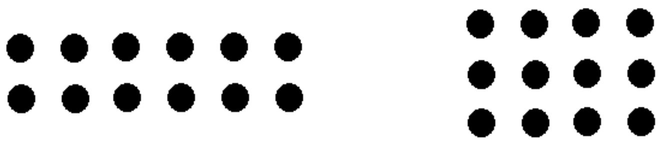
Factorización en primos

Matías Saucedo

Selectivo Cono Sur 2019

1. Primos

Supongamos que tengo una cierta cantidad N de monedas iguales y las quiero ubicar sobre la mesa formando un "rectángulo". Si por ejemplo $N = 12$, entonces hay varias maneras distintas de hacer esto, algunas de ellas son:



También es válida (aunque poco interesante, es cierto) la opción de colocar las 12 monedas en una sola fila.

Para otros valores de N pasa algo distinto. Si por ejemplo $N = 11$, podemos comprobar que la única manera de armar un rectángulo con las monedas es la aburrida (una sola fila).

Concretamente, para armar un rectángulo necesitamos dos números (naturales) a y b que multiplicados nos den como resultado N. En la figura de arriba hay un rectángulo que tiene 2 filas de 6 monedas, y esto funciona porque justamente $2 \cdot 6 = 12$. De la misma forma, el segundo rectángulo se arma usando que $3 \cdot 4 = 12$.

Cualquier número N se puede escribir como multiplicación de dos números: simplemente tomamos $1 \cdot N = N$. Este es el caso donde colocamos las N monedas en una sola fila. Lo que pasa con 11 que no pasaba con 12 es que esta es la **única** manera de elegir esos números a y b (no nos importa el orden de los factores, así que $N \cdot 1$ seguiría siendo el mismo caso).

Los números como el 11, que no se pueden obtener como resultado de una multiplicación que no use al 1 como factor, son los que llamamos números **primos**. Notemos que esto es lo mismo que decir que no tienen ningún divisor además del 1 y del propio número.

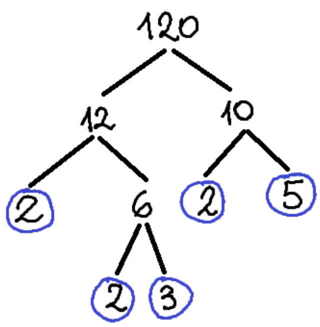
Una salvedad importante: el número 1 cumple lo que acabamos de decir (su único divisor es el 1, y la única manera de expresarlo como multiplicación de dos números naturales es $1 \cdot 1$), sin embargo, por convención NO ES PRIMO. Esta salvedad en la definición es un poco caprichosa, pero hay buenas razones para hacerla. Volveremos sobre esto en breve.

2. La factorización

Todo número natural mayor que 1 es primo o se puede escribir como multiplicación de varios números primos. Este hecho no es realmente tan sorprendente. La idea es que uno puede ir descomponiendo el número en varios factores de a poco, y si en algún momento no puede seguir haciéndolo, necesariamente significa que todos los factores que quedaron son primos. Veámoslo con un ejemplo.

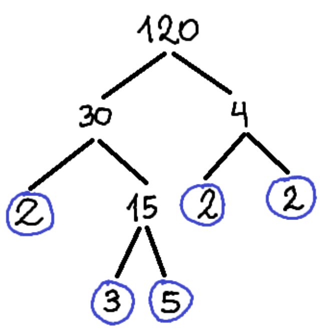
Supongamos que quiero expresar al número 120 como producto de números primos. Sabemos que $120 = 12 \cdot 10$, pero esa factorización no nos sirve porque ni 12 ni 10 son primos. Ahora pensamos que 10 es lo mismo que $2 \cdot 5$, y tenemos que $120 = 12 \cdot (2 \cdot 5)$. El 2 y el 5 no se pueden reducir más, porque son primos, pero el 12 sí se puede seguir factorizando. De hecho es $12 = 2 \cdot 6$. Hasta acá tenemos $120 = 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 5$. El único factor que todavía no es primo es el 6, y justamente no es primo porque se puede expresar como $2 \cdot 3$. Finalmente, obtenemos que $120 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$. Típicamente ponemos todos los factores iguales en una sola potencia; en este caso escribiríamos $\boxed{120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5}$.

