Билет № 7. Подпоследовательности и частичные пределы. Теорема о верхнем и нижнем пределах.

Определение. $\forall$ $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ - числовая последовательность. Будем говорить, что $\{y_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ - подпоследовательность $\{x_n\}$, если $\exists$ строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ такая, что $\forall k \in \mathbb{N}$ выполнено: $x_{n_k} = y_k$.

Определение. Будем говорить, что $A \in \overline{\mathbb{R}}$ - частичный предел последовательности $\{x_n\}$, если $\exists$ такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, \dots)$, такая что $\lim x_{n_k}(k \to \infty) = A$.

Критерий частичного предела.

$\forall$ $\{x_n\}$ числовая последовательность. Следующие условия эквивалентны:

1) $A \in \overline{\mathbb{R}}$ - частичный предел $\{x_n\}$

2)$\forall\varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(A)$ содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}$

3)$\forall\varepsilon > 0$ $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n(\varepsilon, N) \geq N$: $x_{n(\varepsilon,N)} \in U_\varepsilon(A)$ (*)

Доказательство

$1 \Rightarrow 2$ $\exists$ строго возрастающая $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$: $x_{n_k} \to A$, $k \to \infty$. Тогда $\forall\varepsilon > 0$ $\exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall k \geq k(\varepsilon)$ выполнено, что $x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$. Но $\{k \in \mathbb{N} : k \geq k(\varepsilon)\}$ бесконечно $\Rightarrow$ множество $\{x_n : x_n \in U_\varepsilon(A)\}$ бесконечно.

$2 \Rightarrow 3$ $\forall\varepsilon > 0$ пусть $I_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_\varepsilon(A)\}$ - бесконечное множество. Тогда $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n \in I_\varepsilon$: $n \geq N$. Действительно, если предположить обратное, то I_ε было бы конечным множеством, а это не так по условию. Итого: $\forall\varepsilon > 0$ $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n(\varepsilon, N) \geq N$: $x_n \in U_\varepsilon(A)$.

$3 \Rightarrow 1$ Построим строго возрастающую $\{n_k\}$: $x_{n_k} \to A$, $k \to \infty$. $n_1 = n(1, 1)$ $(\varepsilon = 1,\ N = 1)$, $n_1 \geq 1$, $x_{n_1} \in U_1(A)$ $\varepsilon = 1/2$, $N = n_1 + 1$. В силу (*) $\exists n_2 \geq n_1 + 1$: $x_{n_2} \in U_{1/2}(A)$. Построены $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ и $x_{n_k} \in U_{1/k}(A)$. Возьмем $n_{k+1} = n(1/(k+1), n_k+1)$ Тогда $x_{n_{k+1}} \in U_{1/(k+1)}(A)$. В итоге $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists n_k = n(1/k, n_{k-1} + 1)$: $x_{n_k} \in U_{1/k}(A)$. Следовательно, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists n_k \in \mathbb{N}$: $\forall j \geq k$ выполнено, что $x_{n_j} \in U_{1/k}(A)$. Получаем, что $\forall\varepsilon > 0$ $\exists k(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$: $\forall k \geq k(\varepsilon)$ выполнено, что $x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$.

($k(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$ берется от того, что для следующего элемента мы выбираем $N = n_k + 1$)

Верхний и нижний пределы.

Определение. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{$частичные пределы $\{x_n\}\}$

Определение. $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{$частичные пределы $\{x_n\}\}$

Теорема. $M = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \in \{$частичные пределы $\{x_n\}\}$

m $= \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \in \{$частичные пределы $\{x_n\}\}$

Докажем для M. По определению общего супремума: $\forall\varepsilon > 0$ в $U_{\varepsilon/2}(M)$ $\exists c$ - частичный предел. (А если бы не нашлось - M не был бы супремумом множества частичных пределов) $\Rightarrow$ В $U_{\varepsilon/2}(c)$ содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}$ по критерию ЧП. $U_{\varepsilon/2}(c) \subset U_\varepsilon(M)$. Значит в $U_\varepsilon(M)$ содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}$. Но $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно. Значит $\forall\varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(M)$ содержатся значения бесконечного количества элементов $\{x_n\}$. Значит, M - ЧП.