GEOMETRÍA LIBRE

Lucas Andisco*

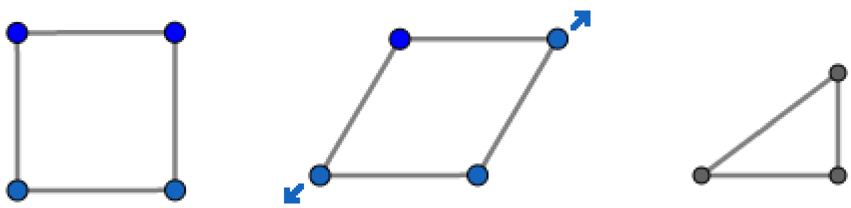
Selectivo Cono Sur 2018
(Versión Extendida)

Vamos a recorrer algunas propiedades elementales e intentaré esbozar ciertas maneras diferentes que hay de establecer cosas, y más en general de "pensar la geometría". También resolveremos un problema de una IMO impulsados por ideas anteriores. (Y muchos problemas los aguardan al final.)

En el apunte hay pocas figuras exhibidas. Una recomendación antes de empezar es que si algo no se entiende del todo, intenten con paciencia volver a mirarlo, o mejor: pensarlo por ustedes mismos (la retribución es siempre mucho más alta así). Y dibujen bastante, tanto en la hoja como en la mente.

Preludio:

Observemos primero de forma intuitiva que, si los pensamos únicamente a partir de sus lados, los triángulos son figuras "rígidas", mientras que por ejemplo los cuadriláteros no. ¿A qué me refiero? Imaginemos que tenemos varillas de madera arriba de una mesa (digamos cuatro, de las longitudes de los lados de cierto cuadrilátero), al principio alineadas y enganchadas una a una en sus extremos, y de manera que es posible girarlas en cada punto de enganche (como si éstos fueran pivotes). Supongamos que ahora agarramos los extremos de la primera y la última varilla y, manipulándolas, conseguimos también conectarlos. La figura que nos quedó así formada, sobre la mesa, ¿es única?, ¿está determinada?... ¿O la puedo "deformar"? Bueno, lo que pasa con los cuadriláteros es que si "tironeamos" vértices opuestos vamos a deformarlos (obteniendo en el proceso distintos cuadriláteros, con ángulos diferentes y diagonales de nuevos tamaños). En realidad, basta imaginar por ejemplo el caso de un cuadrado y un rombo, distintos aunque con los mismos lados (*rombo* se llama a las figuras de cuatro lados iguales). Esto en cambio no ocurre con los triángulos: si formé un triángulo enlazando tres varillas, no lo puedo deformar tironeando de los vértices[1].



Todas estas observaciones son, como dijimos, de carácter "intuitivo". Los llamados *criterios de congruencia* (ver Anexo) son una de las herramientas que nos permiten convertir esta clase de ideas intuitivas en demostraciones.

Estos criterios son tan "poderosos" o fundamentales que hasta podemos *probar* con ellos varias de las propiedades más elementales que usamos todo el tiempo en geometría. (Y en alguna medida son también necesarios, pero ese es un tema para otro apunte.)

* lucasandisco@gmail.com

1 O con una soga atada y tres marcas: estirando hacia afuera por esas marcas siempre se me forma el mismo triángulo. Se sospecha que los egipcios aprovechaban esto para trazar ángulos de amplitudes determinadas. ¿Cómo construir un ángulo de 90° (sin "copiarlo" con una escuadra)? Si un lazo de cuerda tiene nudos que lo dividen en tres regiones con razones 3 : 4 : 5 entre ellas, siempre que lo estire tirando por esos nudos obtendré un ángulo recto (¿por qué?).

1. El triángulo isósceles y los criterios de congruencia:

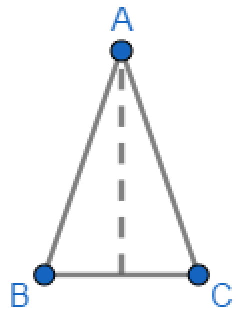
El juego que propongo para arrancar es el de intentar demostrar, usando sólo los criterios de congruencia, que los triángulos isósceles... “son isósceles”.[2]

En realidad, querríamos ver que, dado un triángulo ABC:

a) Si AB = AC entonces <ABC = <ACB.
b) Si <ABC = <ACB entonces AB = AC.

