Sistemas de Procesamiento de Datos – Unidad 5

- Números enteros y fraccionarios signados
- ALU
- Números reales
- Notación de punto fijo y punto Flotante

Profesor: Fabio Bruschetti
Ayudante: Pedro Iriso

Números enteros SIN signo

- Los n bits son usados para la magnitud del número. No hay bit de signo.
  - Ejemplo: Número de 4-bits: 0000_b 1111_b, es decir, desde 0_d hasta 15_d
- Ejemplos
  - $11_b = 3_d = +3_d$
  - $1001_b = 9_d = +9_d$
  - Recordamos el rango de representación para n bits

$$\{0;2^n-1\}$$

Números enteros CON signo

- Convenios
  - Signo y Magnitud
  - Complemento a 1
  - Complemento a 2
- Se desplaza la recta de representación
  - Exceso 2^{n-1}

Convenio de Signo y Magnitud (SyM)

- Necesito usar 1 bit para el signo
- El bit más significativo será el del signo
  - 0 = positivo
  - 1 = negativo
- Los restantes bits codifican la magnitud
- ¿Cuál es la ventaja? → Tengo signo! → 1 bit
- ¿Cuál es la desventaja? → Perdí un dígito para la magnitud… El rango de representación cambiará. Tengo n-1 bits para la magnitud

Convenio de Signo y Magnitud (SyM)

- Ejemplos
  - $+12_d = \mathbf{0}0001100_b$
  - $-1_d \quad = \mathbf{1}0000001_b$
- Problema: no sirve para las matemáticas

```
          0000 1100b      +12
  +       1000 0001b      + -1
          ---------------  ------
          1000 1101b       -13
```

C	B	A	#
0	0	0	+0
0	0	1	+1
0	1	0	+2
0	1	1	+3
1	0	0	-0
1	0	1	-1
1	1	0	-2
1	1	1	-3

NO SIRVE PARA HACER CUENTAS

Convenio de Signo y Magnitud (SyM)

- Rango de representación
  - Con n bits se pueden representar 2^n combinaciones posibles
  - Al perder 1 bit por el signo, la mitad de los valores posibles serán número negativos y la otra mitad positivos
  - 2^{n-1} valores positivos y 2^{n-1} negativos
  - En este caso habrá un +0 y un –0 que duplican el valor de dos combinaciones distintas de bits
  - Rango de representación para n bits

$$\{-(2^{(n-1)}-1);+(2^{(n-1)}-1)\}$$

C	B	A	#
0	0	0	+0
0	0	1	+1
0	1	0	+2
0	1	1	+3
1	0	0	-0
1	0	1	-1
1	1	0	-2
1	1	1	-3

Convenio de complemento a 1 (Ca1)

- Números positivos = Igual que el convenio de SyM
- Números negativos = Se representan con el Complemento a 1 (Ca1) de su correspondiente número binario positivo
- Complemento a 1 de un bit o “flipp”
  - Ca1 de 1 → 0
  - Ca1 de 0 → 1
- Ca1 de una variable A se pude decir el “Complemento” de A

Convenio de complemento a 1 (Ca1)

- Complemento a 1 de n-bits:
  - Complemento de cada bit por separado
- Ejemplo
  - $+12_d = \mathbf{0}0001100_b$
  - $-1_d \quad = \text{Ca1 de } (+1) \rightarrow +1 = \mathbf{0}0000001_b$
  - $\text{Ca1} = \mathbf{1}1111110_b = -1_d$
- Problema: no sirve para las matemáticas

$$
\begin{array}{lll}
 & 11111110_b & -1_d \\
+ & \underline{11111110}_b & + \underline{-1}_d \\
 & 11111100_b & -3_d \\
\text{Ca1} & 00000011_b \rightarrow & +3_d \rightarrow \text{Resultado}=-3
\end{array}
$$

NO SIRVE PARA HACER CUENTAS

Convenio de complemento a 1 (Ca1)

- Rango de representación
  - En este caso también tenemos dos combinaciones binarias que valen +0 y –0 que indican el mismo valor
  - Rango de representación para n bits

$$\{-(2^{(n-1)}-1);+(2^{(n-1)}-1)\}$$

C	B	A	#
0	0	0	+0
0	0	1	+1
0	1	0	+2
0	1	1	+3
1	0	0	-3
1	0	1	-2
1	1	0	-1
1	1	1	-0

Convenio de complemento a 2 (Ca2)

- Números positivos = Igual que el convenio de SyM
- Números negativos = Se representan con el Complemento a 2 de su correspondiente positivo
- La magnitud de los números negativos se codifica como “flip & add” (“dar vuelta y sumar”)
- Complemento a 2 de n-bits:
  - Complemento a 1 de los n-bits y luego…
  - Se suma 1 al bit menos significativo
- Ejemplo
  - $+12_d = \mathbf{0}0001100_b$
  - $-1_d = \text{Ca2 de } (+1) \rightarrow +1 = \mathbf{0}0000001_b$

$$
\begin{array}{rr}
\text{Ca1} = & \mathbf{1}1111110_b \\
+ & \underline{1_b} \\
\text{Ca2} = & \mathbf{1}1111111_b = -1_d
\end{array}
$$

Convenio de complemento a 2 (Ca2)

- Hay una cuestión con el 100_b (ejemplo de 3 bits)
- Es un número negativo (empieza con 1)
- ¿Cuál es su valor decimal? ¿d?
- Hago el complemento a 2
  - Nro = 100_b
  - Ca1 = 011_b
  - Sumo 1 + $\underline{\quad 1_b}$
  - 100_b (¿Da de nuevo negativo?)

C	B	A	#
0	0	0	+0
0	0	1	+1
0	1	0	+2
0	1	1	+3
1	0	0	?
1	0	1	-3
1	1	0	-2
1	1	1	-1

→

C	B	A	#
0	0	0	+0
0	0	1	+1
0	1	0	+2
0	1	1	+3
1	0	0	-4
1	0	1	-3
1	1	0	-2
1	1	1	-1

- Se resuelve así: Al convertir un número de positivo a negativo, el valor será el que resulte de la magnitud de todos los bits como si no tuviese signo
- En el ejemplo 100_b es negativo y su Ca2 da 100_b que es 4_d entonces→ 100_b es -4_d

Convenio de complemento a 2 (Ca2)

- Veamos:

$$\begin{array}{rr} & 110_b \\ + & \underline{110_b} \\ & 100_b \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & -2_d \\ + & \underline{-2_d} \\ & -4_d \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 010_b \\ + & \underline{111_b} \\ & 001_b \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & +2_d \\ + & \underline{-1_d} \\ & +1_d \end{array}$$

SIRVE PARA HACER CUENTAS

No se tiene en cuenta el accarreo o carry!

Convenio de complemento a 2 (Ca2)

- Rango de representación
  - Rango de representación para n bits

$$\{-(2^{(n-1)});+(2^{(n-1)}-1)\}$$

  - Ya no vemos el "-1" en la parte negativa

C	B	A	#
0	0	0	+0
0	0	1	+1
0	1	0	+2
0	1	1	+3
1	0	0	-4
1	0	1	-3
1	1	0	-2
1	1	1	-1

Convenio de complemento a 2 (Ca2)

- Ejemplo:
  - Representación de –1 en complemento a 2 con 8 bits.

