UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Curso de ingreso 2022

Facultad de Informática

MATEMÁTICA 0

Dra. Verónica E. Pastor

Dirección de Articulación e Ingreso
Secretaría Académica
FACULTAD DE INFORMÁTICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Índice general

Bienvenidos a la vida Universitaria

Bienvenidos al curso de Ingreso de la Facultad de Informática y a Matemática 0, en particular.

Este material debe considerarse como una guía de los conceptos mínimos y necesarios para poder afrontar las siguientes asignaturas. Debe tener en cuenta que no reemplaza las explicaciones de los docentes, complemente la lectura con consultas a ellos. Este material es único para las distintas modalidades que ofrece la Facultad para ingresar, ya sea Curso Previo Inicial a Distancia, Curso Inicial Obligatorio o Redictado del Curso Incial en cualquiera de sus modalidades, en todas hay docentes a los que se puede consultar.

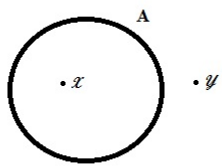
1.6 Teoría de Conjuntos

Un **conjunto** es la reunión de entes u objetos bien definidos y diferenciables entre sí, que en general tienen características similares. Estos entes u objetos se llaman **elementos del conjunto**. Si a es un elemento del conjunto A se denota con la **relación de pertenencia** $a \in A$. En caso contrario, si a no es un elemento de A se denota $a \notin A$.

1.6.1 Formas de Expresar un Conjunto

- Diagrama de Venn

  Seguramente esté familiarizado con gráficos como el siguiente, donde el elemento $x \in A$ y el elemento $y \notin A$.



- Expresado por Extensión

  Cuando damos de manera explícita los elementos, es decir, se especifica cuales son cada uno de los elementos de A. Por ejemplo: $A = \{1, 3, 5, 7\}$

- Expresado por Comprensión

  Cuando expresamos la propiedad que define el conjunto. En el ejemplo anterior, $A = \{x : x \text{ } es \text{ } un \text{ } nro. \text{ } impar \text{ } menor \text{ } o \text{ } igual \text{ } a \text{ } 7\} = \{x : x \text{ } es \text{ } impar \ \wedge x \leq 7\}$

  Se lee x tal que x es impar y x es menor o igual que 7.

Ejercicio: Considere $\{x : x > 1 \wedge 2.x = 1\}$ ¿Es un conjunto, qué elementos tiene?

`Ejemplos de Conjuntos muy utilizados en matemática.`

- Ya vimos en lógica, al conjunto universal o universo, que contiene a todos los elementos en un determinado contexto. Notado por la letra $\mathcal{U}$.
- El conjunto vacío, es aquél que no contiene elementos. Se nota $\emptyset$ ó sólo con $\{\}$.
- Conjuntos numéricos: números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, que desarrollaremos en el siguiente módulo.

1.6.2 Relaciones entre elementos y conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que:

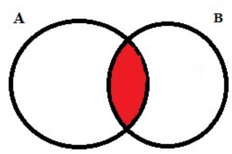
- A está contenido en B ó A es un subconjunto de B, si todo elemento de A es también un elemento de B. En símbolos $A \subseteq B$ si y sólo si se verifica el condicional $(\forall x)(x \in A \to x \in B)$
- Los conjuntos A y B son iguales, si y sólo si tienen los mismos elementos. En símbolos $A = B$ si y sólo si se verifica el bicondicional $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

Ejercicio: Como verá, hay una relación entre la contención y el condicional. ¿Cómo expresaría entonces la igualdad? Utilice su deducción para comparar los siguientes conjuntos: $A = \{2, 3\}$, $B = \{x : x(x-3) = 0\}$ $C = \{x : x(x-3)(x-1) = 0\}$

1.6.3 Operaciones con Conjuntos

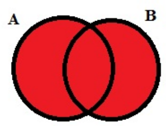
1.6.3.1 **Intersección**

Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A \cap B$ que llamaremos **intersección de A y B**, como el conjunto formado por los elementos que son comunes a ambos conjuntos. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$



