Билет № 13. Предел функции по множеству. Верхний и нижний пределы.

Определения

Предельная точка: $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
x_0 — предельная точка E, если $\forall \delta > 0$: $\dot{U}_\delta(x_0) \cap E \neq \varnothing$.

Лемма: E — числовое множество, $E \neq \varnothing$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка.
Тогда $\exists \{x_n\} \subset E \setminus \{x_0\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.
Любую такую последовательность называем (Гейне) в x_0 для E.

Предел по множеству: $A \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, x_0 — предельная точка.
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in E}} f(x) = A$, если:

- **(Коши)** $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap E \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$
- **(Гейне)** $\forall \{x_n\} \subset E$ — (Гейне) в x_0: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Критерий Коши для предела по множеству

$\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in E}} f(x) \in \mathbb{R} \iff$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x', x'' \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap E \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Верхний и нижний пределы

$X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, x_0 — предельная точка X.
Определение:

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}}} f(x) = \inf_{\delta>0} \sup_{x\in \dot{U}_\delta(x_0)\cap X} f(x)$$
$$\underline{\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X}}} f(x) = \sup_{\delta>0} \inf_{x\in \dot{U}_\delta(x_0)\cap X} f(x)$$

Обозначим:

$$\overline{g}_{x_0}(\delta) = \sup_{x\in \dot{U}_\delta(x_0)\cap X} f(x)$$
$$\underline{g}_{x_0}(\delta) = \inf_{x\in \dot{U}_\delta(x_0)\cap X} f(x)$$

Лемма 1: Если $\delta_1 < \delta_2$, то:

$$\overline{g}_{x_0}(\delta_1) \leq \overline{g}_{x_0}(\delta_2)$$
$$\underline{g}_{x_0}(\delta_1) \geq \underline{g}_{x_0}(\delta_2)$$

Лемма 2: $\forall \delta^* > 0$:

$$\sup_{\delta>0} \underline{g}_{x_0}(\delta) = \sup_{0<\delta<\delta^*} \underline{g}_{x_0}(\delta)$$
$$\inf_{\delta>0} \overline{g}_{x_0}(\delta) = \inf_{0<\delta<\delta^*} \overline{g}_{x_0}(\delta)$$

Замечание: Если $E = E_1 \cup E_2$ и $\forall x_2 \in E_2$, $\forall x_1 \in E_1$: $x_2 \geq x_1$, то $\inf E = \inf E_1$, $\sup E = \sup E_2$

Доказательство: Для $\overline{g}_{x_0}(\delta)$.
Рассмотрим $\inf\limits_{0<\delta<\delta_1} \overline{g}_{x_0}(\delta)$ и $\inf\limits_{0<\delta<\delta_2} \overline{g}_{x_0}(\delta)$, где $0 < \delta_1 < \delta_2$.
Т.к. $\overline{g}_{x_0}(\delta)$ монотонно возрастает, то при увеличении δ добавляются большие значения, которые не влияют на инфимум.

Лемма 3: $\forall \delta^* > 0$:

$$\varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = \inf_{0<\delta<\delta^*} \overline{g}_{x_0}(\delta)$$
$$\varliminf_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = \sup_{0<\delta<\delta^*} \underline{g}_{x_0}(\delta)$$

Теорема

$f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, x_0 — предельная точка X.

1. $\varlimsup\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = \sup\left\{\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) : \{x_n\} \text{ — (Гейне) в } x_0\right\}$
2. $\varliminf\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = \inf\left\{\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) : \{x_n\} \text{ — (Гейне) в } x_0\right\}$

Доказательство (1): Обозначим $J = \sup\left\{\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n) : \{x_n\} \text{ — (Гейне)}\right\}$

() Покажем: $\varlimsup\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) \geq J$

Возьмем $\forall \delta > 0$ и произвольную (Гейне) $\{x_n\} \subset X$ в x_0. Тогда:

$$\overline{g}_{x_0}(\delta) = \sup_{x\in \dot{U}_\delta(x_0)\cap X} f(x) \geq \sup_{n\geq N(\delta)} f(x_n) \geq \varlimsup_{n\to\infty} f(x_n)$$

Т.к. $\{x_n\}$ — (Гейне), то $\exists N(\delta)$: $\forall n \geq N(\delta) \Rightarrow x_n \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap X$
Берём инфимум по $\delta > 0$:

$$\inf_{\delta>0} \overline{g}_{x_0}(\delta) \geq \varlimsup_{n\to\infty} f(x_n)$$

Левая часть не зависит от $\{x_n\}$. Берём sup по всем (Гейне):

$$\varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) \geq J$$

() Покажем: $\varlimsup\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) \leq J$

По Лемме 2: $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\inf_{0<\delta<\frac{1}{n}} \overline{g}_{x_0}(\delta) = \varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x) = A$$

По определению инфимума $\exists \delta_n \in (0, \frac{1}{n})$:

$$\overline{g}_{x_0}(\delta_n) \in U_{1/n}(A)$$

По определению супремума $\exists y_n \in \dot{U}_{\delta_n}(x_0) \cap X$:

$$f(y_n) \in U_{2/n}(A)$$

Построена (Гейне) $\{y_n\}$ в x_0, причём $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = A$. Следовательно:

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(y_n) = A \Rightarrow J \geq A = \varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x)$$

Значит, $J = \varlimsup\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} f(x)$.