Y, también, que estos triángulos tienen las propiedades que conocemos que tienen... A saber:

c) Si AB = AC (o <ABC = <ACB), entonces la recta perpendicular a BC que pasa por A (*altura*), la recta que divide al ángulo BAC por la mitad (*bisectriz*), y la recta que une a A con el punto medio de BC (*mediana*), coinciden (son la misma).



Antes de seguir, traten de hacer estos incisos.

Lo que no vale en el juego es por ejemplo trazar la bisectriz de A y afirmar que es perpendicular a BC, o que pasa por el punto medio, etc., “por la simetría de la figura”... Porque todo eso es justamente lo que dijimos que queremos probar (es parte del inciso c). En el juego, si marcamos un punto o trazamos alguna recta, sólo podemos entenderlo a partir de la manera explícita en la que elegimos construirlo o definirlo. O sea, sin asumir que tiene más propiedades (que de seguro también tiene, pero forman parte de lo que intentamos probar).

Veamos cómo podríamos tratar de hacer (a) y (c) al mismo tiempo:

Forma 1. Marquemos el punto medio M de BC (AM es mediana por definición). Luego, ABM y ACM tienen sus tres lados correspondientes iguales (AB = AC, BM = CM, y MA es compartido), de donde por criterio de congruencia LLL (ver Anexo) los dos triángulos son congruentes, y luego: <ABM = <ACM (inciso a), <MAB = <MAC (AM es bisectriz), <BMA = <CMA y, como suman 180°, son iguales a 90° (AM es altura).
Forma 2. Marquemos P en BC tal que AP es bisectriz de BAC. Luego, ABP y ACP tienen un ángulo en común (<PAB = <PAC) y sus dos lados adyacentes iguales (AB = AC y PA es compartido), de donde por criterio LAL los dos triángulos son congruentes, y luego BP = CP (AP es mediana) y se sigue lo demás igual que antes.

Analicemos ahora qué pasa si en vez de la condición de los lados iguales tenemos la condición de los ángulos del inciso (b): Si marcamos Q en BC tal que AQ es altura, como <ABQ = <ACQ y <BQA = <CQA = 90°, obtenemos que también vale <BAQ = <CAQ, y AQ es bisectriz (si lo hacíamos al revés llegábamos a lo mismo). Luego en los triángulos BAQ y CAQ los ángulos correspondientes adyacentes al lado común AQ son iguales, por lo que por criterio ALA estos triángulos son congruentes, y se cumple AB = AC (inciso b) y BQ = QC (AQ es mediana).

---

2 Se trata de un juego por varios motivos. En particular, porque son propiedades elementales que está bien que las usemos sin más (aunque no sepamos cómo se demuestran, o si se demuestran o se asumen como axiomas). Existe una caja de herramientas con las que pensamos los problemas de Olimpíadas, y sin dudas los triángulos isósceles y sus propiedades son una de ellas. Pero que en Olimpíadas no haga falta “probar” una propiedad tan conocida como las mencionadas, no significa que no pueda ser instructivo intentar hacerlo de todos modos, o pensar al respecto. Y también, el entender que se trata en todo caso de afirmaciones, nos puede dar una mejor perspectiva sobre las mismas: Los triángulos isósceles son extremadamente útiles y por una buena razón (como pasa con los criterios, en oportunidades nos ayudan a obtener información sobre lados a partir de información sobre ángulos, y viceversa).

“Juego completado”... Ahora bien, veamos una manera bastante particular[3] de demostrar los incisos (a) y (b), debida hasta donde se sabe a Pappus (el mismo del teorema de Pappus):

(a) Si AB = AC, entonces los triángulos ABC y ACB son congruentes por criterio LLL, y vale que <ABC = <ACB.

(b) Si <ABC = <ACB, entonces los triángulos ABC y ACB son congruentes por criterio ALA (lado compartido: BC), y vale que AB = AC.

¿Por qué estas demostraciones son impecables?[4]

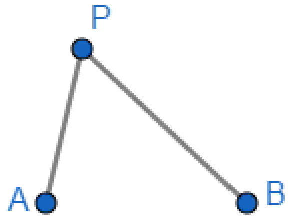
Ejercicio adicional:

Usen los criterios de congruencia y las propiedades de ángulos entre paralelas para probar que las siguientes tres caracterizaciones de los *paralelogramos* son equivalentes, es decir, que si un cuadrilátero[5] ABCD satisface una de ellas, satisface todas:
i) AC y BD se cortan en su respectivo punto medio
ii) AB es paralelo a CD y BC es paralelo a DA
iii) AB es paralelo a CD y AB = CD.