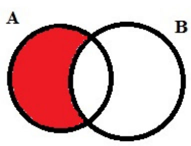
1.6.3.2 **Unión**

Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A \cup B$ que llamaremos **unión de A y B**, como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$



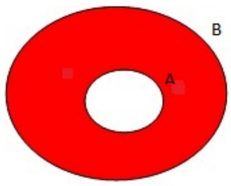
1.6.3.3 **Diferencia**

Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A - B$ que llamaremos **diferencia entre A y B** (en ese orden), como el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B. $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$



1.6.3.4 **Complemento**

Si $A \subseteq B$, se define el **complemento de A con respecto a B** como el conjunto formado por los elementos de B que no pertenecen a A. $C_B A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$ En particular, si $B = \mathcal{U}$, decimos directamente el complemento de A, sin necesidad



de aclarar respecto a quién. En general, usaremos $B = \mathcal{U}$ y simplificamos la notación usando: A^C.

Ejercicios

1. Escriba por extensión los siguientes conjuntos:

$A = \{x : x\ es\ una\ letra\ de\ la\ palabra\ FACULTAD\}$

$B = \{x : x\ es\ una\ cifra\ del\ nro.\ 3{,}502{,}332\}$

$C = \{x : x \textit{ es un diptongo de la palabra } VOLUMEN\}$

2. Dados los conjuntos $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,4,5\}$, $C = \{2,4\}$, calcule los conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $C_B C$, $B - A$, $A \cap B \cap C$, $A - (B - C)$, $(A - B) - C$, $B - C$. Compare los resultados y obtenga conclusiones posibles.

3. ¿Cuál es la intersección entre los conjuntos $\{\{a\}\}$ y $\{a\}$? (Realice el Diagrama de Venn.)

4. Complete las proposiciones siguientes con los símbolos $\in$ o $\notin$:

2 $\{1,3,5,7\}$, 5 $\{2,4,5,6\}$, 2 $\{4,5,6,7\}$, 0 $\emptyset$, 1 $\{1,2\} - \{1,6\}$, París {x: x es el nombre de un país}, 2 $\{1,2\} - \{1,6\}$, 2 $\{1,2\} \cap \{1,6\}$, Jujuy {x: x es provincia Argentina}, 2 $\{1,2\} \cup \{1,6\}$, a $\{\{a\}\}$, $\{a\}$ $\{\{a\}\}$

5. ¿Cómo puede traducir las leyes de De Morgan con la notación de conjuntos?

6. Sean A y B dos conjuntos no vacíos tales que $A \subseteq B$. Determinar, si es posible, el valor de verdad de los siguientes enunciados. Justificando la respuesta.

- Siempre $\exists x \ (x \in A \wedge x \notin B)$
- Siempre $\exists x \ (x \in B \wedge x \notin A)$
- $\forall x \ (x \notin B \rightarrow x \notin A)$
- $\forall x \ (x \notin A \rightarrow x \notin B)$

7. Sean A, B y C conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Sabiendo que $a \in A, b \in B, c \in C, d \notin A, e \notin B$ y $f \notin C$, ¿cuáles de las siguientes informaciones son ciertas?

$$\begin{array}{ccc} a \in C & b \notin A & b \in A \\ c \notin A & e \notin A & f \notin A \\ d \in B & f \in C_{\mathcal{U}}C & c \in C - B \\ a \in C \cap B & b \in C_B A & d \notin A \cap C \end{array}$$

1.6.4. Relación entre la teoría de conjuntos y la lógica proposicional

Como habrán notado, existe una relación muy estrecha entre la Teoría de Conjuntos y la Lógica Proposicional.

Para mostrar dicha relación, podemos completar el siguiente cuadro:

Conjuntos	$A \cap B$			$C_{\mathcal{U}}A$		$A - B$
Proposiciones		$a \vee b$	$a \to b$		$a \leftrightarrow b$	

Además, el conjunto vacío se corresponde con una *contradicción* y el conjunto universal con una *tautología*.

Mediante esta correspondencia, todos los resultados sobre conjuntos se pueden re-escribir en términos de lógica proposicional y viceversa.

