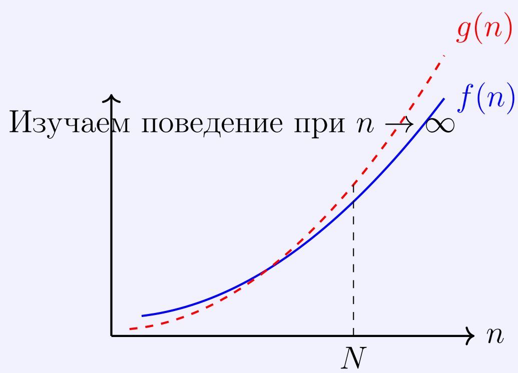
Билет 1. Асимптотический анализ. Нотации O, Ω, Θ, o, ω и связи между ними.

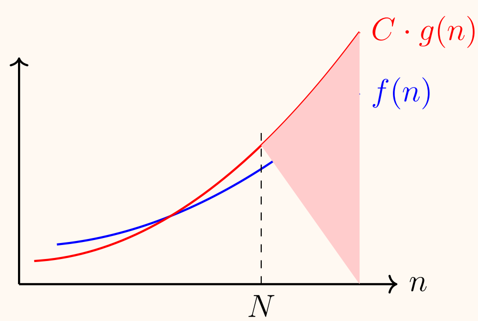
Определение

Асимптотический анализ — метод описания предельного поведения функций.



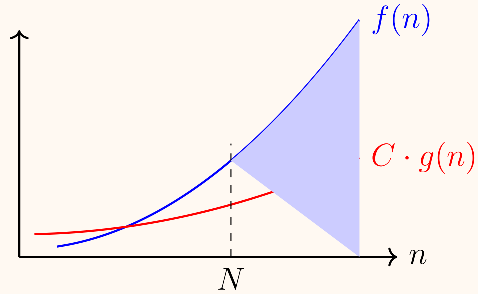
О-большое (O)

$f = O(g) \Leftrightarrow \exists C > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N,\ f(n) \leq C \cdot g(n)$



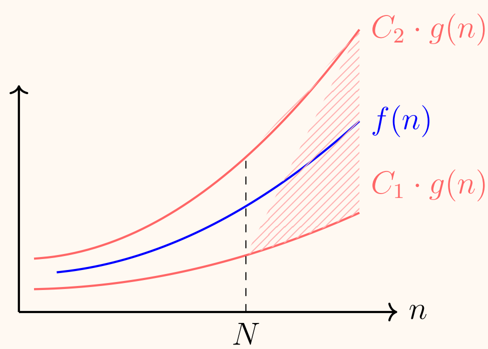
Омега-большое (Ω)

$f = \Omega(g) \Leftrightarrow \exists C > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N,\ f(n) \geq C \cdot g(n)$



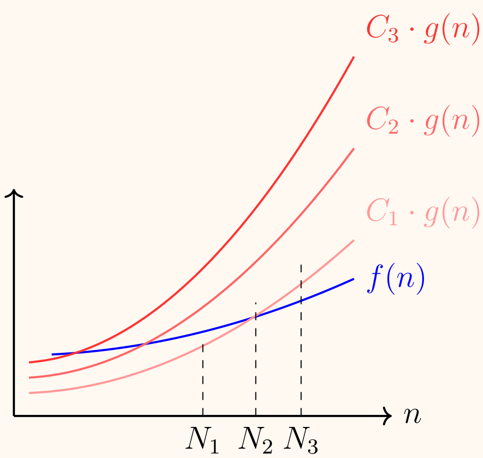
Тета (Θ)

$f = \Theta(g) \Leftrightarrow \exists C_1, C_2 > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N,\ C_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq C_2 \cdot g(n)$



