Coloraciones en tableros

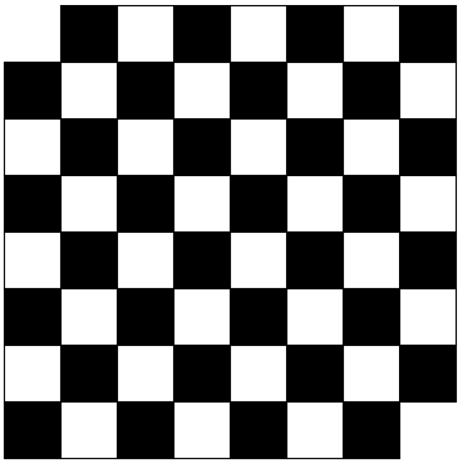
Matías Saucedo*

Selectivo Cono Sur 2015

1. El tablero de ajedrez

El siguiente es un problema muy conocido que aparece en varios textos de divulgación matemática.

Problema 1. *Consideremos un tablero de ajedrez al que se le han recortado las casillas de la esquina superior izquierda y la esquina inferior derecha, como muestra la figura. ¿Es posible cubrir las 62 casillas restantes usando 31 fichas de dominó, cada una de las cuales cubre exactamente 2 casillas del tablero?*



La respuesta es que no, no es posible. Observen que si la respuesta fuera que sí, bastaría con mostrar **un** ejemplo de cómo se pueden colocar las fichas, y el problema ya queda resuelto. En cambio, si la respuesta es no, entonces la cosa cambia, y aparece esta palabra a la que todos le tenemos un poco de miedo al principio, que es *demostrar*. No alcanza con que uno intente cubrir el tablero de muchas maneras y no le salga, hay que *demostrar* que es imposible hacerlo. Dar una *demostración* no es otra cosa que mostrar justificaciones o argumentos que no dejen lugar a dudas de que lo que uno está diciendo

*matias.exolimpico@gmail.com || *OMA Foros*: Matías V5

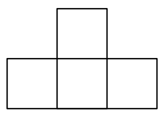
es cierto. Tenemos que lograr convencer a la persona que va a leer la solución que la explicación que estamos dando funciona para todos los casos.

La idea para resolver el problema en este caso consiste en aprovechar el hecho de que las casillas del tablero están coloreadas alternadamente de blanco y negro. Como dos casillas vecinas siempre son de distinto color, cada ficha de dominó va a ocupar una casilla blanca y una casilla negra. Entonces, si se pudiera cubrir el tablero con fichas de dominó, resultaría que hay exactamente 31 casillas blancas y 31 casillas negras. Pero esto no ocurre, pues las dos casillas que recortamos eran blancas, así que quedaron 30 blancas y 32 negras. Por lo tanto, no se puede cubrir el tablero con fichas de dominó.

Este mismo tipo de idea se puede aplicar a varios problemas de olimpíadas que involucran tableros. Coloreando sus casillas con dos o más colores, podemos obtener más información sobre el tablero que la que está a simple vista, y entendiendo mejor el tablero estaremos más cerca de conseguir una solución.

No hay una manera inmediata de saber cuál es la coloración que nos va a servir para cada problema en particular. Sin embargo, hay algunas que aparecen frecuentemente, y con la suficiente experiencia uno va a aprendiendo a identificar cómo tendría que ser una coloración que nos ayude con un problema específico. En este apunte vamos a ver algunas de estas coloraciones «estándar».

Problema 2. *Decidir si es posible cubrir completamente un tablero de* 10×10, *sin huecos ni superposiciones y sin salirse del tablero, con fichas como la de la siguiente figura:*



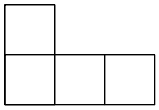
Solución. Notemos en primer lugar que como el tablero tiene 100 casillas y cada ficha cubre 4 casillas, si se pudiera cubrir el tablero habría que usar exactamente $\frac{100}{4} = 25$ fichas.