Ejercicio: por medio de esta relación, escribir en términos de lógica las siguientes propiedades.

1. Idempotencia: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$
2. Absorción: $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$
3. Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Complementariedad $A \cup C_{\mathcal{U}}A = U$; $A \cap C_{\mathcal{U}}A = \emptyset$
5. $C_{\mathcal{U}}(C_{\mathcal{U}}A) = A$

CAPÍTULO 2: Conjuntos Numéricos

Este módulo tiene por objetivo recordar y clarificar las propiedades de las operaciones en los conjuntos numéricos que se consideran imprescindibles para las materias siguientes. Al finalizar el mismo el alumno debe ser capaz de:
a) Identificar los distintos tipos de números
b) Aplicar correctamente las propiedades de las operaciones.

2.1 Números Naturales: ($\mathbb{N}$)

Este conjunto de números existe desde que el hombre tuvo la necesidad de contar, por ejemplo, su ganado. Es el primer conjunto de números que aprendemos, posee infinitos elementos y aparece como su nombre lo indica en forma natural. Este conjunto, simbolizado con la letra $\mathbb{N}$, tiene como elementos:

$\mathbb{N}= \{0,1,2,3,4,...\}$ y así continúa indefinidamente.

Consideremos las dos operaciones fundamentales en $\mathbb{N}$, suma y producto, y veamos sus propiedades:
1) La suma de dos números naturales es un número natural. En este caso, se dice que el conjunto de los números naturales es *cerrado para la suma.*
2) El 0 es tal que sumado con cualquier otro número no lo modifica. Se dice que el 0 es el *neutro para la suma.*
3) Si se consideran 3 números naturales la suma de los dos primeros más el tercero resulta igual que si al primero se le suma el resultado de la suma de los otros dos.

Se dice que *la suma de números naturales es asociativa*
4) Si a un número natural le sumo otro, se obtiene el mismo resultado que si al segundo le sumo el primero. Se dice que *la suma de números naturales es conmutativa.*

Ejercicios

1) Expresar simbólicamente las 4 propiedades anteriormente enunciadas.
Resolvemos la primera propiedad: $(\forall a)(\forall b)((a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N}) \rightarrow a + b \in \mathbb{N})$
2) Enunciar las propiedades del producto de números naturales, en lenguaje corriente y simbólicamente.
3) ¿Cuál es la propiedad que enlaza la suma y el producto de naturales? Definirla.

Orden Usual

Con los naturales también se pueden expresar ordenamientos, por ejemplo: se ordenan los planetas a partir del Sol, la Tierra es el tercero y Marte es el cuarto. Además dadas dos colecciones de objetos se pueden comparar sus cantidades: *La Tierra tiene menos satélites que Júpiter.*

Surgen las siguientes preguntas: ¿$\mathbb{N}$ tiene primer elemento?, ¿cuál es?, ¿tiene último elemento?
Dados $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$ se cumple: $(a < b) \vee (a > b) \vee (a = b)$.

2.2 Números Enteros: ($\mathbb{Z}$)

En $\mathbb{N}$, la resta (por ejemplo, $a - b$) sólo está definida si el minuendo (en este caso sería a) es mayor o igual al sustraendo (en este caso, b). Para que dicha operación no sea tan restringida se creó el conjunto de enteros negativos (notado por -$\mathbb{N}$). Para ello para cada $n \in \mathbb{N}$ se introduce el opuesto de n, notado $-n$. Y así decimos que el conjunto de los números enteros (que se nota con $\mathbb{Z}$, por que en alemán número es Zahlen) es la unión de los naturales y sus opuestos $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup$ (-$\mathbb{N}$) . Además se cumple: $n + (-n) = 0$

Los números negativos se consideran menores que 0 en el orden usual de los enteros. A los naturales se los llama enteros positivos, siendo mayores o iguales que 0.

Ley de Monotonía

Sean a, b y c números enteros tales que $a \leq b \to a + c \leq b + c$

Ejercicio:

Ejemplificar la Ley de Monotonía con distintas combinaciones en los signos (es decir enteros positivos y negativos) de a, b y c.

