Билет № 16. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке.

Непрерывность на множестве.

$X \neq \varnothing$, $f : X \to \mathbb{R}$. Функция **непрерывна на множестве** X, если $\forall x_0 \in X$: f непрерывна в x_0 по множеству X. Обозначение: $f \in C(X)$.

Теорема (Образ компакта - компакт).

$K \subset \mathbb{R}$ - непустой компакт, $f \in C(K)$. Тогда $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ - компакт.

Пример: $K = [0, 1]$, $f(x) = x + 2$. Тогда $f(K) = [2, 3]$

Доказательство: Пусть $\{y_n\} \subset f(K)$.

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in f^{-1}(y_n)$. Получим $\{x_n\} \subset K$.

По определению компакта $\exists$ подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$ и точка $x^* \in K$: $x_{n_j} \to x^*$, $j \to \infty$.

По непрерывности по Гейне в точке x^*: $y_{n_j} = f(x_{n_j}) \to f(x^*)$, $j \to \infty$.

$\Rightarrow$ подпоследовательность $\{y_{n_j}\}$ сходится к $f(x^*)$. Но $x^* \in K \Rightarrow f(x^*) \in f(K)$.

$\{y_n\}$ взята произвольно $\Rightarrow f(K)$ - компакт.

Следствие 1.

Функция, непрерывная на компакте K, принимает наибольшее и наименьшее значения.

Доказательство: Пусть $m = \inf\limits_K f$, $M = \sup\limits_K f$. Докажем, что $m, M \in f(K)$.

$f(K)$ - ограничено и замкнуто. По определению супремума и инфимума: m, M - точки прикосновения $f(K) \Rightarrow m, M \in f(K)$.

Тогда $\exists x_m, x_M \in K$: $f(x_m) = m$, $f(x_M) = M$.

Следствие 2.

Функция, непрерывная на компакте K, ограничена.

Доказательство: Пусть $C = \max\{|m|, |M|\}$. Тогда $\forall x \in K$: $|f(x)| \leq C$.

Отрезок $[a, b]$ - компакт (ограничен и замкнут) $\Rightarrow$ функция, непрерывная на отрезке, ограничена.