Т.е. $\exists c \in \mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{N} : c \in [a_n, b_n]$.
Доказательство: Введем два множества:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$$

— множества левых и правых концов отрезков соответственно.

Из вложенности отрезков следует, что $\forall a_i \in A, \forall b_j \in B : a_i \leq b_j$. По аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R}$: $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq c \leq b$.

В частности, $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c \leq b_n$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$ для всех n.

Эквивалентность формулировок:

- Аксиома непрерывности
- Теорема о существовании точных граней
- Теорема Кантора о вложенных отрезках

Эти утверждения эквивалентны и выражают принцип непрерывности вещественной прямой.

Покажем, что A левее B. Достаточно доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено, что $a_n \leq b_m$.

Будем считать, что $m \geq n$, но отрезки вложены $\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow a_n \leq a_m$. Но $[a_n, b_n]$ — отрезок $\Rightarrow a_n \leq \cdots \leq a_m \leq b_m$.

В силу аксиомы непрерывности существует $c \in \mathbb{R}$: $a \leq c \leq b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$. Тогда $a_n \leq c \leq b_m$ для любых натуральных n и m. В частности, $a_n \leq c \leq b_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Значит c принадлежит пересечению всех этих отрезков. Существует общая точка.

Теорема. Следующие условия эквивалентны:

1. Аксиома непрерывности
2. Существование и единственность sup и inf для ограниченных множеств
3. Лемма Архимеда + принцип Кантора о вложенных отрезках

Доказательство эквивалентности:
(1) $\Rightarrow$ (2): Доказано в теореме о существовании точных граней.
(2) $\Rightarrow$ (3):

- **Лемма Архимеда:** $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > 1$. Предположим противное: $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : n\varepsilon \leq 1$. Тогда множество $\{n\varepsilon : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено сверху $\Rightarrow \exists \sup$. Пусть $M = \sup\{n\varepsilon\}$, тогда $\exists n : n\varepsilon > M - \varepsilon \Rightarrow (n+1)\varepsilon > M$ — противоречие.
- **Принцип Кантора:** Рассмотрим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$. Множество $\{a_n\}$ ограничено сверху $\Rightarrow \exists c = \sup\{a_n\}$. Тогда $c \in [a_n, b_n]$ для всех n.

(3) $\Rightarrow$ (1): Пусть A и B — непустые множества, причём $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$. Построим последовательность вложенных отрезков, содержащих разделяющую точку. По принципу Кантора существует общая точка c этих отрезков, которая и будет искомой разделяющей точкой.

Таким образом, все три формулировки эквивалентны и выражают свойство непрерывности вещественной прямой.