

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

# Curso de ingreso 2022

Facultad de Informática

MATEMÁTICA 0

Dra. Verónica E. Pastor

**Dirección de Articulación  
e Ingreso**  
Secretaría Académica  
FACULTAD DE INFORMÁTICA



UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE LA PLATA

# Índice general

<b>Bienvenidos a la vida Universitaria</b>	<b>3</b>
<b>CAPÍTULO 1: Lógica y Conjuntos</b>	<b>4</b>
Proposiciones . . . . .	4
Conectivos Lógicos . . . . .	6
Esquemas proposicionales en una indeterminada . . . . .	17
Cuantificadores: Universal y Existencial . . . . .	19
Más ejercicios del Capítulo 1 . . . . .	23

## **Bienvenidos a la vida Universitaria**

Bienvenidos al curso de Ingreso de la Facultad de Informática y a Matemática 0, en particular.

Este material debe considerarse como una guía de los conceptos mínimos y necesarios para poder afrontar las siguientes asignaturas. Debe tener en cuenta que no reemplaza las explicaciones de los docentes, complementa la lectura con consultas a ellos. Este material es único para las distintas modalidades que ofrece la Facultad para ingresar, ya sea Curso Previo Inicial a Distancia, Curso Inicial Obligatorio o Redictado del Curso Inicial en cualquiera de sus modalidades, en todas hay docentes a los que se puede consultar.

# CAPÍTULO 1: Lógica y Conjuntos

Este módulo tiene por objetivo el familiarizarse con los elementos básicos de la lógica proposicional clásica; lo que permitirá establecer la validez de un enunciado complejo a partir de sus componentes. El álgebra proposicional abarca conceptos que son muy utilizados en la carrera que elegiste. Pretendemos que el alumno incorpore el bagaje lógico para que sea capaz de abordar el estudio de la teoría de conjuntos. La idea de conjunto no requiere demasiada presentación, el objetivo aquí es identificar los elementos que pertenecen y los que no a un conjunto. Interpretar correctamente la notación simbólica en la definición de conjuntos, y tratar de explicar a través de estos resultados la naturaleza del trabajo matemático.

## 1.1 Proposiciones

En el desarrollo de cualquier teoría matemática se hacen afirmaciones en forma de frases y que tienen un sentido pleno. Tales afirmaciones, verbales o escritas, las denominaremos enunciados o proposiciones.

**Definición de Proposición:** oración con valor declarativo o informativo, de la cual se puede predicar su verdad o falsedad.

Es decir,

Una **proposición** es una oración que puede ser verdadera (V) o falsa (F) pero no ambas a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

Por lo general, a las proposiciones se las representa por las letras del alfabeto desde

la letra p, es decir, p, q, r, s, t,... etc. Así, por ejemplo, podemos citar las siguientes proposiciones y su valor de verdad:

p:  $15 + 5 = 21$  (F)

q: Santa Fe es una provincia Argentina. (V)

r: El número 15 es divisible por 3. (V)

s: El perro es un ave. (F)

Aclaremos que la mayor parte de las veces los enunciados adquieren el carácter de proposición en un contexto determinado; esto es, un enunciado puede ser una proposición en un sistema determinado, y no serlo en otro.

Para ser más claro: la oración “María va al teatro” no es una proposición, a menos que yo sepa a qué María (de los millones que existen) se refiere, y si “va al teatro” quiere decir que va habitualmente al teatro o que lo hace de vez en cuando o que está yendo al teatro en este instante determinado. Por otra parte si María es mi hermana, y en este momento está saliendo, la afirmación “María va al teatro” es una proposición, puesto que claramente es verdadera o falsa. Entonces, cuando digamos que cierto enunciado es una proposición tendremos en claro que lo es en un determinado contexto, en el cual es, sin lugar a dudas, verdadera o falsa.

### **Expresiones No Proposicionales**

Son aquellos enunciados a los que no se les puede asignar un valor de verdad. Entre ellos tenemos a los exclamativos, interrogativos o imperativos, por ejemplo:

- ¿Cómo te llamas?
- Prohibido pasar.
- ¡Salí de ahí!

No son proposiciones porque no se les puede asignar un valor de verdad.

### **Clasificación de las Proposiciones**

Aquellas proposiciones que se pueden representar por una sola letra y no se pueden

descomponer en otras proposiciones, se llaman **proposiciones simples o atómicas**. Por ejemplo, sea la proposición  $p : 3 + 6 = 9$  es una proposición simple o atómica.

