Notas de Olimpíadas
Tomo I

Martín Vacas Vignolo

Setiembre 2011, Buenos Aires, Argentina

Índice general

0.1. Introducción 3

1. Teoría de números **4**
1.1. Factorización única en primos 4
1.2. Mínimo común múltiplo 5
1.3. Máximo común divisor 6
1.4. Relación entre mcm y MCD de dos números 6
1.5. Cantidad de divisores 7
1.6. Cuadrados perfectos 7
1.7. Los cuadrados perfectos y los impares 8
1.8. Los cuadrados perfectos y sus divisores 8
1.9. Suma de Gauss 9
1.10. Suma de números consecutivos 9
1.11. Criterios de divisibilidad 10
1.12. Divisibilidad 14

2. Álgebra **16**
2.1. Sistemas de ecuaciones lineales de $n \times n$ 16
2.2. Tableros 17
2.3. Problemas de velocidad 20
2.4. Árboles, edades, barriles y caramelos 22
2.5. Porcentajes y Venn, buenos amigos 25
2.6. Ecuaciones diofánticas lineales 26

3. Geometría **28**
3.1. Ángulos entre paralelas 28
3.2. Pitágoras 28
3.3. Medio equilátero 29
3.4. Bisectriz de un ángulo 29
3.5. Mediatriz de un segmento 30
3.6. Mediana de un triángulo 31
3.7. Altura de un triángulo 31
3.8. Estos segmentos en los triángulos isósceles 31
3.9. Áreas 31
3.10. Área de dos maneras 33
3.11. Área de triángulos entre paralelas 34
3.12. Proporción entre áreas y lados 35
3.13. Semejanza 35
3.14. Trigonometría 37

3.15. Cuadriláteros cíclicos 37
3.16. Potencia de un punto 37

4. Combinatoria **39**
4.1. Factorial 39
4.2. Número combinatorio 40
4.3. ¿Y si tengo cifras repetidas? 40
4.4. Distribuir k pelotitas en n cajas 41
4.5. Suma de cifras 41
4.6. Combinatoria y divisibilidad 42
4.7. Contar lo que no sirve y restarlo 44

5. Glosario **45**

0.1. Introducción

Este es un apunte para alumnos de nivel secundario que participen en la Olimpíada de Matemática, o tengan intenciones de hacerlo. Todo comenzó como algunos apuntecitos aislados sobre cada tema y, un día al fin, me decidí a juntarlos todos y darle forma de algo presentable. El objetivo es lograr mostrar diversas herramientas, teoremas e ideas que son de mucha utilidad a la hora de enfrentar un problema. En la mayoría de los casos se muestran soluciones a problemas ya tomados para que vean la forma de aplicar estas ideas.

En ningún caso es imprescindible saber estas herramientas o trucos, pero lo que sí les aseguro es que les será de mucha utilidad.

"Creo en la nueva forma de educar que está surgiendo en muchos jóvenes estudiantes y graduados. Se trata de dejar atrás la educación antigua de transmitir conocimientos y pasar a una nueva, que fomente la relación entre educador y educando, creando un ámbito en el que ambos aprendan uno del otro.

Sin lugar a dudas los educadores tenemos que generar ideas e inquietudes en los educandos para así lograr que el alumno piense por su propia cuenta y llegue a contestarse a sí mismo sus propias preguntas. No sirve de nada transmitir conocimientos y contestar con formalismos, ya que lo único que lograríamos es crear en la cabeza del educando un nuevo problema, una nueva confusión. Tenemos que entrar a su mundo, ver las cosas como ellos las ven y así intentar apuntalar sus conocimientos, pero nunca tenemos que depositar un conocimiento en la cabeza del alumno como metemos una bolita en una caja.

El proceso de aprendizaje entonces tiene que ser complementario a la vida cotidiana y a las vivencias propias de nuestros alumnos. Nunca lograremos hacer entender, por ejemplo, para qué sirve una función en matemática si nunca les damos un ejemplo de la vida cotidiana.

Aprender no es poder repetir lo ya escrito, aprender es poder generar respuestas propias.

Aprender no es saber usar la calculadora, aprender es saber cómo funciona una calculadora.

Aprender es aprender a razonar".

Capítulo 1

Teoría de números

1.1. Factorización única en primos

Decimos que un número p es *primo* si tiene exactamente 2 divisores positivos:

$$1 \text{ y } p$$

Por ejemplo, 13 es primo ya que los únicos divisores que tiene son 1 y 13, pero 51 no es primo ya que sus divisores son cuatro: 1, 3, 17 y 51.

Nota 1 *El* 1 *no es primo.*

¿Cómo saber si un número n es primo?
Bueno, en números muy grandes es complicado, pero con los números que trabajamos siempre sí se puede aplicar un mecanismo para ver si un número es primo o no:
Primer paso: calcular $A = \sqrt{n}$
Segundo paso: Encontrar todos los primos p tales que $p \leq A$
Tercer paso: Calcular $\frac{n}{p}$ para cada valor de p hallado

Conclusión: si alguna de las divisiones del tercer paso dió exacta es decir, un número entero, el número no será primo. De otra forma lo será (si todas las divisiones dan como resultado un número con coma)

Ahora que ya saben cómo ver si un número es primo o no, podemos hablar de la factorización única en primos. ¿A qué se refiere esto? A que todo número se puede escribir de una única forma como producto de números primos. Por ejemplo:

$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$

Y no tiene otra forma de escribirse. Lo mismo pasa con todos los números, veamos más ejemplos:

$27 = 3^3$, $24 = 2^3 \times 3$, $38 = 2 \times 19$, etcétera.

Esta factorización única, sí soy repetitivo porque es importante que entiendan que es única, es útil a la hora de enfrentar problemas que involucren múltiplos, divisores y cosas por el estilo.

Recordemos:
Un número m es múltiplo de otro número n si el primero es el resultado de multiplicar al segundo por un entero, es decir si se cumple:

$$m = nk \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

De cumplirse esto, decimos que n es divisor de m

1.2. Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo entre dos números a y b es, como dice su nombre, un múltiplo de ambos que además es el más chico. Escribimos $mcm(a, b)$

Nota 2 *El* 0 *es múltiplo de todos los números, pero para calcular el mcm no se tiene en cuenta, sino todos los mcm serían cero y no serviría de nada.*

Por ejemplo, el $mcm(4, 3)$ es 12. Escribo los múltiplos de los dos y el primero que se repite es el 12:
4, 8, $\boxed{12}$, 16, ...
3, 6, 9, $\boxed{12}$, 15, ...
Vos estarás pensando... siempre el $mcm(a, b)$ es $a \times b$, ¡qué lindo!...
Pero no, lamento decirte que eso no es así, por ejemplo $mcm(6, 10) = 30$. Es cierto que existe una relación entre el mínimo común múltiplo y el producto de los números pero lo vamos a ver más adelante.
Es cierto que hacer la lista parece fácil, pero si les doy como tarea calcular el $mcm(12827, 129481)$ definitivamente la lista se vuelve algo tediosa. Es por eso que vamos a ver una forma de calcular el mcm utilizando... ¡la factorización única!

Volvamos al ejemplo que les dí recién: $mcm(6, 10)$, factoricemos los números para ver qué nos encontramos:

$$6 = 2 \times 3 \text{ y } 10 = 2 \times 5$$

Como vimos en la definición de mcm nuestro numerito tiene que ser múltiplo de 6 y de 10 al mismo tiempo, por lo tanto tendrá que ser, en particular, múltiplo de 2, de 3 y de 5. Existen muchos números con éstas características, pero como queremos el más chico, nos quedamos con el $2 \times 3 \times 5 = 30$.

Veamos otro ejemplo: $mcm(12, 16)$. Los factorizamos:

$$12 = 2^2 \times 3 \text{ y } 16 = 2^4$$

Pensando parecido al ejemplo anterior, nuestro numerito tendrá que ser múltiplo de 3 y de 2^4. Ahora, ¿por qué no nombro el 2^2? Bueno, no lo nombro, porque si es múltiplo de 2^4 también lo será de 2^2, es por eso que si tengo números primos repetidos en los dos números, me elijo el que tenga máximo exponente. Finalmente nuestro numerito será el $3 \times 2^4 = 48 = mcm(12, 16)$.

En general, para calcular el mcm entre dos o más números, los factorizo, me agarro los primos que se repiten (con mayor exponente) y los que no se repiten, los multiplico y hallo el mcm.

1.3. Máximo común divisor

El máximo común divisor entre dos números a y b es, como dice su nombre, un numerito que es divisor de a y de b al mismo tiempo y es, además, el más grande. Escribimos $MCD(a, b)$.

Calculemos el $MCD(10, 8)$, escribimos la lista de divisores de ambos:

$$10 \rightarrow 10,\ 5,\ \boxed{2},\ 1$$
$$8 \rightarrow 8,\ 4,\ \boxed{2},\ 1$$

Los que se repiten son el 2 y el 1, pero como queremos el más grande, nos quedamos con el 2, por lo tanto $MCD(10, 8) = 2$

Veamos otro ejemplo: $MCD(21, 100)$, escribimos los divisores:

$$21 \rightarrow 21,\ 7,\ 3,\ \boxed{1}$$
$$100 \rightarrow 100,\ 50,\ 25,\ 20,\ 10,\ 5,\ 4,\ 2,\ \boxed{1}$$

El único que se repite es el 1, por lo tanto $MCD(21, 100) = 1$

En el caso en que $MCD(a, b) = 1$ decimos que a y b son *coprimos*

De la misma forma que en el mcm, con números grandes se complica armar la lista de divisores para sacar el MCD, por lo tanto también vamos a poder calcularlo utilizando la factorización única. Volvamos al ejemplo de $MCD(10, 8)$, los factorizamos:

$$10 = 2 \times 5 \text{ y } 8 = 2^3$$

Como el MCD tiene que ser un divisor de ambos, puede tener sólo los factores primos que se repiten en ambos. En este caso sólo puede tener al 2 en su factorización (la del MCD). Y como tiene que ser divisor de los dos tiene que haber un sólo 2, porque si hubiese más de un dos, por ejemplo un 2^2, no sería divisor de 10. Por lo tanto el $MCD(10, 8) = 2$.

En el segundo ejemplo, $MCD(21, 100)$, no se repitirá ningún factor primo ya que son coprimos, por lo tanto el MCD será 1.

En general, sabiendo la factorización de los números, me agarro los factores primos que se repiten en ambos y elijo el menor exponente, los multiplico y calculo el MCD.

1.4. Relación entre mcm y MCD de dos números

Antes dije que existía una relación entre el $mcm(a, b)$ y el producto ab. La relación es esta:

$$a \times b = mcm(a, b) \times MCD(a, b) \tag{1.1}$$

Nota 3 *Si a y b son coprimos, el $mcm(a, b) = ab$, debido a que el $MCD(a, b) = 1$.*

Veamos un ejemplo:

$$10 \times 8 = mcm(10, 8)MCD(10, 8) = 40 \times 2 = 80$$

La relación (1.1) es muy importante saberla, ya que si sé los dos números y sé alguno de los dos (mcm o MCD) puedo saber el otro despejando de esa relación, sin factorizar nuevamente.

1.5. Cantidad de divisores

Existe una forma de calcular cuántos divisores positivos tendrá un número, vamos a verla, pero antes dejemos clara una cosa: un número es divisor de otro sí y sólo sí tiene sus mismos factores primos elevados a potencias adecuadas.
Entendido esto pasemos a lo importante, supongamos que quiero saber cuántos divisores tiene el número $12 = 2^2 \times 3$. Bueno, por lo que hablé arriba todos los divisores tienen que tener al 2 y al 3 como únicos factores primos (pueden estar elevados a la 0, entonces "desaparecen"). Ahora, yo hablé de "potencias adecuadas", con esto me refiero a que tanto el 2 como el 3 no pueden estar elevados a la potencia que yo quiera, tienen que estar, como mucho, elevados al cuadrado y a la uno, respectivamente. (Pensar que si el 2 estuviese elevado al cubo, por ejemplo, no sería divisor de 12 ya que $2^3 = 8$ no es divisor de 12). Por lo tanto si d es un divisor de 12 será de la forma: $d = 2^a \times 3^b$ donde $a = \{0, 1, 2\}$ y $b = \{0, 1\}$ por lo tanto tendré $3 \times 2 = 6$ combinaciones distintas de exponentes, lo que hacen 6 divisores distintos.

