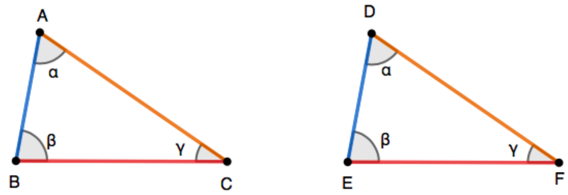
Congruencia y Semejanza de triángulos

Matías Fluxa y Lucía Busolini

1 Congruencia de triángulos

Cuando decimos que dos triángulos son congruentes, estamos diciendo que dichos triángulos son iguales, pero, ¿qué significa que sean iguales? Dos triángulos son iguales o congruentes, cuando todos sus lados correspondientes y sus ángulos correspondientes son iguales. Observemos la siguiente figura, donde los lados están pintados del mismo color si son iguales:



Notemos que los triángulos ABC y DEF son efectivamente congruentes. ¿Por qué?

Con respecto a los lados:

- El correspondiente de AB es DE. Los dos lados son iguales (Azul).
- El correspondiente de AC es DF. Los dos lados son iguales (Naranja).
- El correspondiente de BC es EF. Los dos lados son iguales (Rojo).

Con respecto a los ángulos:

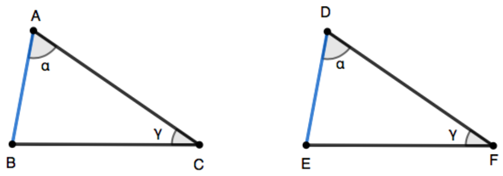
- El correspondiente de $B\widehat{A}C$ es $E\widehat{D}F$. Ambos ángulos son iguales (α).
- El correspondiente de $A\widehat{B}C$ es $D\widehat{E}F$. Ambos ángulos son iguales (β).
- El correspondiente de $B\widehat{C}A$ es $E\widehat{F}D$. Ambos ángulos son iguales (γ).

Con estas seis afirmaciones podemos decir que los triángulos ABC y DEF son congruentes.

Parece difícil, en medio de la resolución de un problema, poder conseguir los todos los datos necesarios para poder afirmar que dos triángulos son congruentes, sin embargo, existen criterios para decidir cuando esto pasa. Estos criterios son propiedades, que nos dan la información suficiente para que nosotros podamos afirmar la congruencia. ¿De qué sirven? Nos permiten afirmar que dos triángulos son congruentes aunque todavía no tengamos información sobre todos los lados y ángulos de ambos triángulos. Dichos criterios son:

1.1 Criterio AAL o ALA

Podemos afirmar que dos triángulos son congruentes si hallamos al menos dos ángulos iguales y un lado correspondiente igual. Observemos un ejemplo en la siguiente figura:



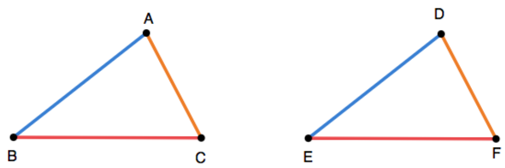
En este caso, tenemos la siguiente información:

- $B\widehat{A}C = E\widehat{D}F = \alpha$
- $A\widehat{C}B = D\widehat{F}E = \gamma$
- $AB = DE$ (Azul) y AB es el correspondiente a DE dado que ambos son opuestos al ángulo γ

Entonces, por el criterio de AAL, podemos afirma que los triángulos ABC y DEF son congruentes. ¿De qué nos sirve saber esto? Nos permite decir que los otros lados correspondientes son iguales ente sí, es decir, $AC = DF$ y $BC = EF$.
Notemos que al tener dos ángulos interiores de un triángulo, en realidad conocemos los tres, pues el restante medirá lo necesario para que la suma de ellos sea $180°$. Es decir, este criterio es equivalente a decir que sabemos que los dos triángulos tienen los mismos ángulos y que tienen un lado correspondiente igual. Es muy importante que el lado igual sea el correspondiente, en nuestro ejemplo DE es el correspondiente a AB porque ambos se oponen al ángulo γ.
Por eso, el criterio puede ser llamado AAL o ALA, pues no importa el orden en el que encontremos los ángulos y el lado igual, siempre y cuando sean los correspondientes .