$+1_d$	$0000\ 0001_b$
Ca1	$1111\ 1110_b$
Sumar 1	$+\quad 1_b$
-1_d	$1111\ 1111_b$ = FF_h

Operación de complemento a 2

  - Representación de 1 en complemento a 2 con 8 bits
    - $+1_d$ $0000\ 0001_b = 01_h$

  - Valor decimal del valor FE_h en complemento a 2

FE_h	$1111\ 1110_b$ (Bit de signo = 1)
Ca1	$0000\ 0001_b$
Sumar 1	$+\quad 1_b$
Ca2	$0000\ 0010_b$ = (bit de signo) 2_d = -2_d

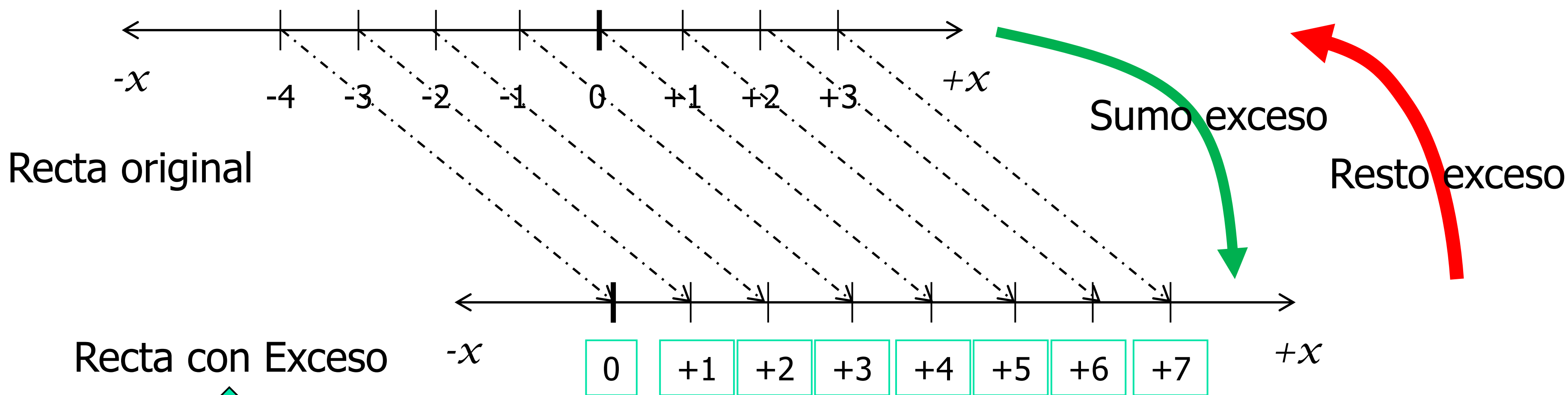
Convenio de complemento a 2 (Ca2)

- Ejemplo:
  - Encuentre el valor decimal del valor 79h en complemento a 2
    - Bit de signo = 0 $0111\ 1001_b = 64+32+16+8+1 = 121_d$
    - $79_h = +121_d$

- Ejercicios:
  - Encuentre el valor decimal del valor 90_h en complemento a 2
  - Encuentre el valor decimal del valor $8D_h$ en complemento a 2
  - Encuentre el valor decimal del valor $6F_h$ en complemento a 2

Convenio de Exceso 2^{n-1}

- Convenio de Exceso 2^{n-1}
  - Se desplaza la recta de representación en 2^{n-1}, sumándole ese valor a cada punto a representar.
  - Ejemplo n = 3 → $2^{n-1} = 2^{3-1} = 2^2 = 4$ → Se sumará 4 a cada punto



Todos los números son positivos!!

-4 + 4 = 0

-3 + 4 = +1

-2 + 4 = +2

-1 + 4 = +3

+1 + 4 = +5

0 + 4 = +4

+2 + 4 = +6

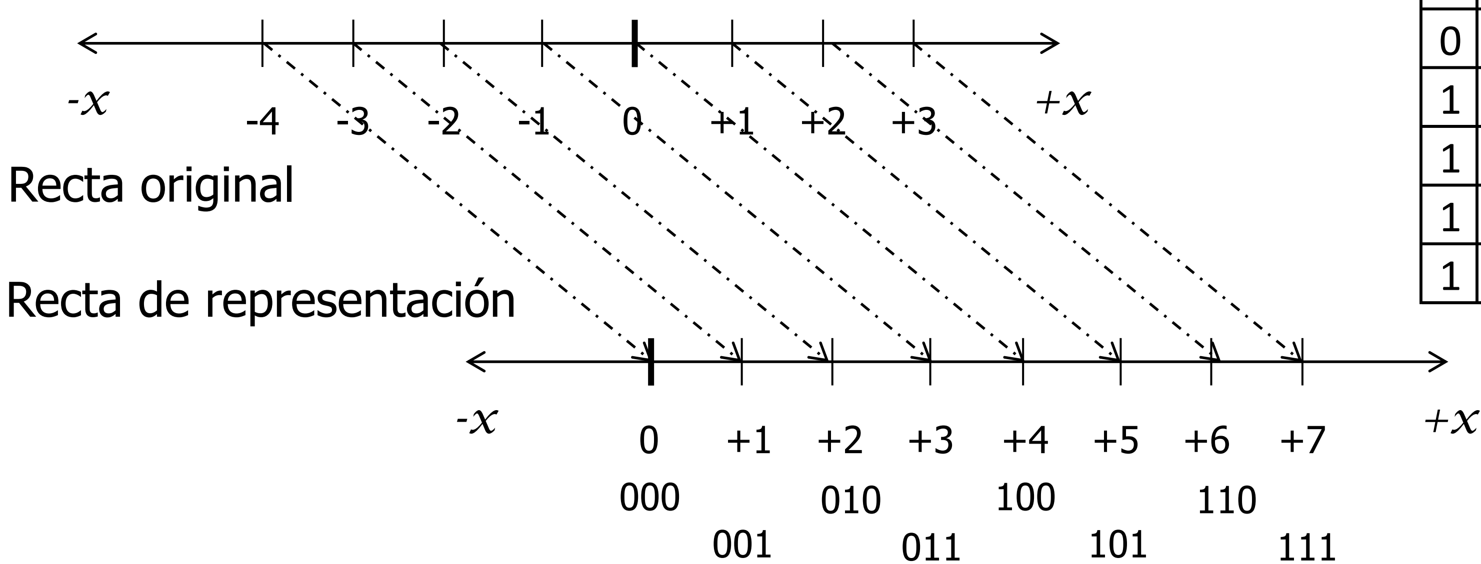
+3 + 4 = +7

Convenio de Exceso 2^{n-1}

- Rango de representación
  - Para 3 bits va del -4…0…+3
  - Rango para n bits: $-2^{(n-1)}$ … 0 … $2^{(n-1)}-1$

Todos enteros positivos

C	B	A	#
0	0	0	-4
0	0	1	-3
0	1	0	-2
0	1	1	-1
1	0	0	+0
1	0	1	+1
1	1	0	+2
1	1	1	+3



Convenio de Exceso 2^{n-1}

- Veamos:

$$
\begin{array}{rrcr}
 & 010_b & & -2_d \\
+ & \underline{010}_b & + & \underline{-2}_d \\
 & 100_b & & +0_d
\end{array}
$$

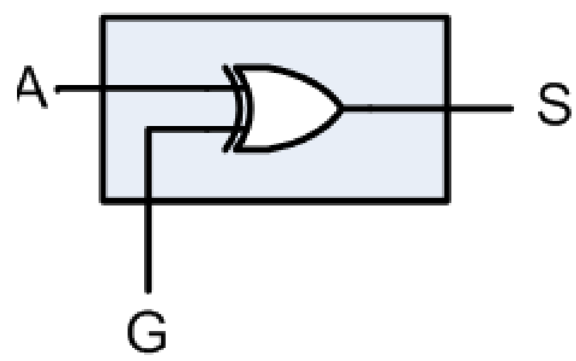
C	B	A	#
0	0	0	-4
0	0	1	-3
0	1	0	-2
0	1	1	-1
1	0	0	+0
1	0	1	+1
1	1	0	+2
1	1	1	+3

NO SIRVE PARA
HACER CUENTAS

Implementación de la codificación Ca1

- Recordemos la compuerta “o” exclusiva

G	A	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

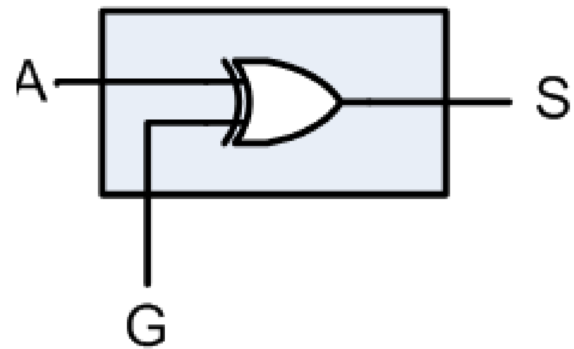


Implementación de la codificación Ca1

- Voy a reacomodar la tabla de verdad

G	A	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

G	S
0	A
1	$\overline{A}$



- Si la señal "G" es 0, S=A
- Si la señal "G" es 1, S=$\overline{A}$, o también !A

- Es un negador controlado por la señal "G"!!! → Si le sumamos un sumador, ¿podremos hacer un complementador a 2?