En general la cantidad de divisores positivos de n, cuando la factorización única es $n = p_1^a \times p_2^b \times \cdots \times p_i^z$ será $(a+1) \times (b+1) \times \cdots \times (z+1)$, es decir, le sumo uno a cada exponente y multiplico todos esos números que me quedaron.

Problema 1 *Hallar la cantidad de divisores positivos que tiene 5400*

Solución:
Factorizamos el número:

$$5400 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$$

Según lo visto arriba, le sumo uno a cada exponente y multiplico, es decir: $(3+1) \times (3+1) \times (2+1) = 4 \times 4 \times 3 = 48$. Por lo tanto 5400 tendrá 48 divisores positivos.

1.6. Cuadrados perfectos

Llamamos cuadrados perfectos a los enteros positivos que son el resultado de elevar un número entero al cuadrado. Es decir, los enteros positivos que al calcularle la raíz cuadrada dan como resultado un número entero.
Por ejemplo:
16 es un cuadrado perfecto, ya que $4^2 = 16$
10 no es cuadrado perfecto, ya que no existe un número entero que elevado al cuadrado de cómo resultado 10. O bien porque $\sqrt{10}$ no es entero

De la misma forma definimos los cubos perfectos. Por ejemplo:

64 es un cubo perfecto, ya que $4^3 = 64$
50 no es un cubo perfecto, ya que no existe un número entero que elevado al cubo de cómo resultado 50. O bien porque $\sqrt[3]{50}$ no es entero

Problema 2 *Utilizando alguno de los dígitos 1,2,3,4,5,6,7,8 y 9, sin repetirlos, se forma un número que cumple lo siguiente: todo número formado por dos cifras consecutivas tiene que ser cuadrado perfecto. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo ese número?*

Solución:
Hacemos la lista de los cuadrados perfectos de dos dígitos:

$$16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64 \text{ y } 81$$

Notemos que el 25 no se puede conectar con ninguno. El 36 sólo se puede conectar con el 64, que sólo se puede conectar con el 49, que no se puede conectar con ninguno. Lo que formaría el número de cuatro cifras 3649. Pero sin usar el 25 y el 36, los otros cuatro números se pueden conectar así: 81-16-64-49, lo que formaría el número 81649 de cinco cifras, que es la cantidad máxima de cifras que puede tener un número de estas características.

Ya vimos la factorización única en primos de un número natural n. Los cuadrados perfectos también se pueden factorizar. Factorizemos los primeros:

$$4 = 2^2,\ 9 = 3^2,\ 16 = 2^4,\ 25 = 5^2,\ 36 = 2^2 \times 3^2,\ 49 = 7^2,\ 64 = 2^6,\ 81 = 3^4,$$
$$100 = 2^2 \times 5^2$$

¿Qué tienen en común todas estas factorizaciones? Sí, todos tienen exponentes pares. ¿Por qué pasará esto? Sabemos que a los cuadrados perfectos se les puede calcular su raíz cuadrada, es decir si n es cuadrado perfecto entonces $\sqrt{n}$ es entero. Por lo tanto tendrán que tener sí o sí exponentes pares para poder "simplificarse" con la raíz cuadrada.

Lema 1 *Un número n es cuadrado perfecto sí y sólo sí en su factorización tiene todos exponentes pares. Además el 1 es cuadrado perfecto.*

Análogamente se puede pensar que los cubos perfectos tienen exponentes múltiplos de 3.

1.7. Los cuadrados perfectos y los impares

Cada cuadrado perfecto es la suma de los primeros impares. Por ejemplo:

$$1 = 1^2 = 1$$
$$4 = 2^2 = 1 + 3$$
$$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5$$
$$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$
$$25 = 5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

En general, n^2 es la suma de los primeros n impares.

1.8. Los cuadrados perfectos y sus divisores

Por el *Lema* 1 sabemos que los cuadrados perfectos tienen todos exponentes pares en su factorización única en primos. Supongamos que dichos exponentes son α_1, α_2, ..., α_n. Sabemos que la cantidad de divisores la puedo encontrar sumándole uno a cada exponente y multiplicando todos esos números, entonces me quedaría así:

$$(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times ... \times (\alpha_n + 1)$$

Donde cada factor de ese producto será impar (ya todos los α_i son pares). Por lo tanto deducimos:

Lema 2 *Un número es cuadrado perfecto sí y sólo sí tiene una cantidad impar de divisores positivos*

1.9. Suma de Gauss

Cuenta la historia, que hace muchos años una maestra de quinto grado de primaria estaba harta de sus alumnos, ya que éstos la hacían renegar mucho. Para descansar un poco en clase, les dio como tarea encontrar la suma de los primeros 100 números enteros, es decir que hallen el resultado de $1+2+3+\ldots+99+100$. A los cinco minutos se levanta un alumno y le dice: "da 5050". Ella anonadada le pregunta cómo hizo para resolverlo tan rápido, y él le responde:

"Lo que hice fue agrupar los números en parejas, el 1 con el 100, el 2 con el 99, el 3 con el 98, hasta el 50 con el 51; entonces tenía 50 parejas y todas ellas sumaban 101. Finalmente la suma me dió 50×101=5050"

Este pequeño prodigio era Carl Friedrich Gauss, que en el futuro nos dejaría una amplia teoría matemática. Entonces, gracias a Gauss, podemos saber cuánto da la suma de los primeros n números.
Y para resolverlo podemos utilizar la siguiente fórmula:

$$\frac{n(n+1)}{2} \tag{1.2}$$

La idea general para llegar a esta fórmula es la siguiente:
Escribimos dos columnas de números, una desde 1 hasta n y la otra en orden inverso: $\begin{array}{ll} 1 & n \\ 2 & n-1 \\ ... & ... \\ n-1 & 2 \\ n & 1 \end{array}$ Y la suma de cada renglón da $n+1$.
Tenemos n renglones, por eso multiplicamos n por $n+1$. Finalmente dividimos por dos porque estamos contando dos veces la suma.
Ejemplo: Hallar la suma de los números desde el 1 hasta el 320.
Aplicando (1.2) tenemos:

$$\tfrac{320(320+1)}{2} = 160 \times 321 = 51360$$

1.10. Suma de números consecutivos

Muchos problemas involucran sumas de números enteros positivos consecutivos, y nos solemos preguntar: ¿hay algún truquito? Bueno, en algunos casos sí. Veámoslos:

Siempre que sume una cantidad impar de números consecutivos, la suma de esos números será divisible (o será un múltiplo) de la cantidad de números.

Por ejemplo: Si escribo los números 34, 35 y 36, la suma de ellos $34+35+36 = 105$ será múltiplo de 3, que es la cantidad de números que sumé. Y además, el resultado es el triple de 35. Pero, ¿por qué pasa esto? ¿pasará siempre?

Sigo con el ejemplo de tres números, pero pueden hacer las cuentas para cualquier cantidad impar de números, que les dará lo mismo. Tres números consecutivos los puedo escribir como n, $n+1$ y $n+2$. O también los puedo escribir como $n-1$, n y $n+1$. En el primer caso la suma da $3n+3$ y en el segundo la suma da $3n$, que ambos resultados son claramente múltiplos de 3. Pero ¿por qué pasará siempre?

Voy a quedarme con la segunda forma de escribirlos (es lo mismo con la otra forma), es decir agarrar el del medio, llamarlo n y a los demás $n+1$ y $n-1$. Notemos que si la cantidad fuese otra, siempre voy a ir agregando dos números, uno en cada punta, y la suma se irá anulando. Lo que quiero decir con esto último es que el "-1" y el "$+1$" se anulan, quedando sólo el $3n$, lo mismo va a pasar si tengo cinco números: el "-1" se anula con el "$+1$" y el "-2" se anula con el "$+2$", quedando sólo el $5n$.

Una utilidad que tiene esto es para saber si un número se puede escribir como suma de números consecutivos, entonces vale:

Lema 3 *Un número n se puede escribir como suma de I enteros positivos consecutivos (I impar) sí y sólo sí n es múltiplo de I*

Problema 3 *Problema: decidir si 1000 se puede escribir como suma de 11 enteros consecutivos. ¿Y 1001?*

Solución:
Por lo visto en el *Lema*, 1000 tiene que ser sí o sí múltiplo 11, lo cual es falso. Por lo tanto 1000 no se podrá escribir como suma de 11 enteros positivos consecutivos.
Veamos 1001. Y este efectivamente sí se puede, ya que $1001 = 11 \times 91$. Entonces los 11 números que sumados me den 1001 tendrán en su centro, es decir en el 6to lugar al 91. Finalmente serán 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95 y 96.

Con una cantidad par de números consecutivos pasa algo parecido, pero más complicado. Veámoslo con un ejemplo:

$$1+2+3+4+5+6=21$$

Donde 21 es 6 veces el promedio entre 3 y 4 (o sea, $\frac{4+3}{2} \times 6$) Lo que nos aseguramos en el caso de tener una cantidad par de números consecutivos es que la suma siempre es múltiplo de la suma de los dos números centrales. Para que un número se pueda escribir como suma de una cantidad par de números consecutivos, por ejemplo 8, el resultado de la división del número por 8 tiene que dar coma cinco (es decir, tiene que ser el promedio de dos números consecutivos)

Problema 4 *Problema: decidir si 1000 se puede escribir como suma de 10 enteros consecutivos. ¿Y 1005?*

Éste se los dejo a ustedes.

1.11. Criterios de divisibilidad

Cuando uno tiene un número relativamente chico, es fácil hacer las cuentas con la calculadora para ver si, por ejemplo, ese número es múltiplo de 11, de

5, de 3 o del número que yo quiera. (La única cuenta que tendría que hacer es dividirlo por el número que yo quiera y ver si tiene resto cero o no).

El problema surge cuando tenemos números grandes, que exceden a la calculadora (normalmente las calculadoras aceptan números de entre 8 y 10 dígitos). En esos casos, existen algunos criterios de divisibilidad para ciertos números.

Lo que aportan estos criterios son "trucos" para ver si un número es múltiplo, por ejemplo, por 11 sabiendo las cifras y sin tener que hacer la división.

No existen criterios para todos los números, pero los que existen, y son útiles, vamos a verlos:

- Criterio de divisibilidad por 2: un número es múltiplo de 2 cuando termina en una cifra par.

  Ejemplos:
  12498 es múltiplo de 2 porque termina en 8, que es par
  12491 no es múltiplo de 2 porque termina en 1, que es impar
  32140 es múltiplo de 2 porque termina en 0, que es par

- Criterio de divisibilidad por 3: un número es múltiplo de 3 cuando la suma de sus cifras da como resultado un múltiplo de 3.

  Ejemplos:
  285 es múltiplo de 3 porque $2 + 8 + 5 = 15$ es múltiplo de 3
  391 no es múltiplo de 3 porque $3 + 9 + 1 = 13$ no es múltiplo de 3

- Criterio de divisibilidad por 4: un número es múltiplo de 4 cuando el número de dos cifras formado por la decena y la unidad es un múltiplo de 4.