Coloreamos las casillas del tablero alternadamente de blanco y negro, como un tablero de ajedrez. De este modo quedan 50 casillas blancas y 50 casillas negras. Por otro lado, notemos que en cada ficha, las tres casillas de las puntas son del mismo color, mientras que la del centro es del color opuesto. Es decir que cada ficha ocupa 3 casillas blancas y 1 casilla negra, o 1 casilla blanca y 3 casillas negras. En cualquier caso podemos decir que cada ficha ocupa una cantidad impar de casillas blancas. Luego, como hay 25 fichas, y 25 es impar, la cantidad total de casillas blancas cubiertas por las fichas va a ser un número impar. Sin embargo la cantidad total de casillas blancas en el tablero es 50, que es un número par.

Con esta contradicción, queda demostrado que es imposible cubrir el tablero. ■

2. Pintar por filas o columnas

Problema 3. *Decidir si es posible cubrir completamente un tablero de* 10×10*, sin huecos ni superposiciones y sin salirse del tablero, con fichas como la de la siguiente figura:*

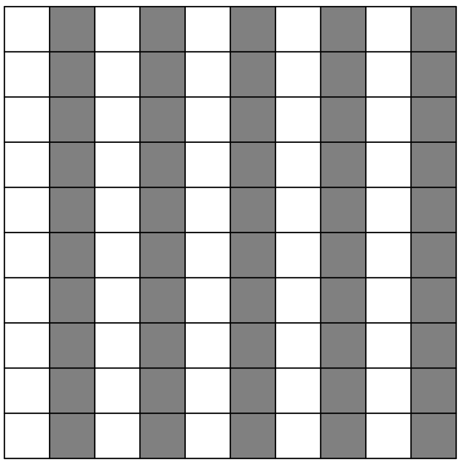


En este problema, la coloración tipo ajedrez ya no nos sirve. En efecto, si pintamos las casillas como en el tablero de ajedrez, nos van a quedar 50 casillas blancas y 50 casillas negras. Por otra parte, cada ficha cubre 2 casillas blancas y 2 casillas negras. Así que, en principio, no hay razón para suponer que 25 de estas fichas no puedan cubrir todo el tablero.

Pero ojo: si una coloración no nos lleva a ninguna contradicción, ¡no quiere decir que no haya otra que sí lo haga!

Miremos de nuevo la solución del Problema 2. Allí, la contradicción apareció porque cada ficha cubría una cantidad impar de casillas blancas, mientras que la cantidad total de casillas blancas del tablero era par. Entonces, si conseguimos una coloración donde pase eso en este nuevo problema, quedará demostrado que no se puede cubrir el tablero.

Consideremos la siguiente coloración, que consiste en ir pintando las columnas del tablero alternadamente de blanco y negro:



Veamos que esta coloración cumple lo que queremos. Al igual que antes tenemos 50 casillas blancas y 50 casillas negras. Si colocamos una ficha en el tablero en posición horizontal (o sea, como está en el dibujo del enunciado), la casilla del centro tendrá el color opuesto al de las otras tres, y por lo tanto, la cantidad de casillas blancas cubiertas será 1 o 3, un número impar. Por otra parte, si colocamos la ficha en posición vertical, entonces las tres casillas alineadas tendrán el mismo color, y la restante tendrá el color opuesto. Nuevamente, la cantidad de casillas blancas cubiertas por la ficha es 1 o 3. Entonces cada ficha cubre una cantidad impar de casillas blancas, y como son 25 fichas, llegamos a que la cantidad total de casillas blancas del tablero es impar, la misma contradicción que en el Problema 2. Por lo tanto, no es posible cubrir el tablero. ■

3. Pintar con más colores

Problema 4. *Consideremos un tablero de ajedrez al que se le ha recortado la casilla de la esquina superior izquierda. ¿Es posible cubrir las 63 casillas restantes usando 21 fichas rectangulares de* 1×3*, cada una de las cuales cubre exactamente 3 casillas del tablero?*

Notarán que este problema es muy, muy similar al Problema 1, pero ahora las fichas cubren 3 casillas en vez de 2.

