Mis problemas favoritos de invariantes

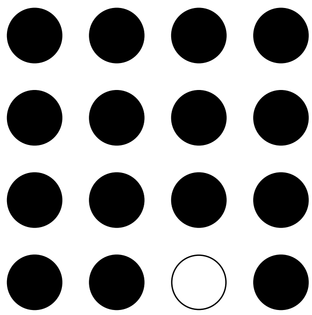
Matías Saucedo*

Selectivo Cono Sur 2014

1. Encendiendo luces

Para entender de qué se trata esta charla, comencemos directamente con un problema a modo de ejemplo.

Problema: *Tenemos 16 luces que están distribuidas en 4 filas y 4 columnas, como muestra la figura. Cada fila y cada columna tiene un botón que permite cambiar el estado de todas las luces de esa fila o columna (las que estaban encendidas pasan a estar apagadas, y viceversa). Inicialmente todas las luces están apagadas excepto la que está marcada en la figura. ¿Es posible lograr, apretando algunos botones, que todas las luces queden encendidas?*



En un problema como este, pueden pasar dos cosas.

Si la respuesta es «sí», es decir, si se puede lograr el objetivo planteado, entonces para que nuestra respuesta quede totalmente justificada tenemos que mostrar una manera de hacerlo. En este caso, eso sería dar una secuencia de botones que podemos apretar para que queden todas las luces encendidas.

*matias.exolimpico@gmail.com

En cambio, si la respuesta es «no», entonces la cosa se pone más difícil (y también más interesante), porque para *demostrar* que el objetivo es imposible tenemos que encontrar algún argumento que funcione para **todos** los casos de apretar botones, que son muchos.

Vamos a ver que nos encontramos en el segundo caso, o sea que no se puede conseguir que todas las luces queden encendidas. Para eso, analicemos más en detalle qué cosas pueden pasar cuando apretamos un botón. Si en la fila (o columna) que elegimos están todas las luces apagadas, o sea si hay 0 luces encendidas, al apretar el botón pasan a haber 4 luces encendidas. Si había exactamente 1 luz encendida, al apretar el botón esa luz se apaga y las otras se encienden, o sea que pasamos a tener 3 luces encendidas. De la misma forma, si había 2 luces encendidas pasamos a 2 luces encendidas; si había 3 luces encendidas pasamos a 1 luz encendida; y si había 4 luces encendidas pasamos a 0 luces encendidas. Resumimos la información en el siguiente esquema.

$$\begin{aligned}
0 \text{ encendidas} &\rightarrow 4 \text{ encendidas}\\
1 \text{ encendida} &\rightarrow 3 \text{ encendidas}\\
2 \text{ encendidas} &\rightarrow 2 \text{ encendidas}\\
3 \text{ encendidas} &\rightarrow 1 \text{ encendida}\\
4 \text{ encendidas} &\rightarrow 0 \text{ encendidas}
\end{aligned}$$

Mirando con atención estos datos, una cosa que podemos notar es que *la cantidad de luces encendidas no cambia su paridad*. O sea, si había una cantidad par de luces encendidas en la fila, después de apretar el botón seguimos estando en esa situación; y si había una cantidad impar de luces encendidas, sigue pasando lo mismo después de apretar el botón. Como las luces que no están en la fila seleccionada no sufren modificaciones, podemos decir que la cantidad de luces encendidas en todo el tablero mantiene su paridad después de apretar un botón. Y con esto ya nos alcanza para resolver el problema. Como al principio la cantidad de luces encendidas es 1, que es un número impar, sin importar qué botones apretemos siempre va a pasar que la cantidad de luces encendidas sea un número impar. Como 16 no es impar, no puede pasar que queden todas las luces encendidas. ■

En general podemos decir que este problema, y todos los que voy a contar en esta charla, tienen tres componentes que nos interesan:

- una *situación inicial* (en nuestro ejemplo, sabíamos qué luces estaban encendidas y qué luces estaban apagadas);
- una serie de *operaciones* o movidas que podemos hacer para modificar esa situación inicial (los botones); y
- una *situación final* a la que debemos ver si es posible llegar o no haciendo varias de las operaciones permitidas (las 16 luces encendidas).

