Билет № 9. Теорема о единственном частичном пределе.

$\forall$ $\{x_n\}$ числовая последовательность, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Следующие условия эквивалентны:

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

2) множество частичных пределов последовательности равно $\{A\}$

3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = A$

Доказательство:

1 $\Rightarrow$ 2 Пусть $\{x_{n_k}\}$ — произвольная подпоследовательность.

$\exists \lim x_n = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon$.

Тогда для $\{x_{n_k}\}$ $\exists K\colon \forall k \geq K \Rightarrow n_k \geq N$, и значит $|x_{n_k} - A| < \varepsilon$.

Следовательно, $x_{n_k} \to A$.

2 $\Rightarrow$ 3 Верхний предел = $\sup\{\text{ЧП}\} = A$. Нижний предел = $\inf\{\text{ЧП}\} = A$.

3 $\Rightarrow$ 1

Случай 1: $A \in \mathbb{R}$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \sup\limits_{n} \inf\limits_{k\geq n} x_k$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \inf\limits_{n} \sup\limits_{k\geq n} x_k$

$y_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k \in \mathbb{R}\ (\forall n \in \mathbb{N})$

$z_n = \inf\limits_{k\geq n} x_k \in \mathbb{R}\ (\forall n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow \{y_n\}$, $\{z_n\}$ - числовые последовательности, $\lim y_n = \lim z_n = A$.

$z_n \leq x_n \leq y_n$, по теореме о двух миллиционерах $\exists \lim x_n = A$.

Замечание: $z_n = \inf\limits_{k \geq n} x_k \in \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

z_n монотонно возрастает, т.к. при переходе от z_n к z_{n+1} мы удаляем элемент из множества, по которому берётся inf, что может только увеличить точную нижнюю грань.

Пример: $\{x_n\} = \{3, 1, 4, 1, 5, 9, \dots\}$

$$\begin{aligned}
z_1 &= \inf\{3, 1, 4, 1, 5, 9, \dots\} = 1 \\
z_2 &= \inf\{1, 4, 1, 5, 9, \dots\} = 1 \\
z_3 &= \inf\{4, 1, 5, 9, \dots\} = 1 \\
z_4 &= \inf\{1, 5, 9, \dots\} = 1 \\
z_5 &= \inf\{5, 9, \dots\} = 5 \\
z_6 &= \inf\{9, \dots\} = 9
\end{aligned}$$

Видно, что z_n не убывает: $1 \leq 1 \leq 1 \leq 1 \leq 5 \leq 9 \leq \dots$

Аналогично, $y_n = \sup\limits_{k \geq n} x_k \in \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ монотонно убывает, поскольку при переходе к следующему "хвосту"мы удаляем элемент, и супремум может только уменьшиться (или остаться прежним).

Случай 2: $A = +\infty$

$\varliminf\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty \Rightarrow \sup\limits_{n} z_n = +\infty$, где $z_n = \inf\limits_{k \geq n} x_k$

z_n монотонно возрастает $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\exists \lim z_n = +\infty$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$: $\forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow z_n > \frac{1}{\varepsilon}$

Вспоминаем, что $z_n = inf x_k : k >= n$ По определению инфимума: $x_k > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall k \geq n$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$: $\forall k \geq N(\varepsilon) \Rightarrow x_k > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \lim x_n = +\infty$.

Случай 3: $A = -\infty$ — аналогично.