El proceso que hicimos se puede visualizar en este "árbol":



No es difícil convencerse de que de esta forma se puede obtener una factorización en primos para cualquier número inicial. Lo único "malo" que en teoría podría pasar es que el proceso no termine nunca, y siempre sigan apareciendo nuevos factores. Pero esto es imposible, ya que cada vez que se abren dos ramas, los números que aparecen son estrictamente más chicos que el que teníamos antes. Como estamos trabajando con números naturales, no pueden achicarse infinitamente.

Algo bastante más interesante es que no hay una sola manera de hacer este proceso, y sin embargo, *siempre se llega al mismo resultado*. Por ejemplo, si empezamos usando que $120 = 30 \cdot 4$ podríamos seguir el siguiente camino:



Nuevamente, al finalizar el proceso obtenemos tres factores 2, un factor 3 y un factor 5. Lo mismo ocurrirá con cualquier otro camino que queramos intentar. No solamente pasa que todo número mayor que 1 se puede factorizar como producto de primos, sino que se puede hacer **de una única manera**. Por eso hablamos de “la” factorización en primos de un número y no de “una” factorización. Si viene alguien y me dice que encontró varios números primos que multiplicados dan 120, yo puedo estar seguro de que esos primos van a ser tres 2, un 3 y un 5. No hay otra posibilidad.

Esta propiedad (que para todo número hay una factorización en primos y además es única) es tan importante que se la llama el **Teorema Fundamental de la Aritmética**.

Notar que lo anterior no sería correcto si el 1 fuera primo, ya que podríamos agregar tantos factores 1 como quisiéramos sin cambiar el resultado de la multiplicación. Es decir que habría varias factorizaciones distintas para un mismo número. Esta es una de las razones para excluir al 1 de la definición.

3. ¿Cómo saber si es primo?

En el ejemplo de la sección anterior, supimos que el proceso había terminado porque 2, 3 y 5 son primos. Sin embargo, podía haber pasado que aparezca un factor más grande que no sabemos si es primo o no. Por ejemplo, al buscar la factorización en primos de 2019, luego de darnos cuenta de que es múltiplo de 3 (pues la suma de sus dígitos lo es) hacemos la división y obtenemos $2019 = 3 \cdot 673$. Este número 673, ¿será primo?

En teoría deberíamos chequear que ninguno de los números $2, 3, 4, 5, \ldots, 671, 672$ es un divisor de 673. Claramente, aún si tuviéramos calculadora no querríamos hacer más de 600 divisiones. Podemos reducir bastante el trabajo haciendo la siguiente observación. Supongamos que $673 = a \cdot b$, con a y b números naturales. Si a y b fueran ambos más grandes que la raíz cuadrada de 673, entonces su producto sería claramente más grande que $\sqrt{673}^2 = 673$, una contradicción. Luego al menos uno de los dos factores tiene que ser menor o igual que $\sqrt{673}$. Esto implica que si 673 no fuera primo, entonces debería tener un divisor que es mayor que 1 pero menor o igual que $\sqrt{673} \cong 25{,}94$.

Con esto ya redujimos a 24 la cantidad de divisiones que habría que hacer, pero podemos mejorarlo aún más. Tomemos cualquier divisor d del número 673. Cualquier primo p que aparezca en la factorización de d aparecerá también en la factorización de 673, y por lo tanto será un divisor de dicho número. Entonces, si 673 tiene un divisor mayor que 1 y menor o igual que $\sqrt{673}$, es también cierto que tiene un divisor **primo** menor o igual que $\sqrt{673}$. Los únicos primos en este rango son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23. Podemos comprobar rápidamente que ninguno de ellos es un divisor de 673 (en varios casos ni siquiera necesitamos dividir). La conclusión es que 673 es efectivamente primo.

Hemos obtenido el siguiente criterio general para verificar si un número es primo:

Proposición 1

Si N es un número natural mayor que 1 y ninguno de los primos menores o iguales que $\sqrt{N}$ es un divisor de N, entonces N es primo.

4. Divisores

La primera consecuencia útil de la factorización en primos que vamos a mencionar es cómo se puede calcular la cantidad de divisores de un número.

