Билет № 18. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.

Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении.

Пусть $f \in C([a,b])$. Для любого $c \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ существует $x_c \in [a,b]$ такой, что $f(x_c) = c$.

Доказательство:

0) Без ограничения общности считаем, что $f(a) < f(b)$.

1) Фиксируем $c \in (f(a), f(b))$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - c$. Тогда $g(a) < 0$, $g(b) > 0$. Достаточно доказать, что существует $a \leq x_c \leq b$: $g(x_c) = 0$.

2) У отрезка $I_0 = [a,b]$ на концах значения g разных знаков. Поделим на два отрезка: $I_0^1 = [a, \frac{a+b}{2}]$, $I_0^2 = [\frac{a+b}{2}, b]$.

Если $g(\frac{a+b}{2}) = 0$, то мы нашли x_c.

Иначе: берём отрезок, на концах которого функция принимает значения с разными знаками.

Предположим, что построены вложенные отрезки: $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n$, причём на концах этих отрезков функция принимает значения с разными знаками. $l(I_j) = \frac{l(I_0)}{2^j}$ для любого j от 0 до n.

Продолжим деление.

Либо за конечное число шагов найдём искомое x_c, либо получим стягивающуюся последовательность вложенных отрезков $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$, которая по теореме Кантора имеет 1 общую точку $x_c = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n$.

3) Докажем, что $g(x_c) = 0$. Разделим концы отрезков на два множества:

- $\{a_n\}$ - множество концов, на которых функция принимает отрицательные значения
- $\{b_n\}$ - множество концов, на которых функция принимает положительные значения

Это две последовательности Гейне в точке x_c. В силу непрерывности g в точке x_c:

$$\exists \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(x_c); \quad g(x_c) \geq 0$$
$$\exists \lim_{n\to\infty} g(b_n) = g(x_c); \quad g(x_c) \leq 0$$

$\Rightarrow g(x_c) = 0$.

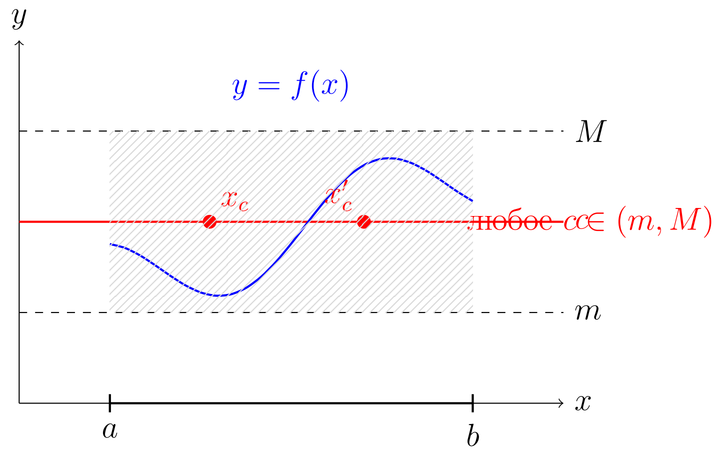
Обобщенная теорема Больцано-Коши о промежуточном значении.

Пусть $f \in C(\lfloor a,b \rceil)$. Пусть $m = \inf\limits_{\lfloor a,b \rceil} f$, $M = \sup\limits_{\lfloor a,b \rceil} f$. Тогда для любого $c \in (m, M)$ найдется $x_c \in \lfloor a,b \rceil$: $f(x_c) = c$.

Доказательство. По определению inf: $m \leq f(x)$ для всех $x \in \lfloor a,b \rceil$. Для любого $m' > m$ существует $x \in \lfloor a,b \rceil$: $m \leq f(x) < m'$. Аналогично по определению sup: $M \geq f(x)$ для всех $x \in \lfloor a,b \rceil$. Для любого $M' < M$ существует $x \in \lfloor a,b \rceil$: $M' < f(x) \leq M$.

1) $c = m' = M'$. Получаем: существуют x_1 и $x_2 \in \lfloor a,b \rceil$ такие, что $f(x_1) < c$, $f(x_2) > c$. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2]$ вложенный в $\lfloor a,b \rceil$. Функция непрерывна на нем. Применим классическую теорему Больцано-Коши. Существует $x_c \in (x_1, x_2) \Rightarrow x_c \in \lfloor a,b \rceil$ и $f(x_c) = c$.

Пример для обобщенной теоремы Больцано-Коши



На $\lfloor a,b \rceil$ функция принимает все значения из (m, M)

Пояснение:

- $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$ на $\lfloor a,b \rceil$
- Для **любого** $c \in (m, M)$ существует $x_c \in \lfloor a,b \rceil$ такой, что $f(x_c) = c$
- На рисунке показаны два возможных x_c и x'_c для одного значения c
- Заштрихованная область — множество всех значений, которые принимает функция