En el Problema 1, la clave de la solución estuvo en que al pintar las casillas del tablero, cada ficha ocupaba la misma cantidad de casillas de cada color (1 blanca y 1 negra), mientras que la cantidad total de casillas de cada color no era la misma para todos los colores. Si queremos imitar ese mismo razonamiento en nuestro nuevo problema, lo más natural sería tratar de pintar el tablero ya no con 2 sino con 3 colores, de manera que cada ficha cubra exactamente una casilla de cada color.

Una coloración con esas características es la siguiente (llamamos A, B y C a los tres colores):

	A	B	C	A	B	C	A
A	B	C	A	B	C	A	B
B	C	A	B	C	A	B	C
C	A	B	C	A	B	C	A
A	B	C	A	B	C	A	B
B	C	A	B	C	A	B	C
C	A	B	C	A	B	C	A
A	B	C	A	B	C	A	B

Se ve que cada ficha rectangular de 1×3 cubre exactamente una casilla de cada color, y por lo tanto en total debería haber 21 casillas de cada color. Sin embargo, en el tablero hay 22 casillas de color A, 21 casillas de color B, y 20 casillas de color C. Entonces, también en este caso es imposible cubrir el tablero. ■

4. Pintar de dos maneras

Problema 5. *Se tiene un tablero de 4 filas y 10 columnas, con un caballo de ajedrez en una de las casillas de las esquinas. El objetivo es encontrar una sucesión de 40 movidas válidas*[1] *del caballo, de manera tal que visite cada casilla del tablero exactamente una vez y luego regrese a su posición original. Demostrar que es imposible cumplir el objetivo.*

Posiblemente lo primero que uno piensa después de leer el enunciado es en pintar el tablero con la coloración de ajedrez. Puede que no funcione, pero al menos habría que hacer el intento. Pintamos entonces alternadamente de blanco y negro las casillas del tablero, de manera que la casilla donde se encuentra inicialmente el caballo sea blanca.

Una cosa que tiene de interesante esta coloración, es que (como cualquier persona que juega al ajedrez sabe) en cada movimiento el caballo cambia el color de la casilla en la que se encuentra. Es decir, si estaba en una casilla blanca, pasa a estar en una casilla negra, y si estaba en una casilla negra pasa a estar en una casilla blanca. Entonces, si se puede cumplir el objetivo, la sucesión de colores de las casillas que visita el caballo será

$$\text{blanco, negro, blanco, negro, } \dots, \text{ blanco, negro,}$$

(termina en negro porque la cantidad de casillas del tablero es par), y en la próxima movida regresa a la casilla blanca en la que empezó.

Esto por ahora no nos da ninguna contradicción, porque el tablero tiene la misma cantidad de casillas blancas que de casillas negras.

Ahora vamos a mirar otra coloración un poco más rara. Pintamos de rojo la primera y la cuarta fila, y de azul las dos filas del medio. Sería así:

R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
R	R	R	R	R	R	R	R	R	R

¿Qué tiene de bueno esta coloración? Va a pasar lo mismo que pasaba con la anterior, aunque ahora requiere más justificación. Es evidente que si el caballo está en una casilla roja, luego de moverse va a pasar a estar en una casilla azul. Sin embargo no es necesariamente cierto, en principio, que de una casilla azul se pase a una roja: está claro que el caballo puede moverse de la segunda a la tercera fila sin problemas.

Ahora bien, nosotros estamos suponiendo que el caballo visita cada casilla exactamente una vez. Hay 20 casillas rojas, y sabemos que después de cada una de esas viene una casilla azul. Pero hay sólo 20 casillas azules. Con esto ya vemos que la única manera en la que el recorrido sea posible es que se vayan alternando casillas rojas y azules. Es decir que el recorrido del caballo es

[1] Una movida válida de un caballo de ajedrez consiste en desplazarse dos casillas en una dirección y luego una casilla en dirección perpendicular a la anterior, es decir que se mueve en forma de L.

$$\text{rojo, azul, rojo, azul, } \ldots \text{, rojo, azul,}$$

y en la próxima movida regresa a la casilla roja en la que empezó. De nuevo, esto por sí solo no nos lleva a ninguna contradicción. Pero si combinamos esta información con lo que obtuvimos usando la otra coloración, vemos que las 20 casillas rojas deberían ser las mismas que las 20 casillas blancas. Esto evidentemente no pasa. ¡Absurdo!

