Obligatorisk innlevering MAT1100

Av: Lisa Julianne Nystad, Sverre Johansen og Søren Tvingsholm

September 2020

Oppgave 1

a) Begrunn at merket du skal sette etter å ha gått videre fra den vestlige palmen, ligger i posisjon *-3zi*.

Vi finner vektoren mellom punktene z og *Origo* ved å ta
(z - Origo),
da står vi igjen med verdien z. Vi skal gå tre ganger denne lengden og ganger derfor uttrykket vi har med 3. For å snu 90 grader *med* klokken ganger vi uttrykket med *-i* og etter vi har gjort disse stegene står vi igjen med uttrykket *-3zi*.

b) Begrunn at merket du skal sette etter å ha gått videre fra den østligste palmen, ligger i posisjon *1+3i(z-1)*

Her bruker vi samme prinsipp som i oppgave a. Vi starter med å finne vektoren mellom z og *1* og da får vi:
z-1,
Siden vi skal gå 3 ganger lengden og snu oss 90 grader *3i* og da har vi *3i(z-1)*.
Siden vi skal gå fra punkt 1 til det nye punktet legger vi også til dette i formelen og får til slutt:
1+3i(z-1)

c) Finn det komplekse tallet som tilsvarer skattens posisjon. Forklar hvordan man kan gå for å komme til skatten uten å vite hvor galgen var.

For å finne et punkt mellom to punkter adderer vi uttrykket for punktene og ganger det hele med $\frac{1}{2}$. Da får vi:

$\frac{1}{2}$((-3iz)+(1+3i(z-1))) =$\underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}}}$, som er det komplekse uttrykket for skattens posisjon.

Man kan komme til skatten uten å vite hvor galgen er ved å bruke det komplekse tallet for skatten. Vi starter i origo og går halvparten av veien til punkt 1 mens vi teller skritt. Vi snur oss 90 grader med klokken(ganger med -i) og går tre ganger så langt som det vi gjorde ut fra origo akkurat.

Oppgave 2

a) I denne oppgaven tar vi i bruk mange av de samme reglene som i oppgave 1. For eksempel så er 2 punkter subtrahert med hverandre, vektoren mellom dem og vi får derfor $(z_{øst} - z_g)$. $z_{øst}$ er vektoren som går mellom $z_{øst}$ og $w_{øst}$ og med en positiv vinkel $e^{i\theta}$ sitter vi igjen med:

$w_{øst} = z_{øst} + e^{i\theta}(z_{øst} - z_g)$

b) Her har vi et lignende tilfelle, z_{vest} er vektoren mellom palmen og punktet du skal gå etter palmen, mens $(z_{vest} - z_g)$ er vektoren mellom galgen og palmen i vest. Det som gjør denne delen av oppgaven annerledes, og det som gjør at vi får skatten i riktig posisjon,

$Skatt = \frac{z_{øst}+z_{vest}}{2} + e^{i\theta}\frac{z_{øst}-z_{vest}}{2}$

er at vi snur 180° for å se tilbake på galgen før vi snur oss den positive vinkelen $e^{i\theta}$, noe som gir oss:

$180° = e^{i\pi}$
$e^{i(\theta+\pi)} = e^{i\theta} \cdot e^{i\pi} = e^{i\theta} \cdot (-1) = -e^{i\theta}$

og punktet w_{vest} kan nå uttrykkes som:

$w_{vest} = z_{vest} - e^{i\theta}(z_{vest} - z_g)$

Vi har nå de 2 punktene som skal føre til at vi finner skatten, vi kan dermed gjøre som tidligere og addere punktene og dividere med 2. Da får vi:

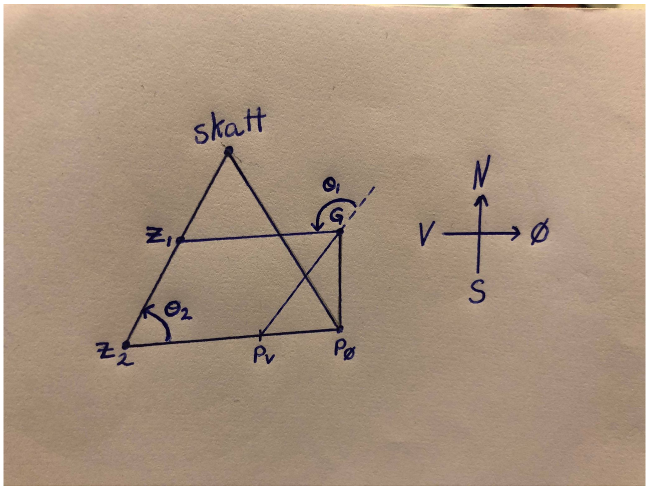
$$\frac{(z_{øst} + e^{i\theta}(z_{øst} - z_g)) + (z_{vest} - e^{i\theta}(z_{vest} - z_g))}{2}$$

$$\frac{z_{øst} + e^{i\theta} z_{øst} - e^{i\theta} z_g + z_{vest} - e^{i\theta} z_{vest} + e^{i\theta} z_g}{2}$$

$$\frac{z_{øst} + z_{vest}}{2} + e^{i\theta} \frac{z_{øst} - z_{vest}}{2}$$

som er posisjonen oppgitt i oppgaven.

Oppgave 3



Vi starter i østlige palme og teller skritt mens vi går til vestlige palme. Vi går fra vestlige palme til galgen, og med ryggen til vestlige palme snur vi θ_1 grader og går lengden vi gikk mellom palmene ganger to for å finne punktet z_1. Vi går tilbake til østlige palme og ser mot den vestlige palmen. Deretter går vi lengden mellom palmene $\frac{8}{3}$ ganger for å finne punktet z_2. For å finne skatten står vi i punktet z_2, snur oss 180 grader så vi ser mot palmene og snur i tillegg θ_2 grader mot punktet z_1. Vi går samme lengde i denne retningen som vi gjorde mellom punktet z_2 og den østlige palmen, og der er skatten.

a) Finn uttrykk for punktene z_1, z_2 og skatten.

b) Gitt at lengden mellom galgen og $P_ø$ er lik som lengden mellom palmene, vinkelen i $P_ø$ er 90 grader og at trekanten i punktene z_2, $P_ø$ og skatten er likesidet. Hva er vinklene θ_1 og θ_2?

c) Hvordan er det mulig å finne skatten uten å vite hvor galgen er?

Løsningsforslag: a) Vi starter med å finne lengden mellom $P_ø$ og P_v som er $P_v - Pø$. Vi starter fra galgen med ryggen mot østlige palme og snur oss θ_1 og ganger inn dette i uttrykket for å få: $e^{i\theta_1}$ (P_v-$P_ø$).
Siden vi skal gå fra punktet G og vi skal gå dobbelt av lengden mellom palmene plusser vi G inn i uttrykket vårt og ganger lengden vi skal gå med 2. Da har vi:$z_1 = G + e^{i\theta_1}*2*$($P_v$-$P_ø$).

For å finne z_2 går vi $\frac{8}{3}$ ganger lengden mellom palmene og får: $z_2 = \frac{8}{3}*(P_v - P_ø)$.
Siden vi starter i den østlige palmen må vi også legge til denne i uttrykket og står derfor igjen med:$z_2 = P_ø + \frac{8}{3} * (P_v - P_ø)$.

Skatten ligger samme lengde fra z_2 som $P_ø$, så vi kan holde på uttrykket $\frac{8}{3}(P_v$-$P_ø)$.
Vi snur oss 180 grader til å begynne med (ganger med (-1)) og deretter θ_2 mot klokken og står igjen med uttrykket:
$e^{i\theta_2}*\frac{8}{3}(P_ø$-$P_v)$.
Det eneste vi mangler er å addere punktet vi går fra og vi står dermed igjen med uttrykket
Skatten = z_2+$e^{i\theta_2}*\frac{8}{3}(P_ø$-$P_v)$.

b) Vi har blitt gitt at siden mellom P_v og $P_ø$, og mellom galgen og $P_ø$ er like store. Dermed er vinkelen θ_1 man skal snu seg i galgen 45 grader + 90 grader og vi får dermed 135 grader som i radianer vil være $\frac{3*\pi}{4}$. $\theta_1 = \frac{3*\pi}{4}$.
Siden trekanten er likesidet vil alle vinklene være 60 grader eller $\frac{\pi}{3}$ i radianer. Så; $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$.