Cuando una proposición consta de dos o más enunciados simples, se le llama **proposición compuesta o molecular**. Así, por ejemplo, la proposición: “Pitágoras era griego y geómetra” es una proposición compuesta por las proposiciones simples,  $p$ :Pitágoras era griego y  $q$ :Pitágoras era geómetra.

No es necesario conocer si una afirmación es verdadera o falsa (es decir, su valor de verdad) para saber que es una proposición. Por ejemplo: “Hay vida extraterrestre” es una proposición, independientemente de que algunos creen que es verdadera y otros que es falsa, puesto que claramente o bien existe vida extraterrestre o bien no existe.

Nuestro sencillo estudio de las proposiciones no tratará de establecer el valor de verdad de una proposición dada, lo que muchas veces es tarea de los científicos (“el universo se originó en la gran explosión”) o los filósofos (“pienso, por lo tanto existo”).

Lo que haremos es analizar el valor de verdad de unas en función de los valores de verdad de las otras.

## 1.2 Conectivos Lógicos

A partir de proposiciones simples es posible generar otras, simples o compuestas. Es decir que se puede operar con proposiciones, y para ello se utilizan ciertos símbolos llamados **conectivos lógicos**. A continuación vemos una concreta definición de cada uno:

### 1.2.1 Operaciones Proposicionales

Definiremos las operaciones entre proposiciones, dada una o más proposiciones, de las que se conoce los valores de verdad, se trata de asignar a la proposición re-

sultante a través de su valor de verdad. A tal efecto, estudiaremos a continuación el uso y significado de los diferentes conectivos lógicos.

### Negación

Dada una proposición  $p$ , se denomina la negación de  $p$  a otra proposición denotada por  $\neg p$  (se lee no  $p$ ) que le asigna el valor de verdad opuesto al de  $p$ . Por ejemplo:  
 $p$ : Diego estudia matemática.

$\neg p$ : Diego no estudia matemática.

Por lo que nos resulta sencillo construir su tabla de verdad:

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

Se trata de una operación unitaria, pues a partir de una proposición se obtiene otra, que es su negación.

Ejemplo: La negación de  $p$ : Santa Fe es una provincia argentina, es:

$\neg p$ : Santa Fe no es una provincia argentina.

### Conjunción

Dadas dos proposiciones  $p$  y  $q$ , se denomina conjunción de estas proposiciones a la proposición  $p \wedge q$  (se lee “ $p$  y  $q$ ”), cuya tabla de verdad es:

$p$	$q$	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La tabla que define esta operación, establece que la conjunción es verdadera sólo si lo son las dos proposiciones componentes. En todo otro caso es falsa. Cada com-

ponente de la conjunción se llama **conjunto**.

Ejemplos: Sea la declaración:

*5 es impar y 6 es par*

Vemos que está compuesta de dos proposiciones a las que simbolizaremos por:

$p$ : 5 es un número impar

$q$ : 6 es un número par

Por ser ambas verdaderas, la conjunción es verdadera.

Ahora bien, sea la declaración:

Hoy es el día 3 de noviembre y mañana es el día de 5 de noviembre.

Esta conjunción es falsa, ya que no pueden ser simultáneamente verdaderas ambas proposiciones que la componen.

### Disyunción

Dadas dos proposiciones  $p$  y  $q$ , la disyunción de las proposiciones  $p$  y  $q$  es la proposición compuesta  $p \vee q$  (se lee “ $p$  o  $q$ ”), cuya tabla de verdad es:

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Cada componente de la disyunción se llama **disyunto**.

Ejemplos:

*Marte es un planeta o una estrella.*

*Córdoba es una provincia argentina o Uruguay es un país latinoamericano.*



*El 3 es par o el 8 es primo.*

Intente Ud. identificar las proposiciones componentes  $p$  y  $q$ , sus valores de verdad y el valor de verdad de la disyunción.

### Condicional (o implicación)

Consideremos el enunciado: Si apruebas Filosofía, te dejaré ir al viaje de fin de curso. Este enunciado está formado por dos proposiciones atómicas:

$p$ : Apruebas Filosofía.

$q$ : Vas de viaje de fin de curso.

Lo que nuestro enunciado original afirma es esto: si  $p$  es verdad, entonces  $q$  también es verdad, o, dicho de modo más sencillo, si  $p$  entonces  $q$ .

En el enunciado  $p \rightarrow q$ , se dice que  $p$  es el antecedente y  $q$  el consecuente.