1.2 Criterio LLL

Podemos afirmar que dos triángulos son congruentes, si los 3 lados correspondientes de ambos triángulos son congruentes. Observemos un ejemplo en la siguiente figura:



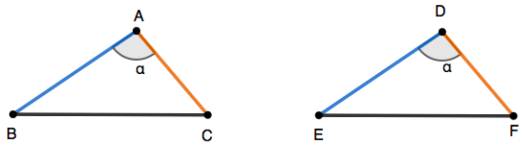
En esta caso, tenemos la siguiente información:

- $AB = DE$. (Azul).
- $AC = DF$. (Naranja).
- $BC = EF$. (Rojo).

Por lo tanto, por el criterio LLL, podemos afirmar que los triángulos ABC y DEF son congruentes. Es decir, sólo conociendo lados podemos dar información sobre los ángulos de los triángulos, sabemos que $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ y $\widehat{C} = \widehat{F}$.

1.3 Criterio LAL

Podemos afirmar que dos triángulos son congruentes si conocemos dos lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos también es igual. Observemos un ejemplo en la siguiente figura:



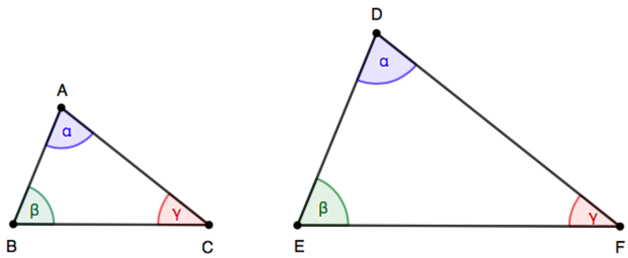
En este caso, tenemos la siguiente información:

- $AB = DE$ (Azul)
- $AC = DF$ (Naranja)
- $B\widehat{A}C = E\widehat{D}F$ y ambos se encuentran comprendidos entre los lados mencionados.

Por lo tanto, por el criterio de LAL, podemos afirmar que los triángulos ABC y DEF son congruentes. La información que ganamos usando este criterio es que $BC = EF$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ y $\widehat{C} = \widehat{F}$.

2 Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si tienen sus 3 ángulos iguales. Esto implica también que sus 3 lados correspondientes sean *proporcionales*. Veamos la siguiente figura:



Si observamos los triángulos de la figura de arriba, podemos observar que el triángulo DEF es básicamente un "zoom" del triángulo ABC, donde cada lado del triangulo aumenta en la misma proporción.

¿Qué quiere decir que los lados sean *proporcionales*?

Formalmente significa que

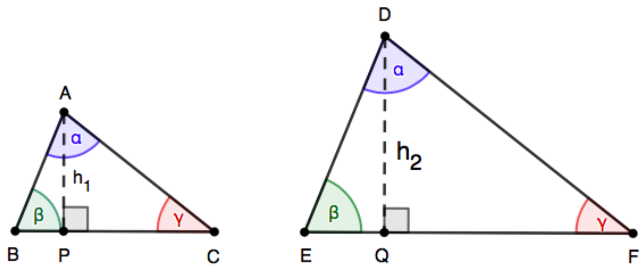
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = r$$

donde al número r lo llamamos *razón* de semejanza. Podemos pensar que cuando hacemos "zoom" al triángulo, todos los lados deben agrandarse de la misma manera y la relación entre los lados de un triángulo y el otro, está medida por r.

Para determinar si dos triángulos son semejantes, podemos usar criterios análogos a los de congruencia de triángulos, la única diferencia es que debemos permitir que los lados sean *proporcionales*, no necesariamente iguales.

Propiedad: Sean dos triángulos semejantes con razón r, entonces la razón entre sus áreas es r^2.

