Билет № 17. Достижимость точной нижней (верхней) грани для полунепрерывной снизу (сверху) функции.

Определение: $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$.

- f **полунепрерывна снизу** в x_0 по X, если: $\underline{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}}} f(x) \geq f(x_0)$
- f **полунепрерывна сверху** в x_0 по X, если: $\overline{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}}} f(x) \leq f(x_0)$

Теорема. Если $f : K \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу $\forall x \in K$, то она достигает своего минимального значения на K. Если f полунепрерывна сверху в каждой точке компакта, то она достигает своего максимума.

Доказательство: Докажем для полунепрерывной сверху.

Рассмотрим $M := \sup\limits_{K} f$ и построим максимизирующую последовательность.

По определению супремума $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in K$: $f(x_n) \in U_{1/n}(M)$.

Рассмотрим $\{x_n\} \subset K$. $f(x_n) \to M$, $n \to \infty$.

Т.к. K - компакт, то $\exists$ подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$ и точка $x^* \in K$: $x_{n_j} \to x^*$, $j \to \infty$.

Т.к. $\{f(x_{n_j})\}$ - подпоследовательность $\{f(x_n)\}$, то $f(x_{n_j}) \to M$, $j \to \infty$.

Т.к. f полунепрерывна сверху $\forall x \in K$, то применим определение для точки x^*:

$$\overline{\lim_{\substack{x \to x^* \\ x \in K}}} f(x) \leq f(x^*)$$

Из определения: $\overline{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}}} f(x) = \sup \left\{ \overline{\lim}_{n \to \infty} f(x_n) : \{x_n\} \text{ - последовательности Гейне} \right\}$

Возьмем $\{z_g\} = \{x_{n_j}\}$ - последовательность Гейне в точке x^*.

Тогда:

$$M = \lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) = \overline{\lim_{j \to \infty}} f(x_{n_j}) \leq f(x^*)$$
$$M \leq f(x^*)$$

Но M - супремум $f \Rightarrow f(x^*) \leq M$.

Следовательно, $M = f(x^*)$.

Аналогично доказывается для полунепрерывной снизу функции и минимума.