Билет № 11. Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне, их эквивалентность.

(В этом билете: R с чертой нужно заменить на R с крышкой)

Определение. X - абстрактное множество. Отображение $f : X \to \mathbb{R}$ будем называть функцией.

Определение по Коши.

$\exists \delta_0 > 0,\ f : \dot{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R},\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}},\ A \in \overline{\mathbb{R}}$.
Будем говорить, что A - предел функции f в точке x_0 и записывать $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_0)$: $\forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Определение последовательности Гейне

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{x_n\}$ - последовательность Гейне в точке x_0, если:

1. $x_n \to x_0,\ n \to \infty$
2. $x_n \neq x_0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Определение предела по Гейне

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}},\ A \in \overline{\mathbb{R}},\ \delta_0 > 0,\ f : \dot{U}_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$.
Будем говорить, что A - предел функции f в точке x_0, если для любой последовательности Гейне $\{x_n\} \subset \dot{U}_{\delta_0}(x_0) \Rightarrow f(x_n) \to A,\ n \to \infty$.

Лемма. $E_1, E_2 \subset \mathbb{R},\ E_1, E_2 \neq \varnothing,\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ - предельная точка $E_1,\ E_2$.

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1 \cup E_2}} f(x) \iff \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1}} f(x),\ \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_2}} f(x)$$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1 \cup E_2}} f(x) = A$. По Коши:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Заметим: $\dot{U}_\delta(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) = (\dot{U}_\delta(x_0) \cap E_1) \cup (\dot{U}_\delta(x_0) \cap E_2)$ (*)

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap E_1 \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$,
и $\forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap E_2 \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Отсюда $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_1}} f(x) = A$, $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E_2}} f(x) = A$.

($\Leftarrow$) Пусть $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_1}} f(x) = A$, $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_2}} f(x) = A$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in \dot{U}_{\delta_1(\varepsilon)}(x_0) \cap E_1 \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in \dot{U}_{\delta_2(\varepsilon)}(x_0) \cap E_2 \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$

Положим $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\} > 0$.

Используя (*) получаем: $\forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap (E_1 \cup E_2) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Следовательно, $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_1\cup E_2}} f(x) = A$.

Эквивалентность определений по Коши и по Гейне

1) Коши $\Rightarrow$ Гейне

Пусть $\{x_n\} \subset \dot{U}_{\delta_0}(x_0)$ - произвольная последовательность Гейне в точке x_0.

По Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Т.к. $x_n \to x_0$, то $\forall \delta > 0\ \exists N(\delta) \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N(\delta) \Rightarrow x_n \in \dot{U}_\delta(x_0)$.

Применим к $\delta(\varepsilon)$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\delta(\varepsilon))$: $\forall n \geq N \Rightarrow x_n \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \Rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$.

Следовательно, $f(x_n) \to A$.

2) Гейне $\Rightarrow$ Коши

Предположим, что предел существует по Гейне, но не по Коши.

Отрицание условия Коши: $\exists \varepsilon > 0$: $\forall \delta > 0\ \exists x \in \dot{U}_\delta(x_0)$: $f(x) \notin U_\varepsilon(A)$.

Возьмем $\delta_n = \frac{\delta_0}{n}$. $\exists \varepsilon > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in \dot{U}_{\delta_n}(x_0)$: $f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$.

Получили последовательность Гейне $\{x_n\} \subset \dot{U}_{\delta_0}(x_0)$ в точке x_0, при этом $f(x_n) \not\to A$ - противоречие с определением по Гейне.