Suponiendo que el objetivo se podía cumplir, llegamos a algo que no tiene sentido. Entonces el objetivo NO se puede cumplir, y la solución está completa. ■

5. Más problemas para practicar estas ideas

1. Decidir si es posible cubrir completamente un tablero de 10×10, sin huecos ni superposiciones y sin salirse del tablero, con fichas rectangulares de 1×4. (Cada ficha debe cubrir exactamente cuatro casillas del tablero.)

2. Consideremos un tablero de 7×7 al que se le ha recortado la casilla de la esquina superior izquierda. Decidir si es posible cubrirlo con 12 fichas de dominó verticales y 12 fichas de dominó horizontales. (Cada ficha de dominó cubre exactamente dos casillas del tablero.)

3. **(Segunda Ronda Regionales 2010)** En un tablero de 9×9 hay una nave enemiga de 4 casillas consecutivas (horizontales o verticales). ¿Cuál es el mínimo número de tiros que debe hacer un tirador que no ve la nave para acertar con certeza a al menos una de las casillas de la nave? (Cada tiro «destruye» una casilla, a elección del tirador.)

4. **(Selectivo Cono Sur 2006)** En cada casilla de un tablero de 12×12 hay un 0 ó un 1. La operación permitida es elegir 5 casillas consecutivas en dirección horizontal, vertical o diagonal, y en esas 5 casillas cambiar cada 0 por 1 y cada 1 por 0. Inicialmente todas las casillas tienen un 0. Determinar si es posible, mediante una secuencia de operaciones permitidas, lograr que todas las casillas del tablero tengan un 1.

5. Con 16 fichas rectangulares de 1×3 y una ficha cuadrada de 1×1 se cubrió completamente un tablero de 7×7. ¿En qué casillas puede ir la ficha cuadrada? Dar todas las posibilidades.

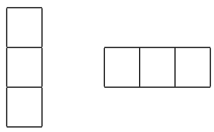
6. **(Selectivo Iberoamericana 2012)** Un triángulo equilátero de lado 7 está dividido en 49 triangulitos equiláteros de lado 1 mediante paralelas a sus lados. Se recortan del triángulo paralelogramos con un par de lados iguales a 1 y el otro par iguales a 2, siguiendo las líneas de la grilla. Determinar el mayor número de estos paralelogramos que se pueden cortar.

7. **(Selectivo IMO 2014)** En un tablero de 7×7 están escritos los números de 1 a 49 (ver figura). En cada movida se elige una casilla y se aumenta (o se disminuye) en 1 el número de esa casilla y se disminuyen (respectivamente, se aumentan) en

1 los números de dos casillas adyacentes a la elegida. (Dos casillas son adyacentes si comparten un lado.)
Determinar si es posible obtener un tablero con todos los números iguales a 1007 al cabo de una cantidad finita de estas movidas.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

8. **(Cono Sur 2009)** Ana y Beto juegan en un tablero de 11 filas y 9 columnas. Primero Ana divide el tablero en 33 *zonas*. Cada zona está formada por 3 casillas contiguas alineadas vertical u horizontalmente, como muestra la figura.



Luego, Beto escribe en cada casilla uno de los números $0, 1, 2, 3, 4, 5$, de modo que la suma de los números de cada zona sea igual a 5. Beto gana si la suma de los números escritos en cada una de las 9 columnas del tablero es un número primo. En caso contrario, Ana gana. Demostrar que Beto tiene estrategia ganadora.

6. ¿Cómo seguir?

A los que estén interesados en leer más sobre este y otros temas, les recomiendo visitar

$\boxed{\text{http://www.omaforos.com.ar}}$

Allí podrán encontrar algunos apuntes teóricos como este y sobre todo un montón de problemas de certámenes anteriores, con varias soluciones aportadas por los usuarios del foro. En particular están resueltos varios de los problemas de la lista anterior. Si se hacen una cuenta de usuario pueden, además, postear todas sus dudas.