El condicional  $p \rightarrow q$  se lee “ $p$  condicional  $q$ ”, “ $p$  implica  $q$ ” o bien “si  $p$  entonces  $q$ ”.

Un condicional siempre es verdadero, excepto cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

Por lo tanto, su valor de verdad queda definido por la siguiente tabla de verdad.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Otras expresiones que representan también la proposición “si  $p$  entonces  $q$ ” y que se simbolizan por  $p \rightarrow q$ :

- $p$  sólo si  $q$
- $q$  si  $p$

- $p$  es condición suficiente para  $q$
- $q$  es condición necesaria para  $p$

Ejemplos:

Ser divisible por 2 es condición necesaria para ser divisible por 6, pero no suficiente.

Ser divisible por 8 es condición suficiente para ser divisible por 4, pero no necesaria.

### El recíproco del condicional

Se puede ver por medio de las tablas de verdad, que tanto la conjunción como la disyunción tienen la **propiedad conmutativa**, es decir el orden de las componentes de una conjunción o de una disyunción no altera su valor de verdad: es lo mismo  $p \wedge q$  que  $q \wedge p$ , y también es lo mismo  $p \vee q$  que  $q \vee p$ . Pero, ¿ocurre lo mismo con el condicional? ¿Es lo mismo  $p \rightarrow q$  que  $q \rightarrow p$ ? La respuesta es que no. Veámoslo con cierto detenimiento.

Se dice que  $q \rightarrow p$  es el **recíproco** de  $p \rightarrow q$ . El implicador no tiene la propiedad conmutativa y esto se aprecia en la comparación de las tablas de verdad de  $p \rightarrow q$  y de su recíproco  $q \rightarrow p$ :

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Veámoslo con un ejemplo:

Sean  $p$  : Ahora llueve y  $q$  : El suelo está mojado, siendo, por consiguiente  $p \rightarrow q$  : Si ahora llueve, entonces el suelo está mojado. Veamos el recíproco de este enunciado:  $q \rightarrow p$  : Si el suelo está mojado entonces ahora llueve. Supongamos que  $p$  es falso, y  $q$  verdadero, lo que se corresponde con la tercera fila de la tabla anterior.

- $p \rightarrow q$  (Si ahora llueve, entonces el suelo está mojado) es verdadero.

- $q \rightarrow p$  (Si el suelo está mojado, entonces ahora llueve) es falso.

### El contrarrecíproco del condicional

Aunque un enunciado condicional y su recíproco no tienen los mismos valores de verdad, si los tienen el condicional y su contrarrecíproco.

El contrarrecíproco del enunciado  $p \rightarrow q$  es  $\neg q \rightarrow \neg p$ . Veámoslo comparando tablas de verdad:

$p$	$q$	$\neg q$	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Comparemos el mismo ejemplo: En el ejemplo anterior donde  $p$ : Ahora llueve,  $q$ : El suelo está mojado,  $p \rightarrow q$ : Si ahora llueve entonces el suelo está mojado.

El contrarrecíproco es  $\neg q \rightarrow \neg p$ : Si el suelo no está mojado entonces ahora no llueve,

que es lógicamente equivalente al enunciado primitivo  $p \rightarrow q$ .

### El bicondicional

Ya hemos comprobado que  $p \rightarrow q$  no es lo mismo que  $q \rightarrow p$ . Puede ocurrir, sin embargo, que tanto  $p \rightarrow q$  como  $q \rightarrow p$  sean verdaderos. Por ejemplo, si  $p$ : La Tierra es plana, y  $q$ : El Sol es un planeta,

entonces tanto  $p \rightarrow q$  como  $q \rightarrow p$  son verdaderos, porque tanto  $p$  como  $q$  son falsos.

Es necesario tener esto en cuenta para entender bien el concepto de bicondicional.

Mediante el bicondicional ( $\leftrightarrow$ ) lo que queremos decir es que un enunciado es a la vez condición necesaria y suficiente para otro. El **bicondicional**  $p \leftrightarrow q$ , que se lee “ $p$  si y sólo si  $q$ ”.

Así, si digo que  $p$ : apruebo Filosofía y  $q$ : saco un 5 o más en el examen de Lógica la fórmula  $p \leftrightarrow q$  significa apruebo Filosofía si y sólo si saco un 5 o más en el examen

de Lógica.