  Ejemplos:
  12436 es múltiplo de 4 porque termina en 36, que es múltiplo de 4
  12409 no es múltiplo de 4 porque termina en 09, que no es múltiplo de 4
  300 es múltiplo de 4 porque termina en 00, que es múltiplo de 4

- Criterio de divisibilidad por 5: un número es múltiplo de 5 cuando termina en 0 o en 5

  Ejemplos:
  1240 es múltiplo de 5 porque termina en 0
  23145 es múltiplo de 5 porque termina en 5
  132 no es múltiplo de 5 porque no termina ni en 0 ni en 5

- Criterio de divisibilidad por 8: un número es múltiplo de 8 cuando el número de tres cifras formado por la centena, la decena y la unidad es un múltiplo de 8

  Ejemplos:
  1232 es múltiplo de 8 porque termina en 232, que es múltiplo de 8
  3025 no es múltiplo de 8 porque termina en 025, que no es múltiplo de 8
  3000 es múltiplo de 8 porque termina en 000, que es múltiplo de 8

- Criterio de divisibilidad por 9: un número es múltiplo de 9 cuando la suma de sus cifras da como resultado un múltiplo de 9

Ejemplos:
12798 es múltiplo de 9 porque $1 + 2 + 7 + 9 + 8 = 27$ es múltiplo de 9
1246 no es múltiplo de 9 porque $1 + 2 + 4 + 6 = 13$ no es múltiplo de 9

- Criterio de divisibilidad por 25: un número es múltiplo de 25 si termina en 00, 25, 50 o 75.

  Ejemplos:
  124900 es múltiplo de 25 porque termina en 00
  2860 no es múltiplo de 25 porque termina en 60, que no es múltiplo de 25

- Criterio de divisibilidad por 100: un número es múltiplo de 100 si termina en 00

  Ejemplos:
  1241800 es múltiplo de 100 porque termina en 00
  12941 no es múltiplo de 100 porque termina en 41, que no es múltiplo de 100.

Estos son los criterios más fáciles, veamos ahora un criterio más complicado:

- Criterio de divisibilidad por 11: un número es múltiplo de 11 cuando la diferencia (resta) entre las cifras de lugares impares y las cifras de lugares pares da como resultado un múltiplo de 11.

  Ejemplos:
  10923 es múltiplo de 11 porque $(3+9+1)–(0+2) = 13–2 = 11$ es múltiplo de 11
  2156 es múltiplo de 11 porque $(6+1)–(2+5) = 7–7 = 0$ es múltiplo de 11
  2302 no es múltiplo de 11 porque $(2+3)–(2+0) = 5–2 = 3$ no es múltiplo de 11

Para lo último dejé cuatro criterios que son complicados pero está bueno saberlos:

- Criterio de divisibilidad por 7: un número es múltiplo de 7 si la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es múltiplo de 7. Este procedimiento se lleva a cabo muchas veces hasta llegar a un número chico que sepamos si es o no múltiplo.

  Ejemplos:
  1241 lo que dice el criterio es que haga: $124-2\times 1 = 124-2 = 122$. Repito el procedimiento con el 122: $12 - 2 \times 2 = 12 - 4 = 8$ que no es múltiplo de 7, por lo tanto 1241 no será múltiplo de 7
  Veamos si 4368 es múltiplo de 7: el criterio dice que haga: $436 - 2 \times 8 = 436 - 16 = 420$, repito el procedimiento con 420: $42 - 2 \times 0 = 42$ que es múltiplo de 7, por lo tanto 4368 también lo será.

  Nota 4 *No hace falta llegar a un número tan chico, si cuando llegamos a 420 ya nos dimos cuenta que era múltiplo de 7, cortamos ahí y podemos afirmar que el número inicial será múltiplo de 7. Si el número inicial es múltiplo de 7, todos los resultados intermedios también tendrán que serlo.*

- Criterio de divisibilidad por 13: un número es múltiplo de 13 si la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y nueve veces la cifra de las unidades es múltiplo de 13. Este procedimiento se lleva a cabo muchas veces hasta llegar a un número chico que sepamos si es o no múltiplo.

Ejemplos:
2851, lo que dice el criterio es que haga: $285 - 9 \times 1 = 285 - 9 = 276$, repito el procedimiento con 276: $27 - 9 \times 6 = 27 - 54 = -27$ que no es múltiplo de 13, por lo tanto 2851 no será múltiplo de 13.
Veamos si 3822 es múltiplo de 13: el criterio me dice que haga: $382-9\times2 = 382-18 = 364$, repito el procedimiento con 364: $36-9\times4 = 36-36 = 0$ que es múltiplo de 36 (y de todos los números). Por lo tanto 3822 será múltiplo de 13.

- Criterio de divisibilidad por 17: un número es múltiplo de 17 si la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y cinco veces la cifra de las unidades es múltiplo de 17. Este procedimiento se lleva a cabo muchas veces hasta llegar a un número chico que sepamos si es o no múltiplo.

  Ejemplos:
  829, lo que dice el criterio es que haga: $82 - 5 \times 9 = 82 - 45 = 37$ que no es múltiplo de 17, por lo tanto 829 tampoco lo será.
  2142, hago el criterio: $214-5\times2 = 214-10 = 204$, repito el procedimiento con 204: $20 - 5 \times 4 = 20 - 20 = 0$ que es múltiplo de 17, entonces 2142 también lo será

- Criterio de divisibilidad por 19: un número es múltiplo de 19 si la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y diecisiete veces la cifra de las unidades es múltiplo de 19. Este procedimiento se lleva a cabo muchas veces hasta llegar a un número chico que sepamos si es o no múltiplo.

  Ejemplos:
  291, hago el criterio: $29 - 17 \times 1 = 29 - 17 = 12$ que no es múltiplo de 19, entonces 291 tampoco lo será.
  589, hago el criterio: $58-17\times9 = 58-153 = -95$ que es $19\times(-5) = -95$, por lo tanto 589 será múltiplo de 19

Nota 5 *Notemos que los cuatro criterios son iguales, lo único que cambia es el numerito por el cuál multiplico a la cifra de las unidades.*

Algo que es importante saber es que para que un número sea múltiplo de otro, tiene que serlo también de todos sus divisores.

Por ejemplo: Quiero saber si 1540984 es múltiplo de 12.
Podríamos hacer la división y nos sacamos la duda, pero quiero utilizar los criterios y ésta idea de la cuál les hablo. Los divisores positivos de 12 son seis: 12, 6, 4, 3, 2 y 1. Entonces lo que yo digo es que 1540984 tiene que ser múltiplo de todos ellos, en particular de 4 y de 3, que multiplicados dan como resultado 12. Entonces, como no hay criterio de divisibilidad para el 12, basta ver si el número que me dan cumple los criterios del 4 y del 3, al mismo tiempo, para saber si será múltiplo de 12 o no (ver Nota 6). Veámoslo:
Del 4: termina en 84, que es múltiplo de 4, entonces es múltiplo de 4
Del 3: la suma de las cifras da $1+5+4+0+9+8+4 = 31$, que no es múltiplo de 3

Entonces puedo afirmar que 1540984 no es múltiplo de 12.

Lo mismo pasa con cualquier número que yo quiera:
Si quiero saber si un número es múltiplo de 6, basta ver si es múltiplo de 2 y de 3 simultáneamente, ya que $2 \times 3 = 6$
Si quiero saber si un número es múltiplo de 15, basta ver si es múltiplo de 3 y de 5 simultáneamente, ya que $3 \times 5 = 15$, etcétera
Un criterio que se deduce de esto último es:

- Criterio de divisibilidad por 10: tiene que ser múltiplo de 2 y de 5 simultáneamente, es decir, tiene que terminar en una cifra par y en 0 o 5 al mismo tiempo. Por lo tanto sí o sí tiene que terminar en 0 para que sea múltiplo de 10.

Nota 6 *Hay que tener cuidado en la elección de los números que hacemos para descomponer el número. Si en el ejemplo del 12 yo elegía 2 y 6, ya que* $2\times 6 = 12$, *no me iba a funcionar (por ejemplo 18 es múltiplo de 2 y de 6, pero no lo es de 12). El tema está en elegir dos o más números que sean coprimos entre sí (ver MCD).*

- Criterio de divisibilidad por 16: notemos que $16 = 2^4$. Para saber si un número era múltiplo de 2 mirábamos la última cifra, para saber si un número es múltiplo de 4 mirábamos las últimas dos cifras, para saber si un número es múltiplo de 8 mirábamos las últimas 3 cifras. Pensando de esa forma, ya que todos son potencias de dos, podemos decir que para que un número sea múltiplo de 16 miraremos las últimas cuatro cifras. Lo mismo pasará con 32, 64, etcétera.

Problema 5 *Problema: formar un número de 10 dígitos distintos que sea múltiplo de los primeros 10 números enteros positivos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10)*

Solución:
5712693840

Les dejo a ustedes el procedimiento. Seguramente hay otras soluciones, ¿se animan a encontrar más?

1.12. Divisibilidad

Decimos que un número entero n *divide* a otro número entero m si n es divisor de m. Si n divide a m escribimos $n \mid m$.
Por ejemplo: $3 \mid 39$ y $12 \mid 360$

Si n no divide a m escribimos $n \nmid m$

Es bien conocido este lema:

Lema 4 *Si* $p \mid a$ *y* $p \mid b$, *entonces* $p \mid (ak + bq)$ *con* $k, q \in \mathbb{Z}$

Es decir, si un número divide a otros dos, también dividirá a cualquier combinación lineal de ellos (ver Glosario)

Problema 6 *Hallar todos los* $n \in \mathbb{N}$ *tales que* $3 \mid (2n + 3)$

Solución:
Sabemos que $3 \mid 3$, entonces $3 \mid 2n$ para que se cumpla lo pedido (por el *Lema*). Además $3 \nmid 2$, entonces $3|n$. Por lo tanto todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen el enunciado serán los $n = 3k$ con $k \in \mathbb{N}$; es decir, todos los múltiplos de 3 mayores o iguales que 3.

Capítulo 2

Álgebra

2.1. Sistemas de ecuaciones lineales de $n \times n$

Esto se trata de tener n ecuaciones con n incógnitas. Éstos sistemas tienen solución única, siempre y cuando ninguna de las ecuaciones sea combinación lineal de algunas de las otras (ver Glosario).
Lo que siempre funciona es la sustitución, es decir, despejar una incógnita en una ecuación, sustituirla en la otra y así sucesivamente hasta llegar a una ecuación con una sola incógnita. Veamos un caso con dos ecuaciones con dos incógnitas:

Problema 7 *Hallar x e y si:*

- *1)* $3x + y = 10$
- *2)* $5x - y = 14$

Solución:
Despejamos y de 1) y nos queda: 3) $y = 10 - 3x$. Luego lo reemplazamos en 2):
$5x - (10 - 3x) = 14$
Llegamos a una ecuación con una sola incógnita, la resolvemos:

$$\begin{gathered} 5x - (10 - 3x) = 14 \\ 5x - 10 + 3x = 14 \\ 8x = 14 + 10 \\ 8x = 24 \\ x = 3 \end{gathered}$$

Reemplazando el valor obtenido en 3):

$$y = 10 - 3 \times 3 = 10 - 9 = 1$$

Finalmente la solución es: $(x, y) = (3, 1)$

Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas vamos a ver en Problemas de velocidad.