Tomemos de nuevo el número 120, que ya habíamos visto que se factoriza como $2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Si nos ponemos a probar qué números son divisores de 120, vamos a encontrar que hay 16 de ellos:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.$$

Sin embargo, aprovechando la factorización en primos podíamos descubrir que hay 16 divisores sin tener que probar. La idea es la siguiente. Supongamos que a es un divisor de 120, entonces 120 es igual a a multiplicado por otro número b. Cada uno de estos números a y b tiene una cierta factorización en primos (a menos que alguno de los dos sea 1, pero en ese caso, como multiplicar por 1 es “lo mismo que no hacer nada”, podemos imaginar que no hay ningún primo en la factorización). Esto significa que al juntar los primos que aparecen en la factorización de a con los primos que aparecen en la factorización de b, obtenemos una factorización en primos de 120, ya que dijimos que $120 = a \cdot b$.

Pero hay una única factorización en primos de 120, que es usando tres factores 2, un factor 3 y un factor 5. La conclusión de esto es que los primos que aparecen en la factorización de a tienen que ser algunos de los primos que aparecen en la factorización de 120 (y luego b aportará los factores que faltan). En otras palabras, todo divisor de 120 se obtiene eligiendo algunos de los primos que aparecen en su factorización y multiplicándolos.

Divisor	2	2	2	3	5
1					
2	✓				
3				✓	
4	✓	✓			
5					✓
6	✓			✓	
8	✓	✓	✓		
10	✓				✓
12	✓	✓		✓	
15				✓	✓
20	✓	✓			✓
24	✓	✓	✓	✓	
30	✓			✓	✓
40	✓	✓	✓		✓
60	✓	✓		✓	✓
120	✓	✓	✓	✓	✓

La tabla anterior muestra qué primos estamos eligiendo para formar cada uno de los 16 divisores. Observemos que no elegir ningún primo corresponde al divisor 1, elegir todos los primos corresponde al divisor 120, y como los tres factores 2 son idénticos sólo nos preocupamos por **cuántos** factores 2 elegimos y no **cuáles** de ellos (por eso, por ejemplo, cada vez que se elige un solo 2 el que está marcado es el de la izquierda).

Como además (¡gracias a que la factorización es única!) sabemos que no hay dos elecciones diferentes de factores que nos den el mismo divisor, nuestra pregunta de

"¿Cuántos divisores tiene 120?"

resulta ser equivalente a un problema de combinatoria:

"¿De cuántas maneras se pueden elegir algunos de los factores 2, 2, 2, 3, 5?"

Y se puede resolver de la siguiente manera. Para los factores 2 tenemos 4 posibilidades: no elegir ninguno (en ese caso, el divisor que obtengamos será impar), elegir uno, elegir dos o elegir los tres. Para el factor 3 tenemos 2 posibilidades (elegirlo o no elegirlo). Y por el mismo motivo para el factor 5 tenemos 2 posibilidades. La cantidad total de combinaciones es entonces $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, como habíamos anticipado.

Lo anterior fue solamente un ejemplo, ¿cómo lo escribimos como una fórmula general?

Dado un número natural $N > 1$, podemos escribir su factorización en primos de una forma genérica. La cantidad de primos que aparecen en la factorización no sabemos cuál va a ser, la llamaremos k. A los primos que aparecen los podemos llamar entonces p_1, p_2, p_3 y así hasta p_k. Cada uno de ellos va a ir elevado a un cierto exponente. Llamamos e_1 al exponente que corresponde al primo p_1, e_2 al exponente que corresponde al primo p_2, etcétera. Así, la factorización en primos de N es

$$N = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}.$$

(Al escribir la cuenta de esta manera puede parecer que estamos suponiendo que hay al menos 4 primos distintos, ya que están a la vista el p_1, el p_2, el p_3 y el p_k. Sin embargo, esto sólo está escrito de esta forma por claridad, y nada de lo que digamos de ahora en adelante deja de funcionar si k es 1, 2 o 3.)

Con esta factorización se puede hacer el mismo razonamiento que hicimos antes para llegar a la siguiente propiedad:

Proposición 2

Si N es un número natural mayor que 1 y tenemos que su factorización en primos es $N = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$, entonces, la cantidad de divisores de N es

$$(e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdot (e_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (e_k + 1).$$

Los "+1" que aparecen en cada factor vienen de considerar que para cada primo p_i tenemos las opciones de elegirlo 0 veces, 1 vez, 2 veces, y así hasta e_i veces. El hecho de que esté el 0 hace que tengamos una posibilidad más.

5. Un problema de la Rioplatense

Pasemos a la acción resolviendo un problema de la Olimpíada Rioplatense de 2016.

Problema 1

Se tiene un tablero de 11 casillas como el de la figura.

