UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Curso de ingreso 2022

Facultad de Informática

MATEMÁTICA 0

Dra. Verónica E. Pastor

Dirección de Articulación e Ingreso
Secretaría Académica
FACULTAD DE INFORMÁTICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Índice general

Bienvenidos a la vida Universitaria

Bienvenidos al curso de Ingreso de la Facultad de Informática y a Matemática 0, en particular.

Este material debe considerarse como una guía de los conceptos mínimos y necesarios para poder afrontar las siguientes asignaturas. Debe tener en cuenta que no reemplaza las explicaciones de los docentes, complemente la lectura con consultas a ellos. Este material es único para las distintas modalidades que ofrece la Facultad para ingresar, ya sea Curso Previo Inicial a Distancia, Curso Inicial Obligatorio o Redictado del Curso Incial en cualquiera de sus modalidades, en todas hay docentes a los que se puede consultar.

CAPÍTULO 1: Lógica y Conjuntos

Este módulo tiene por objetivo el familiarizarse con los elementos básicos de la lógica proposicional clásica; lo que permitirá establecer la validez de un enunciado complejo a partir de sus componentes. El álgebra proposicional abarca conceptos que son muy utilizados en la carrera que elegiste. Pretendemos que el alumno incorpore el bagaje lógico para que sea capaz de abordar el estudio de la teoría de conjuntos. La idea de conjunto no requiere demasiada presentación, el objetivo aquí es identificar los elementos que pertenecen y los que no a un conjunto. Interpretar correctamente la notación simbólica en la definición de conjuntos, y tratar de explicar a través de estos resultados la naturaleza del trabajo matemático.

1.1 Proposiciones

En el desarrollo de cualquier teoría matemática se hacen afirmaciones en forma de frases y que tienen un sentido pleno. Tales afirmaciones, verbales o escritas, las denominaremos enunciados o proposiciones.

Definición de Proposición: oración con valor declarativo o informativo, de la cual se puede predicar su verdad o falsedad.

Es decir,

Una **proposición** es una oración que puede ser verdadera (V) o falsa (F) pero no ambas a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

Por lo general, a las proposiciones se las representa por las letras del alfabeto desde

la letra p, es decir, p, q, r, s, t,... etc. Así, por ejemplo, podemos citar las siguientes proposiciones y su valor de verdad:
p: $15 + 5 = 21$ (F)
q: Santa Fe es una provincia Argentina. (V)
r: El número 15 es divisible por 3. (V)
s: El perro es un ave. (F)

Aclaremos que la mayor parte de las veces los enunciados adquieren el carácter de proposición en un contexto determinado; esto es, un enunciado puede ser una proposición en un sistema determinado, y no serlo en otro.
Para ser más claro: la oración "María va al teatro" no es una proposición, a menos que yo sepa a qué María (de los millones que existen) se refiere, y si "va al teatro" quiere decir que va habitualmente al teatro o que lo hace de vez en cuando o que está yendo al teatro en este instante determinado. Por otra parte si María es mi hermana, y en este momento está saliendo, la afirmación "María va al teatro" es una proposición, puesto que claramente es verdadera o falsa. Entonces, cuando digamos que cierto enunciado es una proposición tendremos en claro que lo es en un determinado contexto, en el cual es, sin lugar a dudas, verdadera o falsa.

Expresiones No Proposicionales

Son aquellos enunciados a los que no se les puede asignar un valor de verdad. Entre ellos tenemos a los exclamativos, interrogativos o imperativos, por ejemplo:

- ¿Cómo te llamas?
- Prohibido pasar.
- ¡Salí de ahí!

No son proposiciones porque no se les puede asignar un valor de verdad.

Clasificación de las Proposiciones

Aquellas proposiciones que se pueden representar por una sola letra y no se pueden descomponer en otras proposiciones, se llaman **proposiciones simples o atómicas**. Por ejemplo, sea la proposición $p : 3 + 6 = 9$ es una proposición simple o atómica.

Cuando una proposición consta de dos o más enunciados simples, se le llama **proposición compuesta o molecular**. Así, por ejemplo, la proposición: “Pitágoras era griego y geómetra” es una proposición compuesta por las proposiciones simples, p:Pitágoras era griego y q:Pitágoras era geómetra.

No es necesario conocer si una afirmación es verdadera o falsa (es decir, su valor de verdad) para saber que es una proposición. Por ejemplo: “Hay vida extraterrestre” es una proposición, independientemente de que algunos crean que es verdadera y otros que es falsa, puesto que claramente o bien existe vida extraterrestre o bien no existe.

Nuestro sencillo estudio de las proposiciones no tratará de establecer el valor de verdad de una proposición dada, lo que muchas veces es tarea de los científicos (“el universo se originó en la gran explosión”) o los filósofos (“pienso, por lo tanto existo”).

Lo que haremos es analizar el valor de verdad de unas en función de los valores de verdad de las otras.

1.2 Conectivos Lógicos

A partir de proposiciones simples es posible generar otras, simples o compuestas. Es decir que se puede operar con proposiciones, y para ello se utilizan ciertos símbolos llamados **conectivos lógicos**. A continuación vemos una concreta definición de cada uno:

1.2.1 Operaciones Proposicionales

Definiremos las operaciones entre proposiciones, dada una o más proposiciones, de las que se conoce los valores de verdad, se trata de asignar a la proposición resultante a través de su valor de verdad. A tal efecto, estudiaremos a continuación el uso y significado de los diferentes conectivos lógicos.

Negación

Dada una proposición p, se denomina la negación de p a otra proposición denotada por $\neg p$ (se lee no p) que le asigna el valor de verdad opuesto al de p. Por ejemplo:
p: Diego estudia matemática.
$\neg p$: Diego no estudia matemática.
Por lo que nos resulta sencillo construir su tabla de verdad:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Se trata de una operación unitaria, pues a partir de una proposición se obtiene otra, que es su negación.
Ejemplo: La negación de p: Santa Fe es una provincia argentina, es:

$\neg p$: Santa Fe no es una provincia argentina.

Conjunción

Dadas dos proposiciones p y q, se denomina conjunción de estas proposiciones a la proposición $p \wedge q$ (se lee "p y q"), cuya tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La tabla que define esta operación, establece que la conjunción es verdadera sólo si lo son las dos proposiciones componentes. En todo otro caso es falsa. Cada componente de la conjunción se llama **conyunto**.

Ejemplos: Sea la declaración:

$$5 \textit{ es impar } \text{ y } 6 \textit{ es par}$$

Vemos que está compuesta de dos proposiciones a las que simbolizaremos por:
p: 5 es un número impar
q: 6 es un número par
Por ser ambas verdaderas, la conjunción es verdadera.

Ahora bien, sea la declaración:

Hoy es el día 3 de noviembre y mañana es el día de 5 de noviembre.

Esta conjunción es falsa, ya que no pueden ser simultáneamente verdaderas ambas proposiciones que la componen.

Disyunción

Dadas dos proposiciones p y q, la disyunción de las proposiciones p y q es la proposición compuesta $p \vee q$ (se lee "p o q"), cuya tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Cada componente de la disyunción se llama **disyunto**.

Ejemplos:
Marte es un planeta o una estrella.
Córdoba es una provincia argentina o Uruguay es un país latinoamericano.

El 3 es par o el 8 es primo.

Intente Ud. identificar las proposiciones componentes p y q, sus valores de verdad y el valor de verdad de la disyunción.

Condicional (o implicación)

Consideremos el enunciado: Si apruebas Filosofía, te dejaré ir al viaje de fin de curso.
Este enunciado está formado por dos proposiciones atómicas:
p: Apruebas Filosofía.
q: Vas de viaje de fin de curso.

Lo que nuestro enunciado original afirma es esto: si p es verdad, entonces q también es verdad, o, dicho de modo más sencillo, si p entonces q.
En el enunciado $p \to q$, se dice que p es el antecedente y q el consecuente.
El condicional $p \to q$ se lee "p condicional q", "p implica q" o bien "si p entonces q".
Un condicional siempre es verdadero, excepto cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.
Por lo tanto, su valor de verdad queda definido por la siguiente tabla de verdad.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Otras expresiones que representan también la proposición "*si p entonces q*" y que se simbolizan por $p \to q$:

- p sólo si q
- q si p

- p es condición suficiente para q
- q es condición necesaria para p

Ejemplos:
Ser divisible por 2 es condición necesaria para ser divisible por 6, pero no suficiente.
Ser divisible por 8 es condición suficiente para ser divisible por 4, pero no necesaria.

El recíproco del condicional

Se puede ver por medio de las tablas de verdad, que tanto la conjunción como la disyunción tienen la **propiedad conmutativa**, es decir el orden de las componentes de una conjunción o de una disyunción no altera su valor de verdad: es lo mismo $p \wedge q$ que $q \wedge p$, y también es lo mismo $p \vee q$ que $q \vee p$. Pero, ¿ocurre lo mismo con el condicional? ¿Es lo mismo $p \to q$ que $q \to p$? La respuesta es que no. Veámoslo con cierto detenimiento.
Se dice que $q \to p$ es el **recíproco** de $p \to q$. El implicador no tiene la propiedad conmutativa y esto se aprecia en la comparación de las tablas de verdad de $p \to q$ y de su recíproco $q \to p$:

p	q	$p \to q$	$q \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Veámoslo con un ejemplo:
Sean p : Ahora llueve y q : El suelo está mojado, siendo, por consiguiente $p \to q$: Si ahora llueve, entonces el suelo está mojado. Veamos el recíproco de este enunciado: $q \to p$: Si el suelo está mojado entonces ahora llueve. Supongamos que p es falso, y q verdadero, lo que se corresponde con la tercera fila de la tabla anterior.

- $p \to q$ (Si ahora llueve, entonces el suelo está mojado) es verdadero.

- $q \to p$ (Si el suelo está mojado, entonces ahora llueve) es falso.

El contrarrecíproco del condicional

Aunque un enunciado condicional y su recíproco no tienen los mismos valores de verdad, si los tienen el condicional y su contrarrecíproco.
El contrarrecíproco del enunciado $p \to q$ es $\neg q \to \neg p$. Veámoslo comparando tablas de verdad:

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Comparemos el mismo ejemplo: En el ejemplo anterior donde p: Ahora llueve, q: El suelo está mojado, $p \to q$: Si ahora llueve entonces el suelo está mojado.
El contrarrecíproco es $\neg q \to \neg p$: Si el suelo no está mojado entonces ahora no llueve,
que es lógicamente equivalente al enunciado primitivo $p \to q$.

El bicondicional

Ya hemos comprobado que $p \to q$ no es lo mismo que $q \to p$. Puede ocurrir, sin embargo, que tanto $p \to q$ como $q \to p$ sean verdaderos. Por ejemplo, si p: La Tierra es plana, y q: El Sol es un planeta,
entonces tanto $p \to q$ como $q \to p$ son verdaderos, porque tanto p como q son falsos.
Es necesario tener esto en cuenta para entender bien el concepto de bicondicional.
Mediante el bicondicional ($\leftrightarrow$) lo que queremos decir es que un enunciado es a la vez condición necesaria y suficiente para otro. El **bicondicional** $p \leftrightarrow q$, que se lee "p si y sólo si q".
Así, si digo que p: apruebo Filosofía y q: saco un 5 o más en el examen de Lógica la fórmula $p \leftrightarrow q$ significa apruebo Filosofía si y sólo si saco un 5 o más en el examen

de Lógica.

La proposición compuesta: apruebo Filosofía si y sólo si saco un 5 o más en el exámen de Lógica, se puede formalizar de dos formas equivalentes: $(p \to q) \wedge (q \to p)$, o bien $p \leftrightarrow q$. En consecuencia, el enunciado $p \leftrightarrow q$ queda definido por el enunciado $(p \to q) \wedge (q \to p)$. Por esta razón, el símbolo $\leftrightarrow$ se llama bicondicional, y la tabla de verdad para $p \leftrightarrow q$ es la misma que la de $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La doble flecha horizontal $\leftrightarrow$ es el operador bicondicional. De la observación de la tabla de verdad deducimos que para que $p \leftrightarrow q$ sea verdadera, tanto p como q han de tener los mismos valores de verdad, y en caso contrario es falsa.

Formalización del bicondicional

El bicondicional puede tener varias expresiones equivalentes en lenguaje natural. Así $p \leftrightarrow q$ es la formalización de las siguientes expresiones de lenguaje natural:

- p si y sólo si q
- p es necesario y suficiente para q

Notar que $p \leftrightarrow q$ y $q \leftrightarrow p$ tendrían totalmente los mismos valores de verdad, puesto que ambas son coimplicaciones y por lo tanto si sus valores de verdad son los mismos, son verdaderas, y son falsas en los demás casos. En consecuencia, podemos reformular los enunciados anteriores intercambiando p y q.

