Билет 24. Амортизационный анализ

Курс "Алгоритмы и структуры данных"

> Билет 24. Амортизационный анализ
>
> **Основная идея:** Анализируем не одну операцию, а последовательность операций. "Дорогие"операции компенсируются "дешёвыми"!

Зачем нужен амортизационный анализ?

Проблема: Некоторые операции могут быть дорогими, но выполняются редко.

Решение: Смотрим на среднюю стоимость операции в последовательности.

1. Групповой анализ (Aggregate Method)

Основная идея

Показываем, что для последовательности из n операций общее время $T(n) = O(f(n))$, тогда амортизированная стоимость одной операции: $\frac{T(n)}{n}$.

Пример: Стек с multipop

- **push:** O(1)
- **pop:** O(1)
- **multipop(k):** O(k) - может быть дорогой!

НЕТ! Амортизированное время != среднему времени работы!

- **Среднее время:** Вероятностный анализ, зависит от распределения входных данных
- **Амортизированное время:** Детерминированный анализ, гарантии для ХУДШЕГО случая

2. Метод бухгалтерского учета | Метод монеток (Accounting Method)

Основная идея

- Назначаем операциям "амортизированную стоимость"
- Если стоимость > реальной - накапливаем "кредит"
- Если стоимость < реальной - используем накопленный кредит
- **Условие:** Кредит всегда >= 0

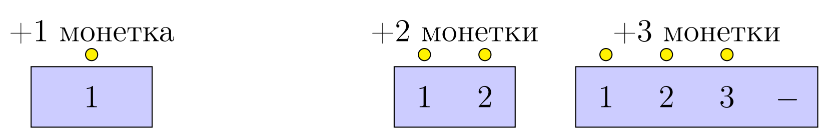
Пример: Стек с multipop

- **push:** Амортизированная стоимость = 2
- **pop:** Амортизированная стоимость = 0
- **multipop:** Амортизированная стоимость = 0

Пример с динамическим массивом

Шаг 1: Массив размером 1

Шаг 2: Добавляем 2 **Шаг 3: Добавляем 3**



3. Метод потенциалов (Potential Method)

Основная идея

Вводим **потенциальную функцию** $\phi(S)$, которая характеризует "потенциальную энергию"структуры данных.

$$\hat{c}_i = c_i + \phi(S_i) - \phi(S_{i-1})$$

где:

- $\hat{c}_i$ - амортизированная стоимость операции i
- c_i - реальная стоимость операции i
- $\phi(S_i)$ - потенциал после операции i
- $\phi(S_{i-1})$ - потенциал до операции i

Суммируем:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i + \phi(S_n) - \phi(S_0)$$

Пример: Динамический массив

Потенциальная функция: $\phi(S) = 2 \cdot \text{size} - \text{capacity}$

Случай 1: Без реаллокации

$$\begin{aligned} \phi(S_k) - \phi(S_{k-1}) &= [2 \cdot (\text{size} + 1) - \text{capacity}] - [2 \cdot \text{size} - \text{capacity}] \\ &= 2 \\ \hat{c}_k &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

Случай 2: С реаллокацией

$$\begin{aligned} \phi(S_k) - \phi(S_{k-1}) &= [2 \cdot (\text{size} + 1) - 2 \cdot \text{capacity}] - [2 \cdot \text{size} - \text{capacity}] \\ &= 2 - \text{capacity} \\ \hat{c}_k &= \text{size} + (2 - \text{capacity}) = 2 \end{aligned}$$

Сравнение методов

Метод	Преимущества	Недостатки
Групповой анализ	Прост для понимания	Не всегда применим
Бухгалтерский учет	Интуитивный, наглядный	Нужно угадать стоимости
Метод потенциалов	Мощный, гибкий	Сложно выбрать функцию

Ключевые выводы

1. Амортизационный анализ даёт гарантии для ХУДШЕГО случая
2. "Дорогие"операции оплачиваются "дешёвыми"
3. Все три метода эквивалентны по мощности
4. В динамическом массиве добавление элемента = O(1) амортизированно
5. Амортизированное время != среднему времени!