Demostración



Supongamos que tenemos dos triángulos ABC y DEF semejantes, donde D es el punto correspondiente a A, E el correspondiente a B y F el correspondiente a C. Por lo tanto, podemos decir que $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = r$. Sean P y Q los pies de las alturas que pasan por A y por D respectivamente. Podemos notar que los triángulos APC y DQF son rectángulos y semejantes (tienen al menos dos ángulos iguales, $A\widehat{P}C = D\widehat{Q}F = 90°$ y $P\widehat{C}A = Q\widehat{F}D = \gamma$), cuya razón de semejanza la podemos determinar a través de la razón de sus hipotenusas. Pero si observamos bien, dichas hipotenusas son los lados AC y DF, por lo tanto tenemos que la razón de sus alturas es también r, pues $\frac{AP}{DQ} = \frac{AC}{DF} = r$. Finalmente, podemos calcular la razón entre sus áreas cómo: $\dfrac{\acute{A}rea(ABC)}{\acute{A}rea(DEF)}$, pero recordando que $BC = r \cdot EF$ y $AP = r \cdot DQ$, obtenemos:

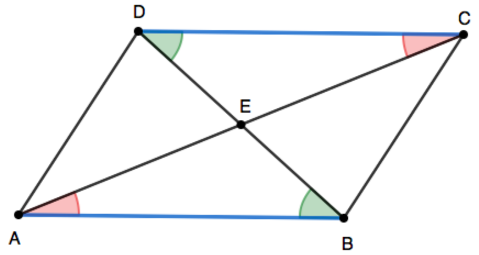
$$\frac{\acute{A}rea(ABC)}{\acute{A}rea(DEF)} = \frac{\frac{BC \cdot AP}{2}}{\frac{EF \cdot DQ}{2}} = \frac{r \cdot EF \cdot r \cdot DQ}{EF \cdot DQ} = r^2.$$

3 Problemas de ejemplo

Demostrar que las diagonales de todo paralelogramo se cortan en su punto medio.

Solución

Sea $ABCD$ un paralelogramo y E la intersección de sus diagonales. Hagamos un gráfico del problema:

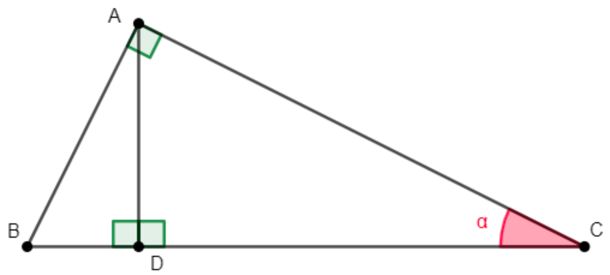


Sabemos que, por ser un paralelogramo, los lados opuestos son iguales, $AB = DC$ y paralelos. Luego, por alternos internos, tenemos que $A\widehat{B}D = B\widehat{D}C$ y $B\widehat{A}C = A\widehat{C}D$. Observemos que estamos en la situación que describimos en el criterio de ALA, los triángulos ABE y CDE tienen dos ángulos iguales y el lado comprendido entre ellos igual, por el criterio entonces podemos afirmar que los triángulos son congruentes.
¿Que información nos da esto? Nos dice que los otros lados correspondientes entre los triángulos también son iguales, luego $DE = EB$, por ser los lados opuestos al ángulo rojo, y $CE = AE$, por ser opuestos al ángulo verde.
Así demostramos que E es el punto medio de AC, pues $AE = CE$, y también de BD, pues $DE = BE$.

Sea ABC un triángulo rectángulo en $\widehat{A}$ y sea D el pie de la altura desde A. Si sabemos que $BD = 2$ y $DC = 8$, calcular el área del triángulo ABC.

Solución

Arranquemos haciendo un dibujo para ilustrar el problema:



Sabemos que el ángulo $B\widehat{A}C$ es recto, lo mismo podemos decir de los ángulos $A\widehat{D}B$ y $A\widehat{D}C$ por ser AD altura del triángulo y por lo tanto, perpendicular al segmento BC.
Como ya sabemos, para probar que dos triángulos son semejantes, debemos calcular los ángulos y ver que son iguales. Busquemos qué ángulos podemos calcular, si llamamos α al ángulo $A\widehat{C}B$. Por suma de ángulos interiores en el triángulo ABC, podemos decir que $A\widehat{B}C = 90° - \alpha$. Por el mismo motivo, en el triángulo ACD, tenemos que $D\widehat{A}C = 90° - \alpha$. Por último, podemos decir que el ángulo $B\widehat{A}D$ es la diferencia entre los ángulos $B\widehat{A}C$ y $D\widehat{A}C$, entonces $B\widehat{A}D = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$.
Ahora que ya pudimos expresar todos los ángulos importantes de la figura en función de α, debemos buscar si encontramos dos triángulos que tengan los mismos ángulos interiores.