Ejemplos del bicondicional

Ejemplos de bicondicionales verdaderos:

a. La Tierra es plana si y sólo si el Sol es un planeta; si llamamos: p:La Tierra es plana, sabemos que es Falsa y sea q: El Sol es un planeta, también es Falsa.

b. La Tierra es esférica si y sólo si el Sol es una estrella, sea p: La Tierra es esférica es Verdadera, y sea q: El Sol es una estrella, también es Verdadera.

Ejemplos de bicondicionales falsos:

a. La Tierra es plana si y sólo si el Sol es una estrella; si llamamos: p: La Tierra es plana, sabemos que es Falsa y sea q: El Sol es una estrella, es Verdadera.

b. La Tierra es esférica si y sólo si el Sol es un planeta, sea p: La Tierra es esférica, es Verdadera, y sea q: El Sol es un planeta, en cambio, es Falsa.

1.2.2 Equivalencia Lógica

Decimos que dos proposiciones P y Q formadas ambas por las mismas letras proposicionales, son lógicamente equivalentes, o simplemente equivalentes, si coinciden sus valores de verdad para los mismos valores de verdad de las componentes. Se nota como $P \Leftrightarrow Q$, siendo P y Q formas proposicionales no necesariamente atómicas. Importante: usamos la $\Leftrightarrow$ para indicar la equivalencia, mientras que $\leftrightarrow$ simboliza al bicondicional.

Ejercicio: Probar que las siguientes propiedades se satisfacen, probando las equivalencias lógicas (construyendo las tablas de verdad de los bicondicionales que correspondan).

1.- Doble negación: $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

2.- Leyes conmutativas: a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ b) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

3.- Leyes asociativas: a) $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ b) $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$

4.- Leyes distributivas: a) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ b) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

5.- Leyes de De Morgan: a) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ b) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

6.- Implicación: $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

Resolución de 3.-a): Empezaremos considerando todas las formas posibles de combinar los valores de verdad de las proposiciones atómicas: p, q y r. Para asegurarnos de que no nos falta ninguna combinación, el número de filas es igual a 2^n, donde n es la cantidad de proposiciones atómicas. En nuestro caso $2^3 = 8$. Lo recomendable es hacerlo de manera ordenada, por ejemplo en la primera columna, considero la primera mitad verdadera y la otra falsa, en la siguiente considero la mitad de la mitad verdadera y la otra falsa y así siguiendo...

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Notar que las últimas dos columnas coinciden los valores de verdad para los mismos valores de verdad de las componentes p, q y r. Entonces, si miramos la tabla del bicondicional estaremos en la primera o cuarta fila, por lo que $P \leftrightarrow Q$ resultará verdadera.

1.2.3 Tautología

Es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Un ejemplo típico es el bicondicional entre $p \to q$ y $\neg q \to \neg p$, verificamos por medio de la tabla de verdad que es una tautología, mirando el valor de verdad de la última columna:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Las tautologías son muy importantes en lógica matemática ya que se consideran leyes en las cuales nos podemos apoyar para realizar demostraciones.

1.2.4 Contradicción

A diferencia de la tautología, que siempre es verdadera, aquella proposición que siempre es falsa para todos los valores de verdad, se denomina contradicción. Una de las más usadas y más sencilla es $p \wedge \neg p$, como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

p	q	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Ejemplo: Dada la proposición p: La puerta es verde. La proposición $p \wedge \neg p$ equivale a decir que: La puerta es verde y la puerta no es verde.
Por otra parte, si una proposición compuesta cuyos resultados en sus diferentes líneas de la tabla de verdad, dan como resultado V y F le llama **contingencia o contingente**.

Razonamientos

Podemos ahora analizar o razonar el valor de verdad de proposiciones del tipo $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Q$, donde n es un número natural, las P_i son las premisas (o hipótesis) con $i = 1, ..., n$ y Q es la conclusión. Por ejemplo:

1. Si el mayordomo es el asesino, se pondrá nervioso cuando lo interroguen.

2. El mayordomo no se puso muy nervioso cuando lo interrogaron.

Por lo tanto, el mayordomo es el asesino. ¿Cuál es su valor de verdad?
Resolución: Vemos que la primera premisa es una proposición compuesta (condicional) y la segunda también es compuesta por ser una negación. Llamamos p : El

mayordomo es el asesino, y q : El mayordomo se puso muy nervioso cuando lo interrogaron. En forma simbólica sería: $[(p \to q) \wedge \neg q] \to p$, lo que queremos analizar. Como sabemos que $p \to q$ es verdadera y $\neg q$ verdadera, en la tabla de verdad podemos ver que ambas condiciones se cumplen solo en la última fila. Esto se verifica cuando p es falsa, es decir, que $\neg p$ es verdadera, y ... ¡ el mayordomo no es el asesino!

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$
V	V	F	V	F
F	V	F	V	F
V	F	V	F	F
F	F	V	V	V

Ejercicio: A partir de los enunciados, simbolícelos y obtenga conclusiones:
a) Si Juan nació en Mendoza entonces es argentino.
Juan Nació en Mendoza.
b) Si Juan nació en Mendoza entonces es argentino.
Juan no es argentino.

A lo largo de los ejercicios y ejemplos, vimos que no siempre es necesario construir toda la tabla de verdad, en el siguiente ejercicio, vemos una manera práctica de encontrar el valor buscado, ahorrando tiempo.

Ejercicio: Obtener el valor de verdad de la proposición $(p \wedge q) \wedge (r \vee s)$, sabiendo que el valor de verdad de p es Falsa.
Resolución: Sabiendo que p es Falsa, la conjunción $(p \wedge q)$ también lo es, independiente de que q sea V ó F. Luego, la siguiente conjunción $(p \wedge q) \wedge (r \vee s)$ también lo es, independientemente de los valores de las proposiciones r y s.
Esta es la forma en que una computadora generalmente resuelve este problema, generando un árbol de expresión como el de la figura 1 y se recorre evaluando las expresiones o proposiciones. Si podemos "cortar" una rama del árbol y no evaluarla, y de todos modos obtener el resultado nos ahorra tiempo de cálculo.

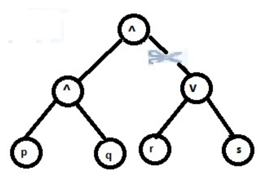


Figura 1: Árbol donde cortamos la rama r y s

Realice la tabla de verdad, para convencerse de este hecho. Note que de esta manera tendrá que realizar una tabla con 16 filas.

1.3 Esquemas proposicionales en una indeterminada

En Álgebra y Aritmética suele decirse que la siguiente expresión: $x + 2 = 5$ es una ecuación.
Tal expresión no es una proposición, pues no tiene sentido afirmar que sea verdadera o falsa, pero existe algún reemplazo de x por un número de modo tal que se transforma en una proposición.

Por ejemplo, si reemplazamos x por 7 queda la expresión $7 + 2 = 5$, es una proposición, la cual en este caso es Falsa. Si reemplazamos x por 3 queda la expresión $3 + 2 = 5$, es una proposición, la cual en este caso es Verdadera.

Seguramente, al leer el ejemplo anterior todos intentaron reemplazar x por un número y no se les ocurrió reemplazarla por algo que nos lleve a la frase: $manzana + 2 = 5$. Esto se debe a que uno elije los elementos de un conjunto que hace que la frase tenga sentido, ya sea verdadera o falsa. A este conjunto le llamamos universo.

Definición de Conjunto Universal: Llamaremos de esta forma al conjunto de variables que al reemplazar la x por un elemento de ese conjunto se obtenga una proposición. Lo notaremos por U y lo nombraremos por conjunto universal o, simplemente, universo. Debe contener, al menos, un elemento.

Ahora podemos definir:

Definición de esquema proposicional en la indeterminada x: es toda expresión que contiene a x, y posee la siguiente propiedad: "Existe por lo menos un nombre tal que la expresión obtenida sustituyendo la indeterminada por dicho nombre, es una proposición".

Convención: Llamaremos simplemente esquema en lugar de esquema proposicional. Las indeterminadas suelen llamarse variables o incógnitas.

Ejemplos

1. "La x es blanca" es esquema pues existe una constante "flor" que si ocupa el lugar de la variable x produce la siguiente proposición: "La flor es blanca".
Que esta proposición sea Verdadera o Falsa dependerá de cual sea la flor particular que se está eligiendo.
2. ¿Qué es x? NO es un esquema, pues no hay constante que sustituida en la variable produzca una proposición.

Ejercicio: Si x es una variable, decir cuáles de las siguientes expresiones son esquemas:

1) Juan y x fueron al teatro.
2) x es perro.
3) Distancia del punto P a x es igual a 2. (El punto P es conocido)
4) $x \geq 0 \wedge x \leq 3$.

Vamos a utilizar símbolos tales como $p(x)$, $q(x)$, para designar esquemas de incógnita x.

Definición: Si $p(x)$ es un esquema en x y a es una constante, se llama valor de $p(x)$ en la constante a a la expresión obtenida de $p(x)$ sustituyendo x por a. `El valor de` $p(x)$ `para` a `se designa` $p(a)$`.`

Ejemplo: Sea $p(x)$: Esta x no es un objeto, y a es "casa". Reemplazmos: $p(a)$: "Esta casa no es un objeto"

Vamos a definir al conjunto de valores de verdad de p, lo simbolizamos con $\mathrm{V}(p)$, al conjunto formado por todas las constantes a que hacen verdadera la proposición $p(a)$.

1.4 Cuantificadores: Universal y Existencial

Hasta ahora se ha visto un método para obtener proposiciones a partir de esquemas $p(x)$ consiste en sustituir la variable x por una constante adecuada a de tal forma que $p(a)$ sea una proposición.
Hay otro método distinto que transforma un esquema en proposición a partir del esquema $p(x)$, es el método de los **operadores** o **cuantificadores**.

Como vimos en los ejemplos, uno trata de reemplazar la incógnita por valores que tenga cierto sentido como para obtener una proposición, por ejemplo, si el esquema es $p(x) : x > 5$, pensamos que x puede ser un número, y dependiendo de si x es 8 ó x es 2, será verdadera o falsa; pero no pensamos en reemplazar x por algún color del arco iris. Esto nos conduce a la siguiente definición:

Por medio de los cuantificadores podemos convertir en proposiciones a los esquemas de la siguiente manera:

El cuantificador existencial,
"Para algún x se verifica $p(x)$"

"Existe x tal que se cumple $p(x)$"
"Para al menos un x se satisface $p(x)$"
son proposiciones que se escriben como $(\exists x)(p(x))$

Ejemplo: Hay flores rojas.

El cuantificador universal,
"Para todo x se verifica $p(x)$"
"Para cualquier x tal que se cumple $p(x)$"
"Para cada x se satisface $p(x)$"
son proposiciones que se escriben como $(\forall x)(p(x))$

Ejemplo: Todas las flores son rojas.

Escribe en forma simbólica las siguientes proposiciones, usando cuantificadores, esquemas proposicionales, decir cuales son las constantes apropiadas (es decir, el universo) y decide el valor de verdad de las mismas.

p: Todo número real mayor que 2 tiene un cuadrado mayor que él mismo.
q: Algunos números reales con cuadrado mayor que 4 son menores que 2.
r: Cualquier número satisface $x^2 - x \geq 0$ o no es mayor que 2.

Observa que en "r" hace falta el conjunto universal ...
¿ Qué ocurre si U está formado por los números reales? ¿ Y si a U lo forman los enteros?

Ejercicio: En cada caso decir si se trata de esquemas, en tal caso transformarlo en una proposición:
(a) Usando constantes adecuadas.
(b) Dar un universo y aplicar cuantificadores. Hallar su valor de verdad de la pro-

posición.

1. $P(n)$: $n+1>n$.
2. $Q(n)$: n^2+1.
3. $R(n)$: $n^2-3n+2=0$.
4. $S(n)$: n es un número racional.

Alcance de un operador

Sea el siguiente ejemplo:

$$(\exists x)(x\ es\ verde) \wedge x\ es\ rojo \quad (*)$$

Vemos que el operador existencial se refiere únicamente al esquema x es verde y **NO** a x es rojo, o sea que el alcance del operador llega únicamente al primer esquema, por lo que al no poder reemplazar la segunda x por algún elemento del universo, no es un esquema que pueda ser proposición. Si quisiéramos que alcance a los dos esquemas, tendríamos que poner más paréntesis:

$$(\exists x)(x\ es\ verde \wedge x\ es\ rojo)$$

o sea, usaríamos paréntesis.

Del ejemplo precedente podemos deducir que: La expresión "x es verde" es el esquema más simple que aparece en $(*)$ inmediatamente después del operador.

La expresión "$x\ es\ verde \wedge x\ es\ rojo$", también es un esquema pero no es el más simple. La expresión "$x\ es\ rojo$" es un esquema también simple pero no aparece después del operador.

Definición: Se llama **alcance de un operador en** x al esquema más simple que aparece inmediatamente después del operador, salvo que se presenten paréntesis, en cuyo caso deben aplicarse las reglas habituales referentes al uso de paréntesis.

Negación de operadores

Sea la siguiente proposición: $(\forall n)(n$ es un número primo), la cuál sabemos es Falsa en el universo de los números naturales.