Bruno escribe un número natural en cada casilla del tablero, sin repetir números, de forma que el resultado de multiplicar los números de dos casillas vecinas sea siempre múltiplo de 99.

Llamamos M al mayor de los números escritos por Bruno. Determinar el mínimo valor posible de M.

Como imaginarán, vamos a resolver este problema teniendo en cuenta la factorización en primos. Particularmente, el número 99 se factoriza como $3^2 \cdot 11$. Podemos decir entonces, teniendo en cuenta lo visto en la sección anterior, que para que un número sea múltiplo de 99 debe ocurrir que en su factorización en primos haya al menos dos factores 3 y al menos un factor 11.

Tomemos dos números que estén en casillas vecinas del tablero, digamos a y b. Por el enunciado, $a \cdot b$ tiene que ser múltiplo de 99, y entonces, juntando los primos de la factorización de a con los primos de la factorización de b debemos conseguir al menos dos factores 3 y un factor 11. En particular, **alguno de los dos números debe ser múltiplo de 11**, ya que en caso contrario no vamos a encontrar este primo en la factorización de $a \cdot b$.

(Es importante notar acá que el razonamiento que acabamos de hacer con el 11 no sería correcto, por ejemplo, con el 9. El número $a \cdot b$ podría ser múltiplo de 9 sin necesidad de que a o b lo sean, por ejemplo $3 \cdot 6 = 18$ es múltiplo de 9 y sin embargo ni 3 ni 6 lo son. La diferencia está en que $9 = 3^2$, así que basta con que cada número aporte un factor 3, mientras que 11 es **primo**, y por lo tanto no se puede “repartir” entre los dos números.)

Volviendo al problema, hemos observado recién que dadas dos casillas consecutivas necesariamente al menos uno de los números que contienen debe ser múltiplo de 11. Dividimos las primeras 10 casillas del tablero en 5 parejas: la primera con la segunda, la tercera con la cuarta, etcétera. En cada una de estas parejas debe haber al menos un múltiplo de 11, luego, en todo el tablero hay al menos 5 múltiplos de 11. Esto muestra que $M \geq 5 \cdot 11 = 55$, ya que no se puede usar el mismo múltiplo de 11 dos veces.

Para probar que el mínimo valor posible de M es efectivamente 55, nos faltaría mostrar un ejemplo de un tablero que cumpla las condiciones con $M = 55$. Podemos construir este ejemplo intercalando múltiplos de 9 con múltiplos de 11:

9	11	18	22	27	33	36	44	45	55	54

Concluimos que el mínimo valor posible de M es 55. ■

6. Potencias

Otra cosa que podemos hacer fácilmente si conocemos la factorización en primos de un número es determinar si es una *potencia perfecta*, es decir, un cuadrado, un cubo, etcétera.

El motivo es el siguiente. Supongamos por ejemplo que tenemos un número que es un cubo perfecto, es decir, igual al cubo de un cierto número N. (Por ejemplo, 512 es un cubo perfecto porque es igual a 8^3.) Si la factorización en primos de N es

$$N = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k},$$

entonces, al elevar al cubo de los dos lados y usando que la potencia es distributiva respecto de la multiplicación, obtenemos

$$\begin{aligned} N^3 &= (p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k})^3 \\ &= (p_1^{e_1})^3 \cdot (p_2^{e_2})^3 \cdot (p_3^{e_3})^3 \cdot \ldots \cdot (p_k^{e_k})^3 \\ &= p_1^{3e_1} \cdot p_2^{3e_2} \cdot p_3^{3e_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{3e_k}. \end{aligned}$$

O sea que la factorización en primos de N^3 es muy parecida a la de N: solamente se multiplican todos los exponentes por 3.

En definitiva, lo que estamos viendo es que en cualquier cubo perfecto todos los exponentes de su factorización en primos deben ser múltiplos de 3. Y al revés, si tenemos un número tal que en su factorización en primos todos los exponentes son múltiplos de 3, entonces el número necesariamente es un cubo perfecto (basta dividir todos los exponentes por 3 y así obtendremos su raíz cúbica).

Este razonamiento que hicimos para cubos funciona también para cuadrados, potencias cuartas, y en general cualquier índice de potencia. Resumimos la información en la siguiente proposición.

Proposición 3

Un número N es igual a la m-ésima potencia de un entero si y sólo si todos los exponentes en su factorización en primos son múltiplos de m.