c) Det er mulig å finne skatten uten å vite hvor galgen er ved å starte i $P_ø$, se mot P_v og gå lengden $\frac{8}{3}$ $(P_v - P_ø)$ for å komme til punktet z_2. Herfra snur man seg 180 grader rundt(ganger med (-1)), deretter $e^{i\frac{\pi}{3}}$(60 grader mot klokken) og går lengden $\frac{8}{3}(P_v - P_ø)$ for å finne skatten. Vi må også huske å plusse på punktet vi går fra i uttrykket vårt. Dermed er uttrykket vårt for skatten:
Skatt = z_2+$e^{i\frac{\pi}{3}}*\frac{8}{3}(P_ø$-$P_v)$.

Oppgave 4

La *P* være det komplekse polynomet gitt ved: P(x)=z^4+z^3+25z^2+25z.

a) Finn alle de komplekse røttene til *P*.
Vi prøver P(-1) og ser at dette blir 0. Dermed er -1 en rot i P.

Nå utfører vi polynomdivisjonen:
$(z^4 + z^3 + 25z^2 + 25z)$: (z+1)
og ut fra den får vi uttrykket (z^3+25z), eller $(z^2 + 25)z$.

Vi løser annengradslikningen $(z^2 + 25)$ og ender med to komplekse løsninger som også er de komplekse røttene:
5i og (-5i) vi står også igjen med en utestående z fra faktoriseringen av uttrykket (z^3+25z) og dermed er 0 også en rot. Siden vi startet med å finne at (-1) var en rot står vi nå igjen med de fire komplekse røttene:
z = 5i, z = (-5i), z = 0 og z = (-1).

b) Finn den komplekse faktoriseringen til *P*.
Vi fant det vi trengte i oppgave a og står igjen med en kompleks faktorisering som ser ut som dette:
$(z - (z - 5i))$ $(z - (z + 5i))$(z+1)z

c) Finn den reelle faktoriseringen til *P*.
Her har vi også gjort det vi trengte i oppgave a og står igjen med den reelle faktoriseringen:
(z+1)$(z^2 + 25)$z

Oppgave 5

a) Bevis at følgen $\{\mathbf{a}\}^{\infty}_{\mathbf{n=1}}$, gitt ved $\mathbf{a_1}$=1 og $\mathbf{a_{n+1}} = \mathbf{2} + \frac{3}{4}\ \mathbf{a_n}$ for n≥1 konvergerer, og finn ut hva den konvergerer mot.

Vi starter med å sjekke hvilket tall følgen konvergerer mot **hvis** den konvergerer, ved å bytte ut både a_n og a_{n+1} med L. Vi får da:

L $= 2 + \frac{3}{4}L$,
Vi ganger uttrykket med 4 og setter alle L på en side. Da står vi igjen med:
L $= 8$,
Dette betyr at hvis følgen konvergerer vil den konvergere mot 8.

Neste steg er å vise at følgen er oppad begrenset av tallet 8, altså at $a_n \leq 8$ for alle n$\leq$1. Vi bruker induksjon:

Vi har $a_1 = 1 \leq 8$, så dette er i orden.
Vi antar at $a_n \leq 8$, da er:
$a_{n+1} = 2 + \frac{3}{4}a_n \leq 2 + \frac{3}{4}8 = 2 + 6 = \underline{\underline{8}}$

Vi viser at følgen er voksende, altså at $a_{n+1} \geq a_n$ for alle n$\geq$1, og får da:

$a_{n+1} = 2 + \frac{3}{4}a_n = 2 * (8) + \frac{3}{4}a_n \geq 2(a_n) + \frac{3}{4}a_n$

$= \frac{11}{4}a_n \geq a_n$,

Dermed har vi vist at følgen er voksende.

Siden vi har vist at følgen er voksende og oppad begrenset, kan vi ved kompletthetsprinsippet si at følgen konvergerer. Herved er det vist at følgen konvergerer mot 8.