2.2. Tableros

Los problemas de tableros son muy comunes en olimpíadas. Vamos a ver tableros que se llenen con números, más adelante veremos tableros que se llenan con fichas.
Es muy común en estos problemas que te den los números con los que tenés que llenar el tablero y te dan condiciones, por ejemplo, que todas las filas sumen lo mismo, o que cada cuadradito de 2×2 sume lo mismo, etcétera. Una idea muy importante es que siempre esa suma se puede calcular de alguna manera. A veces no encontramos el resultado directamente pero sí encontramos mucha información sobre qué pinta tiene que tener esa suma. Empecemos con un ejemplo para entender de qué hablo:

Problema 8 *Completar un tablero de* 4×4 *con los números del 1 al 16 para que cada cuadradito de* 2×2 *sume lo mismo.*

Solución:
Sabemos por Gauss (ver Suma de Gauss) que la suma de los números del 1 al 16 es $\frac{16(16+1)}{2} = 8 \times 17 = 136$. Además podemos dividir el tablero en 4 cuadraditos de 2×2 disjuntos (ver Glosario) trazando las dos rectas centrales. De esta manera esos 4 cuadraditos de 2×2 tendrán que sumar lo mismo y, entre todos, sumar 136. Por lo tanto cada cuadradito debe sumar $\frac{136}{4} = 34$. A partir de tener la suma es fácil completarlo. Podemos escribir todas las parejas que suman 17: (1,16), (2,15), (3,14), (4,13), (5,12), (6,11), (7,10) y (8,9), y alternarlas en el tablero completando lo que se nos pide. Así quedaría la figura:

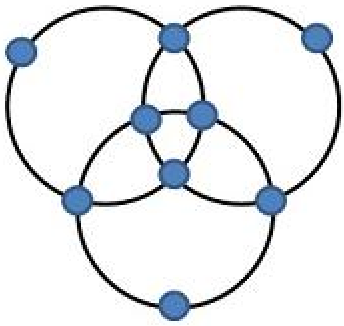
16	2	14	4
1	15	3	13
12	6	10	8
5	11	7	9

Problema 9 *Completar, si es posible, un tablero de* 3×4 *con los números del 1 al 12 para que la suma de todas las columnas sea la misma y la suma de todas las filas sea la misma*

Solucion:
Tenemos 4 columnas y 3 filas, averigüemos cuánto suma todo el tablero (no se pueden repetir los números). Por Gauss sabemos que sumarán $\frac{12(12+1)}{2} = 6 \times 13 = 78$. Como tengo 3 filas, cada una tendrá que sumar $\frac{78}{3} = 26$. Y como tengo 4 columnas, 78 tendría que ser múltiplo de 4, pero no lo es. Por lo tanto puedo asegurar que es imposible completar el tablero para cumplir lo pedido.

Vamos a empezar con problemas más complicados:

Problema 10 *En la figura hay 3 circunferencias. En cada intersección hay un espacio en azul y hay un espacio en azul más por cada circunferencia. Completar los 9 espacios en azul con los números del 1 al 9, sin repetirlos, para que la suma de los 5 números puestos en cada circunferencia sea la misma para las tres circunferencias.*



Problema 11 *Completar el tablero de* 3×3 *con números para que la suma de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales sea la misma*

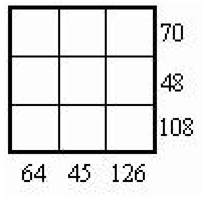
1	$\frac{-1}{2}$	
		3

Solucion:
Sea x el número de la casilla superior derecha y z el número de la casilla central derecha (abajo de x). Entonces planteamos la igualdad de la primera fila y la tercera columna:
$1 - \frac{1}{2} + x = x + z + 3$, de donde $z = -\frac{5}{2}$.
Sea y la casilla central. Ahora plateamos la igualdad entre la diagonal descendente y la tercera columna:
$1 + y + 3 = x - \frac{5}{2} + 3 \to y = x - \frac{7}{2}$

Sea p la casilla inferior central y n la casilla inferior izquierda. Entonces planteando la igualdad entre la segunda columna y la última fila:
$-\frac{1}{2} + x - \frac{7}{2} + p = n + p + 3$ de donde $n = x - 7$. Finalmente igualando la diagonal creciente y la última columna: $x - 7 + x - \frac{7}{2} + x = x - \frac{5}{2} + 3$ de donde $x = \frac{11}{2}$. En la última columna vemos que la suma será $\frac{11}{2} - \frac{5}{2} + 3 = 6$. Sólo queda completar el tablero con los datos que tenemos, quedaría así:
$$\begin{array}{ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & 3 \end{array}$$

Además de sumas, los problemas de tableros también suelen tener productos, por ejemplo:

Problema 12 *Escribir un número entero entre 1 y 9 en cada casilla, sin repeticiones, para que en cada fila la multiplicación de los tres números sea igual al número indicado a su derecha y en cada columna la multiplicación de los tres números sea igual al número indicado debajo.*



Solucion:
Comencemos por el $70 = 2 \times 5 \times 7$. El único número de las columnas que es múltiplo de 7 es el 126. Además el único número que es múltiplo de 5 es el 45. Por lo tanto la primera fila queda determinada: 2 5 7.
En la columna central ya tenemos el 5, por lo que quedaría que dos números distintos multiplicados tienen que dar 9 para llegar a 45. Los únicos números que cumplen son 1 y 9, y como 48 no es múltiplo de 9, tendrá que ir el 1 en la casilla central y el 9 en la central inferior. Luego, los únicos números que quedan múltiplos de 8 son 48 y 64 por lo que el 8 tendrá que ir en su intersección. Finalmente queda todo determinado: $\begin{array}{ccc} 2 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 3 \end{array}$

Antes vimos problemas donde los tableros se llenaban con números para cumplir cierta condición. Ahora vamos a ver tableros que se tienen que cubrir con fichas de distintos tamaños. Comenzaremos con un sólo tipo de fichas, para mostrar un par de técnicas y truquitos que hay.

Problema 13 *Decidir si es posible armar un rectángulo de 39×44 sin huecos ni superposiciones, usando exclusivamente piezas rectangulares de 5×11. ¿Y si el rectángulo que se quiere armar es de 42×55? ¿Y si es de 39×55? En cada caso, si la respuesta es afirmativa, dar un ejemplo y en caso contrario, explicar por qué.*
ACLARACIÓN: En todos los casos está permitido girar las piezas

Solución:
Notemos que si usamos fichas de 5 x 11, cada ficha cubrirá exactamente $5 \times 11 = 55$ casillas. Por lo tanto, cualquier tablero que se pueda cubrir con este tipo de fichas, tendrá que tener una cantidad total de casillas múltiplo de 55. El tablero que se nos ofrece en primera instancia no cumple eso, ya que ni 39 ni 44 son múltiplos de 5. Por lo tanto la primera decisión ya está resuelta: el de 39 x 44 no se puede cubrir.
Vamos al segundo, el de 42 x 55, que cumple lo antes dicho. Ahora, lo que tendríamos que lograr es que sus dos lados se puedan escribir como combinación lineal de 11 y de 5 (ver Glosario). Para 42 tengo una única solución: $42 = 2 \times 11 + 4 \times 5$ y 55 se podrá escribir ya que es múltiplo de ambos. Entonces la segunda cuestión sí se puede, quedaría así:

Vamos al tercero, el de 39 x 55. 39 se tendría que poder escribir como combinación lineal. Veamos que es imposible:
Si usamos 0 cincos, 39 tendría que ser múltiplo de 11, absurdo.
Si usamos 1 cinco, $39 - 5 = 34$ tendría que ser múltiplo de 11, absurdo
Si usamos 2 cincos, $39 - 2 \times 5 = 29$ tendría que ser múltiplo de 11, absurdo
Si usamos 3 cincos, $39 - 3 \times 5 = 24$ tendría que ser múltiplo de 11, absurdo.
Si usamos 4 cincos, $39 - 4 \times 5 = 19$ tendría que ser múltiplo de 11, absurdo.
Si usamos 5 cincos, $39 - 5 \times 5 = 14$ tendría que ser múltiplo de 11, absurdo.
Si usamos 6 cincos, $39 - 6 \times 5 = 9$ tendría que ser múltiplo de 11, absurdo.
No puedo usar más cincos ya que me daría algo menor a 9, absurdo. Por lo tanto concluyo que el de 39 x 55 no se puede cubrir.

2.3. Problemas de velocidad

Usualmente se suelen tomar problemas de velocidad. Pese a que es un tema de física, la resolución de estos problemas es mediante sistemas de ecuaciones con muchas incógnitas. Normalmente tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas:

velocidad, distancia y tiempo.

El único conocimiento físico que hay que tener para resolver estos problemas es la fórmula de la velocidad, que es igual a la distancia sobre el tiempo es decir:

$$velocidad = \frac{distancia}{tiempo} \tag{2.1}$$

Hay una cuestión que es importante: si uno va por la ruta y le pregunta al chofer a qué velocidad está manejando éste contestará, por ejemplo, "a 100 kilómetros por hora". Sin embargo, matemáticamente esa expresión está mal. No se trata de una multiplicación sino de una división, es decir, recorre 100 kilómetros en una hora. Cuanto más recorra, más tiempo va a tardar; por lo que es una relación directa de proporcionalidad. Siempre la velocidad será de 100 $\frac{km}{h}$, por lo que si recorro 500 kilómetros, tendré que tardar 5 horas para que, al simplificarse, me queden los 100 $\frac{km}{h}$.

Otra cuestión importante es el tema de las unidades. Nunca puedo mezclar en la misma ecuación *horas* con *minutos* o cualesquiera dos unidades distintas de medición. Es un error típico confundirse en eso; de todas maneras cuando el resultado te de asquerosamente feo, te vas a dar cuenta que en algún lado le pifiaste con algo.

Problema 14 *Un tren viaja a velocidad constante. Si se aumentara la velocidad del tren en 10 kilómetros por hora, el tren tardaría 45 minutos menos. Si se disminuyera la velocidad del tren en 10 kilómetros por hora, el tren tardaría 1 hora más. Calcular la distancia que recorre el tren.*

Solución:
Bueno, este es un problema típico de lo que les comentaba: 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Planteemos las ecuaciones:

$$\begin{gathered} 1)\ v = \frac{d}{t} \\ 2)\ v + 10 = \frac{d}{t - \frac{3}{4}} \\ 3)\ v - 10 = \frac{d}{t+1} \end{gathered}$$

Donde v es la velocidad real del tren medida en $\frac{km}{h}$, d es la distancia recorrida del tren medida en km y t es el tiempo real recorrido por el tren medido en h. Una cuestión importante es entender ese "$-\frac{3}{4}$" que puse en 2). Dice que tarda 45 minutos menos, pero como t está en horas lo tengo que pasar a horas, y 45 minutos = $\frac{3}{4}$ horas. Vamos a despejar d de 2) y 3):

$$\begin{gathered} 2)\ (v + 10)(t - \tfrac{3}{4}) = d \\ 3)\ (v - 10)(t + 1) = d \end{gathered}$$

Igualando las d...

$$\begin{gathered}(v+10)(t-\tfrac{3}{4})=(v-10)(t+1)\\ vt-\tfrac{3}{4}v+10t-\tfrac{30}{4}=vt+v-10t-10\\ \text{Los } vt \text{ se anulan... } 20t=\tfrac{7}{4}v-\tfrac{10}{4}\\ \text{Multiplicando por 4... } 80t=7v-10\end{gathered}$$

Despejando d de 1) y 3) e igualando...

$$\begin{gathered}vt=(v-10)(t+1)\\ 0=v-10t-10\\ 10t=v-10\\ 80t=8v-80\end{gathered}$$

Finalmente $7v-10=8v-80 \to 70=v \to 80t=7\times 70-10 \to t=6 \to d=70\times 6=420$

Les dejo para que piensen dos:

Problema 15 *Ariel viaja de A a B y Melanie viaja de B a A. Los dos van por el mismo camino y a velocidades constantes. Los dos salen al mismo tiempo. Cuando se cruzan, Ariel ha viajado 16 km más que Melanie. Después del encuentro, Ariel tarda* $\frac{48}{7}$ *horas en llegar a B y Melanie tarda* $\frac{28}{3}$ *horas en llegar a A. Calcular la distancia entre A y B.*

Problema 16 *Un auto viaja de A a B a velocidad constante. A las 8 de la mañana ha recorrido exactamente la tercera parte del camino entre A y B, y a las 12 del mediodía lleva recorrido, en total, las* $\frac{3}{5}$ *partes del camino entre A y B. Determinar a qué hora ha recorrido exactamente la mitad del camino entre A y B.*

2.4. Árboles, edades, barriles y caramelos

Estos problemas se tratan de que tenés una cantidad total de cosas dividida en distintos grupos y luego intercambiás cantidades de un grupo a otro, modificando obviamente las cantidades.
Son problemas complicados para plantear, pero una vez que entendés lo que tenés que hallar es sólo operar con sistemas de ecuaciones.
Normalmente son problemas de proporcionalidad. Hay que ser ordenado con las variables y hay que estar muy atento a las distintas etapas temporales. Empecemos con un problema tramposo:

Problema 17 *Una empresa maderera obtuvo un contrato para cortar árboles de un bosque, y los ecologistas iniciaron una protesta en su contra. Para evitar las protestas, el gerente de la empresa agregó la siguiente cláusula al contrato:*
"En el bosque, el 99 % del total de árboles son pinos, y la empresa sólo cortará pinos. Cuando se termine el contrato, el 97 % del total de árboles del bosque serán pinos."
Determinar qué porcentaje del bosque será cortado por la empresa al cumplirse esta cláusula del contrato.