La proposición compuesta: apruebo Filosofía si y sólo si saco un 5 o más en el examen de Lógica, se puede formalizar de dos formas equivalentes:  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ , o bien  $p \leftrightarrow q$ . En consecuencia, el enunciado  $p \leftrightarrow q$  queda definido por el enunciado  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ . Por esta razón, el símbolo  $\leftrightarrow$  se llama bicondicional, y la tabla de verdad para  $p \leftrightarrow q$  es la misma que la de  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ .

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La doble flecha horizontal  $\leftrightarrow$  es el operador bicondicional. De la observación de la tabla de verdad deducimos que para que  $p \leftrightarrow q$  sea verdadera, tanto  $p$  como  $q$  han de tener los mismos valores de verdad, y en caso contrario es falsa.

### Formalización del bicondicional

El bicondicional puede tener varias expresiones equivalentes en lenguaje natural. Así  $p \leftrightarrow q$  es la formalización de las siguientes expresiones de lenguaje natural:

- $p$  si y sólo si  $q$
- $p$  es necesario y suficiente para  $q$

Notar que  $p \leftrightarrow q$  y  $q \leftrightarrow p$  tendrían totalmente los mismos valores de verdad, puesto que ambas son coimplicaciones y por lo tanto si sus valores de verdad son los mismos, son verdaderas, y son falsas en los demás casos. En consecuencia, podemos reformular los enunciados anteriores intercambiando  $p$  y  $q$ .

### Ejemplos del bicondicional

Ejemplos de bicondicionales verdaderos:

- a. La Tierra es plana si y sólo si el Sol es un planeta; si llamamos:  $p$ : La Tierra es plana, sabemos que es Falsa y sea  $q$ : El Sol es un planeta, también es Falsa.
- b. La Tierra es esférica si y sólo si el Sol es una estrella, sea  $p$ : La Tierra es esférica es Verdadera, y sea  $q$ : El Sol es una estrella, también es Verdadera.

Ejemplos de bicondicionales falsos:

- a. La Tierra es plana si y sólo si el Sol es una estrella; si llamamos:  $p$ : La Tierra es plana, sabemos que es Falsa y sea  $q$ : El Sol es una estrella, es Verdadera.
- b. La Tierra es esférica si y sólo si el Sol es un planeta, sea  $p$ : La Tierra es esférica, es Verdadera, y sea  $q$ : El Sol es un planeta, en cambio, es Falsa.

### 1.2.2 Equivalencia Lógica

Decimos que dos proposiciones  $P$  y  $Q$  formadas ambas por las mismas letras proposicionales, son lógicamente equivalentes, o simplemente equivalentes, si coinciden sus valores de verdad para los mismos valores de verdad de las componentes. Se nota como  $P \Leftrightarrow Q$ , siendo  $P$  y  $Q$  formas proposicionales no necesariamente atómicas. Importante: usamos la  $\Leftrightarrow$  para indicar la equivalencia, mientras que  $\leftrightarrow$  simboliza al bicondicional.

Ejercicio: Probar que las siguientes propiedades se satisfacen, probando las equivalencias lógicas (construyendo las tablas de verdad de los bicondicionales que correspondan).

- 1.- Doble negación:  $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
- 2.- Leyes conmutativas: a)  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$  b)  $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
- 3.- Leyes asociativas: a)  $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$  b)  $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
- 4.- Leyes distributivas: a)  $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$  b)  $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
- 5.- Leyes de De Morgan: a)  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$  b)  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- 6.- Implicación:  $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

*Resolución de 3.-a):* Empezaremos considerando todas las formas posibles de combinar los valores de verdad de las proposiciones atómicas:  $p, q$  y  $r$ . Para asegurarnos

de que no nos falta ninguna combinación, el número de filas es igual a  $2^n$ , donde  $n$  es la cantidad de proposiciones atómicas. En nuestro caso  $2^3 = 8$ . Lo recomendable es hacerlo de manera ordenada, por ejemplo en la primera columna, considero la primera mitad verdadera y la otra falsa, en la siguiente considero la mitad de la mitad verdadera y la otra falsa y así siguiendo...

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Notar que las últimas dos columnas coinciden los valores de verdad para los mismos valores de verdad de las componentes  $p$ ,  $q$  y  $r$ . Entonces, si miramos la tabla del bicondicional estaremos en la primera o cuarta fila, por lo que  $P \leftrightarrow Q$  resultará verdadera.

### 1.2.3 Tautología

Es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Un ejemplo típico es el bicondicional entre  $p \rightarrow q$  y  $\neg q \rightarrow \neg p$ , verificamos por medio de la tabla de verdad que es una tautología, mirando el valor de verdad de la última columna:

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Las tautologías son muy importantes en lógica matemática ya que se consideran leyes en las cuales nos podemos apoyar para realizar demostraciones.