2. Arco capaz:

Consideremos la siguiente pregunta:

Tenemos A y B puntos distintos, y nos dan un cierto valor de ángulo menor a 180° (por ejemplo, 77°). ¿Cuáles son todos los puntos P del plano para los cuales <APB mide ese valor?



Cuando planteamos una duda de este tipo estamos preguntando por lo que se denomina un *lugar geométrico*. ¿Cuáles son todos los puntos del plano (o del espacio) que cumplen tal y tal condición?[6]

Para simplificar el asunto, limitemos la consigna a los puntos que están “arriba” de la recta AB (en ese semiplano). Si un punto que está “abajo” cumple, el que está “arriba a la misma distancia” -su *reflexión* por AB- también cumple (¿por qué?), y viceversa. De este modo, sólo nos vamos a interesar por los puntos P en un semiplano particular de AB.

Si no conocen la respuesta a la pregunta planteada, están invitados a pensarla antes de seguir leyendo (y perdón por el spoiler...).

---

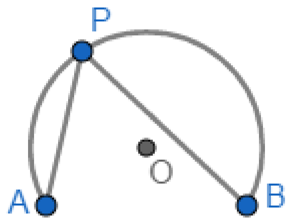
3 Similar a la de los *Elementos* (y seguramente inspirada en ésta) aunque más breve.

4 Uno puede llegar a pensar que las “demostraciones” previas tienen cierta superioridad respecto a las aquí mencionadas. Si podemos probar más cosas de una vez, para qué probar menos. Ok, ¿pero cómo sabemos que existe el *punto medio*, el *pie de la perpendicular* o la *bisectriz*? (En realidad, su existencia, tan intuitiva visualmente, no es más “elemental” de establecer que las propiedades que estuvimos jugando a demostrar -en la axiomática de Euclides-.)

5 Cuando diga cuadrilátero en general asumiré -como es relativamente usual- que no tiene lados cuyos segmentos se intersecten (no es “cruzado”); y también que sus ángulos interiores miden menos de 180°. Esto es, que es *convexo*. Recordemos que los nombres de los vértices de un polígono se ubican en el mismo orden en el que se los da (siguiendo el camino formado por sus lados, o bien en sentido horario o bien en sentido antihorario).

6 Para dar otro ejemplo de un lugar geométrico muy conocido: ¿Qué pasa si en vez de lo anterior nos preguntásemos cuáles son todos los puntos P del plano que cumplen AP = PB? A dicho lugar geométrico se lo llama “la *mediatriz* de AB”. La misma resulta ser una recta, y fácilmente caracterizable: la perpendicular a AB trazada por su punto medio. *Ejercicio*: Observar por qué con las ideas de la sección anterior se prueba también que estos son efectivamente los puntos, y *todos* los puntos, que cumplen AP = PB.

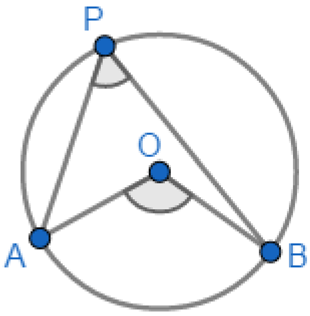
En efecto, los puntos P del mismo lado de AB con ángulo <APB dado, digamos, α, forman un cierto arco de circunferencia que va desde A hasta B. A este lugar geométrico se lo conoce como el *arco capaz* de ángulo α.

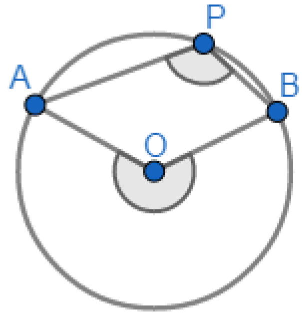


Para probar que siempre es un arco deberíamos probar las siguientes cosas:
a) que efectivamente hay un arco que pasa por A y por B en donde existe al menos un punto P tal que <APB = α,
b) que todos los puntos en el arco están en el lugar geométrico (si X está en el arco entonces <AXB = <APB = α), y
c) que todos los puntos en el lugar geométrico están en el arco (con X en el semiplano indicado, si <AXB = <APB = α, entonces X está en el arco)

El inciso (a) quizás sea el menos interesante de los tres. Pero lo menciono porque si fuéramos a ser enteramente rigurosos tendríamos que establecerlo (o implicarlo). Aquí lo pasaremos de largo.[7]

El inciso (b) es una consecuencia directa del siguiente lema: Dada una circunferencia de centro O y puntos A y B en ella, para cualquier punto P en el mismo arco de AB vale que <APB (*ángulo inscripto*) es igual a la mitad de <AOB (*ángulo central*), pero con la siguiente salvedad: entendemos aquí por ángulo <AOB al que "apunta" en la misma dirección que el arco opuesto a aquél donde está P (si el de P es el menor de los dos arcos AB en los que queda dividida la circunferencia, el ángulo <AOB a considerar será mayor a 180°, como se aprecia en la figura de la derecha).