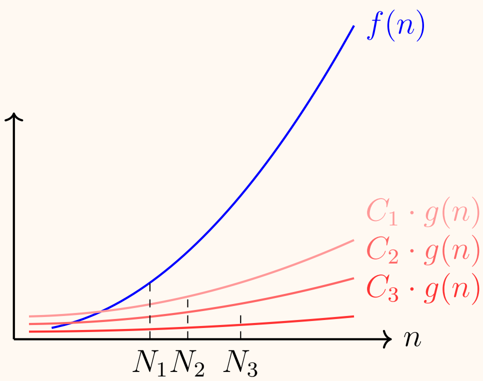
о-малое (o)

$$f = o(g) \Leftrightarrow \forall C > 0 \; \exists N_0 > 0 : \; \forall n \geq N_0, \; 0 \leq f(n) \leq C \cdot g(n)$$



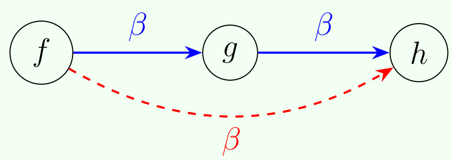
Омега-малое (ω)

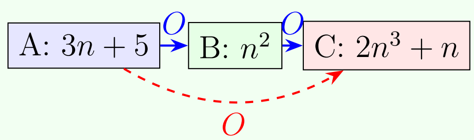
$$f = \omega(g) \Leftrightarrow \forall C > 0 \; \exists N_0 > 0 : \; \forall n \geq N_0, \; 0 \leq C \cdot g(n) \leq f(n)$$



Свойство

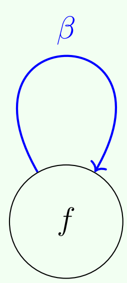
Транзитивность $\forall \beta \in \{O, \Omega, \Theta, o, \omega\}$, $\forall f, g, h$: $f(n) = \beta(g(n))$ и $g(n) = \beta(h(n))$. Тогда $f(n) = \beta(h(n))$





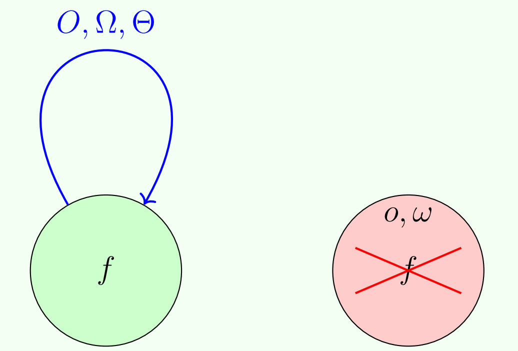
Свойство

Рефлексивность $\forall \beta \in \{O, \Omega, \Theta\}$, $\forall f$: $f(n) = \beta(f(n))$



Функция сравнима сама с собой

То есть функция асимптотически эквивалентна самой себе.

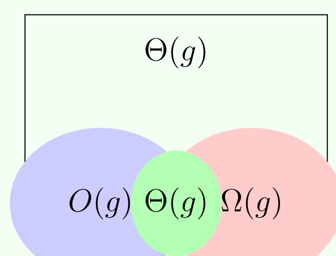


Рефлексивно Нерефлексивно

А почему не для o и ω?
o-малое: $f = o(f)$ было бы ложно: f растет медленнее самой себя. Но $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(n)} = 1 \; != 0$
ω-малое: $f = \omega(f)$ тоже ложно: f растет быстрее самой себя? но $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(n)} = 1 \; != \infty$

Свойство

Теорема: $f = \Theta(g) \Leftrightarrow f = \Omega(g) \wedge f = O(g)$



Θ = пересечение O и Ω

Свойство

Симметрия: $f = \Theta(g) \Leftrightarrow g = \Theta(f)$

$$\begin{tikzcd} \boxed{f} \arrow[r, leftrightarrow, "\Theta"] & \boxed{g} \end{tikzcd}$$

Отношение симметрично

Свойство

Антисимметрия

$$f = O(g) \Leftrightarrow g = \Omega(f)$$
$$f = \Omega(g) \Leftrightarrow g = O(f)$$
$$f = \omega(g) \Leftrightarrow g = o(f)$$

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r, leftrightarrow, "\text{дуальные}"] \arrow[d, "\text{усиление}"'] & \Omega \arrow[d, "\text{усиление}"] \\ o \arrow[r, leftrightarrow, "\text{дуальные}"] & \omega \end{tikzcd}$$

Дуальные и усиленные отношения