### 1.2.4 Contradicción

A diferencia de la tautología, que siempre es verdadera, aquella proposición que siempre es falsa para todos los valores de verdad, se denomina contradicción. Una de las más usadas y más sencilla es  $p \wedge \neg p$ , como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

$p$	$q$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Ejemplo: Dada la proposición  $p$ : La puerta es verde. La proposición  $p \wedge \neg p$  equivale a decir que: La puerta es verde y la puerta no es verde.

Por otra parte, si una proposición compuesta cuyos resultados en sus diferentes líneas de la tabla de verdad, dan como resultado V y F le llama **contingencia o contingente**.

### Razonamientos

Podemos ahora analizar o razonar el valor de verdad de proposiciones del tipo  $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$ , donde  $n$  es un número natural, las  $P_i$  son las premisas (o hipótesis) con  $i = 1, \dots, n$  y  $Q$  es la conclusión. Por ejemplo:

1. Si el mayordomo es el asesino, se pondrá nervioso cuando lo interroguen.
2. El mayordomo no se puso muy nervioso cuando lo interrogaron.

Por lo tanto, el mayordomo es el asesino. ¿Cuál es su valor de verdad?

*Resolución:* Vemos que la primera premisa es una proposición compuesta (condicional) y la segunda también es compuesta por ser una negación. Llamamos  $p$  : El

mayordomo es el asesino, y  $q$  : El mayordomo se puso muy nervioso cuando lo interrogaron. En forma simbólica sería:  $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow p$ , lo que queremos analizar. Como sabemos que  $p \rightarrow q$  es verdadera y  $\neg q$  verdadera, en la tabla de verdad podemos ver que ambas condiciones se cumplen solo en la última fila. Esto se verifica cuando  $p$  es falsa, es decir, que  $\neg p$  es verdadera, y ... ¡ el mayordomo no es el asesino!

$p$	$q$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$
V	V	F	V	F
F	V	F	V	F
V	F	V	F	F
F	F	V	V	V

Ejercicio: A partir de los enunciados, simbolícelos y obtenga conclusiones:

a) Si Juan nació en Mendoza entonces es argentino.

Juan Nació en Mendoza.

b) Si Juan nació en Mendoza entonces es argentino.

Juan no es argentino.

A lo largo de los ejercicios y ejemplos, vimos que no siempre es necesario construir toda la tabla de verdad, en el siguiente ejercicio, vemos una manera práctica de encontrar el valor buscado, ahorrando tiempo.

Ejercicio: Obtener el valor de verdad de la proposición  $(p \wedge q) \wedge (r \vee s)$ , sabiendo que el valor de verdad de  $p$  es Falsa.

*Resolución:* Sabiendo que  $p$  es Falsa, la conjunción  $(p \wedge q)$  también lo es, independiente de que  $q$  sea V ó F. Luego, la siguiente conjunción  $(p \wedge q) \wedge (r \vee s)$  también lo es, independientemente de los valores de las proposiciones  $r$  y  $s$ .

Esta es la forma en que una computadora generalmente resuelve este problema, generando un árbol de expresión como el de la figura 1 y se recorre evaluando las expresiones o proposiciones. Si podemos “cortar” una rama del árbol y no evaluarla, y de todos modos obtener el resultado nos ahorra tiempo de cálculo.



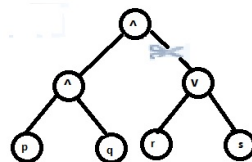


Figura 1: Árbol donde cortamos la rama  $r$  y  $s$

Realice la tabla de verdad, para convencerse de este hecho. Note que de esta manera tendrá que realizar una tabla con 16 filas.

### 1.3 Esquemas proposicionales en una indeterminada

En Álgebra y Aritmética suele decirse que la siguiente expresión:  $x + 2 = 5$  es una ecuación.

Tal expresión no es una proposición, pues no tiene sentido afirmar que sea verdadera o falsa, pero existe algún reemplazo de  $x$  por un número de modo tal que se transforma en una proposición.

Por ejemplo, si reemplazamos  $x$  por 7 queda la expresión  $7 + 2 = 5$ , es una proposición, la cual en este caso es Falsa. Si reemplazamos  $x$  por 3 queda la expresión  $3 + 2 = 5$ , es una proposición, la cual en este caso es Verdadera.

