Билет № 14. Существование односторонних пределов у монотонных функций.

Определения

Монотонность: $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, $f : X \to \mathbb{R}$

- f **нестрого возрастает** на X, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- f **нестрого убывает** на X, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Точные грани:

$$\sup_{x \in X} f(x) := \sup\{f(x) : x \in X\}$$
$$\inf_{x \in X} f(x) := \inf\{f(x) : x \in X\}$$

Критерий супремума: $M \in \overline{\mathbb{R}} = \sup\limits_{x \in X} f(x) \iff$

- $\forall x \in X : f(x) \leq M$
- $\forall M' < M\ \exists x' \in X : M' < f(x') \leq M$

Односторонние окрестности:

$$\dot{U}_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta) \quad \text{(правая проколотая)}$$
$$\dot{U}_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \quad \text{(левая проколотая)}$$

Односторонние пределы: $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, x_0 — предельная точка X

- $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ x \in X}} f(x) := \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X \cap \dot{U}_\delta^+(x_0)}} f(x)$
- $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ x \in X}} f(x) := \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X \cap \dot{U}_\delta^-(x_0)}} f(x)$

Теорема

$X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, x_0 — левая предельная точка X ($\forall \delta > 0 : X \cap \dot{U}_\delta^-(x_0) \neq \varnothing$), f — нестрого возрастает на X. Тогда:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ x \in X}} f(x) = \sup_{x \in X} f(x)$$

Аналогично для нестрого убывающей f и правостороннего предела с inf.

Доказательство:

Обозначим $M = \sup\limits_{x \in X} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Случай 1: $M \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in X : f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(M)$

Т.к. f нестрого возрастает, то $\forall x \geq x_\varepsilon$, $x \in X$, $x < x_0$:

$$f(x) \in U_\varepsilon(M)$$

Причём $f(x) \geq f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$

Если $x_0 \in \mathbb{R}$, то возьмём $\delta(\varepsilon) = x_0 - x_\varepsilon$
Тогда $\forall x \in X \cap \dot{U}^-_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$:

$$f(x) \in U_\varepsilon(M)$$

Случай 2: $M = +\infty$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in X : f(x_\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$
Т.к. f нестрого возрастает, то $\forall x \geq x_\varepsilon$, $x \in X$, $x < x_0$:

$$f(x) \geq f(x_\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$$

Если $x_0 \in \mathbb{R}$, то $\delta(\varepsilon) = x_0 - x_\varepsilon$
Если $x_0 = +\infty$, то $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{|x_0|+1}$
В обоих случаях $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$:
$\forall x \in X \cap \dot{U}^-_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(M)$
Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ x \in X}} f(x) = M$.