Solución:
Bueno, a simple vista el resultado es 2 %... pero NO!, no da 2 %. Pensémoslo bien. Sea t la cantidad total de árboles que hay inicialmente, p la cantidad de pinos que hay inicialmente, n la cantidad de otros árboles que hay inicialmente y x la cantidad de pinos que cortó la empresa.
Lo que me dice el problema es que al principio:

$$\frac{99}{100} = \frac{p}{t}$$
$$1)\ \frac{1}{100} = \frac{n}{t}$$

Y luego, la cantidad de árboles que quedó fue $t - x$, la cantidad de pinos que quedó fue $p-x$ y la cantidad de otros árboles que quedó es n. Entonces, cuando se termina el contrato la situación es así:

$$\frac{97}{100} = \frac{p-x}{t-x}$$
$$2)\ \frac{3}{100} = \frac{n}{t-x}$$

Y lo que yo tendría que hallar sería $\frac{x}{t}$, despejando n de 1) y 2) llegamos a:

$$n = \frac{t}{100} \text{ y } n = \frac{3(t-x)}{100}$$

Igualando las n...

$$\frac{t}{100} = \frac{3(t-x)}{100}$$
$$t = 3(t-x)$$
$$t = 3t - 3x$$
$$3x = 2t$$
$$\frac{x}{t} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto el porcentaje de árboles que cortó fue de 66,66 %. Ya que a $\frac{2}{3}$ lo tengo que multiplicar por 100 para llegar al porcentaje.

Problema 18 *La suma de las edades de Juan y de su madre supera en 2 años a la edad del padre. Dentro de 4 años, la edad de la madre será igual al triple de la edad de Juan, y la suma de las edades de los tres (padre, madre y Juan) será igual a 74. Determinar las edades actuales de los tres personajes.*

Solución:
Sean J, M y P las edades actuales de Juan, su madre y su padre, respectivamente. Planteamos las tres ecuaciones:

$$1)\ J + M = P + 2$$
$$2)\ M + 4 = 3(J + 4)$$
$$3)\ J + 4 + M + 4 + P + 4 = 74$$

De 3) sacamos que: $J + M + P = 74 - 12 = 62$.
Sumamos P de ambos miembros en 1) y nos queda: (*) $J+M+P = 2P+2 \rightarrow 62 = 2P + 2 \rightarrow P = 30$.
Ahora, de 2) sacamos: $M + 4 = 3J + 12 \rightarrow M = 3J + 8$ y reemplanzando en (*) nos queda: $J + (3J + 8) + 30 = 62 \rightarrow 4J = 24 \rightarrow J = 6$. Finalmente, $M = 3 \times 6 + 8 \rightarrow M = 18 + 8 = 24$.

Problema 19 *Se tienen dos recipientes, cada uno de ellos con 100 litros de* *capacidad. Inicialmente contienen entre los dos 100 litros de jugo. Se agrega jugo al primer recipiente hasta completar su capacidad. Luego se vierte jugo del primer recipiente al segundo hasta completar la capacidad del segundo. Finalmente, se vierten 12 litros del segundo recipiente en el primero. Así resulta que en el segundo recipiente hay 10 litros más de jugo que en el primero. Determinar cuánto jugo tenía inicialmente cada recipiente.*

Solución:
Llamemos A y B a los recipientes. Entonces, inicialmente, el primer recipiente tendrá x y el segundo tendrá $100 - x$, ya que entre los dos tienen que sumar 100.
El primer paso es llenar el primer recipiente (que tiene x), pero ¿cuánto hace falta ponerle para que llegue a 100 (su capacidad máxima)? Es fácil ver que hay que agregarle $100 - x$ para que llegue a 100. Entonces, hasta ahora el primer recipiente tiene 100 y el segundo tiene $100 - x$.
El segundo paso es pasar jugo del primer recipiente al segundo hasta llenar este último. ¿Cuánto tendré que pasar? Y bueno, el segundo tiene $100 - x$, para llegar a 100 le faltan x. Entonces tengo que pasar x litros desde el primer recipiente al segundo, quedando el primer recipiente con $100 - x$ litros y el segundo con 100 litros.
El tercer paso es pasar 12 litros del segundo al primero. Entonces el segundo recipiente queda con $100 - 12 = 88$ litros y el primer recipiente queda con $100 - x + 12 = 112 - x$ litros.
Ahora, sabemos que en el segundo quedan 10 litros más que en el primero, entonces planteamos eso así:

$$\begin{gathered} A + 10 = B \\ 112 - x + 10 = 88 \\ 122 - x = 88 \\ 34 = x \end{gathered}$$

Finalmente, A empezó con $x = 34$ litros y B empezó con $100 - x = 100 - 34 = 66$ litros.

Les dejo dos problemas para que piensen:

Problema 20 *El barril A contiene una mezcla homogénea de jugo de uva y jugo de manzana en la proporción de 2 litros de uva por cada 5 litros de manzana. El barril B contiene una mezcla homogénea de jugo de uva y jugo de manzana en la proporción de 3 litros de uva por cada 5 litros de manzana. Se vierte el contenido de los dos barriles en uno más grande y se obtiene un total de 154 litros de jugo, en la proporción de 5 litros de uva por cada 9 litros de manzana. Determinar cuántos litros de jugo contenía el barril A.*

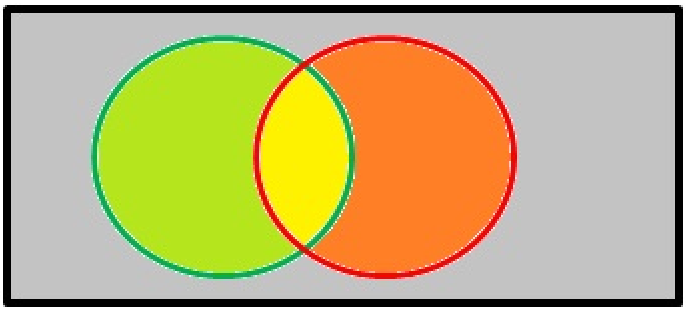
Problema 21 *Emilio tiene una bolsa con dos clases de caramelos, de frutilla y de leche. Le regala la quinta parte de los caramelos de leche a su hermanito y resulta que la cantidad de caramelos de leche que quedan en la bolsa es igual a $\frac{2}{3}$ de la cantidad de caramelos de frutilla de la bolsa. Luego le regala 56 caramelos de frutilla a sus compañeros de clase. Así, en la bolsa la cantidad de los* *caramelos de frutilla es igual a $\frac{4}{5}$ de los de leche. ¿Cuántos caramelos de cada clase quedan en la bolsa?*

2.5. Porcentajes y Venn, buenos amigos

Bueno existen muchos problemas del tipo "tantos alumnos practican fútbol, tantos practican vóley, tantos practican los dos, ¿cuántos no practican nada si en total hay tantos alumnos". Son muchos estos problemas, y existe una forma linda de pensarlos que, además, facilita mucho las cosas.
De lo que les hablo es de los diagramas de Venn. Pongo un problema y voy explicando con ese:

Problema 22 *En un curso hay 20 alumnos. La cuarta parte habla a la perfección el idioma inglés, la décima parte habla a la perfección el idioma francés y hay 8 alumnos que no hablan ninguno de los dos idiomas. ¿Cuántos alumnos hablan a la perfección los dos idiomas?*

Los diagramas de Venn son representaciones gráficas mediante el uso de una circunferencia para cada conjunto, contemplando sus intersecciones. Todas ellas se meten dentro de un rectángulo y, el espacio del rectángulo que no pertenece a ninguna circunferencia, será el conjunto de gente que no pertenece a ninguno de los conjuntos anteriores.
En este problema podemos definir 3 conjuntos: I serán los que hablan inglés (rojo), F serán los que hablan francés (verde) y N serán los que no hablan ninguno de los dos idiomas (gris). Además se ve la intersección de F e I en amarillo. Gráficamente sería así:



Lógicamente si sumo los 3 conjuntos me dará más del total (que es 20 en este caso), ya que entre los conjuntos I y F hay una intersección no nula, es decir, hay alumnos que hablan los dos idiomas.
¿Cómo encuentro cuántos son esos? Pensémoslo así: yo sumo los 3 conjuntos, es decir:

$$F + I + N = \frac{20}{2} + \frac{20}{4} + 8 = 10 + 5 + 8 = 23$$

Gráficamente, sumar los 3 conjuntos, sería como pegar un papel de color distinto arriba de cada conjunto. Lo que ocurre en la intersección de I y F (parte amarilla) es que la estoy pintando de dos colores distintos, una por cada conjunto. Es por eso que si sumo los 3 conjuntos me paso del total. Pero esos 3 alumnos que "me sobran" si sumo los tres conjuntos, ¿qué representan?. Bueno representan justamente lo que yo pinté de más, la intersección (amarilla). Por lo tanto los alumnos que hablan los 2 idiomas son 3.

Si tengo dos conjuntos A y B, escribimos $A \cap B$ para la intersección y $A \cup B$ para la unión. Se cumple lo siguiente:

$$A + B = A \cup B + A \cap B \tag{2.2}$$

Si tengo tres conjuntos A, B y C, se cumple:

$$A + B + C = A \cup B \cup C + A \cap B + B \cap C + C \cap A - A \cap B \cap C \tag{2.3}$$

En general, la suma de todos los conjuntos será igual a la unión de todos más las intersecciones dobles, menos las intersecciones triples, más las intersecciones cuádruples, así siguiendo alternando los signos.

2.6. Ecuaciones diofánticas lineales

Anteriormente vimos que si tengo n ecuaciones con n incógnitas, y ninguna ecuación es combinación lineal de otras, ese sistema lineal tendrá solución única. Ahora vamos a ver qué pasa cuando tengo una ecuación menos de la cantidad de incógnitas que tenga.
Vamos a ver el caso de tener una ecuación con dos incógnitas. Este tipo de ecuaciones suelen llamarse $ecuaciones\ diofanticas\ lineales$.

Por ejemplo:

Problema 23 *Encontrar todos los pares (x,y) enteros que cumplen 2x + 3y = 5*

Solución:
A simple vista vemos que el par $(1, 1)$ es solución. Pero a nosotros nos piden todos los pares.
Lo que nos dice la teoría es que todas las soluciones serán los $(x, y) = (1 + 3k, 1 - 2k)$ con k entero. Como k puede tomar infinitos valores, tendremos infinitas soluciones.
Pero veamos un poco cuál es la idea:
Primero encontramos una solución, y luego le sumamos al valor de x un múltiplo del coeficiente de y, y viceversa. Veamos qué pasa si meto esa solución general en la ecuación:

$$2x + 3y = 5$$
$$2(1 + 3k) + 3(1 - 2k) = 5$$
$$2 + 6k + 3–6k = 5$$

Notemos que los $6k$ se cancelan, valiendo la igualdad para cualquier valor de k. Por lo tanto lo que hicimos fue encontrar una solución y a esa solución sumar y restar del miembro izquierdo un múltiplo del mínimo común múltiplo entre 2 y 3 (que es 6).

Veamos otro caso: $3x + 12y = 30$

Solución:
El par $(10, 0)$ es solución y, según lo que vimos antes todas las soluciones serán de la forma $(10 + 12k, 0 - 3k)$ con k entero. Sin embargo, $(2, 2)$ es solución también y no cumple esa forma general.
Lo que ocurre es que el máximo común divisor entre 3 y 12 (que es 3) divide a 30. Entonces para poder aplicar la forma general que dije arriba, el máximo común divisor entre los coeficientes de la izquierda no tiene que dividir al término independiente. Todo esto se arregla dividiendo la ecuación original por 3, quedando:
$x + 4y = 10$
Y ahí sí, $(30, 0)$ es solución y todas las soluciones serán de la forma $(30+4k, 0-1k)$ con k entero.