Vamos ahora a negarla: $\neg(\forall n)(n$ es un número primo)

En lenguaje corriente esto nos dice que no todos los números son primos que es lo mismo que si dijéramos: algunos números no son primos, y simbólicamente

$$(\exists n)(n \text{ no es un número primo})$$

De lo anterior se puede deducir, y vale de manera general y no sólo el ejemplo que:

$$\neg(\forall x)(p(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x))$$

De manera análoga se obtiene:

$$\neg(\exists x)(p(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg p(x))$$

Por lo tanto, en palabras decimos que:
La negación de un cuantificador universal (existencial, respectivamente) es equivalente a la afirmación de un cuantificador existencial (universal) cuyo alcance es la negación del alcance del primero.

Ejercicio: Expresar en lenguaje corriente las siguientes proposiciones. Establecer el alcance de los operadores y proponer el Universo.

a) $(\forall x)(x\ es\ metal \rightarrow x\ se\ funde)$

b) $(\forall x)(x\ es\ metal) \vee el\ oro\ se\ funde$

c) $(\exists x)(x\ es\ cuadrado) \to (\exists x)(x\ es\ paralelogramo)$

d) $\neg(\forall x)(x\ es\ hombre \to x\ es\ mortal)$

1.5 Ejercicios

1.- Indicar cuáles de las siguientes frases son proposiciones:

a) Un cuadrado tiene 3 lados.

b) $x > 2$.

c) Hoy tardé más de una hora en llegar.

d) El mes de abril del 2019.

2.- Expresar las siguientes proposiciones en forma simbólica, negarlas y retraducir su negación al lenguaje coloquial:

a) Juana no es justa pero mantiene el orden.

b) Los alumnos conocen a los simuladores y los desprecian.

c) Si los alumnos conocen a los simuladores, entonces los desprecian.

3.- Construir las tablas de verdad de:

a) $\neg(p \wedge q)$

b) $\neg(\neg p \wedge \neg r) \wedge q$

c) $(p \to q) \to r$

d) $\neg(p \vee q)$

e) $\neg q \wedge \neg r$

f) $(\neg s \wedge p) \vee (s \wedge \neg p)$

4.- Consideremos las siguientes proposiciones p, q, r, s.

p: La galera era un barco antiguo de comercio.

q: La galera era un barco antiguo de guerra.

r: La galera era un barco antiguo que se movía con velas.

s: La galera era un barco antiguo que se movía con remos.

Escribir con palabras del lenguaje coloquial, los resultados de las siguientes operaciones:

a) $p \wedge q$

b) $\neg q \vee \neg r$

c) $\neg r \wedge s$

d) $q \vee s$

5.- Simbolizar las siguientes proposiciones:

a) Si $5 \geq 3$ entonces $5 - 3 \geq 0$.

b) Si A, B y C son números racionales tales que 2A+3B-5C = 0 entonces A=B=C=0.

6.- a) Pasar a la forma si ... entonces ... y simbolizar:

i) Juan viaja a Córdoba sólo si consigue pasaje en avión.

ii) Es necesario ser argentino para ser presidente de la república.

b) Expresar y simbolizar utilizando la palabra suficiente:

i) La temperatura bajará si comienza a soplar el viento del sur.

ii) Si aprobó el examen entonces contestó bien el 40 % de sus preguntas.

c) Expresar y simbolizar utilizando la palabra necesario:

i) Si un triángulo está inscripto en un semicírculo entonces es rectángulo.

ii) Pedro es argentino sólo si es americano.

7.- Establecer si las siguientes fórmulas constituyen tautologías, contradicciones o contingencias.

a) $(p \wedge q) \wedge (q \wedge p)$

b) $(p \vee q) \rightarrow p$

c) $(q \rightarrow p) \vee p$

8.- Encontrar proposiciones equivalentes usando las leyes de De Morgan y sustituciones adecuadas:
a) $p \wedge \neg q$
b) $\neg(\neg p \wedge q)$
c) $(p \wedge q) \vee q$
d) $(p \wedge q) \wedge (q \wedge \neg p)$

9.- Determinar en cada caso si la información que se da es suficiente para conocer el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas. Justifica tu respuesta, realiza de ser posible, el árbol.
a) $(p \wedge q) \rightarrow r$, r es V.
b) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$, p es V y r es F.
c) $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$, q es V.

10.- Expresar mediante cuantificadores, esquemas proposicionales, conectivos, además usar equivalencias lógicas para expresar de manera condicional las siguientes proposiciones:
Todos los hombres son mortales.
Hay algún número que no es primo.

11.- Sean los esquemas $p(x) : x + 4 = 3$ y $q(x) : x^2 - 1 = 0$.
a) ¿Existe un universo en el cuál la proposición $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$ resulte verdadera? Justifique.
b) Hallar un universo U en el cuál la proposición anterior sea falsa. Justifique.

12.- Simbolizar las siguientes proposiciones, usando proposiciones simples y/o esquemas proposicionales, cuantificadores y dar un universo.
a) Todo conjunto infinito contiene un subconjunto infinito y el conjunto de los números naturales es infinito.

b) Todo número distinto de cero es divisible por 1, -1, por el mismo y por su opuesto.
c) 25 no es divisible por 2 ni por 3 pero es múltiplo de 5.

13.- Simbolizar utilizando esquemas, cuantificadores y conectivos lógicos y dar un universo.
a) Hay objetos rojos y además hay objetos verdes.
b) Hay números pares o todos los números son múltiplos de 3.
c) No todos los números son múltiplos de 5.
d) Todos los números no son múltiplos de 5.
e) Algunos hombres son santos.
f) Ninguna virtud es una cualidad natural.
g) No todo número real es un número racional.
h) Todos los números primos son impares excepto el 2.
i) Si existe un número natural menor que 4 entonces todo múltiplo de 6 es múltiplo de 5.

14.- Negar las proposiciones anteriores simbólica y coloquialmente.

vspace1cm

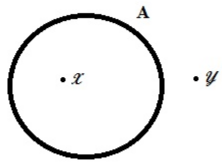
1.6 Teoría de Conjuntos

Un **conjunto** es la reunión de entes u objetos bien definidos y diferenciables entre sí, que en general tienen características similares. Estos entes u objetos se llaman **elementos del conjunto**. Si a es un elemento del conjunto A se denota con la **relación de pertenencia** $a \in A$. En caso contrario, si a no es un elemento de A se denota $a \notin A$.

1.6.1 Formas de Expresar un Conjunto

- Diagrama de Venn

  Seguramente esté familiarizado con gráficos como el siguiente, donde el elemento $x \in A$ y el elemento $y \notin A$.



- Expresado por Extensión

  Cuando damos de manera explícita los elementos, es decir, se especifica cuales son cada uno de los elementos de A. Por ejemplo: $A = \{1, 3, 5, 7\}$

- Expresado por Comprensión

  Cuando expresamos la propiedad que define el conjunto. En el ejemplo anterior, $A = \{x : x \text{ } es \text{ } un \text{ } nro. \text{ } impar \text{ } menor \text{ } o \text{ } igual \text{ } a \text{ } 7\} = \{x : x \text{ } es \text{ } impar \ \wedge x \leq 7\}$

  Se lee x tal que x es impar y x es menor o igual que 7.

Ejercicio: Considere $\{x : x > 1 \wedge 2.x = 1\}$ ¿Es un conjunto, qué elementos tiene?

`Ejemplos de Conjuntos muy utilizados en matemática.`

- Ya vimos en lógica, al conjunto universal o universo, que contiene a todos los elementos en un determinado contexto. Notado por la letra $\mathcal{U}$.
- El conjunto vacío, es aquél que no contiene elementos. Se nota $\emptyset$ ó sólo con $\{\}$.
- Conjuntos numéricos: números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, que desarrollaremos en el siguiente módulo.

1.6.2 Relaciones entre elementos y conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que:

- A está contenido en B ó A es un subconjunto de B, si todo elemento de A es también un elemento de B. En símbolos $A \subseteq B$ si y sólo si se verifica el condicional $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

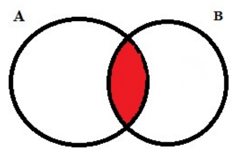
- Los conjuntos A y B son iguales, si y sólo si tienen los mismos elementos. En símbolos $A = B$ si y sólo si se verifica el bicondicional $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

Ejercicio: Como verá, hay una relación entre la contención y el condicional. ¿Cómo expresaría entonces la igualdad? Utilice su deducción para comparar los siguientes conjuntos: $A = \{2, 3\}$, $B = \{x : x(x-3) = 0\}$ $C = \{x : x(x-3)(x-1) = 0\}$

1.6.3 Operaciones con Conjuntos

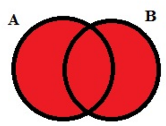
1.6.3.1 **Intersección**

Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A \cap B$ que llamaremos **intersección de A y B**, como el conjunto formado por los elementos que son comunes a ambos conjuntos. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$



1.6.3.2 **Unión**

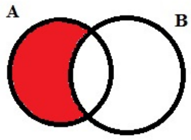
Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A \cup B$ que llamaremos **unión de A y B**, como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$



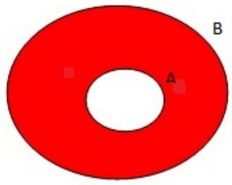
1.6.3.3 **Diferencia**

Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A - B$ que llamaremos **diferencia entre A y B** (en ese orden), como el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B. $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

1.6.3.4 **Complemento**



Si $A \subseteq B$, se define el **complemento de A con respecto a B** como el conjunto formado por los elementos de B que no pertenecen a A. $C_B A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$ En particular, si $B = \mathcal{U}$, decimos directamente el complemento de A, sin necesidad



de aclarar respecto a quién. En general, usaremos $B = \mathcal{U}$ y simplificamos la notación usando: A^C.

Ejercicios

1. Escriba por extensión los siguientes conjuntos:

$A = \{x : x \; es \; una \; letra \; de \; la \; palabra \; FACULTAD\}$

$B = \{x : x \; es \; una \; cifra \; del \; nro. \; 3{,}502{,}332\}$

$C = \{x : x \; es \; un \; diptongo \; de \; la \; palabra \; VOLUMEN\}$

2. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$, $C = \{2, 4\}$, calcule los conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $C_B C$, $B - A$, $A \cap B \cap C$, $A - (B - C)$, $(A - B) - C$, $B - C$. Compare los resultados y obtenga conclusiones posibles.

3. ¿Cuál es la intersección entre los conjuntos $\{\{a\}\}$ y $\{a\}$? (Realice el Diagrama de Venn.)

4. Complete las proposiciones siguientes con los símbolos $\in$ o $\notin$:

$2 \quad \{1, 3, 5, 7\}, \quad 5 \quad \{2, 4, 5, 6\}, \quad 2 \quad \{4, 5, 6, 7\}, \quad 0 \quad \emptyset, \quad 1 \quad \{1, 2\} - \{1, 6\},$

París   {x: x es el nombre de un país},   2 $\{1,2\}-\{1,6\}$,   2 $\{1,2\}\cap\{1,6\}$,
Jujuy   {x: x es provincia Argentina},   2 $\{1,2\}\cup\{1,6\}$, a $\{\{a\}\}$, $\{a\}$ $\{\{a\}\}$

5. ¿Cómo puede traducir las leyes de De Morgan con la notación de conjuntos?

6. Sean A y B dos conjuntos no vacíos tales que $A \subseteq B$. Determinar, si es posible, el valor de verdad de los siguientes enunciados. Justificando la respuesta.

- Siempre $\exists x\ (x \in A \wedge x \notin B)$
- Siempre $\exists x\ (x \in B \wedge x \notin A)$
- $\forall x\ (x \notin B \rightarrow x \notin A)$
- $\forall x\ (x \notin A \rightarrow x \notin B)$

7. Sean A, B y C conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Sabiendo que $a \in A, b \in B, c \in C, d \notin A, e \notin B$ y $f \notin C$, ¿cuáles de las siguientes informaciones son ciertas?

$$\begin{array}{ccc} a \in C & b \notin A & b \in A \\ c \notin A & e \notin A & f \notin A \\ d \in B & f \in C_{\mathcal{U}}C & c \in C - B \\ a \in C \cap B & b \in C_B A & d \notin A \cap C \end{array}$$

1.6.4. Relación entre la teoría de conjuntos y la lógica proposicional

Como habrán notado, existe una relación muy estrecha entre la Teoría de Conjuntos y la Lógica Proposicional.
Para mostrar dicha relación, podemos completar el siguiente cuadro:

Conjuntos	$A \cap B$			$C_{\mathcal{U}}A$		$A - B$
Proposiciones		$a \vee b$	$a \rightarrow b$		$a \leftrightarrow b$	

Además, el conjunto vacío se corresponde con una *contradicción* y el conjunto universal con una *tautología*.

Mediante esta correspondencia, todos los resultados sobre conjuntos se pueden reescribir en términos de lógica proposicional y viceversa.