Seguramente, al leer el ejemplo anterior todos intentaron reemplazar  $x$  por un número y no se les ocurrió reemplazarla por algo que nos lleve a la frase: *manzana* + 2 = 5. Esto se debe a que uno elige los elementos de un conjunto que hace que la frase tenga sentido, ya sea verdadera o falsa. A este conjunto le llamamos universo.

**Definición de Conjunto Universal:** Llamaremos de esta forma al conjunto de variables que al reemplazar la  $x$  por un elemento de ese conjunto se obtenga una proposición. Lo notaremos por  $U$  y lo nombraremos por conjunto universal o,

simplemente, universo. Debe contener, al menos, un elemento.

Ahora podemos definir:

**Definición de esquema proposicional en la indeterminada  $x$ :** es toda expresión que contiene a  $x$ , y posee la siguiente propiedad: “Existe por lo menos un nombre tal que la expresión obtenida sustituyendo la indeterminada por dicho nombre, es una proposición”.

Convención: Llamaremos simplemente esquema en lugar de esquema proposicional. Las indeterminadas suelen llamarse variables o incógnitas.

Ejemplos

1. “La  $x$  es blanca” es esquema pues existe una constante “flor” que si ocupa el lugar de la variable  $x$  produce la siguiente proposición: “La flor es blanca”. Que esta proposición sea Verdadera o Falsa dependerá de cual sea la flor particular que se está eligiendo.
2. ¿Qué es  $x$ ? NO es un esquema, pues no hay constante que sustituida en la variable produzca una proposición.

Ejercicio: Si  $x$  es una variable, decir cuáles de las siguientes expresiones son esquemas:

- 1) Juan y  $x$  fueron al teatro.
- 2)  $x$  es perro.
- 3) Distancia del punto  $P$  a  $x$  es igual a 2. (El punto  $P$  es conocido)
- 4)  $x \geq 0 \wedge x \leq 3$ .

Vamos a utilizar símbolos tales como  $p(x)$ ,  $q(x)$ , para designar esquemas de incógnita  $x$ .

**Definición:** Si  $p(x)$  es un esquema en  $x$  y  $a$  es una constante, se llama valor de  $p(x)$  en la constante  $a$  a la expresión obtenida de  $p(x)$  sustituyendo  $x$  por  $a$ . El valor de  $p(x)$  para  $a$  se designa  $p(a)$ .

Ejemplo: Sea  $p(x)$  : Esta  $x$  no es un objeto, y  $a$  es “casa”. Reemplazmos:  $p(a)$  : “Esta casa no es un objeto”

Vamos a definir al conjunto de valores de verdad de  $p$ , lo simbolizamos con  $V(p)$ , al conjunto formado por todas las constantes  $a$  que hacen verdadera la proposición  $p(a)$ .

## 1.4 Cuantificadores: Universal y Existencial

Hasta ahora se ha visto un método para obtener proposiciones a partir de esquemas  $p(x)$  consiste en sustituir la variable  $x$  por una constante adecuada  $a$  de tal forma que  $p(a)$  sea una proposición.

Hay otro método distinto que transforma un esquema en proposición a partir del esquema  $p(x)$ , es el método de los **operadores** o **cuantificadores**.

Como vimos en los ejemplos, uno trata de reemplazar la incógnita por valores que tenga cierto sentido como para obtener una proposición, por ejemplo, si el esquema es  $p(x) : x > 5$ , pensamos que  $x$  puede ser un número, y dependiendo de si  $x$  es 8 ó  $x$  es 2, será verdadera o falsa; pero no pensamos en reemplazar  $x$  por algún color del arco iris. Esto nos conduce a la siguiente definición:

Por medio de los cuantificadores podemos convertir en proposiciones a los esquemas de la siguiente manera:

**El cuantificador existencial,**

“Para algún  $x$  se verifica  $p(x)$ ”

“Existe  $x$  tal que se cumple  $p(x)$ ”

“Para al menos un  $x$  se satisface  $p(x)$ ”

son proposiciones que se escriben como  $(\exists x)(p(x))$

*Ejemplo: Hay flores rojas.*

### **El cuantificador universal,**

“Para todo  $x$  se verifica  $p(x)$ ”

“Para cualquier  $x$  tal que se cumple  $p(x)$ ”

“Para cada  $x$  se satisface  $p(x)$ ”

son proposiciones que se escriben como  $(\forall x)(p(x))$

*Ejemplo: Todas las flores son rojas.*

Escribe en forma simbólica las siguientes proposiciones, usando cuantificadores, esquemas proposicionales, decir cuales son las constantes apropiadas (es decir, el universo) y decide el valor de verdad de las mismas.

