Elementos extremos

Matías Saucedo

Selectivo Cono Sur 2013

En algunos problemas que involucran un conjunto finito de números, a veces puede ser útil hacer consideraciones sobre el mínimo o el máximo de dichos números, ya que en esos casos extremos tenemos un poco más de información que en los demás. Veamos algunos ejemplos de cómo funciona esto.

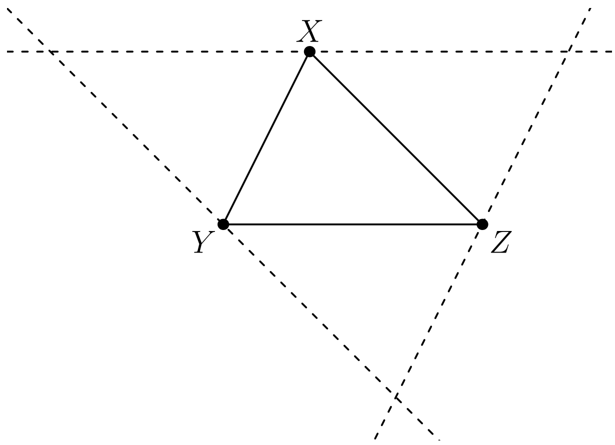
Ejemplo 1. *En cada casilla de un tablero de* 100×100 *se escribió un número entero positivo, de manera que cada número es igual al promedio de los números en sus casillas vecinas (dos casillas son vecinas si comparten un lado). Demostrar que todos los números escritos son iguales.*

Solución: Sea k el número más chico que aparece en el tablero, y sea C una casilla que tiene escrito el número k. (Puede haber varias casillas que tengan el número k, elegimos cualquiera de ellas.) Sabemos que k es el promedio de los números escritos en las casillas vecinas a C. Por otra parte, como k es el más chico de todos los números del tablero, cada una de las casillas vecinas a C tiene escrito un número mayor o igual que k. La única forma de que el promedio de varios números mayores o iguales que k sea igual a k es que todos los números sean iguales a k. Entonces, todas las casillas vecinas a C también tienen escrito el número k. Con el mismo razonamiento se deduce que todas las casillas que son vecinas a alguna casilla vecina a C tienen escrito el número k, luego todas las vecinas de las que son vecinas a alguna vecina de C tienen el número k, y así siguiendo. De esta manera conseguimos probar que todas las casillas del tablero tienen escrito el número k. ∎

El siguiente problema no aparenta guardar ninguna relación con el anterior, sin embargo, la idea que se usa para su resolución es prácticamente la misma.

Ejemplo 2. *Se tienen 2013 puntos en el plano tales que para cualesquiera tres de ellos, el área del triángulo que determinan es menor que 1. Demostrar que los 2013 puntos están contenidos en un triángulo de área menor que 4.*

Solución: Tomemos los tres puntos del conjunto X, Y, Z tales que el área del triángulo XYZ sea máxima. (Esto se puede hacer, porque como el conjunto tiene sólo 2013 puntos, hay $\binom{2013}{3}$ posibles triángulos, así que tiene que haber alguno que tenga área máxima.) Sea ℓ_X la recta paralela a YZ por X. Para cualquier otro punto W que esté en el conjunto, W tiene que estar del mismo lado que Y y Z respecto de ℓ_X (o sobre la misma recta ℓ_X), pues en caso contrario el triángulo WYZ tendría una altura mayor que la del XYZ, y como ambos tienen la misma base YZ esto implicaría que el área de WYZ es mayor que la de XYZ, absurdo porque dijimos que XYZ era el de área máxima. De la misma manera podemos trazar rectas ℓ_Y y ℓ_Z que dejan todo el conjunto de 2013 puntos de un solo lado. De modo que el triángulo $\mathbb{T}$ determinado por las rectas ℓ_X, ℓ_Y y ℓ_Z contiene a los 2013 puntos del conjunto. Por otro lado, no es difícil ver que el área del triángulo $\mathbb{T}$ es 4 veces el área de XYZ. Como esta última era menor que 1, el área de $\mathbb{T}$ es menor que 4. Esto completa la solución. ■



Más problemas para practicar estas ideas

1. **(Primera Ronda Regionales 2012)** Un tablero de 19×19 tiene un número entero escrito en cada casilla, de modo que si dos enteros están en casillas vecinas la resta del mayor menos el menor es 0, 1 o 2. Hallar la mayor cantidad de enteros distintos que puede tener el tablero. (Casillas vecinas son las que comparten un lado.)

2. Sea A un conjunto de 6 números enteros positivos distintos tal que si a y b son elementos de A con $a > b$ entonces $a+b$ es un número de A o $a-b$ es un número de A (pueden ocurrir las dos cosas a la vez). Demostrar que la suma de los elementos de A es un múltiplo de 21.