Ejercicio: por medio de esta relación, escribir en términos de lógica las siguientes propiedades.

1. Idempotencia: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$
2. Absorción: $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$
3. Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Complementariedad $A \cup C_{\mathcal{U}} A = U$; $A \cap C_{\mathcal{U}} A = \emptyset$
5. $C_{\mathcal{U}}(C_{\mathcal{U}} A) = A$

CAPÍTULO 2: Conjuntos Numéricos

Este módulo tiene por objetivo recordar y clarificar las propiedades de las operaciones en los conjuntos numéricos que se consideran imprescindibles para las materias siguientes. Al finalizar el mismo el alumno debe ser capaz de:
a) Identificar los distintos tipos de números
b) Aplicar correctamente las propiedades de las operaciones.

2.1 Números Naturales: ($\mathbb{N}$)

Este conjunto de números existe desde que el hombre tuvo la necesidad de contar, por ejemplo, su ganado. Es el primer conjunto de números que aprendemos, posee infinitos elementos y aparece como su nombre lo indica en forma natural. Este conjunto, simbolizado con la letra $\mathbb{N}$, tiene como elementos:

$\mathbb{N}= \{0,1,2,3,4,...\}$ y así continúa indefinidamente.

Consideremos las dos operaciones fundamentales en $\mathbb{N}$, suma y producto, y veamos sus propiedades:
1) La suma de dos números naturales es un número natural. En este caso, se dice que el conjunto de los números naturales es *cerrado para la suma.*
2) El 0 es tal que sumado con cualquier otro número no lo modifica. Se dice que el 0 es el *neutro para la suma.*
3) Si se consideran 3 números naturales la suma de los dos primeros más el tercero resulta igual que si al primero se le suma el resultado de la suma de los otros dos.

Se dice que *la suma de números naturales es asociativa*
4) Si a un número natural le sumo otro, se obtiene el mismo resultado que si al segundo le sumo el primero. Se dice que *la suma de números naturales es conmutativa.*

Ejercicios

1) Expresar simbólicamente las 4 propiedades anteriormente enunciadas.
Resolvemos la primera propiedad: $(\forall a)(\forall b)((a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N}) \rightarrow a + b \in \mathbb{N})$
2) Enunciar las propiedades del producto de números naturales, en lenguaje corriente y simbólicamente.
3) ¿Cuál es la propiedad que enlaza la suma y el producto de naturales? Definirla.

Orden Usual

Con los naturales también se pueden expresar ordenamientos, por ejemplo: se ordenan los planetas a partir del Sol, la Tierra es el tercero y Marte es el cuarto. Además dadas dos colecciones de objetos se pueden comparar sus cantidades: *La Tierra tiene menos satélites que Júpiter.*

Surgen las siguientes preguntas: ¿$\mathbb{N}$ tiene primer elemento?, ¿cuál es?, ¿tiene último elemento?
Dados $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$ se cumple: $(a < b) \vee (a > b) \vee (a = b)$.

2.2 Números Enteros: ($\mathbb{Z}$)

En $\mathbb{N}$, la resta (por ejemplo, $a - b$) sólo está definida si el minuendo (en este caso sería a) es mayor o igual al sustraendo (en este caso, b). Para que dicha operación no sea tan restringida se creó el conjunto de enteros negativos (notado por -$\mathbb{N}$). Para ello para cada $n \in \mathbb{N}$ se introduce el opuesto de n, notado $-n$. Y así decimos que el conjunto de los números enteros (que se nota con $\mathbb{Z}$, por que en alemán número es Zahlen) es la unión de los naturales y sus opuestos $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup$ (-$\mathbb{N}$) . Además se cumple: $n + (-n) = 0$

Los números negativos se consideran menores que 0 en el orden usual de los enteros. A los naturales se los llama enteros positivos, siendo mayores o iguales que 0.

Ley de Monotonía

Sean a, b y c números enteros tales que $a \leq b \rightarrow a + c \leq b + c$

Ejercicio:

Ejemplificar la Ley de Monotonía con distintas combinaciones en los signos (es decir enteros positivos y negativos) de a, b y c.

Números Pares e Impares

Dentro del conjunto de los enteros se distinguen dos subconjuntos cuya unión componen a $\mathbb{Z}$, ellos son el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares.

Definición: Un número entero n es **par** si y sólo si existe un entero k tal que $n = 2k$.

Definición: Un número entero n es **impar** si y sólo si es el siguiente de un número par. Por lo tanto, si n es impar se cumple que $n = 2k + 1$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Divisibilidad

En muchos problemas es necesario saber si el reparto de varios elementos en diferentes grupos se puede hacer equitativamente, es decir, si el número de elementos dividido entre el número de grupos sería una división entera. Al dividir un número $n \in \mathbb{Z}$ entre otro número $d \in \mathbb{Z}$, la división sea exacta sin resto, diremos que n es **múltiplo** de d, que n es **divisible** por d, que d es **divisor** de n, o que d **divide** a n.

En este caso, existe un tercer entero (cociente) c, tal que $n = c.d$. En general, aplicamos la divisibilidad a números enteros, pudiendo ser positivos o negativos.

En símbolos: Sean $n \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$, decimos que d divide a n si $\exists\, c \in \mathbb{Z}$ tal que

$n = c.d.$ Se nota $d|n$.

Otro concepto importante en la teoría de Números Enteros es el de **número primo**. Los números primos han adquirido importancia más allá de la matemática teórica, cuando por la década del '70 se comenzaron a utilizar para generar claves para el envío de mensajes cifrados. Esta área llamada criptografía se desarrolla gracias a la ciencia de la computación y la mayor capacidad de cálculo de las computadoras.

Definición: : Un número entero se dice **primo** si tiene exactamente 4 divisores: la unidad, el propio número y sus respectivos opuestos.

Ejercicios

1) Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Hallar los elementos primos de A. Justificar.
2) Si un número es primo, ¿qué se puede decir de su opuesto?
3) Hallar la descomposición en primos de los números 340 y 195.

Repasemos algunos conceptos del colegio ¿Se acuerda cómo factorizaba un número para hallar el $m.c.m.$ (mínimo común múltiplo) y el $M.C.D.$ (máximo común divisor) en el colegio? Recordemos: si queremos calcular el $m.c.m.(8, 12)$ y el $M.C.D.(8, 12)$, necesitamos conocer la factorización de 8 y de 12:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad 8 = 2 \times 2 \times 2 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 12 = 2 \times 2 \times 3$$

Luego, el $m.c.m.(8, 12) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$ (24 es el menor número tal que $8|24 \wedge 12|24$); y el $M.C.D.(8, 12) = 2 \times 2$ (4 es el mayor número tal que $4|8 \wedge 4|12$).

4) Cuando debemos resolver preguntas como: ¿cuántos objetos hay en cada caja si en cada caja hay el mismo número de objetos? o ¿ cuándo ocurrirán al mismo tiempo dos eventos?, nos resultan de utilidad el $M.C.D.$ y el $m.c.m.$.
Resolver el siguiente problema: Dos amigas deciden ir a un SPA que abre a las 13hs, una de ellas está interesada en un tratamiento que dura 80 minutos, mientras que

la otra en uno de dura 2 horas. Los tratamientos se realizan continuamente. Ellas saben que las 13 horas no llegan al lugar, ¿a qué deberán estar para que ambos tratamientos inicien juntos?

Para los siguientes ejercicios se recomenida pedir ayuda al docente:
5) Demostrar que la intersección entre el conjunto de números pares e impares es vacío.
6) Sean $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ c \in \mathbb{Z}$, probar que si $a|b \wedge b|c \rightarrow a|c$ (propiedad transitiva de la divisibilidad).

2.3 Números Racionales: ($\mathbb{Q}$)

La operación de dividir no es siempre posible en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Puede efectuarse 12:4 pues existe un entero, el 3, tal que $4.3 = 12$. Pero, no ocurre lo mismo con 4:12 ó - 3:7, por lo tanto esta imposibilidad nos conduce a ampliar a $\mathbb{Z}$ definiendo un conjunto en el que la división sea realizable en dicho conjunto.
Vamos a definir ahora formalmente este nuevo conjunto que se denomina conjunto de los números racionales y se simboliza con la letra $\mathbb{Q}$ (la letra Q proviene Quotient que significa cociente).

$$\mathbb{Q} = \{\ \tfrac{m}{n} : m\mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z}\ \wedge n \neq 0\ \}$$

Los números racionales pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse y el resultado es un número racional es decir, las operaciones son cerradas en $\mathbb{Q}$.

En $\mathbb{Q}$ se definen la suma y el producto de forma que las propiedades de esas operaciones ya definidas en $\mathbb{Z}$, se conserven:

Dados $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \wedge \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ se define la **suma** $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b.d}$
y el producto $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

Se dice que $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** si y sólo si $a.d = b.c$.

Ejemplos

$\frac{9}{-3}$ es equivalente a -3.

$\frac{3}{12}, \frac{1}{4}, \frac{-6}{-24}$ son equivalentes.

Una operación entre racionales no se modifica si reemplazamos uno de ellos por otro que sea equivalente.

Ejercicio: Enuncie en palabras y con símbolos las siguientes propiedades, para el producto y suma definidas en $\mathbb{Q}$, si corresponde.

a) Ley de cierre.

b) Asociativa.

c) Conmutativa.

d) Existencia del neutro.

e) Existencia del opuesto.

f) Existencia del inverso para todo elemento no nulo.

g) Propiedad distributiva.

Ejercicios: Hallar el error en el siguiente cálculo:

$4 + \frac{18}{3} = \frac{12}{3} + 6$ pues $\frac{12+18}{3} = \frac{12+18}{3}$, por la definición de suma en $\mathbb{Q}$. Entonces $4 - \frac{12}{3} = 6 - \frac{18}{3}$ y luego, $2\left(2 - \frac{6}{3}\right) = 3\left(2 - \frac{6}{3}\right)$. Así resulta $2 = 3$.

Orden en $\mathbb{Q}$

Dados $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \wedge \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $b \wedge d > 0$ se dice:

$\frac{a}{b}$ es menor o igual que $\frac{c}{d}$ y se anota $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ si y sólo si $a.d \leq b.c$.

De manera análoga, se define el mayor o igual (queda de tarea escribirla).

Ejercicios

1) Ordenar de menor a mayor $\frac{-12}{6}, 3, \frac{2}{5}, -1, \frac{-3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{7}, \frac{6}{4}$.

2) Sea $-4 < m < 2$

a) Hallar $m \in \mathbb{Z}$ tal que se cumpla lo anterior.

b) Idem si $m \in \mathbb{Q}$.

3) Probar que entre dos números racionales distintos, hay otro racional.

Importante: Esta propiedad muestra que siempre habrá un número racional entre dos, por muy próximos que estén. Por lo tanto se dice que el conjunto de los racionales es **denso**.

2.4 Números Irracionales: ($\mathbb{I}$)

El concepto de números irracionales proviene de la Escuela Pitagórica, que descubrió la existencia de números irracionales (que notaremos con la letra $\mathbb{I}$), es decir que no es racional. Es posible que este descubrimiento se produjera al intentar resolver el problema siguiente:

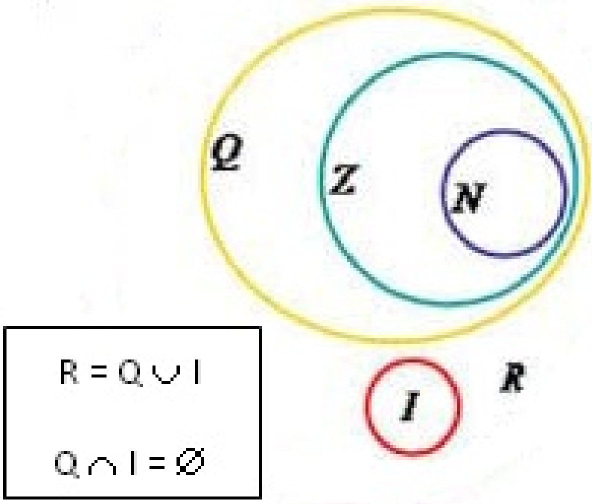
Si se traza un cuadrado cuyo lado mida la unidad, es decir 1, y se intenta calcular lo que mide la diagonal utilizando el Teorema de Pitágoras. ¿Cuánto mide la diagonal?

Este tipo de números irracionales son aquellos que **no** pueden expresarse como cociente de dos enteros $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$. Cuando en $\mathbb{Q}$ hacemos la cuenta de m dividido n obtenemos una expresión decimal, que puede ser finita (por ejemplo, $\frac{9}{3}$ es 3 o $\frac{5}{2}$ es 2,5, hay finitos números después de la coma) o puede ser infinita periódica (por ejemplo, $\frac{2}{3}$ es $0,\widehat{6}$, el 6 se repite infinitas veces). Es decir, si un número no es decimal exacto y no es decimal periódico, no representa a un número racional.

Entre los irracionales más conocidos podemos citar: π, $\sqrt{p}$ (con p primo), e.