Conceptos para Programador

- Representación Números Enteros (Resumen)
  - Módulo y Signo ($-2^{n-1} + 1 <= X <= 2^{n-1} – 1$)
    - Por ejemplo, representar los números 10 y –10 con 8 bits.
      - 0 (+) 0 0 0 1 0 1 0 representa al número 10,
      - 1 (-) 0 0 0 1 0 1 0 representa al número –10.
  - Complemento a 1 ($-2^{n-1} + 1 <= X <= 2^{n-1} – 1$)
    - Por ejemplo, representar los números 10 y –10 con 8 bits.
      - 0 (+) 0 0 0 1 0 1 0 representa al número 10,
      - 1 (-) 1 1 1 0 1 0 1 representa al número –10.
  - Complemento a 2 ($-2^{n-1} <= X <= 2^{n-1} – 1$) [Representación única del 0]
    - Por ejemplo, representar los números 10 y –10 con 8 bits.
      - 0 (+) 0 0 0 1 0 1 0 representa al número 10,
      - 1 (-) 1 1 1 0 1 1 0 representa al número –10.
  - Exceso a 2^{n-1} ($-2^{n-1} <= X <= 2^{n-1} – 1$) [Representación única del 0]
    - Por ejemplo, representar los números 10 y –10 con 8 bits.
      - 1 0 0 0 1 0 1 0 representa al número 10,
      - 0 1 1 1 0 1 1 0 representa al número –10.
    - Se codifican sumando el exceso al número, para n=8, el exceso es de 128 :
      - 10 = 128 + 10 = 138
      - -10 = 128 - 10 = 118

Conceptos para Programador

- Importante
  - Valores binarios de longitud fija son utilizados para representar la información en computadores
  - El computador trabaja con la representación binaria (no con la información)
  - El mismo valor binario puede ser usado para representar información diferente
- Ejemplo 8-bits: 11110000_b
  - Sin Signo (unsigned) 240_d
  - Con Signo (signed) -16_d
  - ASCII de 8 bits "="
  - Otro ??

Aritmética y Lógica

- Concepto de Overflow
  - Es el resultado de una operación fuera de rango que puede ser representado:
    - Se produce debido al rango limitado de una representación de tamaño fijo
    - Se genera un resultado, pero es sin sentido.
      - 255_d = $1111\ 1111_b$
      - $\underline{+\ \ 1_d}$ = $\underline{0000\ 0001_b}$
      - 256_d = (1) $0000\ 0000_b$ → Pero esto es 0_d!!
    - En este caso se necesitan 9 bits para representar el resultado
    - Hemos sumado dos cifras binarias enteras sin signo
  - Con un ancho fijo de 8-bits: Se produce OVERFLOW
      - CF = 1 (CF → En 0 = "NC", en 1 = "CY" para el DEBUG)
  - En el caso de estar con números <u>sin signo</u>, el Carry es fundamental para la interpretación del resultado. Si hay Carry, hay overflow
      - CF = 1

Aritmética y Lógica

- Concepto de Overflow
  - Suma de números <u>con signo</u>:
    - $-1_d \quad = \quad 1111\ 1111_b$
    - $\underline{+\ \ 1_d} \quad = \quad \underline{0000\ 0001}_b$
    - $0_d \quad = \quad (1)\ 0000\ 0000_b$
    - El resultado es correcto (-1 + 1 = 0), sin embargo vemos que hay Carry pero no hay overflow!
      - OF=0 CF=1
    - En el caso de estar con números con signos, el Carry en el bit más significativo, no es importante para la interpretación del resultado.
- Overflow:
  - Carry Flag (CF) para números sin signo
    - CF → En 0 = “NC”, en 1 = “CY” para el DEBUG
  - Overflow Flag (OF) para números con signo
    - OF → En 0 = “NV”, en 1 = “OV” para el DEBUG

Aritmética y Lógica

- Concepto de Overflow
  - $32_d = 0010\ 0000_b$
  - $-\ 65_d = 0100\ 0001_b$
  - $-\ 33_d = (1)1101\ 1111_b$ (223 sin signo)
- La resta de valores sin signo, "pedir prestado" para realizar la resta implica la existencia de un overflow. El resultado es erróneo.
- Si los valores son tomados con signo, no hay overflow; se ignora el "pedir prestado" y el resultado es correcto.
- Si el resultado de una operación arroja un número con el bit más significativo en 1, el SF=1 indicando que es negativo. En caso contrario dará SF=0.
- **En este ejemplo: CF = 1, OF = 0, SF=1**
  - SF → En 0 = "PL", en 1 = "NG" para el DEBUG

Aritmética y Lógica

- Concepto de Overflow
  - Otro ejemplo

	Sin signo	Con signo
$0111\ 1111_b$	127_d	127_d
$0000\ 0001_b$	$+\ 1_d$	$+\ 1_d$
$1000\ 0000_b$	128_d	$-\ 128_d$
	CORRECTO	**INCORRECTO**

- Hay overflow aún cuando no hay Carry y el resultado es negativo
  - **CF=0, OF=1, SF=1**

Aritmética y Lógica

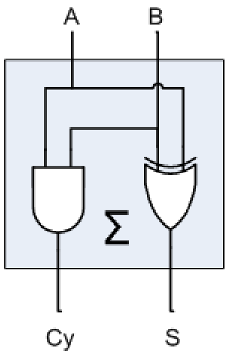
- Concepto de Overflow (Resumen)
  - Sin Signo:
    - Carry o Borrow (pedir prestado) implican Overflow

  - Con Signo:
    - Se ignoran el Carry o Borrow
    - OverFlow **SIEMPRE!**:
      - Positivo + Positivo = Negativo
        - (positivo – negativo = negativo)
      - Negativo + Negativo = Positivo
        - (negativo – positivo = positivo)
    - OverFlow **NUNCA!**:
      - Positivo + negativo (positivo – positivo)
      - Negativo + positivo (negativo – negativo)

ALU (Unidad Aritmético Lógica)

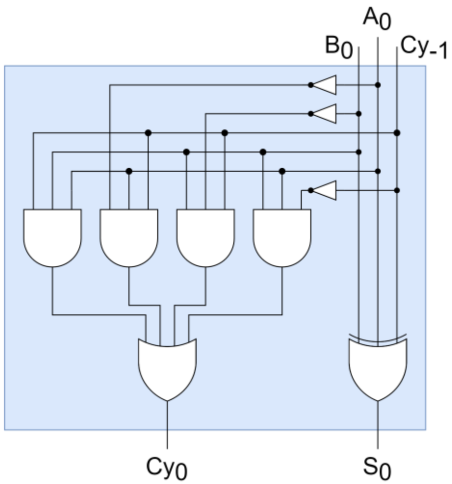
- Sumador aritmético
  - $S = A \oplus B$
  - $Cy = A.B$