$p$ : Todo número real mayor que 2 tiene un cuadrado mayor que él mismo.

$q$ : Algunos números reales con cuadrado mayor que 4 son menores que 2.

$r$ : Cualquier número satisface  $x^2 - x \geq 0$  o no es mayor que 2.

Observa que en “ $r$ ” hace falta el conjunto universal ...

¿ Qué ocurre si  $U$  está formado por los números reales? ¿ Y si a  $U$  lo forman los enteros?

Ejercicio: En cada caso decir si se trata de esquemas, en tal caso transformarlo en una proposición:

(a) Usando constantes adecuadas.

(b) Dar un universo y aplicar cuantificadores. Hallar su valor de verdad de la pro-

posición.

1.  $P(n): n + 1 > n$ .
2.  $Q(n): n^2 + 1$ .
3.  $R(n): n^2 - 3n + 2 = 0$ .
4.  $S(n): n$  es un número racional.

### **Alcance de un operador**

Sea el siguiente ejemplo:

$$(\exists x)(x \text{ es verde}) \wedge x \text{ es rojo} \quad (*)$$

Vemos que el operador existencial se refiere únicamente al esquema  $x$  es verde y **NO** a  $x$  es rojo, o sea que el alcance del operador llega únicamente al primer esquema, por lo que al no poder reemplazar la segunda  $x$  por algún elemento del universo, no es un esquema que pueda ser proposición. Si quisiéramos que alcance a los dos esquemas, tendríamos que poner más paréntesis:

$$(\exists x)(x \text{ es verde} \wedge x \text{ es rojo})$$

o sea, usaríamos paréntesis.

Del ejemplo precedente podemos deducir que: La expresión “ $x$  es verde” es el esquema más simple que aparece en  $(*)$  inmediatamente después del operador.

La expresión “ $x \text{ es verde} \wedge x \text{ es rojo}$ ”, también es un esquema pero no es el más simple. La expresión “ $x \text{ es rojo}$ ” es un esquema también simple pero no aparece después del operador.

**Definición:** Se llama **alcance de un operador en  $x$**  al esquema más simple que aparece inmediatamente después del operador, salvo que se presenten paréntesis, en cuyo caso deben aplicarse las reglas habituales referentes al uso de paréntesis.

## Negación de operadores

Sea la siguiente proposición:  $(\forall n)(n \text{ es un número primo})$ , la cuál sabemos es Falsa en el universo de los números naturales.

Vamos ahora a negarla:  $\neg(\forall n)(n \text{ es un número primo})$

En lenguaje corriente esto nos dice que no todos los números son primos que es lo mismo que si dijéramos: algunos números no son primos, y simbólicamente

$$(\exists n)(n \text{ no es un número primo})$$

De lo anterior se puede deducir, y vale de manera general y no sólo el ejemplo que:

$$\neg(\forall x)(p(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x))$$

De manera análoga se obtiene:

$$\neg(\exists x)(p(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg p(x))$$

Por lo tanto, en palabras decimos que:

*La negación de un cuantificador universal (existencial, respectivamente) es equivalente a la afirmación de un cuantificador existencial (universal) cuyo alcance es la negación del alcance del primero.*

Ejercicio: Expresar en lenguaje corriente las siguientes proposiciones. Establecer el alcance de los operadores y proponer el Universo.

a)  $(\forall x)(x \text{ es metal} \rightarrow x \text{ se funde})$

b)  $(\forall x)(x \text{ es metal}) \vee \text{el oro se funde}$

$$c) (\exists x)(x \text{ es cuadrado}) \rightarrow (\exists x)(x \text{ es paralelogramo})$$

$$d) \neg(\forall x)(x \text{ es hombre} \rightarrow x \text{ es mortal})$$

## 1.5 Ejercicios

1.- Indicar cuáles de las siguientes frases son proposiciones:

- a) Un cuadrado tiene 3 lados.
- b)  $x > 2$ .
- c) Hoy tardé más de una hora en llegar.
- d) El mes de abril del 2019.

2.- Expresar las siguientes proposiciones en forma simbólica, negarlas y retraducir su negación al lenguaje coloquial:

- a) Juana no es justa pero mantiene el orden.
- b) Los alumnos conocen a los simuladores y los desprecian.
- c) Si los alumnos conocen a los simuladores, entonces los desprecian.