2.5 Números Reales: ($\mathbb{R}$)

Se llaman números reales aquellos números que son racionales o irracionales. Al conjunto de todos ellos lo notaremos con $\mathbb{R}$.



El hecho de que los números reales son la unión de los racionales e irracionales nos indica que hemos completado la recta real sin dejar "agujeros". En la recta real se definen ciertos subconjuntos que se denominan **intervalos**. Definimos un intervalo entre dos números reales a y b al conjunto de todos los reales comprendidos entre a y b. Los números a y b se denominan extremos del intervalo, y pueden o no pertenecer al mismo. Veamos algunos ejemplos:

$(a, b) = \{x : a < x \wedge x < b\}$ intervalo abierto;
$(a, b] = \{x : a < x \wedge x \leq b\}$ intervalo semiabierto en a y cerrado en b;
$[a, b] = \{x : a \leq x \wedge x \leq b\}$ intervalo cerrado;
$(-\infty, b) = \{x : x < b\}$ semirecta abierta en b;
$[a, \infty) = \{x : a \leq x\}$ semirecta cerrada en a.

Sobre $\mathbb{R}$ definimos dos operaciones: Suma $(+)$ y Producto $(.)$ de la manera usual y una relación de orden $(<)$.

Analicemos las propiedades de cada una de ellas (guíese por lo discutido en el Ejercicio Propiedades de la sección 2.3).

Ejercicios

1) Dados $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}$. Probar:

a) $a > b \rightarrow a + c > b + c$

b) $(a > b \wedge c > 0) \rightarrow a.c > b.c$

c) $(a > b \wedge c < 0) \rightarrow a.c < b.c$

2) Probar que, para todo $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0, a > b \leftrightarrow a.a > b.b$

3) Analizar la validez de la siguiente afirmación:

"Si $a.b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$". ¿Vale la recíproca?

2.5.1 Potencia de un número real y exponente entero

Cuando queremos indicar productos de factores iguales, generalmente usamos la notación exponencial. Recordemos que si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, entonces $a^n = a.a.a.....a$ n-veces, donde a es la base y n es el exponente.

Por convención si $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ya que $a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$.

Y la regla de las potencias de igual base sigue siendo válida.

Propiedad de las potencias: La potencia es distributiva respecto al producto y al cociente.

Sean $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Resulta muy simple sistematizar el producto, cociente y potencia, de potencias de igual base.

$$a^n.a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},\ a \neq 0$$
$$(a^n)^m = a^{n.m}$$

Una pregunta que surge es la siguiente: ¿la potencia es distributiva respecto de la suma?

La respuesta es **NO**, veamos un ejemplo:

$(2+3)^2 = 5^2 = 25$

en cambio, $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

sabemos que $25 \neq 13$ entonces: $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

Ejercicios

1) En los siguientes cálculos se han cometido errores al aplicar propiedades. Indicar dichos errores y corregirlos.

a) $\left(b^2.b^{-3}.b^5\right)^2 = \left(b^4\right)^2 = b^{16}$ suponemos $b \neq 0$

b) $\frac{\left(a^2\right)^4}{\left(a^{-3}\right)^2} = \frac{a^6}{a^{-6}} = 1$ suponemos $a \neq 0$

c) $\frac{7^4.\left(7^2\right)^6}{\left(7^9\right)^2} = \frac{7^4.7^{12}}{7^{18}} = 7^{-2} = 49$

d) $(7-14)^0 + 5^0 = 1$

2) Aplicando las propiedades de la potencia, probar que:

a) $\frac{\left(102^{n+1}\right)^3}{\left(2^{n+1}\right)^3} = 1000$

b) $2^{2-m}.\left(22^{m+1} + 2^{m+2}\right) = 32$

3) Calcular:

a) $\frac{\left(1-\frac{3}{2}\right).\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}-1\right):\left(\frac{2}{5}-2\right)^2} =$

b) $\left[\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-4}.\frac{1}{16} + 11 =$

c) $\frac{0{,}27}{\left(\frac{16}{25-16}\right)^{-1/2}} - \sqrt{\frac{25}{16}} =$

d) $\frac{\sqrt{7},7^5.\sqrt{7^3}}{(7^2)^3} =$

4) Responder si es V ó F y justificar:

a) $\frac{1}{4} < a < 25 \to \left(\frac{1}{4}\right)^2 < a^2 < 25^2$

b) $-3 < -a < \frac{-1}{3} \to (-3)^2 < (-a)^2 < \left(\frac{-1}{3}\right)^2$

2.5.2 Radicación

Es la operación inversa de la potenciación.

Definición: Sean $b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\exists c$ tal que $c.n = b$ y este número c es llamado la **raíz n-ésima** de b

$$c^n = b \leftrightarrow c = \sqrt[n]{b}$$

Ejemplos: $\sqrt[3]{-64} = -4$ pues $(-4)^3 = -64$

$\sqrt{36} = 6$ pues $6^2 = 36$ pero también $\sqrt{36} = -6$ pues $(-6)^2 = 36$.

Convención: en un ejercicio si vemos escrito $\sqrt{36}$ consideramos la solución positiva, es decir 6. Pero si estamos resolviendo una ecuación o problema, debemos considerar ambas soluciones o dependerá la respuesta del contexto.

Veamos ahora si existe alguna restricción para la radicación en $\mathbb{R}$.

Supongamos que se desea calcular $\sqrt{-9}$, o sea buscar un número $b \in \mathbb{R}$ tal que $b = \sqrt{-9} \leftrightarrow b^2 = -9$. Y tal número no existe pues b^2 es positivo siempre.

En consecuencia, si se trabaja en $\mathbb{R}$:

$$\sqrt[n]{a} \text{ existe, si } (a \in \mathbb{R} \text{ y } n \text{ es impar}) \text{ ó } (a \geq 0 \text{ y } n \text{ es par}).$$

Entonces, ¿es siempre posible simplificar una raíz?

Propiedades de la radicación:

Dados $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ tales que existen $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ se cumple:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\tfrac{a}{b}} = \tfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Respecto de la suma y la resta: $\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

Reiteramos, para evitar la ambigüedad al simplificar, se debe tener en cuenta el valor aritmético de la raíz. El **valor aritmético** de la raíz n-ésima de a^n es:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, \ si\ n\ es\ impar \\ |a|\,, \ si\ n\ es\ par \end{cases}$$

En particular, $\sqrt[2]{a^2} = |a|$.

2.6 Racionalización de denominadores

En muchas cuestiones en que se presentan fracciones cuyo *denominador es una expresión irracional*, por ejemplo $\sqrt{a+b}$, es conveniente transformarlas en otras equivalentes de manera que el cálculo sea más sencillo.
Esta racionalización se logra siempre, multiplicando numerador y denominador de la fracción por una expresión irracional conveniente. Sin embargo, es tan complicada la fracción obtenida que sólo en casos muy sencillos tiene utilidad práctica.
Se racionaliza el denominador de toda expresión del tipo:

$$\tfrac{k}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \text{ ó bien } \tfrac{k}{\sqrt{a} \pm c}$$

multiplicando los dos términos por la expresión conjugada:

$$\sqrt{a} \mp \sqrt{b} \text{ ó bien } \sqrt{a} \mp c,$$

respectivamente.

En particular, si b ó c son 0, se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{a}$.

Veamos algún ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{5}}}.\frac{\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{5}}},$$

es decir multiplicamos por 1, y podemos aplicar en el denominador diferencia de cuadrados,

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}-5} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}-5}.\frac{\sqrt{2}+5}{\sqrt{2}+5},$$

,volvimos a racionalizar para “sacar” a $\sqrt{2}$ del denominador, y por diferencia de cuadrados tenemos,

$$\frac{(\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{5}})(\sqrt{2}+5)}{2-25}$$

2.7 Ejercicios

1) Calcular:

a) $\sqrt{5}.\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4} =$

b) $\left(1+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{20} =$

c) $\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}.\left(1+\sqrt[4]{81}\right) =$

2) Escriba fracciones equivalentes a las dadas, racionalizando los denominadores:

a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}$

3) ¿Son correctas las igualdades? a) $\sqrt{50} = 5.\sqrt{2}$

b) $\sqrt{12} = 3.\sqrt{2}$

c) $\sqrt[5]{64} = 2.\sqrt[5]{-2}$

4) Hallar el error en las siguientes demostraciones: a)$a \in \mathbb{R} \rightarrow a = -a$. Demostración: $a^2 = (-a)^2 \rightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} \rightarrow a = -a$

b) $a \in \mathbb{R} \rightarrow a = 1$. Demostración: $a - 1 = -(1 - a) \rightarrow (a - 1)^2 = (1 - a)^2$

$\rightarrow a - 1 = 1 - a \rightarrow a + a - 1 = a + 1 - a \rightarrow 2a - 1 = 2 \rightarrow a = 1$.

5) Teniendo en cuenta la propiedad: $a, b \in \mathtt{R}^+$ entonces $a > b \leftrightarrow a^2 > b^2$, analizar su validez, ordenando:

a) $2.\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{1}{\sqrt{6}}$

6) Demostrar la propiedad transitiva de la divisibilidad, utilizando la defición de divisibilidad:

$$((a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \wedge c \in \mathbb{Z}) \wedge (a|b \wedge b|c) \rightarrow a|c.$$

7) Responder V ó F y justificar: Si

a) $(a.b)^2 = a^2.b^2$

b) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$

c) $(\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$ con $b \neq 0$

d) $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$

e) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Para los siguientes incisos, vamos a suponer que están definidas las raíces, es decir, se pueden realizar las operaciones en los reales.

f) $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

g) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

CAPÍTULO 3: Expresiones Algebraicas. Ecuaciones, Sistemas de Ecuaciones Lineales y Mixtos

Este módulo tiene por objetivo el familiarizarse con el lenguaje algebraico, que nos permite de manera simple, hallar relaciones, propiedades y resolver problemas.

3.1 Expresiones Algebraicas

Una **expresión algebraica** es cualquier combinación de números representados por letras o por letras y cifras vinculados entre sí por operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación. Ejemplos de expresiones algebraicas son: $3a + \frac{b}{2}$, $2x^2 + 3x + 5$, $\sqrt{a}x^2 - \frac{\pi}{x+6}$, $3xy + y$.

Las expresiones algebraicas deben operarse convenientemente con el fin de convertirlas en expresiones equivalentes más sencillas, como vimos en el caso de racionalización. Una diferencia entre el álgebra y la aritmética, recide en que en esta última trabajamos con operaciones entre números y obtenemos otro número, como vimos en parte del capítulo 2, por ejemplo, $(7 - 14)^0 + 5^0 = 1$. En cambio en expresiones algebraicas, como ser $(b^4)^2 = b^{16}$ del mismo ejercicio del capítulo 2, nos dá como resultado una familia de soluciones que dependen del valor de b.

Ejercicios

1. Identifique y liste las expresiones algebraicas que vea en los ejercicios del capítulo 2.

2. Indique en cada caso, cuál/cuales expresiones algebraicas es/son equivalentes a la dada (justifique):

a) $\frac{2x}{2+x}$ (i) $\frac{x}{1+x}$ (ii)$\frac{2}{3}$ (iii)$\frac{2x}{2+x}$

b) x^2x^n (i) x^{2-n} (ii)x^{2+n} (iii)$(x^2)^n$

c) $\frac{h^n}{h^2}$ (i) $h^{\frac{n}{2}}$ (ii)h^{2-n} (iii)h^{n-2}

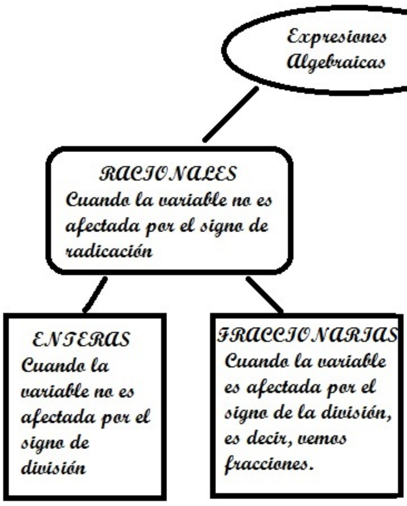
d) $x^2 - x^2x + 2$ (i) $-x^2 + 1$ (ii)$x^{(2+2)} + 2$ (iii)$-x^2 + 2$

e) $\frac{2}{x^2-5x} + \frac{1}{x-5}$ (i) $\frac{3}{x^2-5x}$ (ii)$\frac{2+x}{x(x-5)}$ (iii)$\frac{3}{x-5}$

f) $3xy^2 - x^2y + 5y(xy)$ (i) $3(xy)^2 + 5xy + 5y^2$ (ii)$7xy$ (iii)$8xy^2 - yx^2$

Clasificación de las Expresiones Algebraicas

En el siguiente diagrama se presenta la clasificación de las expresiones algebraicas:



Ejercicio: Del ejercicio 1 anterior, clasifique las expresiones algebraicas.