Cuando nos inclinamos a tratar de demostrar que no se puede llegar a la situación final, una buena estrategia es buscar algún parámetro que **no cambie** cuando hacemos las operaciones, y sin embargo sea distinto en la situación inicial y en la situación final. Esto se llama un *invariante*. En el problema de antes, el invariante que nos sirvió para resolverlo fue la paridad de la cantidad de luces encendidas.

Como anuncia el título, en esta charla voy a contar algunos de mis problemas favoritos que se resuelven encontrando un invariante. Considero importante aclarar que si bien en la mayoría de los casos, una vez que uno encuentra el invariante la solución le parece muy natural y sencilla, esto no significa que el problema sea fácil. Encontrar invariantes puede ser algo muy complicado, y es una habilidad que sólo se adquiere con entrenamiento.

2. Ranas en la escalera

Este problema estuvo en la Olimpíada de Mayo de 1999.

Problema: *En cada escalón de una escalera de 10 peldaños hay una rana. Cada una de ellas puede, de un salto, colocarse en otro escalón, pero cuando lo hace, al mismo tiempo, otra rana saltará la misma cantidad de escalones en sentido opuesto: una sube y otra baja. ¿Conseguirán las ranas colocarse todas juntas en un mismo escalón?*

Está claro que este problema es del mismo tipo que el anterior: tenemos una situación inicial, unas ciertas reglas sobre cómo se pueden mover las ranas y una situación final a la que queremos ver si se puede llegar. Veamos si podemos encontrar un invariante.

Supongamos que los escalones están numerados del 1 al 10, del más bajo al más alto. Imaginemos que cada rana tiene anotado el número del escalón en el que está. Cuando una rana salta, su número aumenta o disminuye una cierta cantidad. Pero la regla del enunciado nos dice que entonces, al mismo tiempo, el número de otra rana disminuye o aumenta, respectivamente, la misma cantidad. Entonces, la suma de los números de todas las ranas no cambia cada vez que se hace un salto.

Inicialmente la suma de los números de todas las ranas es $1+2+3+\ldots+9+10 = 55$. Si las 10 ranas lograran estar todas en el mismo escalón x, la suma de sus números sería $10 \cdot x$, o sea un múltiplo de 10. Pero 55 no es un múltiplo de 10. Entonces, es imposible lograr que todas las ranas queden en un mismo escalón.

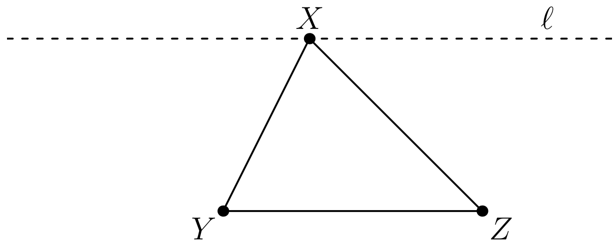
El problema está resuelto. ■

3. Hormiguitas en el plano

Este problema estuvo en el Certamen Nacional de OMA de 1994.

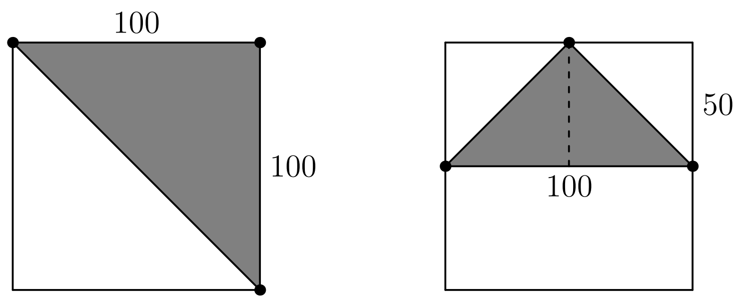
Problema: *Hay tres hormigas que están paradas, cada una, en un vértice diferente de un cuadrado de lado 100. Cada minuto, una de las hormigas se puede mover la distancia que desee en dirección paralela a la recta que determinan las otras dos, las cuales permanecen quietas. ¿Es posible que, luego de varios de estos movimientos, las hormigas ocupen los puntos medios de tres lados del cuadrado?*

Solución. Supongamos que en un cierto momento las hormigas están sobre los puntos X, Y, Z, y que la próxima en moverse es la hormiga que está en X. Esta hormiga se puede mover a cualquier punto de la recta ℓ que marcamos en la siguiente figura:



Notemos que, sin importar a qué punto se mueva, el área del triángulo determinado por las tres hormigas permanece constante, pues la base YZ está fija, y la altura es la distancia entre las dos rectas paralelas YZ y ℓ. O sea que el área del triángulo que determinan las hormigas se mantiene invariante durante todo el proceso.