Veamos un par de problemas que se pueden resolver usando esta propiedad.

Problema 2 (OMA 2012)

Sea x el menor entero positivo que satisface simultáneamente que $2x$ es el cuadrado de un entero, $3x$ es el cubo de un entero y $5x$ la quinta potencia de un entero.

Dar la factorización en primos de x.

Solución. El 2 tiene que aparecer sí o sí en la factorización en primos de x. Si no fuera así, en la factorización de $2x$ habría un solo factor 2, mientras que para que $2x$ sea un cuadrado sabemos que el exponente del 2 debe ser par. Argumentos similares muestran que el 3 y el 5 también están obligados a aparecer en la factorización en primos de x.

Digamos que los exponentes con los que aparecen el 2, el 3 y el 5 en la factorización de x son a, b, c respectivamente, es decir,

$$x = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot (\text{otros primos}).$$

Al multiplicar x por 2, el exponente del 2 pasa a ser $a+1$, mientras que los exponentes de todos los demás primos se mantienen iguales. Usando la propiedad vista en la página anterior podemos deducir que, como $2x$ es un cuadrado:

$$a+1 \text{ es par}, \qquad b \text{ es par}, \qquad c \text{ es par}.$$

Al multiplicar x por 3 el exponente del 3 pasa a ser $b+1$ y los exponentes del 2 y el 5 se mantienen iguales. Entonces, razonando como antes:

$$a \text{ es múltiplo de } 3, \qquad b+1 \text{ es múltiplo de } 3, \qquad c \text{ es múltiplo de } 3.$$

Por último, teniendo en cuenta que $5x$ es una potencia quinta perfecta:

$$a \text{ es múltiplo de } 5, \qquad b \text{ es múltiplo de } 5, \qquad c+1 \text{ es múltiplo de } 5.$$

Ahora tenemos que combinar toda esta información para buscar los valores más chicos posibles para a, b, c.

Sabemos que a es múltiplo de 3 y de 5, así que es múltiplo de 15. Si $a = 15$ se cumple también la tercera condición que es que $a+1$ es par. Por lo tanto $a = 15$ es el menor valor que cumple las tres restricciones.

Sabemos que b es par y múltiplo de 5, así que es múltiplo de 10. Además $b+1$ debe ser múltiplo de 3. El 10 no cumple esto último (11 no es múltiplo de 3) pero el 20 sí ($21 = 3 \cdot 7$). Así que el menor valor posible para b es 20.

Sabemos que c es par y múltiplo de 3, así que es múltiplo de 6. El menor múltiplo de 6 que cumple que al sumarle 1 es múltiplo de 5 es el 24.

Hasta aquí tenemos que x es mayor o igual que $\boxed{2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}}$. Como este número cumple todas las condiciones, no hace falta agregar más primos, y encontramos la respuesta. ■

Problema 3

Determinar todos los enteros positivos n para los cuales $n! + 120$ es un cuadrado perfecto.

(Recordar que $n!$, que se lee "n factorial", es el producto de todos los enteros positivos desde 1 hasta n. Por ejemplo $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.)

Este problema es particularmente difícil porque nos preguntan por **todos** los n que cumplen la condición. No alcanzará con que encontremos la "respuesta": para que la solución esté completa tendremos que dar una *demostración* de que no hay ningún otro número con esa propiedad.

La clave de la solución que veremos a continuación consiste en usar la factorización en primos para "descartar" casi todos los posibles valores de n de una sola vez. Después de esto nos van a quedar poquitos casos que podemos analizar "a mano".

Recordemos que $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Supongamos por ahora que $n!$ es un múltiplo de 16. ¿Qué pasa en este caso con el exponente del 2 en la factorización de $n! + 120$? Claramente ambos términos son múltiplos de 8, así que el resultado también lo será. Pero como sólo uno de los dos es un múltiplo de 16, el resultado no será múltiplo de 16. Lo que estamos diciendo es que $n! + 120$ es múltiplo de 2^3 pero no de 2^4. Es evidente que esto implica que el exponente del 2 en la factorización de $n! + 120$ es un 3. Pero entonces no puede ser un cuadrado perfecto, porque vimos que para que eso ocurra todos los exponentes de la factorización deben ser pares.