3.2 Polinomios

Denominamos **polinomio** a toda expresión algebraica entera racional. Algunos ejemplos:

$$P(x) = 3x^2 - 5x + \sqrt{2}$$
$$Q(x,y) = 4x^2y + \tfrac{5}{3}xy^3 - x^2y^3$$

En este curso trabajaremos con polinomios de una variable, como el primer ejemplo. Por lo que vamos a definir:

Definición: Un polinomio es la suma expresiones de la forma:

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0,$$

donde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ son números reales, x es la indeterminada y $n, n-1, ..., 1, 0$ son números naturales.

Si $a_n \neq 0$ el grado de $P(x)$ es n, y la notación que usamos es: $gr(P(x)) = n$. Ejemplo: $P(x) = -4x^7 + 5x^4 + 3x - 1$ es un polinomio de grado 7. En particular, cuando $a_i = 0, \forall i$, es decir, $0(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + ... + 0x + 0$ se llama **polinomio nulo** y no tiene grado.

Ejercicio:
De acuerdo a la definición ¿Cuáles de las siguientes expresiones son polinomios?
a) $P(x) = 7x^4 + 5x - 2$
b) $Q(x) = \frac{5}{3}x^2 + ln(2)x$
c) $P(x) = \frac{1}{3}x^{-2} + 5x^2 - 2$
d) $S(x) = x^7 + 5x^{\frac{3}{2}} - 2x^5$

Algunas características de los polinomios

- Se llama *monomio* a una expresión de la forma $M(x) = ax^n$, donde $a \in \mathbb{R}$, x es una indeterminada, $n \in \mathbb{N}$.
- Así como los polinomios de un sólo término se llaman monomios, los de dos términos se llaman *binomios* y los de tres, *trinomios*, nombres que seguramente ya conozcan.
- El coeficiente del monomio de mayor grado es el *coeficiente principal*.
- Si el coeficiente principal es 1, el polinomio se llama *mónico*.
- Al término a_0 se lo llama *término independiente*.
- Un polinomio está *ordenado* cuando los monomios que lo componen están escritos en forma creciente o decreciente según sus grados. En general ordenamos en forma decreciente.

3.2.1 Operaciones con Polinomios

Habrán notado ya que cualquier $a \in \mathbb{R}$ es un polinomio de grado 0. Y la magia del álgebra nos permite definir las operaciones con polinomios, de manera que incluyan lo que ya sabemos del capítulo 2.

3.2.1.1 Suma y Resta

Cuando se suman o se restan dos polinomios el resultado es un polinomio. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios, los coeficientes del resultado se obtienen sumando o restando los coeficientes respectivos de iguales potencias de la indeterminada en las expresiones de $P(x)$ y $Q(x)$.

Ejemplo: Sean $P(x) = -3x^2 + 2x - 1$ y $Q(x) = x^3 + 3x - 2$. Hallar $Q(x) + P(x)$ y $Q(x) - P(x)$, para estas operaciones nos conviene completar los polinomios ordenados.

$$\begin{array}{c} x^3 + 0x^2 + 3x - 2 \\ \underline{+0x^3 - 3x^2 + 2x - 1} \\ \text{Así } Q(x) + P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} x^3 + 0x^2 + 3x - 2 \\ \underline{-(0x^3 - 3x^2 + 2x - 1)} \\ \text{Así } Q(x) - P(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1 \end{array}$$

El resultado de la suma o la resta de dos polinomios puede ser el polinomio nulo o tiene grado menor o igual que el del polinomio de mayor grado que estamos sumando o restando.

Polinomios iguales y opuestos

Si al sumar dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ el resultado es el polinomio nulo $0(x)$, entonces $P(x)$ y $Q(x)$ son *polinomios opuestos*. Si al restarlos se obtiene $0(x)$, entonces *los polinomios son iguales*.

Ejercicios

1) Sean $P(x) = 2x-8x^3+5x^2$ y $Q(x) = -x^6+x-4x^2-2x^7+7x^3$. Hallar $Q(x)+P(x)$ y $Q(x) - P(x)$.

2) Sean $S(x) = 4x^3 - 2$, $T(x) = -4x^3 + x$ y $W(x) = 6 - x$. Colocar el símbolo de $<$, $=$, $>$, según corresponda:

$gr(S(x))$ ..... $gr(S(x)+T(x))$

$gr(S(x))$ ..... $gr(S(x)+T(x)+W(x))$

$gr(S(x))+gr(T(x))$ ..... $gr(S(x)+T(x))$

$gr(S(x))$ ..... $gr(T(x))$

$gr(W(x))$ ..... $gr(S(x)+T(x))$

3) Hallar el opuesto de $P(x) = x^3 + 8 - (-x^5 + 2x^4)$.

3.2.1.2 Producto de Polinomios

Cuando se **multiplican** dos polinomios, el resultado es un polinomio y su grado es igual a la suma de los grados de los polinomios factores, si ellos no son nulos. Para calcular el producto multiplicamos cada uno de los monomios de un polinomio por cada uno de los monomios del otro polinomio y sumamos.

Ejemplo: Si $P(x) = x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = x - 1$, entonces

$$P(x).Q(x) = (x^2 + 2x + 1)(x - 1) = x^3 + 2x^2 + x - x^2 - 2x - 1 = x^3 + x^2 - x - 1.$$

Ejercicios

1) Dados $P(x) = 2x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 4$ y $Q(x) = 8 - 3x^2 - 5x$. Hallar $P(x).Q(x)$.

2) Decidir si es Verdadero o Falso: "El grado del polinomio producto es siempre mayor que cada uno de los grados de los factores". Justificar.

3) Hallar el grado, el coeficiente principal y el término independiente del polinomio $W(x) = P(x).Q(x)$, sabiendo que son ordenados y completos, que sus expresiones comienzan así y que sus coeficientes cumplen con la secuencia que se evidencia en sus primeros términos:

$$P(x) = x^{50} - x^{49} + x^{48} - x^{47} + ... \quad \wedge\, Q(x) = 2x^{23} + 4x^{22} + 8x^{21} + 16x^{19} + ...$$

4) Sean $S(x) = 2x^3 - x + 2$, $T(x) = x - 3$ y $W(x) = -x^2 - x - 1$. Hallar:

a) $2\left[(S(x) + T(x)).W(x)\right]$

b) $\frac{1}{3}(T(x).T(x)) - 4W(x).S(x)$

3.2.1.3 División de Polinomios

Algoritmo de la División: Dados dos polinomios $P(x)$ (que llamaremos dividendo) y $Q(x)$ (que llamaremos divisor), con $Q(x) \neq 0(x)$, existen y son únicos dos polinomios $C(x)$ (que llamaremos cociente) y $R(x)$ (que llamaremos resto) tales que:

$$P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$$

con $gr(R(x)) < gr(Q(x))$ o $R(x) = 0(x)$.

Ejemplo:

$$\begin{array}{cl}
6x^3 - 17x^2 + 15x - 8 & \underline{|3x-4} \\
\underline{-(6x^3 - 8x^2 + 0x + 0)} & 2x^2 - 3x + 1 \\
-9x^2 + 15x - 8 & \\
\underline{-(-9x^2 + 12x + 0)} & \\
3x - 8 & \\
\underline{-(3x - 4)} & \\
-4 &
\end{array}$$

Notarán el parecido con la división de números reales, aquí $C(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y $R(x) = -4$, que podemos ver que $gr(R(x)) = 0 < gr(Q(x)) = 1$.

Podemos verificar que $6x^3 - 17x^2 + 15x - 8 = (3x - 4)(2x^2 - 3x + 1) + (-4)$.

Ejercicios

1) Sean $P(x) = 2x^7 + 3x^6 + 18x^3 + 29x + 10$ y $Q(x) = 2x^2 + 3x$. Hallar el cociente y el resto de la división entre $P(x)$ y $Q(x)$.

2) ¿Existe un polinomio $T(x)$ tal que $6x^6 - 9x^4 + 10x^2 - 15 = T(x).(2x^2 - 3)$?

3) Hallar $S(x)$, si es posible, tal que $9x^5 + x^2 - 5x = (4x^2 - 5).S(x) + (x - 8)$.

Divisibilidad de polinomios

Si al realizar la división de $P(x)$ y $Q(x)$ el resto es nulo se dice que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ o que $Q(x)$ divide a $P(x)$. Quedando entonces:

$$P(x) = Q(x).C(x)$$

Definición: si la división entre $P(x)$ y $(x - a)$ es cero, decimos que a ***es raíz de*** $P(x)$.
Es decir: si analizamos $P(x) = (x - a).C(x)$ y reemplazamos x por el valor a, $P(a) = 0$.

Ejercicios:

1) Sean $P(x) = x^3 + 2x + 12$; $Q(x) = x - 2$ y $S(x) = x + 2$. Hallar el resto de las divisiones entre:
a) $P(x)$ y $Q(x)$
b) $P(x)$ y $S(x)$
Sacar conclusiones, relacionado con el concepto de raíz.

2) Calcular el valor de $k \in \mathtt{R}$ tal que $Q(x) = 3x - 2$ divida a $P(x) = kx^3 + x^2 - k$.

3.2.2 Factorización

En el capítulo 2, usamos varias veces que un número puede ser escrito como producto de números primos, lo que facilitaba cálculos como la suma de números fraccionarios. Esta idea, se puede extender a los polinomios donde dado un polinomio $P(x)$ se puede descomponer como producto de polinomios primos.
Decimos que un polinomio $P(x)$ de grado no nulo es *primo o irreducible* cuando no puede ser expresado como producto de polinomios de grado menor el $gr(P(x))$.
Definición: *Factorizar* un polinomio significa expresarlo como producto de polinomios primos o irreducibles.

Vamos a repasar algunas técnicas para expresar un polinomio como producto.

3.2.2.1 Factor Común

A veces sucede que en un polinomio $P(x)$ la variable x figura en todos sus términos, en estos casos es muy conveniente extraer **factor común**. Observar que al extraer la variable x como factor común la extraemos elevada a la menor de sus potencias.
También en algunos ejemplos se extrae un número que es factor en todos sus coeficientes.

Ejemplo: $P(x) = 4x^5 + 8x^4 + 12x^2 = 4x^2(x^3 + 2x^2 + 3)$.

3.2.2.2 Factor Común por Grupos

Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto aparece un nuevo factor común en todos los grupos.

Ejemplo: $P(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 =$
$= (7x^5 - 5x^4) + (14x - 10) = x^4(7x - 5) + 2(7x - 5)$.

3.2.2.3 Diferencia de Cuadrados

Cuando se nos presenta la resta de dos términos y cada uno de ellos está elevado a una potencia par, lo expresamos como diferencia de cuadrados.

Ejemplo: $P(x) = x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$.

3.2.2.4 Trinomio Cuadrado Perfecto

Analicemos el resultado de elevar un binomio (dos términos) al cuadrado: $(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2+6x+9$. Si elevamos al cuadrado a $x-3$: $(x-3)^2 = (x-3)(x-3) = x^2-6x+9$
Las expresiones difieren en el término $6x$, en la primera es positivo y en la segunda negativo.

Miremos un ejemplo de un polinomio que sea un trinomio cuadrado perfecto: $P(x) = x^4+8x^2+16 = (x^2+4)^2$ (verifíquelo).

Ejercicio: Expresar los siguientes polinomios como producto usando la técnica que corresponda o más de una de ellas:

1. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 6x^2$
2. $P(x) = x^6 - x^2$
3. $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
4. $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$
5. $P(x) = x^{10} - x^6 - x^4 + 1$
6. $P(x) = 4x^2 + 4x + 1$
7. $P(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{16}$
8. $P(x) = x^5 - x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 9x - 9$

3.3 Ecuaciones

3.3.1 Ecuaciones Lineales

Un polinomio lineal (o de grado 1) es un polinomio de la forma $P(x) = ax + b$ donde $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
Si igualamos a cero este polinomio lineal en la variable x, $P(x) = 0$ obtenemos una **ecuación** de la forma: $ax + b = 0$
Esta igualdad significa la cuestión siguiente: ¿Existe algún valor real de x, digamos α, tal que $P(\alpha) = 0$? Y en ese caso, ¿cómo se halla α?
Podemos entonces decir que tiene sentido la igualdad numérica, lo que nos conduce a la siguiente definición:

Definición: Una **ecuación** es una relación de igualdad entre cantidades, algunas de ellas desconocidas, llamadas **incógnitas**.Una **solución** de una ecuación algebraica con una incógnita x es un valor α tal que al reemplazar x por α en la ecuación esta se transforma en una identidad numérica.
Decimos que la ecuación $ax + b = 0$ es de una **ecuación de primer grado con una sola incógnita**.

Resolver una ecuación significa determinar si tiene solución y en tal caso hallarlas.

Ejemplos
(a) $3x - 9 = 0$, tiene solución $x = 3$.
(b) $2x + 1 = 2x$, no tiene solución.
(c) $(x - 1) = 5$ tiene solución $x = 6$.