Tarea: *¿Cómo podemos probar esta propiedad (y por qué tiene como consecuencia al inciso b)?*
Pista: ¿Qué es lo que caracteriza, en primer lugar, a los puntos en una circunferencia? (Respuesta: Su misma distancia al centro...)

Para probar el inciso (c) pensemos primero a qué es equivalente. Dado un punto X, lo que hacemos es mirar su ángulo <AXB. El inciso (c) afirma que si el ángulo de X mide α, entonces X está en el arco. ¿De qué otra forma puedo tratar de entender esta implicación? Una manera es así: Que si X no estuviera en el arco (sino que fuera cualquier otro punto dentro de ese semiplano), entonces su ángulo no mediría α... (dada una proposición "si vale A entonces vale B", la proposición "si no vale B entonces no vale A" se llama su *contrarrecíproca*, y ambas son equivalentes).

Esto es, en vez de intentar probar (c) directamente, podemos reemplazarlo por (c'), de forma que lo que estaríamos demostrando sería:

b) todos los puntos en el arco están en el lugar geométrico (sus ángulos miden lo mismo), y
c') ningún otro punto lo está (todos los demás puntos de ese semiplano miden otra cosa).

---

7 En la geometría de Euclides, en verdad, sólo tiene sentido indagar acerca de un ángulo si ese ángulo está en algún lugar (o, mejor dicho, si es construible), y "trasladar" ángulos es sencillo (con un compás y el criterio LLL, por ejemplo -ver nota 1-). Por otro lado, siempre existe una -única- circunferencia que pasa por tres puntos no alineados (¿por qué?). Y, en realidad, es más razonable empezar por construir directamente el punto O (ver figura): si sabemos hacer esto último ya tenemos lo necesario.

Y demostrando (c') estaríamos demostrando (c). Pero para probar (c') podemos probar algo mejor: Si X está en el interior de la circunferencia, su ángulo va a medir más que α, mientras que si está afuera (siempre dentro del mismo semiplano), va a medir menos. ¿Por qué? (*Respuesta*: Si está adentro, llamando Y a la otra intersección de la recta AX con la circunferencia, tenemos como ya vimos <AYB = α, pero además se cumple que <AYB + <YBX = <AXB. Revisar el otro caso.)

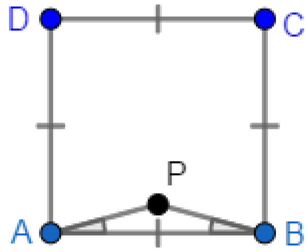
Pensar en términos de "lugar geométrico" puede ser muy útil porque nos da otra forma de ver o entender a ciertos elementos de una figura, algo que siempre se agradece[8]. Cuando miro cierta recta puedo pensar "pasa por acá, forma un ángulo de 90° acá", por ejemplo, como puedo pensar quizás en "es el conjunto de todos los puntos que están a igual distancia de esto y esto", o en... Esa multiplicidad de "significados" me ayuda muchas veces a entender mejor qué es lo que está ocurriendo en la figura, y nos da más herramientas para "atraparlo" mediante una demostración (cuando podemos pensar a algo de más de una forma, tenemos más recursos para trabajar con ello, en particular).

Ejercicios:

a) Sean A, B y P puntos en una circunferencia. Probar que <APB = 90° si y sólo si AB es diámetro.
b) Sean P, A, B, A', B', Q puntos en una circunferencia, en ese orden. Probar que AB = A'B' si y sólo si <APB = <A'QB'.
c) Probar que un cuadrilátero es *cíclico* (existe una circunferencia que pasa por sus cuatro vértices) si y sólo si la suma de sus ángulos opuestos es 180°.
d) Probar que en un cuadrilátero ABCD[9]: <ACB = <ADB si y sólo si <ABC + <ADC = 180°. *Sugerencia.* Intentar hacerlo de al menos dos formas distintas: una, involucrando la noción de arco capaz (o cuadriláteros cíclicos), y otra, usando únicamente *semejanza* (ver Anexo).
e) Dado un punto A y una circunferencia, consideremos una recta *l* que pasa por A y corta a la circunferencia en los puntos X e Y. Probar que el producto AX.AY no depende de la elección de la recta *l* (a dicho producto se lo llama la *potencia* del punto A respecto a esa circunferencia).