A	B	S	Cy
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



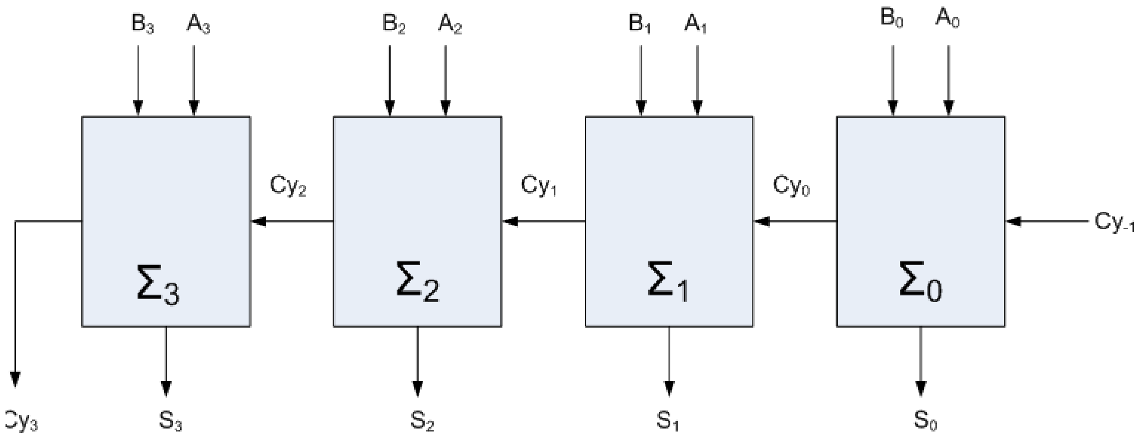
- Sumador completo
  - $S_0 = A \oplus B \oplus Cy_{-1}$
  - $Cy_0 = A.B + Cy_{-1}.A + Cy_{-1}.B$

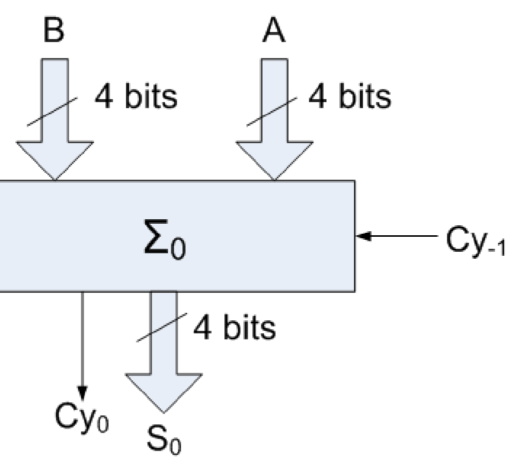
Cy_{-1}	A_0	B_0	S_0	Cy_0
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



ALU (Unidad Aritmético Lógica)

- Sumador de 4 bits





ALU (Unidad Aritmético Lógica)

- Aritmética sin signo
  - 117_{10} = $0111\ 0101_b$
  - $+\ 99_{10}$ = $0110\ 0011_b$

  - 216_{10} = $1101\ 1000_b$
- Aritmética con signo
  - -117_{10} = $1000\ 1011_b$
  - $+\ 99_{10}$ = $0110\ 0011_b$

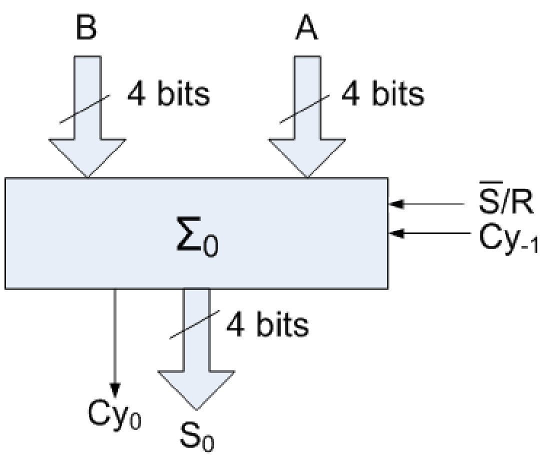
  - -18_{10} = $1110\ 1110_b$ $(0001\ 0001 + 1) = 12_h = 18_d$

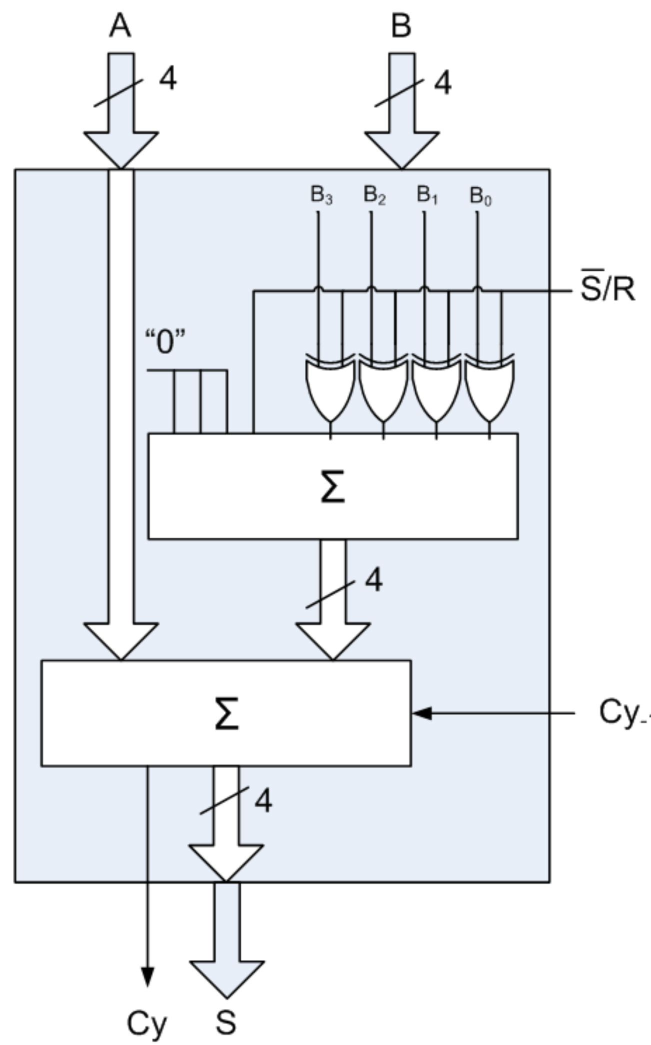
ALU (Unidad Aritmético Lógica)

- Restas en binario
  - A-B = A+(-B) = A+Ca2(B) = A+Ca2(B)+1
  - Restar B de A es equivalente a sumarle a A el complemento a 2 de B, y el complemento a 2 de B es el complemento a 1 de B más 1
  - La resta la podemos implementar con dos sumadores y un complementador a 1
  - Ejemplo: 32 –65 = 32 + (-65)
    - 32_{10}= 0010 0000_b
    - + -65_{10}= 1011 1111_b (0100 00002 +1 = 41_h = 65_d)
    - -33_{10}= 1101 1111_b (0010 00002 +1 = 21_h = 33_d)

ALU (Unidad Aritmético Lógica)

- Sumador/restador de 4 bits





Aritmética y Lógica

- Multiplicación binaria
  - Procedimiento de resolución del cálculo de forma idéntica al de la multiplicación decimal

```
     1101  ← Multiplicando
   x  101  ← Multiplicador
   ------
     1101
 +   0000
   1101
 -------
  1000001
```

  - Por cada cifra del multiplicador, me desplazo en la suma final
  - Por cada 1 del multiplicador, repito el multiplicando en la suma final
  - La multiplicación es una **<u>sucesión de sumas y desplazamientos</u>**
  - Multiplicar 2 cifras binarias de n bits darán como resultado otra cifra binaria de 2.n bits! (1111_b x 1111_b = 11100001_b)

Aritmética y Lógica

- División binaria
  - Procedimiento de resolución del cálculo de forma idéntica al de la división decimal

```
Dividendo ──→ 11011 | 101  ←── Divisor
              101    -----
              ---     101
              0011           Cociente
               101
              ----
              00111
                101
                ---
                 10  ←── Resto
```

```
11011
  101
-----
10110
  101
-----
10001
  101
-----
 1100
  101
-----
  111
  101
-----
   10
```