Ejemplo de resolución:
Sea la ecuación: $2x + 4 = 12$, si resto 4 a ambos miembros:
$2x + 4 - 4 = 12 - 4$ entonces $2x = 8$. Si multiplico por $\frac{1}{2}$ ambos miembros:
$\frac{1}{2}, 2x = \frac{1}{2}, 8$, entonces $x = 4$.

Para resolver la ecuación $ax + b = 0$ se deben utilizar operaciones elementales y las propiedades de los números reales. (Es lo que por lo general llamamos pasajes de términos).

3.3.2 Ecuaciones Cuadráticas

Un **polinomio cuadrático** es una expresión algebraica que tiene la siguiente forma: $P(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son números reales, $a \neq 0$.
Como en el caso anterior, si igualamos el polinomio a 0, es decir, $P(x) = 0$, se obtiene una **ecuación cuadrática**:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ud. ya habrá inferido que esto puede seguir para ecuaciones cúbicas (o de grado 3), y así, siguiendo el término de mayor grado. En este curso sólo resolveremos las de grado 1 y 2, las de grado superior para encontrar la solución buscamos factorizar por los casos ya mencionados.
Pero falta responder la pregunta: ¿Cómo resolvemos una ecuación cuadrática?

Analicemos algunas características (vaya tratando de hacer las cuentas que justifiquen su respuesta):

1. ¿Es verdad que si la ecuación lineal tiene coeficientes racionales, entonces su solución (si la tiene) también es un número racional?

2. ¿Lo anterior es cierto para las ecuaciones cuadráticas? Para verlo considere la ecuación cuadrática: $x^2 = 2$.

3. Un tipo de ecuación cuadrática un poco más complicada que la anterior es la de la forma: $(x - a)^2 = b$, con $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Pruebe con (i) $a = 2, b = 3$; (ii) $a = 1, b = 0$; (iii) $a = 7, b = -5$. (Compare con lo visto en radicación de números).

4. Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

   - $(x-3)^2 = \frac{1}{2}$
   - $(1-x)^2 = \sqrt{2}$
   - $(2x+1)^2 = 4$
   - $(3-2x)^2 = 0$

3.3.2.1 Método de Completar Cuadrados

Se trata de transformar una ecuación cuadrática cualquiera en una ecuación equivalente, pero cuyo aspecto sea el de las estudiadas en el análisis anterior. Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ (se entiende ya que $a \neq 0$, porque sino no tendría grado 2), seguiremos los siguientes pasos:
(*Para una lectura más amigable se presenta el desarrollo junto a un ejemplo, se recomienda leer paso a paso.*)

Paso 1: "limpiamos a x^2"	Veamos un ejemplo: $\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} = 0$
Multiplicamos por $\frac{1}{a}$ (ya que $a \neq 0$),	**Paso 1:** multiplicamos por 2:
$\frac{1}{a}ax^2 + \frac{1}{a}bx + \frac{1}{a}c = \frac{1}{a}0$	$2\frac{x^2}{2} + 2 \times 2x - 2\frac{3}{2} = 2 \times 0$
Paso 2: ¿Quién es doble producto?	$x^2 + 4x - 3 = 0$
Reescribimos el coeficiente, b, de x:	**Paso 2:** Sea b el doble de alguien, $b = 2p$,
$\frac{b}{a} = 2\frac{b}{2a}$, la ecuación queda:	como $4 = 2 \times 2$, queda: $x^2 + 2 \times 2x - 3 = 0$
$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0$	
Paso 3: ¿Hay un trinomio cuadrado?	**Paso 3:** Sumamos y restamos para obtener
Recordar: $(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}$	el trinomio cuadrado. Para ello, como:
podemos escribir nuestra ecuación como:	$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$
$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$	Nuestra ecuación queda:
Y "despejando": $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$	$(x+2)^2 - 4 - 3 = 0$
y tiene la forma que estudiamos antes.	"Despejamos", $(x+2)^2 = 7$
Paso 4: Sumamos fracciones	**Paso 4:** seguimos despejando x,
común denominador $4a^2$, quedando:	para ello aplicamos raíz (ver sección 2.5.2)
$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$	quedando: $x + 2 = +\sqrt{7} \vee \ x + 2 = \sqrt{7}$
Tenemos así dos soluciones distintas[1]:	
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \wedge x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	Luego, $x_1 = -2 + \sqrt{7} \wedge \ x_2 = -2 - \sqrt{7}$

[1]**Recordemos que una fracción es positiva cuando su numerador y su denominador tienen el mismo signo. En nuestro caso $4a^2 > 0$, y entonces el miembro de la derecha será positivo sólo cuando $b^2 - 4ac > 0$.**

Hemos demostrado una fórmula que tal vez al lector le resulte conocida del colegio secundario:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1}$$

La importancia de conocer el método de completar cuadrados, no sólo nos permite demostrar esta fórmula. También será útil en Matemática 1, cuando trabajemos con cónicas, donde la ecuación tiene dos variables, y no se puede aplicar esta fórmula.

Ahora, ¿qué ocurre si $b^2 - 4ac < 0$ y si $b^2 - 4ac = 0$?
El número $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación.

Ejercicio: Según lo analizado, complete el siguiente cuadro:

Discriminante	Cantidad de soluciones	Soluciones
$b^2 - 4ac > 0$	2	$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \wedge x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$b^2 - 4ac = 0$		
$b^2 - 4ac < 0$		

La fórmula deducida para hallar las soluciones de una ecuación cuadrática es completamente general, o sea que puede aplicarse a cualquier ecuación de segundo grado. Muchas veces la forma de la ecuación permite una solución más rápida y sencilla. Por ejemplo:

- Si Ud. quiere resolver la ecuación: $x^2 - 2 = 0$, puede aplicar la fórmula, pero es algo similar a sacar el auto del garaje para ir a la casa de su vecino. La ecuación se resuelve simplemente despejando: $x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2}$.
- Algo similar ocurre con todas las ecuaciones a las que les falta el término en x: $2x^2 - 3 = 0 \to 2x^2 = 3 \to x^2 = \frac{3}{2} \to x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.
- Las ecuaciones cuadráticas a las que les falta el término constante ("les falta c"), se resuelven sacando el factor común ax, por ejemplo: $-3x^2 + 4x = 0 \to -3x(x - \frac{4}{3}) = 0$, y como sabemos un producto es 0, cuando al menos uno de los factores es 0, es decir, $-3x = 0 \vee x - \frac{4}{3} = 0$, de donde tenemos dos soluciones: $x_1 = 0 \wedge x = \frac{4}{3}$.

Ejercicio: Dada la ecuación: $14x^2 = 2x$, la podemos resolver de dos maneras:

- Sacando factor común:

$$14x^2 = 2x$$
$$14x^2 - 2x = 0$$
$$14x(x - \tfrac{1}{7}) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = \tfrac{1}{7}$$

- Dividiendo por x a ambos lados de la igualdad:

$$14x^2 = 2x$$
$$14x = 2$$
$$x = \tfrac{1}{7}$$

Responda a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la opción correcta al problema?
2. ¿Por qué considera correcta su respuesta?
3. ¿Por qué es incorrecta la otra respuesta?
4. ¿Cuál fue el error que condujo a la respuesta incorrecta?

3.3.3 Ejercicios

1. Resolver justificando cada paso.

- $10 - 3x = x - 2$
- $a - x = 3(x - a)$
- $3(2 - x) + 1 = -x + \frac{5}{2}(1 - x) + \frac{x+3}{2}$
- $\frac{1}{3}x - x = \frac{1}{4}x + 1$
- $5x + 2 = 8x - \frac{1}{2} - 3x$

2. Resuelva las ecuaciones e indique el conjunto numérico al que pertenecen.

- $10 = x - 2$

- $x = 3(x-5)$
- $\frac{3x}{2} - \frac{1}{2} = -x + \frac{5}{2}$
- $\sqrt{5} - \frac{1}{3}x = \frac{1}{4}x + 1$
- $5\pi x + 2\pi = 8x - \frac{\pi}{2}$
- $x + 3 - \frac{2}{3}(x-1) = \frac{1}{3}(x+5) + 2$
- $3(2-x) + 1 = -x + \frac{5}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(x+3)$

3. Resuelva despejando la incógnita:

(i) $m^2 - 12 = 0$	(ii) $n^2 + 25 = 0$	(iii) $3y^2 - 45 = 0$
(iv) $4u^2 - 9 = 0$	(v) $(d-3)^2 - \frac{1}{2} = 0$	(vi) $(y+1)^2 - 9 = 0$
(vii) $\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2} = 0$	(viii) $w^2 - 25 = 0$	(ix) $\frac{49}{4}d^2 = 1$

4. Resuelva sacando factor común:

(i) $12m^2 + m = 0$	(ii) $9n^2 + 9n = 0$	(iii) $7y^2 = -4y$
(iv) $6u^2 - u = 0$	(v) $x^2 = 2x$	(vi) $(\frac{y}{2})^2 - \frac{1}{2}y = 0$

5. Determine el valor de k que transforme a cada expresión en un trinomio cuadrado perfecto:

(i) $x^2 + 9x + k$	(ii) $x^2 + kx + 36$
(iii) $x^2 - 8x + k$	(iv) $x^2 + 2kx + \frac{81}{4}$

Para los valores hallados de k, resuelva las ecuaciones que se forman al igualar las expresiones algebraicas anteriores a 0.

6. Resuelva completando cuadrados:

(i) $x^2 + 6x = 7$	(ii) $x^2 - 8x + 11 = 0$	(iii) $4x^2 = 12x + 11$
(iv) $x^2 - 10x + 5 = -20$	(v) $(x-1)(x-3) = 1$	(vi) $\frac{5x^2}{3} + x - \frac{2}{3} = 0$

7. Utilice el discriminante para completar la siguiente tabla:

Ecuación	Discriminante	Cantidad de soluciones
$\frac{x^2}{3} - 2x + 6 = 0$		
$2x^2 - 6x + 3 = 0$		
$\sqrt{3}x^2 = -x - 2$		
$2x^2 = 2x + 1$		
$0{,}32x^2 - 0{,}75x - 0{,}66 = 0$		
$ax^2 = -bx$		
$x^2 = (a+b)x - ab$		

Encuentre las soluciones de las ecuaciones anteriores.

3.3.4 Ecuaciones Fraccionarias

Expresiones algebraicas racionales fraccionarias, como por ejemplo: $\frac{-3x^2+1}{x^3+6x}$ pueden pensarse como cociente de polinomios. Si transformamos esta expresión en una ecuación. ¿cómo la resolvemos?

Es posible, operando de manera conveniente, transformarla en una ecuación no fraccionaria, y entre las soluciones estarán las soluciones de la ecuación original, pero CUIDADO pueden aparecer otras soluciones, resolvamos un ejemplo:

$$\frac{4x}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} + 1 = 0 \quad \text{recuerde que } 1 = \frac{1}{1}$$

Sumamos las 3 fracciones, utilizando el mínimo común múltiplo, para ello es muy importante reconocer y usar los métodos de factorización. En este caso, usamos diferencia de cuadrados.

$$\frac{4x-2(x+1)+1(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 0$$

Operando, es decir, propiedad distributiva y sumando,

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = 0$$

Para que una división dé como resultado 0, el denominador debe ser 0, es decir $x^2 + 2x - 3 = 0$. Resolvemos (verifíquelo) la ecuación cuadrática tiene dos soluciones: $x = 1 \wedge x = -3$. Sin embargo, $x = 1$ es una solución mentirosa, ya que si la reemplazamos en la ecuación fraccionaria, estaríamos dividiendo por 0.
Importante: Debemos descartar inicialmente $x = 1 \wedge x = -1$ de las posibles soluciones ya que nos llevarían a soluciones mentirosas porque no podemos dividir por cero!!!

Ejercicio: Resolver las siguientes ecuaciones, indicar el/los valor/es de x no permitidos.

1. $\frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-2x}$
2. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} = 1$
3. $1 + \frac{1}{x} = x(1 - \frac{x+1}{x})$
4. $\frac{6}{x^2-9} = 3$
5. $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{x+1}$
6. $\frac{3x-3}{x^2-1} = 2x$

3.4 Sistemas de Ecuaciones

Cuando uno trabaja con problemas aplicados, por lo general, tenemos varias cantidades desconocidas, y también varias condiciones que las verifican, es decir, que ya no tenemos una ecuación sino un sistema de ecuaciones.
En este curso veremos **sistemas de ecuaciones lineales** (todas las ecuaciones involucradas tienen grado 1) o sistemas de ecuaciones con una ecuación de grado 2. A esta altura del capítulo no le sorprenderá que dado un sistema de ecuaciones puede tener solución o no. Pero, ¿cómo los resolvemos? Consideraremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Veamos dos métodos para resolver los sistemas de ecuaciones.

