Билет 15. Нижняя граница сортировки сравнениями

Основной результат: Любая сортировка сравнениями требует $\Omega(n \log n)$ операций

Постановка проблемы

Вопрос: Можно ли получить асимптотически более быструю сортировку, чем $O(n \log n)$?

- **Сортировки за $O(n^2)$:** Пузырьковая, Вставками, Выбором
- **Сортировки за $O(n \log n)$:** Merge Sort, Quick Sort, Heap Sort
- **Можно ли лучше?** Для сортировок **основанных на сравнениях — НЕТ**

Лемма: $\log(n!) = \Theta(n \log n)$

Доказательство:

1. **Оценка сверху:**

$$n! \leq n^n \Rightarrow \log(n!) \leq \log(n^n) = n \log n = O(n \log n)$$

2. **Оценка снизу:**

$$n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \Rightarrow \log(n!) \geq \frac{n}{2} \log\left(\frac{n}{2}\right) = \Omega(n \log n)$$

Итог: $\log(n!) = \Theta(n \log n)$

Доказательство теоремы

Теорема

Любая сортировка, основанная на сравнениях, работает за $\Omega(n \log n)$.

Доказательство

1. Для массива из n элементов существует $n!$ **возможных перестановок**
2. Алгоритм должен **однозначно определить правильную перестановку**
3. Каждое сравнение делит множество возможных перестановок на **2 части**:
   - Те, где $a[i] < a[j]$ (ответ "Да")
   - Те, где $a[i] \geq a[j]$ (ответ "Нет")
4. После k сравнений можно различить не более 2^k сценариев
5. Чтобы различить все $n!$ перестановок:

$$2^k \geq n! \Rightarrow k \geq \log_2(n!)$$

6. Применяем лемму:

$$k \geq \log_2(n!) = \Theta(n \log n) \Rightarrow k = \Omega(n \log n)$$

Любой алгоритм сортировки, который работает ТОЛЬКО через сравнения элементов, не может быть быстрее $O(n \log n)$ в худшем случае, потому что ему нужно "выбрать"одну правильную перестановку из $n!$ возможных, а каждое сравнение делит пространство вариантов лишь пополам.