Inicialmente dicho triángulo es la mitad del cuadrado, y por lo tanto tiene área $\frac{100 \cdot 100}{2} = 5000$. Por otra parte, el área de un triángulo cuyos vértices son puntos medios de los lados del cuadrado es $\frac{100 \cdot 50}{2} = 2500$. Como las cantidades no coinciden, es imposible lograr el objetivo. ■

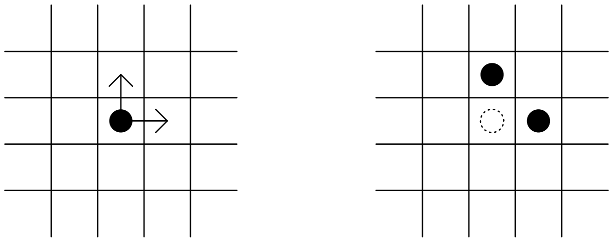


4. El escape de los clones

Problema: *Tenemos un tablero cuadriculado de* 100×100. *Inicialmente hay tres personas en el tablero: una está en la casilla inferior izquierda y las otras dos están en*

las casillas vecinas de la anterior (una arriba y otra a la derecha). A este conjunto de tres casillas con forma de L lo llamamos la «cárcel». Si una persona está en una casilla tal que sus vecinas de la derecha y de arriba están vacías, puede clonarse*: esto es, se divide en dos y luego cada clon se mueve a una casilla vecina: uno va hacia arriba y el otro hacia la derecha. La casilla donde estaba la persona antes de clonarse pasa a estar vacía. No está permitido que dos personas se clonen al mismo tiempo.*
Demostrar que la cárcel nunca puede quedar vacía.

La siguiente figura explica mejor cómo es el proceso de clonación:

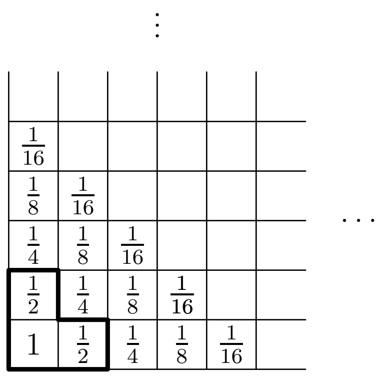


Antes   Después

La idea para ser este problema va a ser ligeramente parecida a la que usamos para el problema de las ranas. Vamos a colocar números en las casillas del tablero, de manera que la suma de los números de las casillas ocupadas por las personas permanezca invariante con cada clonación.

Supongamos que en la casilla inferior izquierda del tablero escribimos el número 1. Si una persona que está en esa casilla se clona, pasa a haber una persona en cada una de las dos casillas vecinas. Como queremos que la suma de los números de las casillas ocupadas por las personas se mantenga constante, podemos escribir $\frac{1}{2}$ en cada una de estas dos casillas. Así, la persona tenía suma total 1 antes de clonarse, y después de clonarse la suma es $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Siguiendo con este razonamiento, podemos escribir $\frac{1}{4}$ en las casillas que están arriba o a la derecha de una casilla que tiene escrito $\frac{1}{2}$, luego escribir $\frac{1}{8}$ en las casillas que están arriba o a la derecha de una casilla que tiene escrito $\frac{1}{4}$, etcétera. Es decir que vamos completando el tablero por diagonales, escribiendo en cada diagonal el número de la diagonal anterior dividido por 2.



Inicialmente, la suma de los números de las casillas ocupadas por las personas es la suma de los tres números de la cárcel, o sea $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$. Por cómo colocamos los números, este valor se mantiene invariante durante todo el proceso.

Sea S la suma de los números de la primera fila del tablero, contando de abajo hacia arriba. Es decir $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{99}}$. Notemos que $S < 2$ (pensar por qué!).

Ahora, como cada número de la segunda fila es la mitad del número que está escrito debajo, la suma de los números de la segunda fila es $\frac{1}{2}S$, y entonces de la misma forma la suma de los números de la tercera fila es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{4}S$, la suma de los números de la cuarta fila es $\frac{1}{8}S$, y así siguiendo hasta que la suma de los números de la fila 100 es $\frac{1}{2^{99}}S$. Entonces, la suma de todos los números del tablero es

$$S + \frac{1}{2}S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{8}S + \ldots + \frac{1}{2^{99}}S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{99}}\right) S = S^2,$$

y como S era menor que 2, esta suma es menor que 4.