Resté el divisor 5 veces →Cociente

Me sobró 2 → Resto

- Ejemplo: 27 / 5 = 5 con resto 2
- ¿Cómo se implementa esto?
- Se implementa como **<u>una sucesión de restas y desplazamientos</u>**

Números Reales

`---,` $_d$	`--,-` $_d$	`-,--` $_d$	`,---` $_d$
`000,` $_d$	`00,0` $_d$	`0,00` $_d$	`,000` $_d$
1	1/10=0,1	1/100=0,01	1/1000=0,001
`001,` $_d$	`00,1` $_d$	`0,01` $_d$	`,001` $_d$
1	1/10=0,1	1/100=0,01	1/1000=0,001
`002,` $_d$	`00,2` $_d$	`0,02` $_d$	`,002` $_d$
…	…	…	…
…	…	…	…
`999,` $_d$	`99,9` $_d$	`9,99` $_d$	`,999` $_d$
{0 a 999}	**{0 a 99,9}**	**{0 a 9,99}**	**{0 a 0,999}**
De a 1	**De a 0,1**	**De a 0,01**	**De a 0,001**
π → 003	**03,1**	$\boxed{\textbf{3,14}}$	**,XXX**

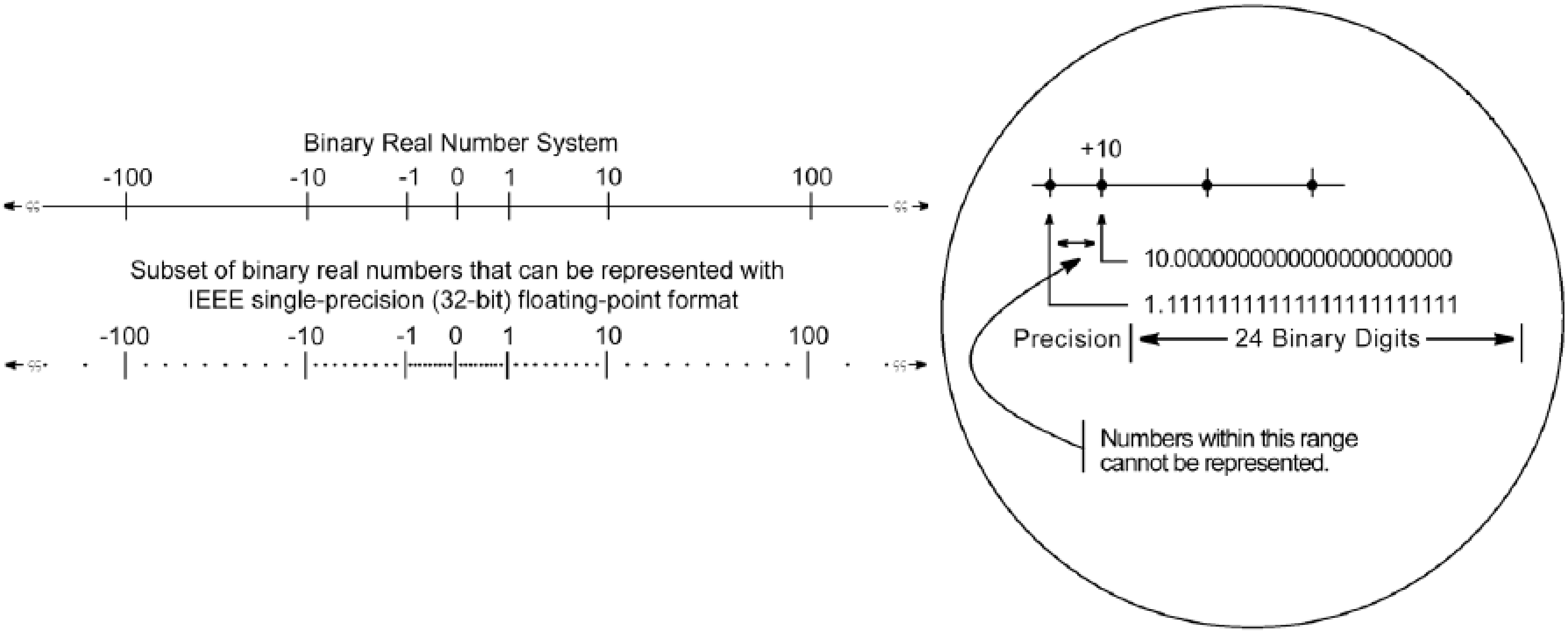
{RANGO DE REPRESENTACIÓN}
DISTANCIA O PRECISIÓN

A mayor rango de representación, menor precisión (o viceversa)

Con una cantidad fija de dígitos → Rango de representación vs. Precisión

Números Reales

- El rango de los números reales comprende desde -∞ hasta +∞.
- Los registros de un procesador tienen resolución finita.
- Por lo tanto un computador solo puede representar un subconjunto de R . (No es solo un tema de magnitud sino de resolución)



Números Reales

- En general se puede formalizar la representación de un número real expresado en los siguientes formatos:
  - Punto fijo SIN sigo
  - Punto fijo CON signo
    - Con Complemento a 2 (usaremos este esquema solamente)
  - Punto Flotante
- Punto Fijo con signo
  - Se representan mediante una expresión del tipo
    - $(a_n a_{n-1} \,..a_0 \,.\, a_{-1} a_{-2} \,..a_{-m})_2 = (-1)^s \,(a_n 2^n + .. + a_0 2^0 + a_{-1} 2^{-1} + a_{-2} 2^{-2} + .. + a_{-m}\, 2^{-m})$
    - *Donde: s=0 si el número es positivo o =1 si el número es negativo*
    - *ai es un entero y* $0 \leq a_i \leq 1$*, para todo* $i = -m, \ldots -1, 0, 1, \ldots n$
  - Distancia entre dos números consecutivos es 2^{-m}
  - Deja de ser un rango continuo de números y pasa a ser un rango discreto.

Números Reales

m = cantidad de dígitos fraccionarios. Distancia = 2^{-m}

m = 0 Distancia $2^{-0} = 1$		m = 1 Distancia $2^{-1} = 0{,}5$		m = 2 Distancia $2^{-2} = 0{,}25$		m = 3 Distancia $2^{-3} = 0{,}125$	
$---,_b$		$--,-_b$		$-,--_b$		$,---_b$	
$000,_b$	1	$00,0_b$	1/2=0,5	$0,00_b$	1/4=0,25	$,000_b$	1/8=0,125
$001,_b$	1	$00,1_b$	1/2=0,5	$0,01_b$	1/4=0,25	$,001_b$	1/8=0,125
$010,_b$		$01,0_b$		$0,10_b$		$,010_b$	
$011,_b$		$01,1_b$		$0,11_b$		,011b	
…		…		…		…	
$111,_b$		$11,1_b$		$1,11_b$		$,111_b$	
{0 a 7} **De a 1**		**{0 a 3,5}** **De a 0,5**		**{0 a 1,75}** **De a 0,25**		**{0 a 0,875}** **De a 0,125**	

Números Reales

- Punto Fijo con notación complemento a 2
  - El problema del punto fijo con signo consiste en representar los números negativos
  - La solución: el mismo criterio utilizado con los enteros, el complemento a 2.
  - Para representar el número –N en punto fijo con notación complemento a 2 se hace 2^n – N.
- Como convertir un número decimal fraccionario a binario:
  - 0,828125 * 2 = 1,65625
  - 0,65625 * 2 = 1,3125
  - 0,3125 * 2 = 0,625
  - 0,625 * 2 = 1,25
  - 0,25 * 2 = 0,5
  - 0,5 * 2 = 1   0,828125 = 0,110101

Números Reales

- Pasar a binario $29,5625_d$

1. Parte entera a binario → 29_d = **11101**$_b$
2. Parte fraccionaria a binario → 0,5625d = ?
   - 0,5625 * 2 = **1**,1250 → 0,**1**...$_b$
   - **0**,125 * 2 = **0**,25 → 0,1**0**... $_b$
   - **0**,25 * 2 = **0**,5 → 0,10**0**... $_b$
   - **0**,5 * 2 = **1**,0 → 0,100**1**... $_b$
   - **0** * 2 = **0**,0 → 0,1001**0**... $_b$
   - **0** * 2 = **0**,0 → 0,10010**0**... $_b$