Lo anterior sólo sirve si $n!$ es múltiplo de 16, pero esto pasa casi siempre. El número $6! = 720$ es múltiplo de 16, y como esto seguirá siendo cierto al multiplicar por otros números, todos los factoriales más grandes también son múltiplos de 16. Así que los únicos n que podrían llegar a cumplir la condición del enunciado son los números del 1 al 5, pues sólo para estos valores pasa que $n!$ no es múltiplo de 16. Verificando,

$$\begin{aligned}
1! + 120 &= 121 = 11^2, \\
2! + 120 &= 122 \text{ no es un cuadrado,} \\
3! + 120 &= 126 \text{ no es un cuadrado,} \\
4! + 120 &= 144 = 12^2, \text{ y} \\
5! + 120 &= 240 \text{ no es un cuadrado.}
\end{aligned}$$

Concluimos que los únicos n que cumplen la condición son 1 y 4. ■

(La solución también se podría haber hecho considerando el exponente del 3 o del 5 en la factorización de $n! + 120$. Para practicar traten de reproducir el argumento ustedes mismos.)

7. Cuando no sobran factores

La solución del próximo problema se basa en una observación muy simple pero poderosa. Volvamos al ejemplo de $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Este número es producto de 5 números primos.

Supongamos ahora que $120 = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$, donde a, b, c, d, e son enteros mayores que 1. Cada uno de ellos aporta al menos un primo a la factorización de 120, que se obtiene juntando las 5 factorizaciones. Pero en la factorización de 120 aparecen sólo cinco primos en total, por lo que si alguno de los números a, b, c, d, e no fuera primo, tendríamos más primos del lado derecho de la igualdad que del lado izquierdo, lo cual es imposible debido a que existe una **única** factorización en primos para 120. Así que, en estas condiciones, los números a, b, c, d, e deben ser necesariamente primos (y por lo tanto, tienen que ser 2, 2, 2, 3, 5 en algún orden).

El mismo argumento prueba que es directamente imposible expresar al 120 como multiplicación de 6 o más números enteros mayores que 1.

Teniendo esto presente, la solución del siguiente problema surge naturalmente.

Problema 4 (Selectivo Iberoamericana 2011)

¿Cuántos enteros positivos n son divisibles por 2010 y tienen exactamente 2010 divisores positivos (contando a 1 y a n)?

Solución. En primer lugar buscamos la factorización en primos de 2010:

$$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67.$$

Los números n que buscamos deben, entonces, tener al 2, al 3, al 5 y al 67 en su factorización en primos. Supongamos que estos primos aparecen con exponentes a, b, c, d respectivamente:

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 67^d \cdot (\text{otros primos}).$$

Por la condición sobre la cantidad de divisores, sabemos que

$$(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) \cdot (d+1) \cdot \ldots = 2010$$

(los puntos suspensivos corresponden al resto de los "exponentes más 1"). Cada uno de los factores que aparecen en el lado izquierdo es mayor que 1. Entonces, por la observación que hicimos antes, no puede haber más de 4 factores, ya que 2010 es producto de 4 primos. Concluimos que en realidad no pueden haber otros primos en la factorización de n.

Más aún, a, b, c y d deben ser iguales a 1, 2, 4 y 66 en algún orden (para que al sumarles 1 sean los 4 factores primos que componen el 2010). Así que la cantidad de números n que cumplen la condición es igual a la cantidad de maneras de ordenar estos 4 exponentes, la cual es $4! = 24$. ■

8. Más problemas para practicar estas ideas

(1) Demostrar que si N es cualquier número entero **par** entonces $N \cdot (N+1) \cdot (N+2)$ es múltiplo de 24.

(2) **(Segunda Ronda Regionales 2011)** Calcular la cantidad de divisores de 30^{2011} que no son divisores de 20^{2010}.

(3) **(Provincial 2000)** De un número natural n se sabe que tiene exactamente seis divisores positivos contando 1 y n. También se sabe que el producto de cinco de esos divisores es igual a 648. Hallar n.

(4) **(Regional 2001)** Dado un número natural n, se denota $P(n)$ al producto de todos los divisores positivos de n, incluidos 1 y n. Por ejemplo,

$$P(12) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1728.$$

Hallar todos los números naturales n menores que 400 tales que n tiene exactamente dos divisores primos distintos y $P(n) = n^6$.

(5) **(Mayo 2012)** Un número de cuatro cifras es *tartamudo* si tiene las dos primeras cifras iguales entre sí y las dos últimas cifras iguales entre sí, por ejemplo 3311 y 2222 son números tartamudos. Hallar todos los números tartamudos de cuatro cifras que son cuadrados perfectos.