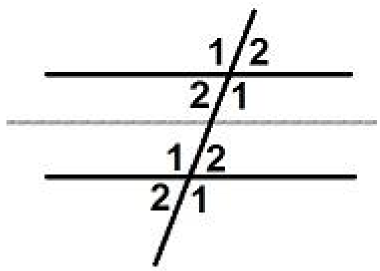
Problema 24 *En una granja hay gallinas y cerdos, y en total hay 100 patas entre ellos. Determinar cuántas gallinas y cuántos cerdos hay en la granja sabiendo que hay al menos dos animales de cada especie. Dar todas las posibilidades.*

Capítulo 3

Geometría

3.1. Ángulos entre paralelas

Si yo tengo, por ejemplo, dos rectas paralelas y a ellas las corta otra recta, voy a tener formados 8 ángulos. Pero notemos que si yo trazo una recta paralela a las dos paralelas en el medio de ellas es como que la figura se me repite, tengo lo mismo de arriba que de abajo. Si yo pego una paralela arriba de la otra, el dibujo va a ser el mismo, se me van a superponer, por lo tanto todos esos ángulos serán iguales entre sí. También, dos ángulos consecutivos (que comparten un lado) sumarán 180° y los llamaremos *adyacentes*.
En la figura vemos bien que hay sólo dos tipos de ángulos entre los ocho que hablamos antes, 1 y 2.



3.2. Pitágoras

Existe un teorema, el de Pitágoras (¿será de él?, bueno, la historia dice que sí, aunque hay varias versiones de que lo robó de otros matemáticos), que relaciona los lados de un triángulo rectángulo.

Teorema 1 *Si el triángulo ABC tiene el ángulo A recto, entonces se cumple:*

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \tag{3.1}$$

Donde AB y AC se llaman *catetos* y BC se llama *hipotenusa*

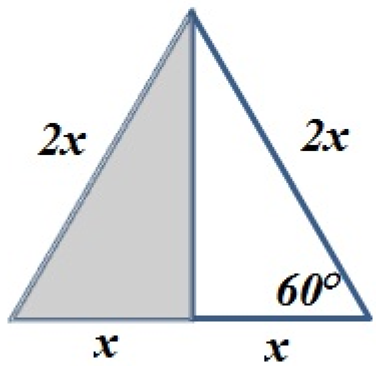
Entonces, sabiendo dos lados de un triángulo rectángulo podemos saber el tercero utilizando este teorema.

Caso particular: triángulo rectángulo isósceles
En ese caso los dos catetos son iguales, entonces si ABC es un triángulo rectángulo con $AB = AC$ y $A = 90°$, se cumple:

$$2 \times (AB)^2 = (BC)^2 \tag{3.2}$$

3.3. Medio equilátero

Es bien sabido que los triángulos equiláteros tienen sus tres lados iguales y sus tres ángulos de 60°. La idea que les voy a contar es la del "medio equilátero" que, como dice la palabra, es la mitad de un equilátero. Al partir un equilátero por la mitad, trazando una altura, quedan formados dos triángulos rectángulos iguales, con ángulos de 90°, 60° y 30°.
Con respecto a sus lados, la hipotenusa medirá lo mismo que el lado del equilátero y el cateto que forma con la hipotenusa el ángulo de 60° medirá la mitad del lado del equilátero, como muestra la figura.



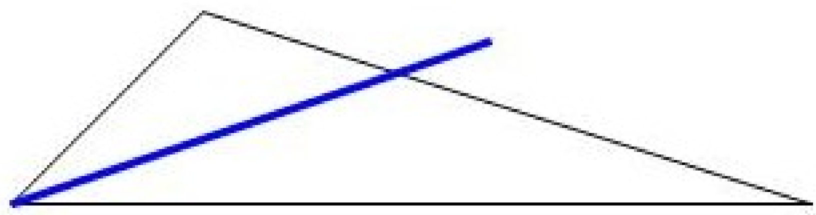
Notemos en la figura que si pegamos otro triángulo igual al costado, quedará formado un triángulo equilátero.
Por lo tanto, siempre que tengamos un triángulo con un lado igual al doble que otro y el ángulo que formen esos dos lados sea de 60°, se tratará de un "medio equilátero".

Un problema que sale con esto es:

Problema 25 *Problema: Sea ABC un triángulo isósceles con AB=AC y CBA=30°. Si el perímetro de ABC es 90, calcular el área de ABC.*

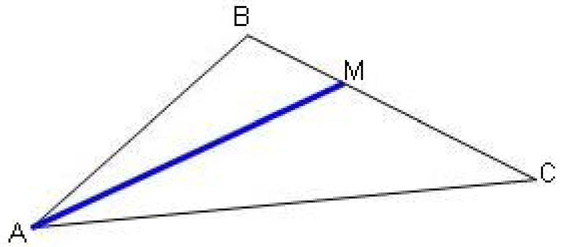
3.4. Bisectriz de un ángulo

La *bisectriz* de un ángulo es la semirrecta que tiene origen en el vértice del ángulo y lo divide en dos ángulos de igual medida.



Teorema 2 *Sea M el punto en el que la bisectriz del ángulo A corta al segmento BC. Entonces se cumple:*

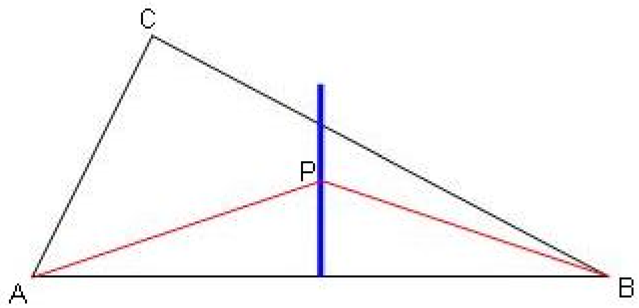
$$\frac{MB}{BA} = \frac{MC}{CA} \tag{3.3}$$



Nota 7 *En el único caso en que la bisectriz corta en el punto medio del segmento opuesto es en el caso de los triángulos isósceles. Por ejemplo: Sea ABC un triángulo con AB=AC, si la bisectriz del ángulo A corta al segmento BC en M, entonces se cumple que BM=CM.*
En todos los demás casos eso no ocurre.

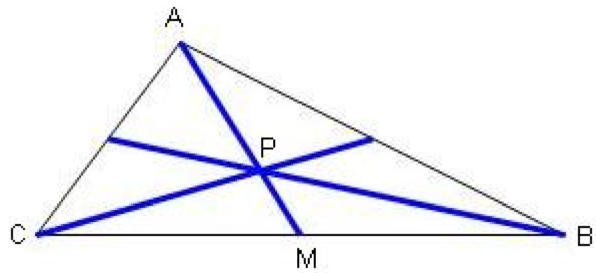
3.5. Mediatriz de un segmento

La *mediatriz* de un segmento es la recta perpendicular a ese segmento que pasa por su punto medio. Tiene la propiedad de que cualquier punto perteneciente a ella equidista de los dos extremos del segmento, es decir que si elijo cualquier punto P de la mediatriz de un segmento AB, el triángulo APB será isósceles con $AP = PB$.



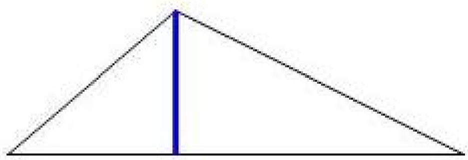
3.6. Mediana de un triángulo

La *mediana* es un segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto a ese vértice. Tiene la propiedad de que, al trazar una mediana, los dos triángulos que quedan formados tienen igual área.
Además, las 3 medianas de un triángulo se cortan en proporción 2 : 1. En la figura, $AP = 2 \times PM$.



3.7. Altura de un triángulo

La *altura* correspondiente a un lado es el segmento perpendicular a ese lado, que pasa por el vértice opuesto.



3.8. Estos segmentos en los triángulos isósceles

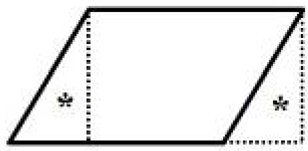
Si el triángulo ABC tiene $AB = AC$, entonces la bisectriz del ángulo A será también altura, mediana y mediatriz.

3.9. Áreas

El área se puede interpretar, gráficamente, como la pintura que necesito para pintar el interior de cierta figura. Existen distintas fórmulas que se dan en el colegio secundario, que no son necesarias. Lo único que tenemos que saber es el área de un rectángulo y, a partir de ahí, deduciremos todas las demás. El área de un rectángulo se calcula:

$$A = base \times altura \tag{3.4}$$

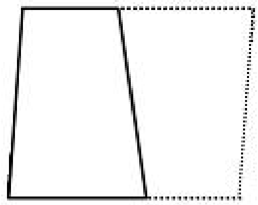
Un paralelogramo tiene el mismo área que un rectángulo, ya que si corro el triángulo del costado me queda formado un rectángulo, como se ve en la figura:



Un triángulo es la mitad de un paralelogramo, entonces su área será:

$$A = \frac{base \times altura}{2} \tag{3.5}$$

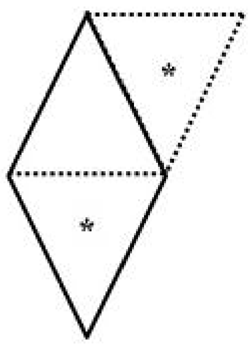
Un trapecio es la mitad de un paralelogramo de lado $B + b$, ya que si se pega invertido otro trapecio al costado del original, queda un paralelogramo de lado $B + b$, como muestra la figura:



Entonces el área de un trapecio será:

$$A = \frac{(base_{mayor} + base_{menor}) \times altura}{2} \tag{3.6}$$

Un rombo es un paralelogramo, ya que si lo corto a la mitad y lo pego al costado me queda un paralelogramo, como se ve en la figura, de base $Diagonal_{menor}$ y altura $\frac{Diagonal_{mayor}}{2}$.



Entonces el área del rombo se calcula igual que la del paralelogramo:

$$A = Diagonal_{menor} \times \frac{Diagonal_{mayor}}{2} \tag{3.7}$$

Existen fórmulas para calcular el área de cualquier triángulo y el área de cualquier cuadrilátero. Son complicadas pero se las dejo:

Lema 5 *Fórmula de Herón: Sea ABC un triángulo con lados a, b y c. Entonces el área del triángulo es:*

$$A = \sqrt{s \times (s-a) \times (s-b) \times (s-c)} \tag{3.8}$$

Donde s es el semiperímetro ($\frac{per}{2}$)

Lema 6 *Fórmula de Bretschneider: Sea ABCD un cuadrilátero convexo de lados a, b, c y d. Entonces el área del cuadrilátero es:*

$$A = \sqrt{(s-a) \times (s-b) \times (s-c) \times (s-d) - a \times b \times c \times d \times \cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})} \tag{3.9}$$

Donde s es el semiperímetro ($\frac{per}{2}$)

3.10. Área de dos maneras

Una idea que está buena usar es calcular el área de un triángulo de dos maneras distintas. Un problema en el que se aplica esta idea es:

Problema 26 *Se tiene el rectángulo ABCD de lados AB=CD=65 y BC=AD=156. Se traza la circunferencia de centro A que pasa por C. La recta BD corta a la circunferencia en E y F. Calcular la longitud del segmento EF.*

Solución:
Notemos que el triángulo ABD tiene $\frac{65 \times 156}{2} = 5070$ de área.
El triángulo FAE es isósceles, ya que $FA = AE = radio$; calculemos el radio, que no es otra cosa que $AC = BD$ (porque son ambas las diagonales del rectángulo).
Haciendo Pitágoras sabemos que $AC^2 = 65^2 + 156^2$, despejando $AC = BD = 169$.

Ahora usamos la idea que hablamos antes, ya que en BAE podíamos usar BD como base y trazar la altura h, que pasa por A, correspondiente a BD, que corta a BD en M.