En este ejemplo, tenemos tres triángulos que son semejantes! Pues los triángulos ABC, ACD y ABD tienen todos los mismos ángulos interiores.
Ahora es un buen momento para preguntarse: ¿qué debemos calcular? Porque nos piden el área del triángulo ABC, para eso nos alcanza con conocer cuánto miden su base y la altura correspondiente. Ya conocemos cuánto mide uno de los lados del triángulo, $BC = 10$, por lo tanto, nuestro objetivo será calcular la medida del lado AD.
Teniendo esto en mente, podemos elegir trabajar con los triángulos ACD y ABD, porque esos triángulos son semejantes y tienen como lado al segmento AD que es el que queremos calcular. Planteemos la relación de semejanza entre ellos, es muy importante tener en cuenta qué lados se corresponden, los lados opuestos a los ángulos rectos de ambos triángulos se corresponden entre sí, por otro lado, los lados opuestos a los ángulos que miden $90° - \alpha$ y por último, los que se oponen a los ángulos α, así obtenemos lo siguiente (donde arriba están los lados correspondientes al triángulo ABD y abajo los del triángulo ACD):

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$$

Ahora podemos reemplazar los lados que ya conocemos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{8} = \frac{2}{AD}$$

Por último, notamos que la segunda igualdad es la que nos sirve, porque la única incógnita en ella es AD, que es el lado que queremos calcular! Así no quedamos con la ecuación

$$\frac{AD}{8} = \frac{2}{AD}$$

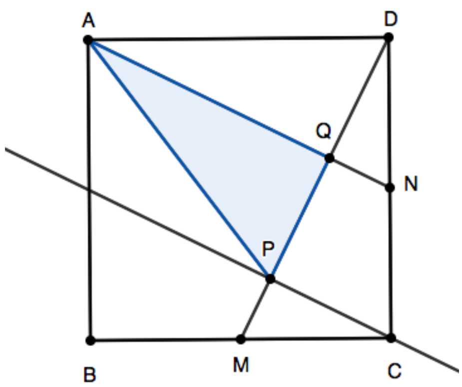
y ahora solo hacemos la cuenta, multiplicando a ambos lados por AD y por 8, tenemos $AD^2 = 16$ y por lo tanto, $AD = 4$.
Finalmente podemos calcular el el área del triángulo ABC como nos pedía el problema

$$Área(ABC) = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20.$$

Regional 2013 - Nivel 2 - Problema 3

Sea $ABCD$ un cuadrado, M el punto medio de BC y N el punto medio de CD. Sea P en DM tal que CP es perpendicular a DM y sea Q la intersección de AN con DM. Si $PM = 5$, calcular el área del triángulo APQ.

Solución



Definimos $M\widehat{D}C = \alpha$. Dado que $ABCD$ es un cuadrado, tenemos que $A\widehat{D}C = D\widehat{C}B = 90°$, y $AB = BC = CD = AD$. Por suma de ángulos interiores en $\triangle DCM$, tenemos que $D\widehat{M}C = 180° - D\widehat{C}M - M\widehat{D}C = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$. Por enunciado, sabemos que $M\widehat{P}C = 90°$, y nuevamente por suma de ángulos interiores en MPC, obtenemos que $P\widehat{C}M = 180° - P\widehat{M}C - M\widehat{P}C = 180° - (90° - \alpha) - 90° = \alpha$. Por último, vemos que $P\widehat{C}M + P\widehat{C}D = 90°$, obtenemos que $P\widehat{C}D = 90° - P\widehat{C}M = 90° - \alpha$.
Es aquí donde podemos notar lo siguiente:

- $P\widehat{D}C = P\widehat{C}M = \alpha$
- $D\widehat{P}C = M\widehat{P}C = 90°$
- $P\widehat{M}C = P\widehat{C}D = 90° - \alpha$

Por lo tanto, podemos afirmar que los triángulos PDC y PMC son semejantes, donde el segmento DC (en el triángulo PDC) es el correspondiente con MC (en el triángulo PMC) y obtenemos que la razón de semejanza entre ambos triángulos es $r = \frac{DC}{MC} = 2$, dado que DC es el lado de un cuadrado y MC es medio lado de un cuadrado. Es aquí donde obtenemos que por la semejanza, $\frac{PC}{PM} = 2$, lo que implica que $PC = 2PM = 10$.