(6) **(Regional 2014)** En un entrenamiento hay 2014 atletas. Cada uno de ellos tiene en la camiseta un número entre 1 y 2014 (cada número está en exactamente una camiseta). Al comienzo están todos parados. El entrenador va diciendo en voz alta y a intervalos regulares los números del 1 al 2014, en orden creciente. Todos los atletas que tienen en su camiseta un número que es múltiplo del número dicho por el entrenador cambian su posición de parados a agachados y viceversa. Por ejemplo, el atleta que tiene el 45 en su camiseta cambia de posición cuando el entrenador dice 1, 3, 5, 9, 15 o 45. Determinar cuántos atletas estarán agachados después de que el entrenador dijo todos los números hasta el 2014 inclusive.

(7) **(Selectivo Cono Sur 2018)** Los números naturales k y N satisfacen la siguiente condición: la multiplicación de todos los números naturales desde N hasta $N+k$ es igual a 6952862280, es decir

$$N \times (N+1) \times \cdots \times (N+k) = 6952862280.$$

Hallar los posibles valores de k y N, sabiendo que el último dígito de N es 1.

(8) **(Pretorneo de las Ciudades 2012)** Determinar si existe un número entero positivo que tenga un número impar de divisores enteros positivos pares y un número par de divisores enteros positivos impares.

Si la respuesta es sí, dar un ejemplo. Si es no, explicar el porqué.

(9) Para cada entero positivo n llamamos $d(n)$ a la cantidad de divisores positivos que tiene. Por ejemplo $d(6) = 4$ porque tiene 4 divisores (1, 2, 3 y 6).

Demostrar que si a y b son dos enteros positivos *coprimos* (esto significa que el máximo común divisor entre a y b es 1), entonces $d(a \cdot b) = d(a) \cdot d(b)$.

(10) **(Rioplatense 1997)** Un número "*divi*" es aquel que es divisible por el número de divisores positivos que tiene. Por ejemplo, el 8 es *divi* porque tiene 4 divisores (1, 2, 4, 8) y el 4 divide al 8. A los números *divi* que son cuadrados perfectos se los llama "*dividivi*". Hallar todos los números *dividivi* menores que 1997.

(11) **(Regional 2007)** En una olimpíada de matemática los participantes tenían que escribir un número entero positivo en cada casilla de un tablero de 3×3 de modo que en cada fila y en cada columna, la multiplicación de los tres números sea igual a 120. Estaba permitido repetir números. Resultó que todos los participantes resolvieron correctamente el problema, pero todos obtuvieron una respuesta diferente.

Determinar cuál es el máximo número de participantes que pudo haber en esa olimpíada.

(12) **(Selectivo Cono Sur 2015)** Hallar todos los pares de primos p, q tales que $p+q$ y $p+4q$ son los dos cuadrados perfectos.

(13) **(Selectivo IMO 2011)** Hallar todos los números enteros positivos n tales que el número $n(n+2)(n+4)$ tiene a lo sumo 15 divisores positivos.

(14) **(Selectivo Iberoamericana 2011)** Hallar todas las ternas de números primos (p, q, r) que satisfacen:

$$(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr.$$

(15) **(Nacional 2017)** Para un número entero positivo n denotamos $D_2(n)$ a la cantidad de divisores de n que son cuadrados perfectos y $D_3(n)$ a la cantidad de divisores de n que son cubos perfectos. Demostrar que existe n tal que $D_2(n) = 999D_3(n)$.

9. ¿Cómo seguir?

Si les interesa leer más sobre este y otros temas, les recomiendo visitar

`http://www.omaforos.com.ar`

Allí podrán encontrar algunos apuntes teóricos como este y sobre todo un montón de problemas de certámenes anteriores, con varias soluciones aportadas por los usuarios del foro. En particular están resueltos varios de los problemas de la lista anterior. Si se hacen una cuenta de usuario pueden, además, postear todas sus dudas.

El año pasado, en el mes de julio la OMA organizó un "campamento olímpico" dirigido a participantes de nivel 1 y nivel 2, con diversos talleres de resolución de problemas a cargo de exolímpicos. La intención es repetir la experiencia este año. Estén atentos al sitio

`http://www.oma.org.ar`

para información sobre la inscripción.