Si en algún momento la cárcel quedara vacía, entonces la suma de los números de las casillas ocupadas por las personas sería, como máximo, la suma de todos los números que no están en la cárcel, que es $S^2 - 2$. Pero $S^2 < 4$ implica que esta suma es menor que 2. ¡Absurdo! Por lo tanto, la cárcel nunca puede quedar vacía, que era lo que queríamos demostrar. ■

5. Más problemas para practicar estas ideas

1. **(Selectivo Iberoamericana 2001)** Se tiene un tablero de 21×21 y una abundante cantidad de fichas. En la primera jugada se colocan 20 fichas, todas ellas en casillas diferentes. Luego, en cada jugada, se eligen una fila y una columna y se agrega una ficha a cada casilla de la fila elegida y una ficha a cada casilla de la columna elegida (la casilla que está en la intersección de la fila y la columna elegidas recibe dos fichas). Decidir si es posible que al cabo de una serie de jugadas todas las casillas tengan el mismo número de fichas. (Si la respuesta es afirmativa, describir las jugadas; si es negativa, explicar el porqué.)

2. Se tienen 99 monedas en hilera, cada una de las cuales tiene un lado blanco y un lado negro. Inicialmente todas las monedas, excepto la de la posición 51, están con el lado blanco hacia arriba. En cada paso, Melanie elige una de las 99 monedas y da vuelta sus monedas vecinas (en caso de elegir una de las monedas de los extremos, se voltea su única moneda vecina). El objetivo de Melanie es lograr que todas las monedas queden con el lado negro hacia arriba. Decidir si Melanie podrá lograr su objetivo.

3. Tenemos una pizza de 8 porciones, que están numeradas del 1 al 8 en el sentido de las agujas del reloj. Inicialmente las porciones 1, 2 y 5 tienen una aceituna cada una, y las demás no tienen aceitunas. La operación permitida es elegir dos

porciones consecutivas y sacar una aceituna de cada una o agregar una aceituna a cada una. ¿Es posible lograr que las porciones 2, 3 y 4 tengan una aceituna cada una y las demás no tengan aceitunas?

4. **(Segunda Ronda Regionales 2011)** Al apretar la tecla de ENTER la computadora reemplaza los 3 números (p, q, r) por los 3 números $(r+5q, 3r-5p, 2q-3p)$. Decidir si es posible, comenzando con los 3 números $(1, 3, 7)$, obtener, después de apretar varias veces la tecla ENTER, 3 números que sean consecutivos.

5. **(Nacional OMA 2010)** Dados varios enteros, la operación permitida es reemplazar dos de ellos por su diferencia no negativa. La operación se repite hasta que queda un solo número. Si los números iniciales son $1, 2, \ldots, 2010$, ¿cuál puede ser el último número que queda?

6. **(Rioplatense 2013)** Sea N un entero positivo de tres o más dígitos y sea K el número formado por los últimos dos dígitos de N. A partir de N se realiza la siguiente operación: se borran los dos últimos dígitos de N, se multiplica el número que queda por 28, y se le suma K al resultado. Si el número obtenido al aplicar la operación tiene tres o más dígitos, se aplica nuevamente la operación. Si el número obtenido tiene menos de tres dígitos, el proceso termina. Decidir si el proceso termina cuando el número inicial $N = 123456123456\ldots123456$, donde el bloque 123456 se repite 2013 veces. Si la respuesta es no, explicar por qué. Si la respuesta es sí, hallar el último número obtenido.
NOTA: Por ejemplo, si $N = 12934$, la operación da: $129 \times 28 + 34 = 3646$.

6. ¿Cómo seguir?

A los que estén interesados en leer más sobre este y otros temas, les recomiendo visitar

$\boxed{\text{http://www.omaforos.com.ar}}$

Allí podrán encontrar algunos apuntes teóricos como este y sobre todo un montón de problemas de certámenes anteriores, con varias soluciones aportadas por los usuarios del foro. En particular están resueltos varios de los problemas de la lista anterior. Si se hacen una cuenta de usuario pueden, además, postear todas sus dudas.