Aprovechando ahora que el triángulo PMC es rectángulo en P, podemos aplicar el teorema de Pitágoras y obtenemos que:

$$MC^2 = PM^2 + PC^2 = 25 + 100 = 125$$

por lo que $MC = 5\sqrt{5}$ y $BC = DC = 2 \cdot MC = 10\sqrt{5}$. Nuevamente, sabiendo que el triángulo DPC es rectángulo en P, por teorema de pitágoras obtenemos que: $DC^2 = PD^2 + PC^2$, donde despejamos y llegamos a que $PD^2 = DC^2 - PC^2 = 500 - 100 = 400$, por lo que finalmente $PD = \sqrt{400} = 20$.

Es aquí donde hacemos la siguiente observación:

- $AD = DC$ (Dado que son lados de un cuadrado).
- $DN = MC$ (Ambos son medio lado de un cuadrado).
- $A\widehat{D}N = D\widehat{C}M = 90°$ (Ángulos rectos del cuadrado).

Por lo que deducimos por el criterio de LAL que los triángulos ADN y DCM son congruentes, obteniendo así que $D\widehat{A}N = M\widehat{D}C = \alpha$ y $A\widehat{N}D = C\widehat{M}D = 90° - \alpha$. Luego, notamos que $A\widehat{N}D = P\widehat{C}D = 90° - \alpha$, por lo que por ángulos correspondientes, podemos deducir que la recta AN y la recta PC son paralelas. En este punto podemos afirmar lo siguiente:

- $D\widehat{Q}N = D\widehat{P}C$ por ángulos correspondientes entre paralelas.
- QN es paralelo a PC y N es punto medio de DC, por lo que QN es base media del triángulo PDC respecto a PC, y obtenemos que Q es punto medio de DP.
- $QP = QD = \frac{20}{2} = 10$ y $QN = \frac{PC}{2} = \frac{10}{2} = 5$ dado que QN es base media.
- $AN = DM = 25$ y $QN = 5$, por lo que $AQ = AN - QN = 20$.

Finalmente, sabiendo que AQP es un triángulo rectángulo en Q, podemos obtener el área como:

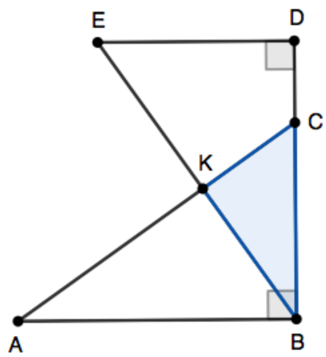
$$\acute{A}rea(APQ) = \frac{QP \cdot AQ}{2} = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100$$

Obteniendo así lo pedido en el enunciado.

Provincial 2011 - Nivel 2 - Problema 3

Sean ABC y BDE dos triángulos iguales con $A\widehat{B}C = B\widehat{D}E = 90°$ tales que los vértices B, C y D pertenecen a una recta con C entre B y D, y los vértices A y E están en el mismo semiplano respecto de la recta BD. Si $AB = BD = 4$ y $BC = DE = 3$, calcular el área de la región común a los triángulos ABC y BDE.

Solución



Como primer paso, sabiendo que el triángulo ABC es rectángulo en B, podemos aplicar el teorema de pitágoras para obtener AC. Planteando la ecuación: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, obtenemos que $AC = 5$.
Sea K la intersección de los segmentos AC y BE. Notemos que el área de la región común a los triángulos ABC y BDE es justamente el triángulo KBC. Definimos $B\widehat{A}C = \alpha$. Por suma de ángulos interiores del triángulo ABC tenemos que $A\widehat{C}B = 180° - C\widehat{B}A - B\widehat{A}C = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$. Recordando que los triángulos ABC y BDE son congruentes (con $AB = BD$, $BC = DE$ y $AC = BE$), llegamos a que $E\widehat{B}D = B\widehat{A}C = \alpha$. Por suma de ángulos interiores en BKC, obtenemos que $B\widehat{K}C = 180° - K\widehat{C}B - K\widehat{B}C = 180° - (90° - \alpha) - \alpha = 90°$.