3. "Tramposética"[10]:

Problema: Sea ABCD un cuadrado y P un punto en su interior tal que <PAB = <PBA = 15°. Determinar el valor del ángulo <CPD.



Si no lo conocen (o si no lo recuerdan), ¡sería estupendo que lo piensen primero!

Solución: Olvidémosnos del punto P por un momento, como si no estuviera en la figura, y consideremos el punto interior P' tal que CP'D es equilátero. Luego, como CP' = CD = BC, BCP' es isósceles y como <BCP' = 30° obtenemos que <P'BC = 75°, y por tanto, <P'BA = 15°. Análogamente probamos que <P'AB = 15°. Luego P = P' (las rectas AP y AP' coinciden, al igual que BP y BP', y dos rectas distintas se cortan en un único punto). Luego, <CPD = 60°.

---

8 Aunque no todas las preguntas por "el conjunto de puntos que satisfacen tal propiedad" (en el plano, o por qué no en el espacio) tienen respuestas tan satisfactorias. A veces descubriremos que ciertos conjuntos de puntos forman curvas bastante menos amigables, o cosas peores. (Hablo de preguntas en general, que nos podemos formular nosotros mismos... si la pregunta es un problema de una olimpíada, sí es de esperar que se trate de algo medianamente lindo o fácil de describir). La mayoría de los software interactivos de geometría, como Geogebra, tienen una opción que permite -si se definen bien los elementos de la figura- visualizar lugares geométricos.

9 Aquí y en el inciso anterior también rige lo mencionado en la nota 5.

10 Si mi memoria no me falla este nombre lo inventamos con mi amigo Ramiro Lafuente en un entrenamiento de la OMA en 2004. (Por supuesto, ¡debe omitirse en pruebas! ☺)

Ejercicio: Sea ABC un triángulo con AB ≠ AC, y sea P la intersección de la bisectriz del ángulo BAC y la mediatriz (ver nota 6) de BC. Probar que P está en la *circunferencia circunscripta* de ABC (la circunferencia que pasa por A, B y C). (¡Pruébenlo de más de una forma!)

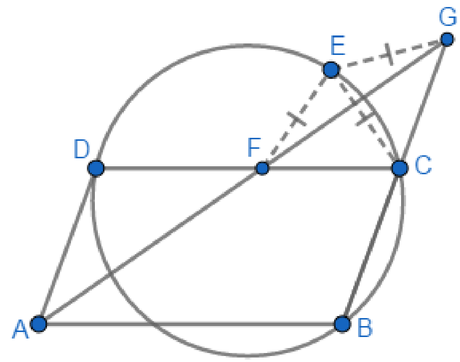
Algunos comentarios extras:

Podemos pensar que los problemas de geometría nos presentan figuras, construcciones, cuyos puntos y elementos constitutivos tienen distintos grados de libertad. Los "datos" del problema nos establecen esas relaciones o restricciones. Algunos elementos son básicos (o pueden ser tomados como básicos[11]), libres, y otros vienen determinados a partir de éstos o tienen cierto grado de dependencia con ellos (y, como vimos antes, a veces pueden ser caracterizados de varias formas diferentes, que pueden probarse equivalentes). Tener alguna noción de estos distintos roles en la construcción de la figura -como el problema nos la presenta- suele ayudar. En particular a apreciar la mayor o menor relevancia de algunos de sus componentes (estén explícitos o no, vengan marcados o no, en el dibujo)[12]. Pero además, e igualmente importante, puede llevar a plantearnos qué otras maneras hay de *llegar a la misma figura* ("sin pérdida de generalidad", esto es, llegar a la misma *clase* o "familia" de figuras), por otros caminos[13].