Sabemos entonces que $\frac{BD \times h}{2}$ es el área de BAE, por lo tanto es igual a 5070.
Entonces tenemos:
$\frac{169 \times h}{2} = 5070$
Despejando, $h = 60$.

Notemos que h divide al triángulo FAE en dos triángulos exactamente iguales (por ser h mediana, bisectriz, altura y mediatriz todo al mismo tiempo. Ver 3.8), y $AE = radio = AC = 169$.
Hacemos Pitágoras:
$h^2 = ME^2 + AE^2$
$60^2 = ME^2 + 169^2$

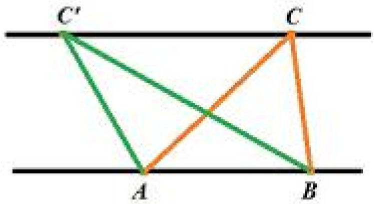
Despejando, $ME = 158$

Sabemos que h al ser mediana, M es punto medio de FE, por lo tanto $FM = ME = 158$. Finalmente $EF = 2 \times ME = 2 \times 158 = 316$

Sin lugar a dudas este problema tiene otro tipo de soluciones (más difíciles o más fáciles, según quién las mire) pero "calcular el área de un triángulo de dos maneras distintas" nos ayudó demasiado!

3.11. Área de triángulos entre paralelas

Supongamos que yo tengo dos rectas paralelas y me elijo un segmento AB en una de ellas. La idea que les voy a contar es que cualquier punto C que me elija en la otra recta va a formar un triángulo ACB, y todos esos triángulos, coloque donde coloque a C, van a tener igual área. ¿Por qué? El segmento AB lo van a tener todos como base y la altura va a ser la misma, porque la distancia perpendicular entre dos puntos cualesquiera, uno de cada recta, va a ser siempre la misma.



Un problema que sale con esto es:

Problema 27 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo de área 21 y O el punto de intersección de sus diagonales. Se traza por A la recta $\mathbb{L}_1$ paralela a BD y se traza por B la recta $\mathbb{L}_2$ paralela a AC. Las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ se cortan en P. Sabiendo que el área del triángulo AOB es 7, calcular el área del triángulo CPD*

Solución:
Trazamos el segmento PO, que deja dividido al triángulo CPD en 3 regiones: 1) COD, 2) COP y 3) DOP. La región 1) la comparte con el cuadrilátero, así que por el momento la vamos a dejar de lado. Veamos la región 2):
Sabemos que $\mathbb{L}_2 \parallel AC$ por enunciado, y que los triángulos COP y COB tienen la misma base OC, por lo tanto tendrán igual área, ya que su altura es la misma y la base la comparten.
Ahora, en la región 3), el triángulo POD tendrá igual área que el triángulo AOD, pues $\mathbb{L}_1 \parallel BD$, comparten la misma base OD y su altura será la misma.
Finalmente:

$$\begin{gathered}\text{Área } CDP = (COP) + (COD) + (DOP) \\ \text{Área } CDP = (COB) + (COD) + (AOD) \\ \text{Área } CDP = \text{Área } ABCD - (AOB) \\ \text{ÁREA } CDP = 21 - 7 = 14\end{gathered}$$

Les dejo otro problema:

Problema 28 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero con sus ángulos B y C mayores que 90°, y sea O el punto de intersección de sus diagonales. Consideramos M en el segmento AO tal que BM es paralelo a CD y N en el segmento DO tal que CN es paralelo a AB.*
Demostrar que el área(AMN)=área(DMN)

3.12. Proporción entre áreas y lados

En triángulos de igual altura, la proporción entre sus bases es igual a la proporción entre sus áreas. Demostrar esto que digo es bastante trivial, pero les tiro una idea y dejo que lo piensen ustedes:

Si tenemos dos triángulos de altura h, uno de base x y otro de base $2x$, la proporción entre sus bases es $0,5$, ¿cuál será la de sus áreas?, ¿cómo calculo el área de cada triángulo?, ¿cuánto dan esas áreas?, ¿se verifica lo que dijimos anteriormente?, ¿y si ahora las bases, en vez de valer x y $2x$, miden x y $3x$?

Un problema en el que se utiliza esto:

Problema 29 *Sea ABC un triángulo y P un punto interior del triángulo. Se trazan: la recta BP que corta a AC en E, la recta CP que corta a AB en F y la recta AP que corta a BC en D. Si área (BPD)=80 ; área (DPC)=60 ; área (CPE)=70 ; área (APF)=169. Calcular el área de BPF y de APE.*

No voy a resolverlo, pero les dejo unas pistas:

- Sé que BAD y DAC tienen la misma altura h si tomo como bases BD y DC, respectivamente; por lo tanto $\frac{BD}{DC} = \frac{A(BAD)}{A(DAC)}$
- Sé que $\frac{BD}{DC} = \frac{A(BPD)}{A(DPC)}$ porque tienen la misma altura f si tomo como bases BD y DC.
- Sé que ABE y EBC tienen la misma altura t si tomo como bases AE y EC, respectivamente; por lo tanto $\frac{AE}{EC} = \frac{A(ABE)}{A(EBC)}$

3.13. Semejanza

Decimos que una figura A es *semejante* a otra B, y escribimos $A \approx B$, cuando tienen la misma forma pero distinto tamaño. Por ejemplo, cuando uno mira un mapa de Argentina, si se trata de un mapa como la gente, lo que pasa es que vemos la forma que tiene el país realmente en un tamaño mucho más chico. Normalmente decimos que el dibujo está “a escala” de la imagen real. ¿Qué quiere decir estar a escala? Bueno, lo que quiere decir es que si en la realidad una distancia mide 100 kilómetros y en el dibujo mide 1 centímetro, cualquier distancia real tiene que estar dibujada en esa escala. O sea si la distancia real entre Buenos Aires y Mar del Plata es de 400 kilómetros, en el dibujo tendrá que ser de 4 centímetros.
Otro momento cotidiano donde está presente la semejanza es cuando hacemos zoom en una foto, lo que hacemos es ver en un tamaño más grande la foto original, pero sin embargo las formas se siguen manteniendo.
Una condición suficiente para que dos figuras sean semejantes es que tengan sus ángulos respectivos iguales. Por ejemplo, si tengo dos triángulos con los ángulos de $71°$, $100°$ y $9°$, esos triángulos van a ser semejantes. Lo que en los mapas llamamos “escala”, en matemática lo llamamos razón de semejanza.
En una semejanza decimos que dos lados son *correspondientes* si tienen los mismos ángulos en sus extremos.

Nota 8 *Siempre que en un triángulo trace una recta paralela a algún lado del triángulo se me van a formar dos triángulos semejantes (si la recta que trazo atraviesa el triángulo me van a quedar a simple vista y si esta recta no atraviesa el triángulo voy a tener que prolongar los lados del triángulo que no son paralelos a la recta trazada para poder observar los 2 triángulos semejantes formados)*

Si dos triángulos ABC y DEF son semejantes y, además, tienen un par de lados correspondientes iguales, decimos que son *congruentes* y escribimos $ABC \cong DEF$. En otras palabras, esos dos triángulos serán iguales.

Si dos triángulos son semejantes puedo formar entre sus lados una proporción.

Veamos un problema donde se puede utilizar esto:

Problema 30 *En un trapecio ABCD de base mayor AB, base menor DC y lados no paralelos BC y DA, sea K el punto del lado BC tal que* $BK = \frac{1}{3}$ *BC. Se traza por K la recta paralela a DA que corta a AB en L. Si BL = CD y el área del trapecio ABCD es 20, calcular el área del triángulo ADL*

Solución:
Primero denotemos $BK = x$, por lo tanto $KC = 2x$. También $LB = y$.
$LD \parallel BC$ porque $BCDL$ es paralelogramo, en particular también son iguales (valen $3x$ ambas. Vean ustedes por qué). Al ser paralelas tenemos que los ángulos DLA y CBL son iguales.
También sabemos que $AD \parallel LK$ por enunciado por lo tanto los ángulos LAD y BLK también son iguales entre sí. Entonces en los triángulos LAD y BLK tenemos dos pares de ángulos iguales, por lo tanto son *semejantes*. Ahora podemos formar la proporción entre sus lados:

$$\frac{LA}{LD} = \frac{BL}{BK}$$
$$\frac{LA}{3x} = \frac{y}{x}$$
$$LA \times x = y \times 3x$$
$$LA = 3y$$

Ahora sabemos que el área $(ABCD) = 20$, podemos formar ese área de la siguiente manera:

$\frac{(AL+LB+DC)h}{2} = 20$

Siendo h la altura del trapecio.

Reemplazando:

$$\frac{5y \times h}{2} = 20$$
$$y \times h = 8$$

Finalmente el área (ADL) que era la que nos pedía va a ser:

$$\frac{3 \times y \times h}{2}$$
$$\frac{3 \times 8}{2} = 12$$

3.14. Trigonometría

Hace muchos años, a los egipcios se les presentó un problema a la hora de construir sus famosas pirámides. Ellos podían calcular distancias sobre la tierra y podían saber con qué ángulo colocar sus piezas. Pero no podían calcular la altura de las pirámides o la longitud que tendrían las caras laterales.
Para ello desarrollaron la trigonometría, un conjunto de relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo.

Sea ABC un triángulo rectángulo con $A = 90°$. Sea el ángulo $ABC = \alpha$. Entonces se cumple:

$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC} \tag{3.10}$$

$$\cos\alpha = \frac{AB}{BC} \tag{3.11}$$

$$\tan\alpha = \frac{AC}{AB} \tag{3.12}$$

Lema 7 *Relación Pitagórica:*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{3.13}$$

Teorema 3 *Teorema del seno: Sea ABC un triángulo, entonces se cumple:*

$$\frac{AB}{\sin ACB} = \frac{AC}{\sin ABC} = \frac{CB}{\sin BAC} \tag{3.14}$$

Teorema 4 *Teorema del coseno: Sea ABC un triángulo, entonces se cumple:*

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \times BC \times AC \times \cos ACB \tag{3.15}$$

3.15. Cuadriláteros cíclicos

Decimos que un cuadrilátero es cíclico si sus ángulos opuestos suman 180°. Además es condición necesaria y suficiente que se puedan inscribir en una circunferencia. Es decir, cualquier cuadrilátero que se pueda inscribir en una circunferencia será cíclico, por lo que sus ángulos opuestos sumarán 180°.
Además, en todo cuadrilátero cíclico se cumple el siguiente teorema:

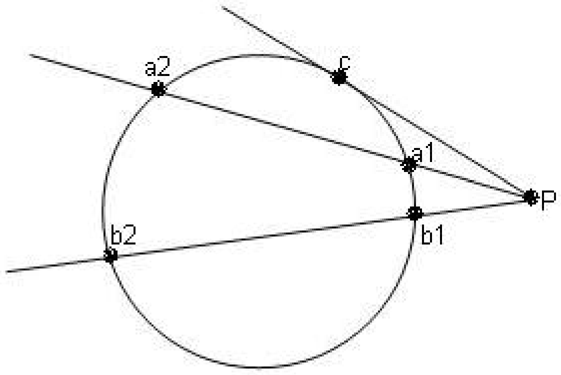
Teorema 5 *Teorema de Ptolomeo: Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico de diagonales AC y BD. Entonces se cumple que el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de lados opuestos. Es decir:*

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times DA$$

3.16. Potencia de un punto

Sea ω una circunferecia, P un punto exterior a ω y $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ tres rectas que pasan por P y cortan a ω en a_1 y a_2, b_1 y b_2, y c, respectivamente. Entonces se cumple:

$$pa_1 \times pa_2 = pb_1 \times pb_2 = pc^2 \tag{3.16}$$



Nota 9 *En el caso de la recta* $\mathbb{C}$*, que corta en un único punto a* ω*, la llamamos recta tangente a* ω*. La particularidad que tienen las rectas tangentes es que si trazo el radio oc (donde o es el centro de* ω*), me queda* $oc \perp pc$

