Билет № 19. Теорема об обратной функции

Лемма. $f : X \to Y$ обратима на X, когда f - инъекция и сюръекция.

Доказательство:

1) Пусть f - инъекция и сюръекция. Докажем, что она обратима. Рассмотрим $y \in Y$. Т.к. f - сюръекция, то существует $x \in X$: $f(x) = y$. Но т.к. f - инъекция, то этот x - единственен. Определим $f^{-1}(y) = x$.

2) Пусть f - обратима. Существует $f^{-1} : Y \to X \Rightarrow f$ - сюръекция. Для любого $y \in Y$: существует $x = f^{-1}(y)$. Тогда $f(f^{-1}(y)) = y$. Покажем, что f - инъекция. Возьмем $x_1, x_2 \in X$: $f(x_1) = f(x_2) = y \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = f^{-1}(y). \Rightarrow x_1 = x_2$.

Теорема. $X \subset \mathbb{R}$, X - непустое множество. f строго монотонна на X. Тогда существует f^{-1}, которая имеет тот же характер монотонности на $f(X) = Y$.

Доказательство: докажем для строго возрастающей, для строго убывающей аналогично. f - инъекция $\Rightarrow x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$. Т.к. Y - образ, то f - сюръекция на Y. Тогда из предыдущей леммы существует $f^{-1} : Y \to X$. Покажем, что обратная функция строго возрастает. Возьмем произвольные y_1, y_2: $y_1 < y_2$. $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$. $x_1 \neq x_2$, т.к. f^{-1} инъекция. Если предположить, что $x_1 > x_2$: $f(x_1) > f(x_2)$, $y_1 > y_2$. Противоречие. Значит, $x_1 < x_2$. $\Rightarrow f^{-1}$ строго возрастает на Y.

Теорема об обратной функции.

Пусть $f \in C([a, b])$ и строго монотонна на $[a, b]$. Тогда существует $f^{-1} \in C([m, M])$, где $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$, при этом f^{-1} имеет тот же характер строгой монотонности, что и f.

Доказательство. Из предыдущей теоремы получаем: существует $\min f$ на $[a, b]$, $\max f$ на $[a, b]$ и более того $f([a, b]) = [m, M]$ и существует обратная функция $f^{-1} : [m, M] \to [a, b]$ и имеет тот же характер строгой монотонности. Рассмотрим случай строгого возрастания f. $m = f(a)$, $M = f(b)$.

Докажем непрерывность f^{-1} для $\forall\ y_0 \in (m, M)$. Т.к. в концевых точках доказательство аналогично. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Без ограничения общности считаем, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a, b)$ (Мы всегда сможем найти такой ε, например, если $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|x_0 - a|, |x_0 - b|\}$).

В силу непрерывности и строгой монотонности f переведет $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ в какой-то отрезок $[f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)]$. Значит, y_0 лежит на интервале $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$. Тогда возьмем $\delta(\varepsilon)$ равный $\min\{|f(x_0 - \varepsilon) - y_0|, |f(x_0 + \varepsilon) - y_0|\}$. Тогда $\mathrm{U}_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \subset (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$. Тогда $f^{-1}(\mathrm{U}_{\delta(\varepsilon)}(y_0)) \subset (\mathrm{x}_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

Определение непрерывности функции в точке по Коши

Функция g непрерывна в точке y_0, если:

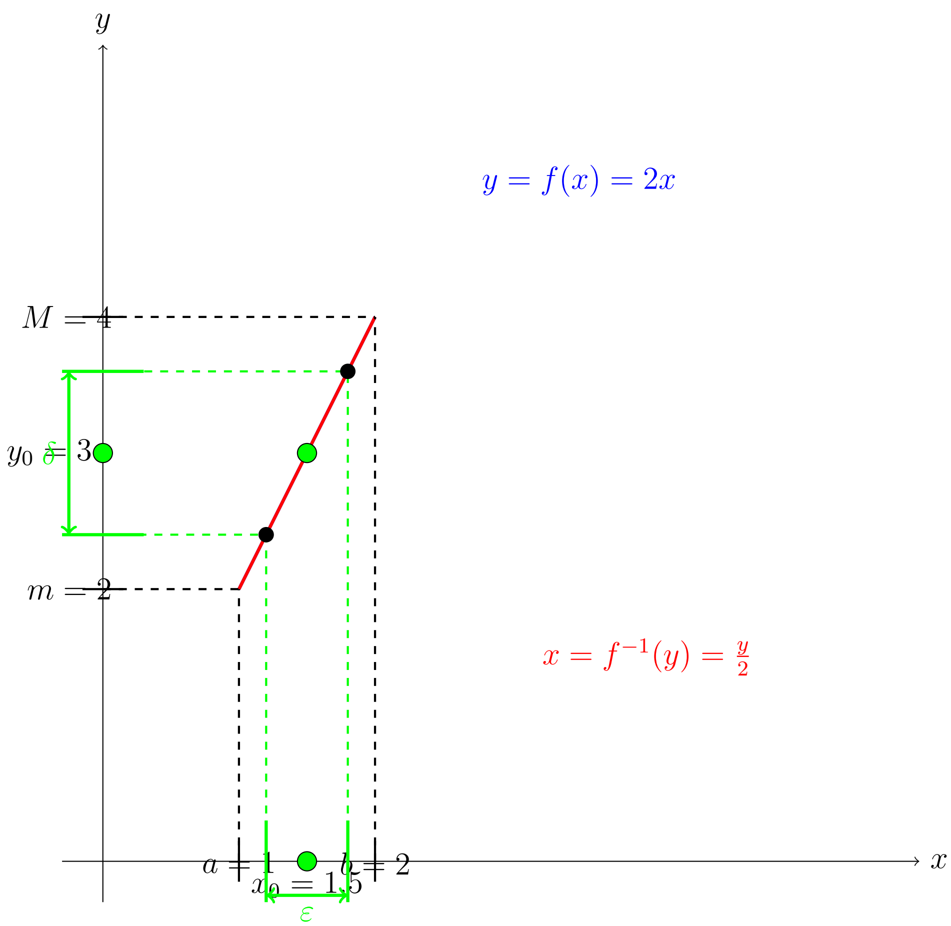
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall y \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

Имеем: f^{-1} и $f^{-1}(y_0) = x_0$, $\varepsilon > 0$ фиксировано, $\delta(\varepsilon) = \min\{|f(x_0 - \varepsilon) - y_0|, |f(x_0 + \varepsilon) - y_0|\}$:

$$\forall y \in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \Rightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow$ $\forall$ y $\in U_{\delta(\varepsilon)}(y_0)$ выполнено, что $f^{-1}(y)$ лежит в ε-окрестности точки x_0.

Значит, f^{-1} непрерывна в точке y_0. Но y_0 выбрана произвольно. Значит, f^{-1} непрерывна на (m, M).



Доказательство непрерывности в концевых точках:

Случай 1: Непрерывность f^{-1} в точке $y = m = f(a)$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим правую ε-окрестность точки a: $[a, a+\varepsilon] \subset [a, b]$.

В силу непрерывности и строгой монотонности f переведет $[a, a+\varepsilon]$ в отрезок $[m, f(a+\varepsilon)]$.

Возьмем $\delta(\varepsilon) = |f(a+\varepsilon) - m| = f(a+\varepsilon) - m > 0$.

Тогда $\forall y \in U_{\delta(\varepsilon)}(m) \cap [m, M]$ (т.е. $y \in [m, m+\delta(\varepsilon))$):

$f^{-1}(y) \in [a, a+\varepsilon) \subset U_\varepsilon(a)$.

Следовательно, f^{-1} непрерывна справа в точке m.

Случай 2: Непрерывность f^{-1} в точке $y = M = f(b)$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим левую ε-окрестность точки b: $[b-\varepsilon, b] \subset [a, b]$.

f переведет $[b-\varepsilon, b]$ в отрезок $[f(b-\varepsilon), M]$.

Возьмем $\delta(\varepsilon) = |M - f(b-\varepsilon)| = M - f(b-\varepsilon) > 0$.

Тогда $\forall y \in U_{\delta(\varepsilon)}(M) \cap [m, M]$ (т.е. $y \in (M-\delta(\varepsilon), M]$):

$f^{-1}(y) \in (b-\varepsilon, b] \subset U_\varepsilon(b)$.

Следовательно, f^{-1} непрерывна слева в точке M.

Итог: f^{-1} непрерывна на всем отрезке $[m, M]$:

- Непрерывна на (m, M) (доказано ранее)
- Непрерывна справа в m
- Непрерывна слева в M

Следовательно, $f^{-1} \in C([m, M])$.