Билет № 12. Критерий Коши существования предела функции.

Лемма

$f : E \to \mathbb{R}$, где x_0 — предельная точка E.
$\forall \{x_n\} \subset E$ — последовательности Гейне в точке x_0: $\exists \lim f(x_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}$.
Тогда A не зависит от выбора $\{x_n\}$. Т.е. $\forall \{x_n\}, \{y_n\}$ — последовательностей Гейне: $A(\{x_n\}) = A(\{y_n\})$.

Доказательство:

Пусть $\exists \{x_n\}, \{y_n\} \subset E$ — последовательности Гейне в точке x_0. Покажем, что $A(\{x_n\}) = A(\{y_n\})$.

Определим $z_n = \begin{cases} x_k, & n = 2k \\ y_k, & n = 2k-1 \end{cases}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Тогда $z_n = \{y_1, x_1, y_2, x_2, \dots\}$:

- $z_n \subset E \setminus \{x_0\}$
- z_n — последовательность Гейне в точке x_0
- $\exists \lim f(z_n)$ (по условию)

Но тогда $\{f(x_k)\}$ и $\{f(y_k)\}$ — подпоследовательности $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно:

$$\lim f(x_k) = \lim f(y_k) = \lim f(z_n) = A$$

Поскольку $\{x_n\}, \{y_n\}$ — произвольные последовательности Гейне $\Rightarrow$ предел не зависит от выбора последовательности Гейне.

Критерий Коши

Пусть $\exists \delta_0 > 0$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : \dot{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$. Тогда:

Функция имеет конечный предел в точке $x_0 \iff$ выполнено условие Коши:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0) : \forall x', x'' \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$ выполнено: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Доказательство:

($\Rightarrow$) Пусть $\exists$ конечный предел f $= A \in \mathbb{R}$.

По определению Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0) : \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$ выполнено: $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда $\forall x', x'' \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$:

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |f(x') - A + A - f(x'')| \\ &\le |f(x') - A| + |A - f(x'')| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Условие Коши выполнено.

($\Leftarrow$) Пусть выполнено условие Коши.

Возьмем произвольную последовательность Гейне в x_0: $\{x_n\} \subset \dot{U}_{\delta_0}(x_0)$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)$ из условия Коши.

Поскольку $x_n \to x_0$, то $\exists N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall n \ge N \Rightarrow x_n \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$.

Возьмем $\delta = \delta(\varepsilon)$ и получим, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\delta(\varepsilon)) : \forall n, m \ge N$ выполнено: $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет условию Коши для последовательностей (Последовательность сходится $<=>$ она удовлетворяет условию Коши, т.е. фундаментальна) Тогда в силу критерия Коши для последовательности $\exists \lim f(x_n) = A \in \mathbb{R}$.

Но по предыдущей лемме число A не зависит от выбора последовательности Гейне. Следовательно, для любой последовательности Гейне, принадлежащей проколотой δ_0-окрестности x_0, существует конечный предел A. Тогда по Гейне $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Замечание

Критерий Коши справедлив и для пределов по множеству $E \subset \mathbb{R}$ ($E \neq \varnothing$, x_0 — предельная точка E). Просто пересечь окрестности для x с множеством E.