   Parte fraccionaria a binario → $0,5625_d$ = **0,1001**$_b$
3. Unimos → $29,5625_d$ = 11101,1001$_b$

Números Reales

- Pasar a binario $-29{,}5625_d$

1. Parte entera a binario → 29_d = **011101**$_b$
2. Parte fraccionaria a binario → $0{,}5625_d$ = **0,1001**$_b$
3. Unimos → $29{,}5625_d$ = 011101,1001$_b$
4. Hacemos el Ca2 de 011101,1001$_b$
   - $011101{,}1001_b$
   - Ca1 $100010{,}0110_b$
   - $+\ \ 1_b$
   - $100010{,}0111_b$

- Pasar a binario $-29{,}5625_d$ = $100010{,}0111_b$

Números Reales

- Pasar a binario $12{,}2_d$

1. Parte entera a binario → 12_d = **1100**$_b$
2. Parte fraccionaria a binario → 0,2 = ?
   - 0,2 * 2 = **0**,4 → 0,**0**...$_b$
   - **0**,4 * 2 = **0**,8 → 0,0**0**... $_b$
   - **0**,8 * 2 = **1**,6 → 0,00**1**... $_b$
   - **0**,6 * 2 = **1**,2 → 0,001**1**... $_b$
   - **0**,2 * 2 = **0**,4 → 0, 0011**0**... $_b$ → Empieza de nuevo...
   - **0**,4 * 2 = **0**,8 → 0, 00110**0**... $_b$
   - **0**,8 * 2 = **1**,6 → 0, 001100**1**... $_b$
   - **0**,6 * 2 = **1**,2 → 0, 0011001**1**... $_b$

   Parte fraccionaria a binario → 0,00110011...$_d$ = $\mathbf{0{,}\overset{\frown}{0011}}_b$ periódico!
3. Unimos → $12{,}2_d = 1100{,}\overset{\frown}{0011}_b$

ALU con binarios SIN signo

	0010		2		001,0		1,0		00,10		0,50
+	1011	+	11	+	101,1	+	5,5	+	10,11	+	2,75
	1101		13		110,1		6,5		11,01		3,25

	0,010		0,250		,0010		0,1250
+	1,011	+	1,375	+	,1011	+	0,6875
	1,101		1,625		,1101		0,8125

ALU con binarios CON signo

```
  0010     +2        001,0     +1,0      00,10      +0,50
+ 1011   + -5      + 101,1   + -2,5    + 10,11    + -1,25
  1101     -3        110,1     -1,5      11,01      -0,75

                     0,010     +0,250     ,0010     +0,1250
                   + 1,011   + -0,625  + ,1011    + -0,3125
                     1,101     -0,375     ,1101     -0,1875
```

La ALU suma binario puro, la interpretación es del usuario

```
  0010
+ 1011
  1101
```

Números Reales – Punto Fijo

- Cuando la cantidad de dígitos disponible no alcanza para representar el número …
  - Problema: Representar un número de n dígitos fraccionarios en un sistema con m dígitos fraccionarios, siendo m < n
- Truncamiento:
  - Descarta los dígitos fraccionarios de orden mayor a m. El error máximo es de 1 bit en el digito fraccionario *m*, o sea 2^{-m}.
- Redondeo:
  - Descarta los dígitos fraccionarios de orden mayor a m pero se suma 1 al menos significativo en caso que el bit inmediato descartado valga 1. Equivale a sumarle $0,5*2^{-m}$ y truncar. El error es de ½ bit.
- Para Complemento a 2
  - Cuando se desee hallar el complemento de una cifra binaria con punto fijo, primero se deberá:
    - Calcular la aproximación por truncamiento o redondeo
    - Calcular el complemento del número aproximado

Números Reales – Punto Fijo

- Números **positivos** truncados y redondeados. 11 bits, 4 fraccionarios

  Sea el siguiente número: $+31{,}921875_d$

  $31{,}921875_d = 0011111.111011_b$

  - Si solo se trunca en 4 bits

    $0011111.1110\cancel{11}_b \rightarrow 0011111.1110_b = 31{,}875_d$

  - Si se redondea en 4 bits y luego se trunca

    $$\begin{array}{l} \;0011111.1110|11_b \\ +\;1 \\ \hline \;0011111.1111|0_b = 31{,}9375_b \end{array}$$

  - Haciendo cuentas:

    $31{,}921875 - 31{,}875 = 0{,}046875 < 0{,}0625 = 2^{-4}$

    $31{,}9375 - 31{,}921875 = 0{,}000875 < 0{,}01953125 = 2^{-5}$

- El número $31{,}921875_d$ no es representable en 11 bits con 4 fraccionarios
- Se podrán representar o el $31{,}875_d$ o el $31{,}9375_d$.

Números Reales – Punto Fijo

- Números **negativos** truncados y redondeados. 11 bits, 4 fraccionarios

  Sea el siguiente número: $-31{,}9609375_d$

  $+31{,}9609375_d = 0011111.1111011_b$

  $-31{,}9609375_d = 1100000.0000101_b$

  Si solo se trunca en 4 bits

  $1100000.0000\cancel{101}_b \rightarrow 1100000.0000_b = -32_d$

  Si se redondea en 4 bits y luego se trunca

  1100000.0000101_b

  $+ \qquad\qquad\qquad 1$

  $1100000.00010_b = 1100000.0001_b = -31{,}9375_d$

  Haciendo cuentas:

  $-31{,}9609375 - (-32) = 0{,}0390625 < 0{,}0625 = 2^{-4}$

  $-31{,}9375 - (-31{,}9609375) = 0{,}0234375 < 0{,}03125 = 2^{-5}$

- El número $-31{,}9453125_d$ no es representable en 11 bits con 4 fraccionarios
- Se podrán representar o el -32_d o el $-31{,}9375_d$

Números Reales – Punto Flotante

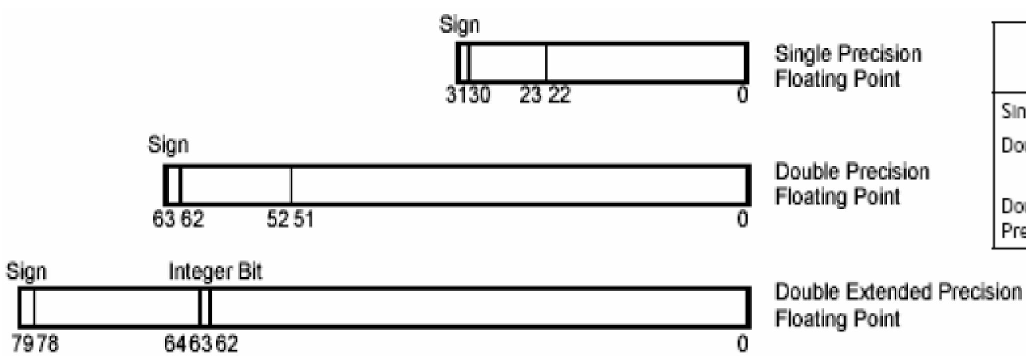
- Para el caso de los números reales, los podremos trabajar en notación científica. Todas las cifras están implícitamente multiplicadas por la base^0
  - $-725,832 = -7,25832 \,.\, 10^2 = -725,832 \times 10^0$
  - $3,14 = 0,314 * 10^1 = 3,14 * 10^0$
  - $0,000001 = 0,1 * 10^{-5} = 1,0 * 10^{-6}$
  - $1941 = 0,1941 * 10^4 = 1,941 * 10^3$
- Lo mismo podremos hacer con las cifras binarias
- Como podemos tener infinitas formas de expresar las cifras, se elegirá una única y homogénea para todo el sistema → Normalizaremos