Números Pares e Impares

Dentro del conjunto de los enteros se distinguen dos subconjuntos cuya unión componen a $\mathbb{Z}$, ellos son el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares.

Definición: Un número entero n es **par** si y sólo si existe un entero k tal que $n = 2k$.

Definición: Un número entero n es **impar** si y sólo si es el siguiente de un número par. Por lo tanto, si n es impar se cumple que $n = 2k + 1$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Divisibilidad

En muchos problemas es necesario saber si el reparto de varios elementos en diferentes grupos se puede hacer equitativamente, es decir, si el número de elementos dividido entre el número de grupos sería una división entera. Al dividir un número $n \in \mathbb{Z}$ entre otro número $d \in \mathbb{Z}$, la división sea exacta sin resto, diremos que n es **múltiplo** de d, que n es **divisible** por d, que d es **divisor** de n, o que d **divide** a n.

En este caso, existe un tercer entero (cociente) c, tal que $n = c.d$. En general, aplicamos la divisibilidad a números enteros, pudiendo ser positivos o negativos.

En símbolos: Sean $n \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$, decimos que d divide a n si $\exists\, c \in \mathbb{Z}$ tal que

$n = c.d.$ Se nota $d|n$.

Otro concepto importante en la teoría de Números Enteros es el de **número primo**. Los números primos han adquirido importancia más allá de la matemática teórica, cuando por la década del '70 se comenzaron a utilizar para generar claves para el envío de mensajes cifrados. Esta área llamada criptografía se desarrolla gracias a la ciencia de la computación y la mayor capacidad de cálculo de las computadoras.

Definición: : Un número entero se dice **primo** si tiene exactamente 4 divisores: la unidad, el propio número y sus respectivos opuestos.

Ejercicios

1) Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Hallar los elementos primos de A. Justificar.
2) Si un número es primo, ¿qué se puede decir de su opuesto?
3) Hallar la descomposición en primos de los números 340 y 195.

Repasemos algunos conceptos del colegio ¿Se acuerda cómo factorizaba un número para hallar el $m.c.m.$ (mínimo común múltiplo) y el $M.C.D.$ (máximo común divisor) en el colegio? Recordemos: si queremos calcular el $m.c.m.(8, 12)$ y el $M.C.D.(8, 12)$, necesitamos conocer la factorización de 8 y de 12:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad 8 = 2 \times 2 \times 2 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 12 = 2 \times 2 \times 3$$

Luego, el $m.c.m.(8, 12) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$ (24 es el menor número tal que $8|24 \wedge 12|24$); y el $M.C.D.(8, 12) = 2 \times 2$ (4 es el mayor número tal que $4|8 \wedge 4|12$).

4) Cuando debemos resolver preguntas como: ¿cuántos objetos hay en cada caja si en cada caja hay el mismo número de objetos? o ¿ cuándo ocurrirán al mismo tiempo dos eventos?, nos resultan de utilidad el $M.C.D.$ y el $m.c.m.$.
Resolver el siguiente problema: Dos amigas deciden ir a un SPA que abre a las 13hs, una de ellas está interesada en un tratamiento que dura 80 minutos, mientras que

la otra en uno de dura 2 horas. Los tratamientos se realizan continuamente. Ellas saben que las 13 horas no llegan al lugar, ¿a qué deberán estar para que ambos tratamientos inicien juntos?

Para los siguientes ejercicios se recomenida pedir ayuda al docente:
5) Demostrar que la intersección entre el conjunto de números pares e impares es vacío.
6) Sean $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ c \in \mathbb{Z}$, probar que si $a|b \wedge b|c \rightarrow a|c$ (propiedad transitiva de la divisibilidad).