En el fondo, un problema nos da condiciones y nos pide mostrar que con esas condiciones también se dan otras (o nos pregunta acerca de cuáles se cumplen exactamente -cuál es el valor de un ángulo, por ejemplo-). El problema nos determina una cierta clase general de figura, donde en realidad se cumplen muchas propiedades, sólo algunas de las cuales nos exhibe (esas condiciones originales, los "datos"): aunque suficientes para determinar la figura, no necesariamente las más "cómodas" o reveladoras para exponer -y demostrar por qué se cumplen- las que el enunciado nos pide. En nuestra búsqueda de resolver el problema tenemos que echar luz sobre el resto de la estructura en cuestión. Y eso puede hacerse de varias formas. Una manera, como en el ejemplo que vimos, es reconstruyendo dicha estructura (o una parte de ella) a través de otros caminos, y luego mostrando que se trata necesariamente de lo mismo (probando que es exactamente la misma figura -sin *ninguna* pérdida de *generalidad*[14]- que el problema a través de sus datos nos determinaba).

4. Un problema de la IMO:

Problema: Se consideran cinco puntos A, B, C, D y E tales que ABCD es un paralelogramo y BCED es un cuadrilátero cíclico y convexo. Sea l una recta que pasa por A. Supongamos que l corta al segmento DC en un punto interior F y a la recta BC en G. Supongamos también que EF = EG = EC. Demostrar que l es la bisectriz del ángulo DAB. *(2 IMO 2007)*



11 Por ejemplo, si el problema empieza presentándonos tres puntos "no alineados", podríamos perfectamente considerar a dos de ellos -a nuestra elección- como "enteramente libres" y al tercero como ligeramente restringido por éstos (obligado a *no* estar en la recta formada por los otros dos).

12 Nos puede dar una idea (no necesariamente acertada, pero idea al fin) de cuánto sentido tiene (o cuán poco) prestar atención a tal o cual ángulo, prolongar tal segmento o marcar cierta intersección, etc. Puede aportarnos "intuiciones" de esa clase (tanto sugerirnos construciones como en general orientar nuestra mirada o nuestras "búsquedas").

13 Los griegos tenían una ventaja con respecto a nosotros, y es que ellos estaban acostumbrados a pensar la geometría en términos de "construcciones" -en sentido literal- (nuestro equivalente cercano sería, ¿cómo hago tal figura con regla y compás?). Y cuando buscás construir, construís, no estás atado a la lógica lineal de "parto de esto, se sigue esto, se sigue esto..." (no a la hora de *pensar*, de crear o descubrir).

14 Vuelvo a recalcar esto porque un error muy común cuando uno empieza a resolver problemas de geometría es hacer lo que nos piden (encontrar el valor de un ángulo, por ejemplo) sólo para un caso particular, lo que es equivalente a "agregar datos" (si teníamos un triángulo ABC, asumir que es equilátero sin probarlo). Distinguir las demostraciones inválidas de las válidas se conecta a cierto grado de maduración lógica o matemática, y es un paso vital que hay que dar en Olimpíadas (paso que, por supuesto, nunca nos "inmuniza" totalmente contra la posibilidad de equivocarnos).

Nuevamente, antes de seguir leyendo traten de resolverlo ustedes solos.

Solución con comentarios en azul:

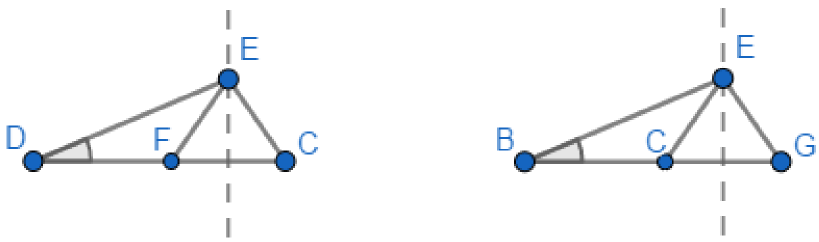
El problema nos pide probar que *l* es bisectriz de DAB, pero como <FAB = <AFD (por ser AB y CD paralelas), es equivalente a probar que ADF es isósceles, esto es, a probar AD = DF.

Deberíamos aprovechar que B, C, E y D están en una misma circunferencia. Lo vamos a hacer así: <CDE = <CBE = α (pues B y D están en el mismo arco CE en dicha circunferencia[15]).

También podemos querer aprovechar que A, F y G están en una misma línea: Como <DAF = <FGC (por ser BC y DA paralelas), obtenemos que los triángulos AFD y GFC son semejantes (ver Anexo), de donde AD/GC = DF/CF, o lo que es lo mismo AD/DF = GC/CF = k, y si llamamos DF = a, CF = b, obtenemos AD = BC = ka y GC = kb. Como queremos ver AD = DF, queremos probar que k = 1.