Ahora que sabemos que:

- $B\widehat{A}C = K\widehat{B}C = \alpha$
- $A\widehat{B}C = B\widehat{K}C = 90°$
- $A\widehat{C}B = K\widehat{C}B = 90° - \alpha$

Podemos deducir que los triángulos ABC y BKC son semejantes, porque tienen sus 3 ángulos iguales. Podemos notar también que su relación de semejanza la podemos obtener como $r = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{3}$. Pero, si sabemos su relación se semejanza, también conocemos su relación entre las áreas, debido a que la razón entre las áreas es el cuadrado de la relación de semejanza. $\dfrac{\acute{A}rea(ABC)}{\acute{A}rea(BKC)} = r^2 = \dfrac{25}{9}$.
Dado que el triángulo ABC es rectángulo en B, tenemos que: $A(ABC) = \frac{AB \cdot BC}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$. Finalmente:

$$\acute{A}rea(BKC) = \frac{\acute{A}rea(ABC)}{r^2} = 6 \cdot \frac{9}{25} = \frac{54}{25}$$

---

4 Problemas para practicar

Les dejamos una lista de problemas para que puedan entrenar y trabajar un poco más el tema. Es posible que varios de los problemas se puedan resolver empleando otros conocimientos teóricos, pero recomendamos fuertemente que traten de aplicar los conocimientos desarrollados en este apunte.

1. En el triángulo ABC la bisectriz del ángulo $B\widehat{A}C$ corta al lado BC en D. El triángulo ADC es isósceles, con $CD = AD$. Si $CD = 36$ y $BD = 64$, calcular las longitudes de los lados del triángulo ABC.

2. Sea $ABCD$ un trapecio isósceles tal que AB es paralelo a CD (los lados no paralelos son BC y DA). Se sabe que $AB = 16$ y $AD = BC = 8$. Además M es el punto medio de AB y $DM = CM = 5$. Calcular la medida de CD.

3. **(Base media)** Dado un triángulo ABC, y sean M y N los puntos medios de AB y AC respectivamente, demostrar que los triángulos ABC y AMN son semejantes y hallar su razón de semejanza.

   Concluir que la recta MN es paralela a BC y hallar $\dfrac{\acute{A}rea(ABC)}{\acute{A}rea(AMN)}$.

4. Sea $ABCD$ un paralelogramo con $\hat{A}$ menor que $90°$. Sea E un punto en la recta AB, con B entre A y E, tal que $CE = CB$. Sea F un punto en la recta BC, con B entre C y F, tal que $AB = AF$.

   Calcular el cociente $\dfrac{DE}{DF}$.

5. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC = 29$ y $BC = 40$. Sea P en BC con BP menor que PC. Sea D en BC tal que AD es perpendicular a BC. La recta perpendicular a AP trazada por B corta a la recta AD en L, y la recta perpendicular a AP trazada por C corta a la recta AD en K. Si $KL = 16$, calcular BP.

6. Sea ABC un triángulo rectángulo es isósceles con $\widehat{C} = 90°$. Consideremos P en la recta BC, con B entre C y P, y Q en la recta AB, con A entre B y Q, tales que $BP = AQ$. Sea R en la recta AC, con C entre A y R, tal que $P\widehat{Q}R = 45°$. Determinar la medida del ángulo $P\widehat{R}Q$.

7. El rectángulo $ABCD$ tiene lados $AB = 3$, $BC = 2$. El punto P del lado AB es tal que la bisectriz de $C\widehat{D}P$ pasa por el punto medio de BC. Hallar la longitud del segmento BP.

8. En el triángulo ABC, $\hat{A} = 90°$ y el lado AB es menor que el lado AC. Sean M el punto medio de BC, K el pie de la altura trazada desde A y N el simétrico de A respecto de BC. La recta perpendicular a MN que pasa por N corta a la recta BC en L. Si $BC = 5$ y $MK = 0,7$, calcular $\dfrac{\text{Área}(ABC)}{\text{Área}(LMN)}$.