2.3 Números Racionales: ($\mathbb{Q}$)

La operación de dividir no es siempre posible en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Puede efectuarse 12:4 pues existe un entero, el 3, tal que $4.3 = 12$. Pero, no ocurre lo mismo con 4:12 ó - 3:7, por lo tanto esta imposibilidad nos conduce a ampliar a $\mathbb{Z}$ definiendo un conjunto en el que la división sea realizable en dicho conjunto.
Vamos a definir ahora formalmente este nuevo conjunto que se denomina conjunto de los números racionales y se simboliza con la letra $\mathbb{Q}$ (la letra Q proviene Quotient que significa cociente).

$$\mathbb{Q} = \{\ \tfrac{m}{n} : m\mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z}\ \wedge n \neq 0\ \}$$

Los números racionales pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse y el resultado es un número racional es decir, las operaciones son cerradas en $\mathbb{Q}$.

En $\mathbb{Q}$ se definen la suma y el producto de forma que las propiedades de esas operaciones ya definidas en $\mathbb{Z}$, se conserven:

Dados $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \wedge \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ se define la **suma** $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b.d}$ y el producto $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

Se dice que $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** si y sólo si $a.d = b.c$.

Ejemplos

$\frac{9}{-3}$ es equivalente a -3.

$\frac{3}{12}, \frac{1}{4}, \frac{-6}{-24}$ son equivalentes.

Una operación entre racionales no se modifica si reemplazamos uno de ellos por otro que sea equivalente.

Ejercicio: Enuncie en palabras y con símbolos las siguientes propiedades, para el producto y suma definidas en $\mathbb{Q}$, si corresponde.

a) Ley de cierre.

b) Asociativa.

c) Conmutativa.

d) Existencia del neutro.

e) Existencia del opuesto.

f) Existencia del inverso para todo elemento no nulo.

g) Propiedad distributiva.

Ejercicios: Hallar el error en el siguiente cálculo:

$4 + \frac{18}{3} = \frac{12}{3} + 6$ pues $\frac{12+18}{3} = \frac{12+18}{3}$, por la definición de suma en $\mathbb{Q}$. Entonces $4 - \frac{12}{3} = 6 - \frac{18}{3}$ y luego, $2\left(2 - \frac{6}{3}\right) = 3\left(2 - \frac{6}{3}\right)$. Así resulta $2 = 3$.

Orden en $\mathbb{Q}$

Dados $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \wedge \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $b \wedge d > 0$ se dice:

$\frac{a}{b}$ es menor o igual que $\frac{c}{d}$ y se anota $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ si y sólo si $a.d \leq b.c$.

De manera análoga, se define el mayor o igual (queda de tarea escribirla).

Ejercicios

1) Ordenar de menor a mayor $\frac{-12}{6}, 3, \frac{2}{5}, -1, \frac{-3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{7}, \frac{6}{4}$.

2) Sea $-4 < m < 2$

a) Hallar $m \in \mathbb{Z}$ tal que se cumpla lo anterior.

b) Idem si $m \in \mathbb{Q}$.

3) Probar que entre dos números racionales distintos, hay otro racional.

Importante: Esta propiedad muestra que siempre habrá un número racional entre dos, por muy próximos que estén. Por lo tanto se dice que el conjunto de los racionales es **denso**.

2.4 Números Irracionales: ($\mathbb{I}$)

El concepto de números irracionales proviene de la Escuela Pitagórica, que descubrió la existencia de números irracionales (que notaremos con la letra $\mathbb{I}$), es decir que no es racional. Es posible que este descubrimiento se produjera al intentar resolver el problema siguiente:

Si se traza un cuadrado cuyo lado mida la unidad, es decir 1, y se intenta calcular lo que mide la diagonal utilizando el Teorema de Pitágoras. ¿Cuánto mide la diagonal?

Este tipo de números irracionales son aquellos que **no** pueden expresarse como cociente de dos enteros $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$. Cuando en $\mathbb{Q}$ hacemos la cuenta de m dividido n obtenemos una expresión decimal, que puede ser finita (por ejemplo, $\frac{9}{3}$ es 3 o $\frac{5}{2}$ es 2,5, hay finitos números después de la coma) o puede ser infinita periódica (por ejemplo, $\frac{2}{3}$ es $0,\widehat{6}$, el 6 se repite infinitas veces). Es decir, si un número no es decimal exacto y no es decimal periódico, no representa a un número racional.

Entre los irracionales más conocidos podemos citar: π, $\sqrt{p}$ (con p primo), e.