En esencia, ya tenemos todo lo que necesitamos para resolver el problema. La Misión: Intentar darnos cuenta de "qué nos dice" que EF = EG = EC, y apreciar con atención la construcción.

Para eso, observemos los dos grupos de puntos siguientes: D, F, C y E por un lado, y B, C, G y E, por otro. Tienen varios aspectos en común. Por de pronto, podríamos quedarnos en que EFC y ECG son ambos triángulos isósceles y que comparten los lados iguales, pero podemos apreciar más cosas. Algunos de los aspectos observados serán superficiales y otros más importantes (aunque no lo sepamos de antemano).



¿Qué tenemos? Por un lado, la distribución de los puntos D, F y C en su línea, y B, C y G en la suya, son proporcionales. Y no sólo sabemos que E forma un triángulo isósceles con F y C sino que <EDF = α, y que lo mismo aplica en el otro grupo.

En realidad, lo anterior equivale a notar que los dos grupos son "semejantes" (ambos están determinados en cuanto a su forma). Pero si esto es así (y veremos por qué a continuación), tendremos que ser capaces de afirmar que EC/EF = BC/DF = k, de donde obtendremos k = 1 como queríamos.

Que E forme triángulos isósceles con los segmentos FC y CG equivale a decir que está en su mediatriz. Lo cual nos da la pauta de la "rigidez" de forma (en ambos grupos tenemos tres puntos ubicados según la misma proporción, trazamos un ángulo dado desde el primero de ellos, y lo intersectamos con la mediatriz de los otros dos -quedando así determinado el punto restante-...). Para probar entonces la semejanza que necesitamos para el problema, podemos decir lo siguiente: Sean M y N los puntos medios de FC y CG, respectivamente. FM es la mitad de b y CN la mitad de kb, y de allí obtenemos fácilmente que BN = k.DM. Ahora bien, EDM y EBN son semejantes por tener los mismos ángulos (notar que <EMD = <ENB = 90°), de donde obtenemos que EB = k.ED. Luego, EDF y EBC son también semejantes (por tener dos pares de lados proporcionales y su ángulo adyacente común). Pero de aquí concluimos, como queríamos, que EC/EF = BC/DF = k, es decir, k = 1, y completamos la demostración del problema.

---

15 El enunciado aclara que BCED es convexo, y sólo para implicar que no es "cruzado" (no hay "cóncavos cíclicos").

5. Maratón de problemas variados:

La lista no pretende tener un orden definido, pero sí es de esperar que los del principio resulten más sencillos que algunos de los del final. De todas formas, comiencen por donde más les guste. (Sugerencia: ¡Piensen primero los que les llamen más la atención!)

En cualquier caso, si algo no sale tras intentarlo bastante, dejarlo y volver más adelante (por qué no luego de haber resuelto más problemas) puede ser una buena idea.

Todo tiempo pensando problemas, genuinamente, es tiempo *aprendiendo*, salgan o no. ¡Diviértanse!