Números Reales – Punto Flotante

- En binario, podremos también normalizar las cifras
- Normalización → Una cifra binaria tiene:
  - El signo de la cifra
  - La parte entera será siempre = 1 (uno)
  - La parte fraccionaria serán los dígitos binarios fraccionarios después de la coma
- Ejemplos
  - $+1010_b$ → Normalizado = $+1{,}01_b \times 2^{+3}$
  - $-111{,}10011_b$ → Normalizado = $-1{,}1110011_b \times 2^{+2}$
  - $+0{,}0010111_b$ → Normalizado = $+1{,}0111_b \times 2^{-3}$

Números Reales – Punto Flotante

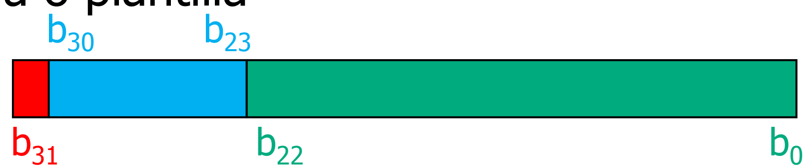
- Punto Flotante: Formato IEEE 754 (Institute of Electrical and Electronics Engineers, año 1985 y actualizada 2008)
- Base binaria
  - Precisión media (16 bits)
  - **<u>Precisión simple (32 bits)</u> ← Utilizaremos esta**
  - Precisión simple extendida (≥ 43 bits), no usada
  - Precisión doble (64 bits)
  - Precisión cuádruple (128 bits)
  - Precisión óctuple (256 bits)



Data Type	Length	Precision (Bits)	Approximate Normalized Range	
			Binary	Decimal
Single Precision	32	24	2^{-126} to 2^{127}	1.18×10^{-38} to 3.40×10^{38}
Double Precision	64	53	2^{-1022} to 2^{1023}	2.23×10^{-308} to 1.79×10^{308}
Double Extended Precision	80	64	2^{-16382} to 2^{16383}	3.37×10^{-4932} to 1.18×10^{4932}

Números Reales – Punto Flotante

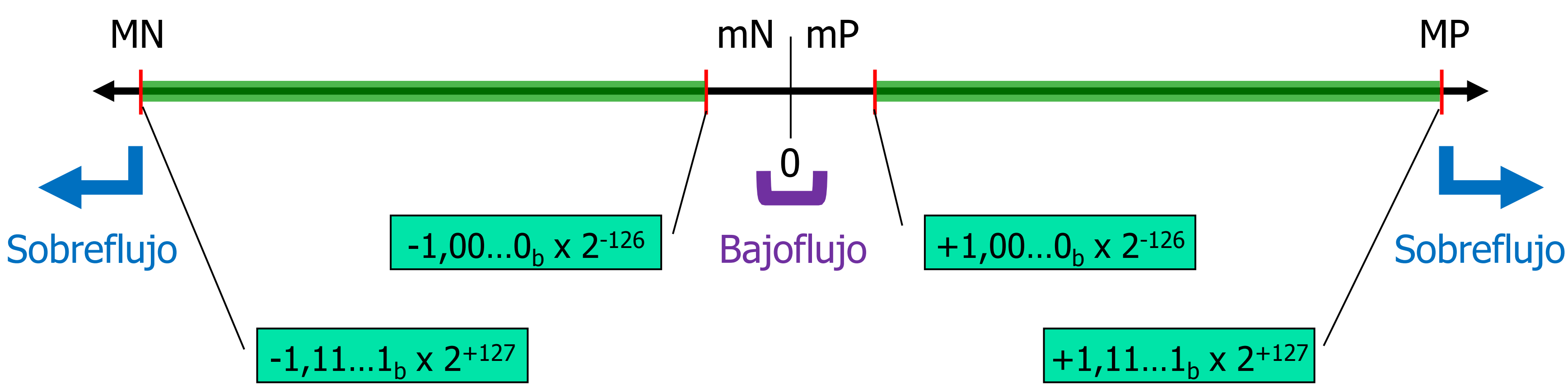
- Representación en Punto Flotante Precisión Simple:
  - Máscara o plantilla



  - bits 0 al 22 (b_0 a b_{22}) representa la parte fraccionaria de la cifra normalizada
  - bits 23 al 30 (b_{23} a b_{30}) representa el exponente normalizado con exceso 127 (exponente obtenido luego de normalizar y sumándole 127)
  - bit 31 (b_{31}), será el signo de la cifra, 0 = (+) y 1 = (-)
  - el 0_d se representa con los 32 bits en 0.
- Exponente con exceso 127 (sesgo)
  - El sesgo con 8 bits es 2^{n-1} = 128. En este caso, la norma lo define con el valor 127. De esta manera dejará como exponentes posibles desde 1_d a 254_d (01_h a FE_h) para la representación de cifras normalizadas
  - Los exponentes 0_d a 255_d (00_h a FF_h) se utilizan para casos especiales

Números Reales – Punto Flotante

- El rango de representación en punto flotante **normalizado** debe ser analizado teniendo en cuenta los máximos y mínimos valores representables tanto con signo positivo como negativo:
  - mP **(mín cifra positiva)** = + cifra mín * base $^{\mathbf{-\,exponente\ máx}}$
  - MP (**máx cifra positiva)** = + cifra máx * base $^{\mathbf{+\,exponente\ máx}}$
  - mN **(mín cifra negativa)** = – cifra mín * base$^{\mathbf{-\,exponente\ máx}}$
  - MN **(máx cifra negativa)**= – cifra máx * base $^{\mathbf{+\,exponente\ máx}}$



Números Reales – Punto Flotante

Ej: Representar el número +12,25 en formato de 32 bits:

- Paso 1 – Pasar a binario
  - $+12{,}25_d = +1100{,}01_b * 2^0 = +1{,}\mathbf{10001}_b * 2^{+3}$
- Paso 2 – Normalizar IEEE
  - El exponente +3 se excede en 127 → $+3 + 127 = 130_d =$ **10000010**$_b$
- Paso 3 – Signo de la mantisa
  - El signo de la mantisa es + → **0**
- Paso 4 – Completar la plantilla
  - **01000001010001000000000000000000**$_b$
- Representándolo en hexadecimal será:
  - $0100\text{-}0001\text{-}0100\text{-}0100\text{-}0000\text{-}0000\text{-}0000\text{-}0000_b$
  - $4 - 1 - 4 - 4 - 0 - 0 - 0 - 0_h$
  - $\boxed{41440000_h}$

Números Reales – Punto Flotante

Ej: Determinar el valor decimal de $C3CC7000_h$ representado en IEEE 754 SP:

- Paso 1 – Pasar el IEEE de hexadecimal a binario
  - $C3CC7000_h$
  - $1100\text{-}0011\text{-}1100\text{-}1100\text{-}0111\text{-}0000\text{-}0000\text{-}0000_b$
  - $11000011110011000111000000000000_b$
- Paso 2 – Aplicar la plantilla
  - **$11000011110011000111000000000000_b$**
- Paso 3 – Signo de la mantisa
  - **1_b** → El signo de la mantisa es (–)
- Paso 4 – Determinar el exponente sin exceso
  - Exponente = **10000111_b** $= 135_d$ → $135_d - 127_d = 8_d$
- Armar el binario:
  - $-\ 1{,}\mathbf{10011000111}b \times 2^{8} = -\ 110011000{,}111b \times 2^{0} = \boxed{\mathbf{-\ 408{,}875_d}}$

Números Reales – Punto Flotante

- El estándar IEEE 754 define los siguientes conjuntos de los valores posibles que pueden representarse:
  - Ceros signados ($+0_d$ y -0_d)
  - Valores finitos normalizados y desnormalizados
  - Valores especiales
    - Infinitos ($+\infty$ y $-\infty$)
    - NaN (Not a Number)
- Define 5 algoritmos de redondeo. Si un número cae en medio de dos representaciones, se puede redondear de la siguiente manera:
  - Se elige el más cercano que termine en cero (LSB = 0)
  - Se elige el más cercano hacia arriba (para +) o hacia abajo (para -)
  - Redondeos directos a:
    - cero (llamado truncamiento)
    - $+\infty$
    - $-\infty$

Números Reales – Punto Flotante

- El estándar define cinco excepciones que permitirán manejar los problemas que surgen en las operaciones con punto flotante. Estos son:
  - Operación inválida (x ej. $\sqrt{-2}$) → NaN
  - Cero dividido cero → NaN
  - Overflow (el resultado es tan grande no puede representarse correctamente dentro del rango de números finitos) → Infinitos
  - Underflow (ídem para números muy pequeños) → Desnormalización
  - Inexacto → Redondeo

Números Reales – Punto Flotante

- Cero y ceros signados
  - El cero es representado por el +0 (cero positivo)
  - Existe también la representación del -0 (cero negativo)
  - El resultado puede ser +0 o -0 dependiendo de la operación. Por ejemplo:
    - -0/x = -0 (si x es positiva)
    - (-0).(-0) = +0
  - Los ceros signados ayudan a interpretar el intervalo aritmético en el que se ubicaría el resultado si la precisión aritmética fuese mayor (el resultado ha sido redondeado)
  - Indican la dirección desde la cual ocurrió el redondeo a cero, o el signo de un infinito que fue invertido.