3.4.1 Método de Sustitución

Consiste en "despejar" una de las incógnitas de una de las ecuaciones y reemplazarla otra. Resolvamos el ejemplo:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Podemos fácilmente despejar x de la primera ecuación, sumando y a ambos lados de la igualdad,

$$\begin{cases} x = 2 + y \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Si reemplazamos la primera ecuación en la segunda, obtenemos una única ecuación con una única incógnita,

$$3(2 + y) - y = 1 \quad \text{aplicamos distributiva, } 6 + 3y - y = 1$$

Resolvemos la ecuación lineal (verifíque), y tenemos como solución: $y = \frac{-5}{2}$; pero no nos olvidemos de la x... para ello volvemos a la primera ecuación, donde despejamos $x = 2 + y \rightarrow x = \frac{-1}{2}$

3.4.2 Método de Suma y Resta

Por medio de sumar (o restar) las ecuaciones, se "elimina" una de las incógnitas, a veces es necesario multiplicar por una constante una de las ecuaciones. Resolvamos el ejemplo anterior:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Podemos fácilmente restar ambas ecuaciones, por ejemplo a la ecuación 2 le restamos la primera (esto se traduce en multiplicar la ecuación 1 por -1, y sumarlas), eliminando la incógnita y, hagámoslo:

$$\begin{cases} -x+y=-2 \\ 3x-y=1 \end{cases}$$

Sumando obtenemos una única ecuación con una única incógnita,

$$2x=-1 \to x=\tfrac{-1}{2}$$

Si en cambio, si multiplicamos la ecuación 1 por -3 y sumamos, es decir, tendríamos el sistema:

$$\begin{cases} -3x+3y=-6 \\ 3x-y=1 \end{cases}$$

Sumando obtenemos una única ecuación con una única incógnita,

$$2y=-5 \to y=\tfrac{-5}{2}$$

Análogamente, si en el sistema 2 a la primera ecuación le restamos la segunda, sólo nos queda la incógnita x, obteniendo $2x=-1$, entonces $x=\frac{-1}{2}$.
En Matemática 1, utilizaremos este método para operar matrices.

3.4.3 Sistemas de Ecuaciones Mixtos

Los métodos vistos en las secciones anteriores no sólo sirven para resolver sistemas lineales, cuando se trata de sistemas de ecuaciones mixtos el método de sustitución resulta el más conveniente, ya que podemos despejar la ecuación lineal y reemplazarla en la ecuación de grado superior. Nuevamente, resolvamos un ejemplo donde x e y son incógnitas y k es una constante:

$$\begin{cases} -x+y=1 \\ x^2+y^2=k \end{cases}$$

Despejando y de la primera ecuación y reemplazando en la segunda, obtendremos:

$$x^2 + (1+x)^2 = k \rightarrow x^2 + 1 + 2x + x^2 - k = 0$$

Ecuación cuadrática que ya puede resolver, dependiendo del valor de k que analizaremos después (hacer las cuentas necesarias),

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 - 8(1-k)}}{4} \wedge x_2 = \frac{-2 - \sqrt{4 - 8(1-k)}}{4} \tag{3}$$

Luego que tenga las soluciones de x, recuerde reemplazar en la ecuación lineal, para obtener las soluciones de y. Queda para el lector completar este reemplazo, donde claramente nos queda una dependencia del valor de la constante k.

Dijimos que un sistema de ecuaciones puede tener solución o no. Volvamos nuestro ejemplo, analizando las distintas soluciones dependiendo de la constante k [3].

Si miramos el discriminante de la ecuación cuadrática $4 - 8(1-k)$ este número puede ser positivo, cero o negativo.

- si $4 - 8(1-k) > 0 \rightarrow k > \frac{1}{2}$ en este caso la ecuación tiene dos soluciones; y por consiguiente el sistema también.
- si $4 - 8(1-k) = 0 \rightarrow k = \frac{1}{2}$ en este caso la ecuación tiene una solución; y por consiguiente el sistema también.
- si $4 - 8(1-k) < 0 \rightarrow k < \frac{1}{2}$ en este caso la ecuación cuadrática **no** tiene solución; y por consiguiente el sistema tampoco.

Ejercicio: Resolver

1. $\begin{cases} 3x - y = \frac{1}{2} \\ 2x - 3y = \frac{-5}{6} \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 2y \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{3} = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 1 \\ z - 3x = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 5 \\ -5x + y = -7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 3x - 4y + 2z = -1 \\ 2x + y + 2z = 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -x + y = 2 \\ x^2 - 6x + 8 = y \end{cases}$

3.5 Problemas de aplicación

Aquí van algunos consejos para intentar la resolución de un problema.

1. Leerlo con detenimiento, varias veces si fuera necesario, hasta que lo haya entendido. Trate de determinar qué se quiere encontrar y cuáles son los datos con los que se cuenta.

2. Haga un dibujo o diagrama que lo ayude a entender la situación.
3. Represente una de las cantidades a determinar con una letra (por ejemplo x). Trate de representar las otras cantidades en términos de x.
4. Plantear la o las ecuaciones que relacionan las cantidades conocidas con las incógnitas.
5. Resolver la o las ecuaciones.
6. Analizar si las soluciones obtenidas son solución del problema y verificar.

Problema: *"Hace dos años la edad del padre era cuatro veces la edad del hijo. Dentro de dos años, edad del hijo será la tercera parte de la edad del padre. Hallar las edades actuales."*

Resolución:
Luego de las lecturas necesarias, identificamos las incógnitas: $p =$ "edad del padre hoy" y $h =$ "edad del hijo hoy". Hay que ser lo más claros posibles al escribir las variables, NO es correcto decir: p=padre.
Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p - 2 = 4(h - 2) \\ h + 2 = \frac{p+2}{3} \end{cases}$$

La primera ecuación nos sitúa dos años atrás, y por eso a las edades actuales les restamos 2; análogamente cuando pasen 2 años le sumamos 2 a ambos, ya que el tiempo pasa de igual forma para ambos.
Resolvamos el sistema de ecuaciones, por ejemplo, usemos el método de sumas y restas. Para esto debemos ordenar el sistema.

$$\begin{cases} p - 4h = -6 \\ \frac{-1}{3}p + h = \frac{-4}{3} \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 3 y sumando eliminamos p.
Resolviéndolo (completar) llegamos a que $h = 10$, y luego, por la primera ecuación $p = 34$.

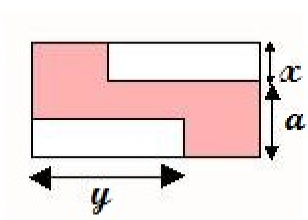
Solución: las edades actuales del padre y del hijo son 34 y 10 años respectivamente.

Ejercicio: Resuelva los siguientes problemas.

1. Una modista desea cortar una cinta de $213cm$ de longitud en tres tramos. Si cada tramo debe tener $2cm$ más que el anterior, ¿cómo debe hacer los cortes?
2. Si el ángulo vértice de un triángulo isósceles mide $64°$, hallar la medida de los otros ángulos del triángulo.
3. Una persona dispone de $28m$ de cerca para construir un corral rectangular. Si se desea que el corral mida $6m$ más de longitud que de ancho, calcular sus dimensiones.
4. Un cable que mide $60cm$ se corta en 4 tramos, y cada tramo sucesivo tiene el doble de longitud que el anterior. Hallar la longitud del tramo más largo.
5. Un cartel en una mueblería dice "lleve los dos por \$655". Si una silla cuesta \$55 más que una banqueta, ¿cuánto cuesta la silla?
6. Si el ancho de una pileta de natación rectangular es la tercera parte de su longitud y se sabe que su perímetro es de $96m$, determinar las dimensiones del natatorio.
7. Si uno de un par de ángulos suplementarios mide $35°$ más que el otro, ¿cuántos grados mide el ángulo menor?

3.6 Más ejercicios del Capítulo 3

1. Determine la expresión algebraica que describe el área sobreada de la figura:



2. Determina los valores de d que completen el cuadrado en cada una de las siguientes expresiones algebraicas:
   (a) $x^2 + 9x + d$ (b) $x^2 + dx + 36$ (c) $x^2 + 13x + d$
   (d) $x^2 - 8x + d$ (e) $x^2 + dx + \frac{81}{4}$ (f)$x^2 - dx + 121$

3. Determina si las dos ecuaciones son equivalentes:
   (a) $x^2 + 1 = 0$ $x = 4$ (b) $x^2 + 25 = 0$ $x = -5$
   (c) $x = \sqrt{9}$ $x = 3$ (d) $x = \sqrt{25}$ $x = 5$

4. Resuelve la ecuación SIN USAR la fórmula de la ecuación cuadrática:
   (a) $25x^2 = 9$ (b) $x^2 = 361$
   (c) $(x - 3)^2 = 17$ (d) $4x(x + 2)^2 = 0$

5. Resolver completando cuadrados:
   (a) $x^2 + 6x + 7 = 0$ (b) $x^2 - 8x + 11 = 0$
   (c) $4x^2 - 12x - 11 = 0$ (d) $4x^2 + 20x + 13 = 0$

6. Resuelve con la fórmula cuadrática:
   (a) $5x^2 + 13x = 6$ (b) $\frac{3}{2}x^2 - 4x = 1$
   (c) $\frac{5}{x^2} - \frac{10}{x} = -2$ (d) $24x + 9 = -16x^2$

7. Para cada una de las ecuaciones siguientes, encuentra, si es posible, las soluciones que sean reales y verifica.
   (a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ (b) $x^3 - 3x^2 + x = 0$ (c) $8x^4 - 6x^2 + 1 = 0$
   (d) $x(3x + 1)(5x - 6) = 0$ (e) $6x^2(x - 1) = 2(x - 1)$ (f) $x^2 - 4 = x^3 - 2x^2$

8. Despeje la variable especificada.
   (a) $K = \frac{1}{2}mv^2$ v.
   (b) $A = 2\pi r(r + h)$ r.
   (c) $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ t.

9. (Ejercicio para pensar) Encontrar todos los polinomios con coeficientes reales tales que verifiquen la ecuación:

$$P(x)^2 = 2x(P(x) + 1) + 1$$

10. Hallar el polinomio $P(x)$, sabiendo que es al dividirlo por $Q(x) = 2x^5 - 3x^2 - 2x - 1$, el cociente es $C(x) = 2x^3 + 4x$ y el resto es $R(x) = -3x^2 + 6x + 1$.

11. Sabiendo que al dividir $P(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x - 6$ por $Q(x)$ se obtiene como cociente $C(x) = 3x - 6$ y como resto $R(x) = 3x - 4$. Responde justificando tus respuestas: ¿Puede ser $Q(x)$ de grado 1? ¿Puede calcularse $Q(x)$ con estos datos? En tal caso, ¿cuál es el polinomio $Q(x)$?

12. Encuentra todos los valores de k tales que $P(x)$ sea divisible por el polinomio lineal dado en cada caso:
    $P(x) = kx^3 + x^2 + k^2x + 11$, $x + 2$
    $P(x) = k^2x^3 - 4kx + 3$, $x - 1$

13. Resuelva los sistemas de ecuaciones lineales, y escriba el conjunto solución:

    (a) $\begin{cases} \frac{x-\frac{x}{2}}{3} + \frac{x+y}{4} = 1 \\ \frac{2y-3}{4} - \frac{2y-x}{2} = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y-3}{2} = \frac{1}{6} \\ \frac{3(y-2)}{2} - \frac{6x+3}{6} = -\frac{3x-7}{3} \end{cases}$

    (c) $\begin{cases} 3x + \frac{3(3x-y)}{5} = 2x - \frac{4y}{3} - 5 \\ 3x + \frac{3}{2} = -\frac{11y}{2} \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases}$

14. Encuentre dos números consecutivos y positivos enteros cuyo producto sea 168.

15. La suma de un número y su recíproco es $\frac{10}{3}$. Encuentre el número. (Recíproco de a es $\frac{1}{a}$, cuando $a \neq 0$).

16. Encuentre la base y la altura de un triángulo cuya área es de $2m^2$ si su base es $3m$ más larga que su altura.

17. Cuarenta alumnos deben ser distribuidos para prácticas de linux o de java. En cada grupo de linux hay 8 alumnos, mientras que en los de java 2; el número de grupos de java supera en 10 a los de linux. ¿Cuántas grupos de linux y cuántos de java se realizarán?

18. Dos personas están acomodando una gran cantidad de sillas en un patio de manera de formar un cuadrado. Una sugiere una manera, pero le sobran 39

sillas. La otra, entonces propone sumarle una silla más a cada fila, pero le faltan 50 sillas. ¿Cuántas sillas tenían?

19. Determinar la longitud de la base y la altura de un paralelepípedo rectángulo de base cuadrada, si el volumen es de $12cm^2$ y su superficie lateral es de $24cm^2$.

20. La diferencia de los perímetros de dos círculos es de 6π y la suma de sus áreas 17π. ¿Cuáles son las medidas de sus radios?

Bibliografía Recomendada

- Libros del colegio que contengan los temas.
- Álgebra y Geometría: Una manera de pensar. Autoras: Natalia Ferre, Adriana Claudia Galli, Elena Beatriz Guzmán Mattje. (2018)
  https://libros.unlp.edu.ar/index.php/unlp/catalog/book/1289