3.- Construir las tablas de verdad de:

- a)  $\neg(p \wedge q)$
- b)  $\neg(\neg p \wedge \neg r) \wedge q$
- c)  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
- d)  $\neg(p \vee q)$
- e)  $\neg q \wedge \neg r$
- f)  $(\neg s \wedge p) \vee (s \wedge \neg p)$

4.- Consideremos las siguientes proposiciones  $p, q, r, s$ .

$p$ : La galera era un barco antiguo de comercio.

$q$ : La galera era un barco antiguo de guerra.

$r$ : La galera era un barco antiguo que se movía con velas.

s: La galera era un barco antiguo que se movía con remos.

Escribir con palabras del lenguaje coloquial, los resultados de las siguientes operaciones:

- a)  $p \wedge q$
- b)  $\neg q \vee \neg r$
- c)  $\neg r \wedge s$
- d)  $q \vee s$

5.- Simbolizar las siguientes proposiciones:

- a) Si  $5 \geq 3$  entonces  $5 - 3 \geq 0$ .
- b) Si A, B y C son números racionales tales que  $2A+3B-5C = 0$  entonces  $A=B=C=0$ .

6.- a) Pasar a la forma si ... entonces ... y simbolizar:

- i) Juan viaja a Córdoba sólo si consigue pasaje en avión.
- ii) Es necesario ser argentino para ser presidente de la república.

b) Expresar y simbolizar utilizando la palabra suficiente:

- i) La temperatura bajará si comienza a soplar el viento del sur.
- ii) Si aprobó el examen entonces contestó bien el 40 % de sus preguntas.

c) Expresar y simbolizar utilizando la palabra necesario:

- i) Si un triángulo está inscripto en un semicírculo entonces es rectángulo.
- ii) Pedro es argentino sólo si es americano.

7.- Establecer si las siguientes fórmulas constituyen tautologías, contradicciones o contingencias.

- a)  $(p \wedge q) \wedge (q \wedge p)$
- b)  $(p \vee q) \rightarrow p$
- c)  $(q \rightarrow p) \vee p$



8.- Encontrar proposiciones equivalentes usando las leyes de De Morgan y sustituciones adecuadas:

- a)  $p \wedge \neg q$
- b)  $\neg(\neg p \wedge q)$
- c)  $(p \wedge q) \vee q$
- d)  $(p \wedge q) \wedge (q \wedge \neg p)$

9.- Determinar en cada caso si la información que se da es suficiente para conocer el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas. Justifica tu respuesta, realiza de ser posible, el árbol.

- a)  $(p \wedge q) \rightarrow r$ ,  $r$  es V.
- b)  $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$ ,  $p$  es V y  $r$  es F.
- c)  $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ,  $q$  es V.

10.- Expresar mediante cuantificadores, esquemas proposicionales, conectivos, además usar equivalencias lógicas para expresar de manera condicional las siguientes proposiciones:

Todos los hombres son mortales.

Hay algún número que no es primo.

11.- Sean los esquemas  $p(x) : x + 4 = 3$  y  $q(x) : x^2 - 1 = 0$ .

- a) ¿Existe un universo en el cuál la proposición  $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$  resulte verdadera? Justifique.
- b) Hallar un universo  $U$  en el cuál la proposición anterior sea falsa. Justifique.

12.- Simbolizar las siguientes proposiciones, usando proposiciones simples y/o esquemas proposicionales, cuantificadores y dar un universo.

- a) Todo conjunto infinito contiene un subconjunto infinito y el conjunto de los números naturales es infinito.

- b) Todo número distinto de cero es divisible por 1, -1, por el mismo y por su opuesto.
- c) 25 no es divisible por 2 ni por 3 pero es múltiplo de 5.

13.- Simbolizar utilizando esquemas, cuantificadores y conectivos lógicos y dar un universo.

- a) Hay objetos rojos y además hay objetos verdes.
- b) Hay números pares o todos los números son múltiplos de 3.
- c) No todos los números son múltiplos de 5.
- d) Todos los números no son múltiplos de 5.
- e) Algunos hombres son santos.
- f) Ninguna virtud es una cualidad natural.
- g) No todo número real es un número racional.
- h) Todos los números primos son impares excepto el 2.
- i) Si existe un número natural menor que 4 entonces todo múltiplo de 6 es múltiplo de 5.

14.- Negar las proposiciones anteriores simbólicamente y coloquialmente.