Números Reales – Punto Flotante

- Números finitos **normalizados**
  - El rango de éstos cifras se compone de todos los valores finitos distintos de cero codificables en formato de cifras reales entre 0 y ±∞
  - El formato de simple precisión (32 bits) incluye cifras cuyos exponentes van desde 2^{-126} a 2^{127} y se representan con exceso de 127, dando exponentes que van desde 1 (01_h) a 254 (FE_h)
  - La parte fraccionaria se normaliza de la siguiente forma: 1,*xxxxxx...* siendo *xxxxxx...* la mantisa → Permite ganar 1 bit más si normalizáramos con 0,*xxxxxx...*!
  - Cifras menores a 2^{-126} no pueden expresarse en este formato ya que el rango del exponente no puede compensar el desplazamiento a izquierda de la coma decimal, se pasa a la representación de cifras de-normalizadas

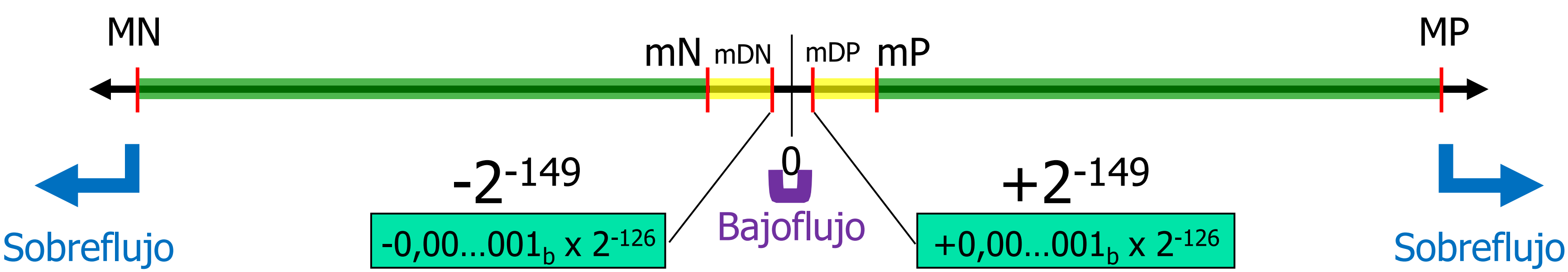
Números Reales – Punto Flotante

- Números finitos **de-normalizados** (subnormal o denormal)
  - Su parte fraccionaria se representa como 0,*xxxxxx*..., siendo *xxxxxx*... la mantisa
  - La cifra siempre se representa con 2^{-126} .El exponente es 0 (00_h)
  - Si operamos con cifras normalizadas, un underflow podrá expresarse en forma de-normalizada
  - Ej:

Operation	Sign	Exponent*	Significand
True Result	0	–129	1.01011100000...00
Denormalize	0	–128	0.10101110000...00
Denormalize	0	–127	0.01010111000...00
Denormalize	0	–126	0.00101011100...00
Denormal Result	0	–126	0.00101011100...00

* Expressed as an unbiased, decimal number.

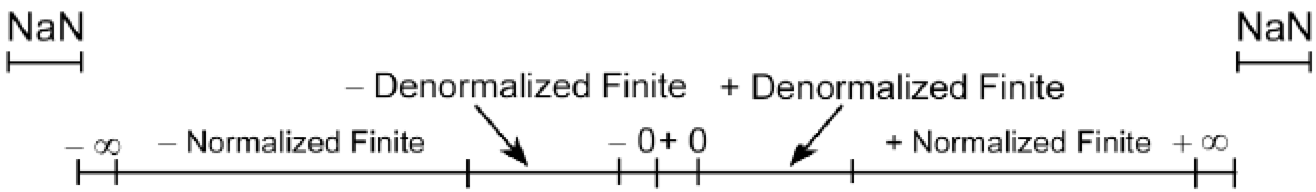
Bits de pérdida de precisión



Números Reales – Punto Flotante

- Infinitos signados
  - +∞ y -∞ , representan los máximos números reales positivo y negativo representables en formato punto flotante
  - La mantisa siempre es 1.000..00 y el máximo exponente desplazado representable (ej. 255 para simple precisión)
- NaNs (Not a Number)
  - Se utilizan para expresar un resultado imposible de calcular como las raíces cuadradas negativas, las indeterminaciones (0/0, 0*∞, ∞+[- ∞]), log n siendo n < 1, etc.
  - Exites 2 tipos:
    - QNaN: Quiet NaN tiene el bit más significativo fraccional en 1. Pueden propagarse por posteriores operaciones sin generar una excepción
    - SNaN: Signalling NaN. Tiene el bit más significativo fraccional en 0. Resulta de una operación inválida

Números Reales – Punto Flotante



Real Number and NaN Encodings For 32-Bit Floating-Point Format

S	E	Sig[1]			S	E	Sig[1]
1	0	0.000...	– 0	+ 0	0	0	0.000...
1	0	0.XXX...[2]	– Denormalized Finite	+Denormalized Finite	0	0	0.XXX...[2]
1	1...254	1.XXX...	– Normalized Finite	+Normalized Finite	0	1...254	1.XXX...
1	255	1.000...	– ∞	+ ∞	0	255	1.000...
X[3]	255	1.0XX...[2]	SNaN	SNaN	X[3]	255	1.0XX...[2]
X[3]	255	1.1XX...	QNaN	QNaN	X[3]	255	1.1XX...

NOTES:

1. Integer bit of fraction implied for single-precision floating-point format.
2. Fraction must be non-zero.
3. Sign bit ignored.

Números Reales – Resumen

Class		Sign	Biased Exponent	Significand	
				Integer[1]	Fraction
Positive	+∞	0	11..11	1	00..00
	+Normals	0 . . 0	11..10 . . 00..01	1 . . 1	11..11 . . 00..00
	+Denormals	0 . . 0	00..00 . . 00..00	0 . . 0	11.11 . . 00..01
	+Zero	0	00..00	0	00..00
Negative	–Zero	1	00..00	0	00..00
	–Denormals	1 . . 1	00..00 . . 00..00	0 . . 0	00..01 . . 11..11
	–Normals	1 . . 1	00..01 . . 11..10	1 . . 1	00..00 . . 11..11
	–∞	1	11..11	1	00..00
NaNs	SNaN	X	11..11	1	0X..XX[2]
	QNaN	X	11..11	1	1X..XX
	QNaN Floating-Point Indefinite	1	11..11	1	10..00
	Single-Precision: Double-Precision: Double Extended-Precision:		← 8 Bits → ← 11 Bits → ← 15 Bits →		← 23 Bits → ← 52 Bits → ← 63 Bits →

1. El bit entero está implícito y no se almacena para formatos single-precision y double-precision.
2. La fracción para codificación de SNaN debe ser distinta de cero, con el bit mas significativo en 0.