Capítulo 4

Combinatoria

4.1. Factorial

Llamamos *factorial* de un número entero positivo n al producto de todos los números desde 1 hasta n. Escribimos $n!$. En general:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times (n-1) \times n \qquad (4.1)$$

Nota 10 *Por convención 0!=1*

Veamos problemas en los que se puede utilizar el factorial:

Problema 31 *¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 1,2,3 si no se pueden repetir? ¿Y si se pueden repetir?*

Solución:
Primero veamos si no se pueden repetir. La idea es formar un número ABC. Para A tengo 3 posibilidades (1,2 o 3), para B tengo 2 posibilidades (porque una ya la utilicé para A) y C me queda determinado, o sea tengo 1 sola posibilidad. Por lo tanto tengo, en total, $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ posibilidades.
Ahora veamos si se pueden repetir. Este caso es fácil ya que tendré 3 posibilidades para cada lugar, o sea tendré $3^3 = 27$ posibilidades

En general, si tengo n cosas distintas para llenar n lugares:

- Si no se pueden repetir tendré $n!$ posibilidades
- Si se pueden repetir tendré n^n posibilidades

Ahora veamos qué pasa cuando tengo más cosas que lugares, por ejemplo:

Problema 32 *Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, ¿cuántos números de 5 cifras se pueden formar si no puede haber dígitos repetidos? ¿Y si puede haber dígitos repetidos?*

Solución:
Veamos si no se pueden repetir: pensando análogo a lo anterior, tengo que formar el número $ABCDE$, donde para A tengo 7 posibilidades, para B 6 posibilidades, para C tengo 5 posibilidades, para D 4 posibilidades y para E 3 posibilidades. Entonces tendré $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$ posibilidades.
También lo puedo escribir como: $\frac{7!}{2!}$
Veamos si se pueden repetir: tendré 7 posibilidades para cada lugar, como tengo 5 lugares, tendré en total 7^5 posibilidades en total.

En general, si tengo k cosas distintas para llenar n lugares, con $k \geq n$:

- Si no se pueden repetir tendré $\frac{k!}{(k-n)!}$ posibilidades
- Si se pueden repetir tendré k^n posibilidades

4.2. Número combinatorio

Si tengo n elementos distintos y quiero elegir k de ellos, con $k \leq n$, y no me importa el orden en que los elijo, puedo utilizar el número combinatorio, que se define:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{4.2}$$

Por ejemplo: si tengo 10 colores distintos y tengo que elegir 3 de ellos para colorear un dibujo, tengo: $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120$ posibilidades para esa elección.

Nota 11 *No me interesa el orden en que elijo los tres colores, es decir, si tengo los colores A, B y C, las seis elecciones ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA las cuento como una sola.*

Una propiedad que está buena es que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{4.3}$$

Es decir, si tengo 10 colores y quiero elegir 3, tengo $\binom{10}{3}$ formas. Pero si quisiera elegir $10 - 3 = 7$ colores, tendría la misma cantidad, ya que al elegir 3, estoy dejando de elegir 7. Entonces en cada una de las formas de elegir 3, estoy dejando de lado 7, que serán las formas de elegir 7.

4.3. ¿Y si tengo cifras repetidas?

Antes, las cosas que tenía para repartir eran todas distintas. Ahora vamos a ver qué pasa cuando tengo cosas repetidas, por ejemplo:

Problema 33 *¿Cuántos números de 5 cifras puedo formar usando una vez cada uno de los dígitos 1, 1, 2, 3, 4?*

Solución:
Bueno, sin lugar a dudas el 5! que habíamos usado antes no va a funcionar ahora, porque se nos repite 2 veces el uno. O sea estaríamos contando como dos números distintos el 11234 y el 11234. ¿Estoy loco? No, lo que pasa es que si cuento 5! esos dos números son diferentes, porque lo que hice fue intercambiar los unos de lugar. Entonces cada número lo estaría contando 2 veces, por lo que la cantidad total serán $\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$ números.

Otro ejemplo:

Problema 34 *¿Cuántos números de 7 cifras se pueden formar usando una vez cada uno de los dígitos 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3?*

Solución:
Usando el 7! antes visto estaría contando: $2! = 2$ veces las permutaciones de los unos, $3! = 6$ veces las permutaciones de los dos, y $2! = 2$ veces las permutaciones de los tres. Entonces tendré en total: $\frac{7!}{2!\times 3!\times 2!} = 210$ números.

Es decir, la idea es calcular el factorial de la cantidad de cifras y dividirlo por la cantidad de repeticiones que tenga de cada elemento.

Problema 35 *¿Cuántos anagramas se pueden formar con la palabra MISSISSIPPI?*

Solución:
En total tenemos 11 lugares, una M, cuatro I, cuatro S y dos P. Entonces en total tendré:
$\frac{11!}{1!\times 4!\times 4!\times 2!} = 34650$ anagramas

4.4. Distribuir k pelotitas en n cajas

Si tengo que distribuir k pelotitas en n cajas numeradas desde 1 hasta n tengo:

$$\binom{k+n-1}{n-1} \tag{4.4}$$

formas.

4.5. Suma de cifras

Una forma de utilizar lo que les acabo de contar es esta:

Problema 36 *¿Cuántos números de 4 cifras existen tales que la suma de sus cifras sea 9?*

Tenemos que formar un número de 4 cifras $ABCD$. Para que sea de 4 cifras tenemos que $A \geq 1$.
Podemos pensar el problema de esta forma: tomar a la suma de las cifras como las pelotitas y a los lugares como las cajitas. Ya vimos que el primer lugar tiene que tener sí o sí 1 pelotita, es decir que nos quedan para distribuir 8 más, y tenemos 4 cajitas. Entonces tendremos: $\binom{8+4-1}{4-1} = \frac{11!}{3!(11-3)!} = \frac{11!}{3! \times 8!} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 11 \times 5 \times 3 = 165$ formas. O sea habrá 165 números que cumplan lo pedido.

La idea general es pensar que cada posición (A, B, C y D) es una cajita, y por ejemplo, el número 1008 cumple lo pedido. Lo que se hizo fue poner las 8 pelotitas restantes en la posición D. En el número 3204 lo que se hizo fue agregar 2 pelotitas en A, 2 pelotitas en B y 4 en D.
Acordate que siempre hablo de 8 pelotitas porque una sí o sí está en A, entonces no la tengo en cuenta.

Problema 37 *¿Cuántos números n, con $n \leq 10000$, existen tales que la suma de las cifras de n es múltiplo de 10?*

No lo voy a resolver, pero les doy unas pistas:

- n es menor que 10000, entonces puede ser de 1 cifra, 2 cifras, 3 cifras o 4 cifras
- Si n es de 3 cifras, la suma de sus cifras no puede ser 30 o más, ya que como máximo será 27 (cuando el $n = 999$)

4.6. Combinatoria y divisibilidad

Hay muchas problemas que mezclan los criterios de divisibilidad y la combinatoria, por ejemplo:

Problema 38 *Pablo escribió la lista de todos los números naturales capicúas de 5 dígitos que son múltiplos de 11. Calcular cuántos números tiene la lista de Pablo.*

Primero tenemos que hallar un número de cinco cifras $ABCBA$, ya que es capicúa, con $A \neq 0$. Utilizando el criterio de divisibilidad por 11, sabemos que $2A + C - 2B = 2(A - B) + C = 11k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Veamos que $k \leq 2$ ya que el miembro izquierdo lo máximo que puede sumar es 27 (con $A = C = 9$ y $B = 0$).
Del mismo modo, $-1 \leq k$, ya que como mínimo el miembro izquierdo puede sumar -18 (con $B = 9$ y $A = C = 0$).

Finalmente $k = \{-1, 0, 1, 2\}$. Dividiremos en esos cuatro casos.
Caso 1: $k = -1$
Tenemos $2(A - B) + C = -11$, de donde C tiene que ser impar

- $C = 1 \Rightarrow A - B = -6$, tengo 3 posibilidades
- $C = 3 \Rightarrow A - B = -7$, tengo 2 posibilidades
- $C = 5 \Rightarrow A - B = -8$, tengo 1 posibilidad
- $C = 7$ y $C = 9$ no arrojan soluciones

Caso 2: $k = 2$
Tenemos $2(A - B) + C = 22$, de donde C tiene que ser par

- $C = 8 \Rightarrow A - B = 7$, tengo 3 posibilidades
- $C = 6 \Rightarrow A - B = 8$, tengo 2 posibilidades
- $C = 4 \Rightarrow A - B = 9$, tengo 1 posibilidad
- $C = 2$ y $C = 0$ no arrojan soluciones

Caso 3: $k = 0$
Tenemos $2(A - B) + C = 0$, de donde C tiene que ser par

- $C = 8 \Rightarrow A - B = -4$, tengo 5 posibilidades
- $C = 6 \Rightarrow A - B = -3$, tengo 6 posibilidades
- $C = 4 \Rightarrow A - B = -2$, tengo 7 posibilidades
- $C = 2 \Rightarrow A - B = -1$, tengo 8 posibilidades
- $C = 2 \Rightarrow A - B = 0$, tengo 9 posibilidades

Caso 4: $k = 1$
Tenemos $2(A - B) + C = 11$, de donde C tiene que ser impar

- $C = 1 \Rightarrow A - B = 5$, tengo 5 posibilidades
- $C = 3 \Rightarrow A - B = 4$, tengo 6 posibilidades
- $C = 5 \Rightarrow A - B = 3$, tengo 7 posibilidades
- $C = 7 \Rightarrow A - B = 2$, tengo 8 posibilidades
- $C = 9 \Rightarrow A - B = 1$, tengo 9 posibilidades

Finalmente, en total habrá: $2(1+2+3)+2(5+6+7+8+9) = 2\times 6+2\times 35 = 12 + 70 = 82$ números que cumplen lo pedido.

Les dejo otro problema:

Problema 39 *Fede hace la lista de todos los enteros positivos pares que tienen la suma de los dígitos igual a 9 y cuatro de sus cifras son 1, 0, 0 y 4, en algún orden. Calcular cuántos números tiene la lista de Fede.*

4.7. Contar lo que no sirve y restarlo

Es una idea muy útil y que está buena. Teniendo el total de cosas y sabiendo cuántas son las que no me sirven, restando, podré saber cuántas son las que sí me sirven.

Problema 40 *¿Cuántos números entre 1 y 100 no son múltiplos ni de 2 ni de 3?*

Solución:
Los múltiplos de 2 son 50. Los múltiplos de 3 son 33, ya que el primero es $3 = 3 \times 1$ y el último es $99 = 3 \times 33$.
Ahora bien, algunos números fueron contados dos veces, los que son al mismo tiempo múltiplos de 2 y de 3, es decir, los múltiplos de 6 (ver diagramas de Venn).
¿Cuántos son los múltiplos de 6 menores que 100? 16 ya que $96 = 6 \times 16$ es el último. Entonces la cantidad de números que cumplen el enunciado son: $100 - 50 - 33 + 16 = 33$.

La idea fue, hay en total 100 números. Si a esos les saco los múltiplos de 2 y los múltiplos de 3 estaría casi cumpliendo lo pedido. Lo único que falta es sumarle los múltiplos de 6, ya que a ellos los resté dos veces (una vez con los múltiplos de 2 y otra vez con los múltiplos de 3). Al sumarlos "quedaría en 0", se compensa.

Problema 41 *De los números entre 1 y 200, ¿cuántos no son divisibles ni por 4, ni por 6, ni por 9?*

Capítulo 5

Glosario

- Números enteros: $\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$
- Números naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$
- Números racionales: $\mathbb{Q}$. Son todos los números que se pueden expresar como una fracción.
- $\cap \rightarrow$ intersección
- $\cup \rightarrow$ unión
- Disjuntos: dos cosas son disjuntas si su intersección es nula, es decir no tienen intersección.
- Combinación lineal: un número es combinación lineal de otros si es la suma o resta de múltiplos de ellos. Por ejemplo: 29 es combinación lineal de 2 y 5 ya que $29 = 2 \times 7 + 5 \times 3$.