Combinatorics

Elisa Doronina

24 декабря 2025 г.

1 Core definitions

Перестановка - биекция конечного множества на себя.

Пусть у нас есть n шариков и m ящиков. Взять n различных шариков и разложить их по n различным ящикам (по одному на ящик) это n! перестановок. А если условия по одному нет - то n^m.

Размещение из n по k - упорядоченный выбор k элементов из n элементов.

$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Размещение с повторениями На каждую из k позиций можно поставить любой из n элементов.

$A_n^k = n^k$

Сочетание из n по k - выбор k элементоного подмножества из n элементного множества без учета порядка.

$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Сочетание с повторениями мы не различаем некоторые элементы => делим количество перестановок из n элементов на перестановки одних и тех же.

$C_n^k* = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_t!}$

2 Inclusion-exclusion Principle

2.1 Theorem

Для произвольных множеств A, B, C выполнено:

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$$

□ => Рассмотри элемент, который входит в множество $C \cap (A \cup B)$. Он одновременно входит в C и в одно (оба) из множетсв A, B. Без огр. общности пусть он входит в A и C. Значит входит в $A \cap C$

<= Пусть элемент входит в $B \cap C$. Тогда он входит и в $C \cap (A \cup B)$. ■

2.2 Formula

Далее идет великое и ужасное доказательство формулы включений-исключений (см. в планшете)

3 Binomial and Polemical Coefficients

3.1 Newton's Binomial Theorem

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

□ (x + y)(x + y)...(x + y) ровно n раз. Будем писать каждое слагаемое, не меняя их местами и не упрощая внешний вид степенью. Тогда при перемножении мы будем получать все возможные цепочки xxyyyxyxyxy...xyx длины n. Таких всего 2^n вариантов.
Зафиксируем некоторое k, нас интересуют только те сомножители, у которых всего k иксов. Из этих n мест x может стоять на C_n^k.
В случае $(x+y+z)^n$ по сути мы сначала выбираем k_1 место для икса, потом k_2 для y и оставшееся достается z.
$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2}$
Тогда в общем виде, если скобка с m переменными $(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n$ и мы хотим вычислить коэфициент при некотором $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} ... x_m^{k_m}$, $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$.
Мы каждый раз будем составлять последовательность из m элементов, причем на каждом из оставшихся от прошлых видов слагаемых мест надо выбрать k_i.
$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot ... \cdot C_{n-k_1-k_2-...-k_{m-1}}^{k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!...k_m!}$ ■

3.1.1 The Proof One More Time

□ Давайте перемешаем n мест и поставим в ряд. Т.е. сделаем перестановку. Это n! вариантов. Теперь, будем из множества наших слагаемых $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$. Для начала поставим x_1 на, допустим, k_1 мест. И так далее будем ставить все m видов иксов. Таким образом, мы получили $k_1!k_2!...k_m!$ перестановок, соответствующие одному слагаемому! Нам не важен порядок того, как именно мы расположили эти иксы внутривидово. Делим n! на $k_1!k_2!...k_m!$ и получаем однозначное соответствие. ■