* a) Las diagonales de ABCD se cortan en P, y AB es paralelo a CD. Probar: AP/PC = BP/PD.
  b) Probar el *teorema de la bisectriz*: Sea ABC y P en BC tal que AP es bisectriz del ángulo BAC, entonces AB/AC = BP/PC.
* a) Dado un triángulo ABC, si M y N son los puntos medios de AB y AC, respectivamente, al segmento MN se lo llama *base media* respecto de la base BC. Probar sus dos propiedades: mide la mitad de BC, y es paralelo a BC.
  b) En ABCD se marcan M, N, P, Q los puntos medios de AB, BC, CD y DA respectivamente. Probar que MNPQ es un paralelogramo (se lo llama *paralelogramo de Varignon*).
* En una hoja había dibujada (con lápiz) una circunferencia pero la misma se borró casi completamente, y sólo quedó un pequeño arco. Marcar (determinar) el centro de la circunferencia, usando únicamente regla y compás.
* a) Probar que las mediatrices de un triángulo “concurren”, es decir, se cortan las tres en un mismo punto (llamado el *circuncentro* -por ser el centro de la circunferencia circunscripta-).
  b) Intentar probar de la misma forma que las bisectrices concurren (al punto de intersección se lo llama *incentro*). *Sugerencia*: ¿Cómo me conviene “entender” a la bisectriz? *Pregunta*: ¿El incentro es el centro de qué circunferencia?
  c) Probar de dos formas distintas que las medianas de un triángulo concurren (al punto de intersección se lo llama *baricentro*). *Sugerencia forma 1*: Si G es el baricentro y M el punto medio de BC, ¿cuánto vale AG/GM? (¿cómo lo prueban?). *Sugerencia forma 2:* Probar que la mediana por A (entendida como recta) es el lugar geométrico de los puntos P tales que área(PAB) = área(PAC).
  d) Probar que las alturas de un triángulo concurren (al punto de intersección se lo llama *ortocentro*). *Sugerencia forma 1*: trazar dos alturas, y probar que la recta que une su punto de intersección con el vértice restante del triángulo es perpendicular al lado. *Sugerencia forma 2*: trazar paralelas a los lados por sus vértices opuestos. *Pregunta*: ¿Se les ocurre una tercera demostración?
* Probar el teorema de Pitágoras, y probar el recíproco del teorema de Pitágoras.
* Sea ABC un triángulo y D, E y F los puntos en donde las alturas desde A, B y C cortan a BC, CA, AB (rectas) respectivamente (a DEF se lo llama el *triángulo órtico* de ABC). Demostrar que el ortocentro de ABC es el incentro de DEF.
* Sea ABC un triángulo y puntos X e Y en AB y AC respectivamente, tales que XY es paralelo a BC. Sea Z la intersección de BY y CX, y M la intersección de AZ y BC. Probar que BM = MC.
* Se tienen tres puntos alineados A, B y C (con B entre A y C) y puntos P, Q y R tales que P y Q están del mismo lado respecto de AC y R está en el semiplano opuesto, y tales que <APB = <BQC = <ARC = 120°, AP = PB, BQ = QC y AR = RC. ¿Cuál es el valor del ángulo PQR?
* En un triángulo escaleno ABC se traza la bisectriz interior BD, con D sobre AC. Sean E y F, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas desde A y C hacia la recta BD, y sea M el punto sobre el lado BC tal que DM es perpendicular a BC. Demuestre que <EMD = <DMF.
* Sea ABC un triángulo con AB = AC y <BAC = 20°. Sean D y E sobre los lados AC y AB respectivamente tales que <CBD = 60° y <BCE = 50°. Hallar <BDE.

* Se tiene un cuadrilátero ABCD con ángulos obtusos <ABC = <CDA. Se marcan P, Q, R y S en AB, BC, CD y DA respectivamente de forma que: <PDC = <QDA = <RBA = <SBC = 90º. Probar que PQRS es un rectángulo.

* Sean L, M, N los puntos medios de AB, BC, CA en un triángulo ABC. Sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C respectivamente. Sea H el ortocentro de ABC, y X, Y y Z los puntos medios de AH, BH, CH respectivamente. Demostrar que los puntos L, M, N, D, E, F, X, Y, Z están sobre una misma circunferencia (llamada *la circunferencia de los 9 puntos* del triángulo ABC).

* Sea ABCDE un pentágono regular y X un punto interior tal que <AEX = 48° y <BCX = 42°. Hallar <AXC.

* En un triángulo acutángulo ABC sea D en el segmento BC tal que AD es la bisectriz del ángulo BAC. La perpendicular a AD trazada por B corta a la circunferencia que pasa por A, B y D en B y E. Sea O el centro de la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo ABC. Demostrar que E, O y A son “colineales” (están alineados).

* Sea ABC un triángulo, M el punto medio de BC y L en el segmento AM tal que <LAB = <LBC. Probar que <LAC = <LCB.

* a) Dados dos triángulos congruentes de lados no paralelos entre sí, probar que hay una *rotación* que lleva uno en otro (es decir, que hay un punto, llamémoslo O -el *centro de la rotación*-, tal que para cada par de puntos correspondientes A y A' de los triángulos, OA = OA' y el ángulo <AOA' es siempre el mismo, esto es, igual a un ángulo constante -el *ángulo de la rotación*-).

b) Dados dos triángulos semejantes de lados correspondientes paralelos y tamaños distintos, probar que hay una “*homotecia*” que lleva uno en otro (es decir, que hay un punto, llamémoslo O -el *centro de la homotecia*-, tal que todo par de puntos correspondientes A y A' de los triángulos están alineados con O y se cumple que OA/OA' es constante -la *razón de la homotecia*-).

c) Se tienen un punto P, una recta *l* que no pasa por P, y un triángulo ABC. Dado un punto X en *l*, se marca un punto Y en el plano tal que PXY sea semejante a ABC en ese orden (P el vértice correspondiente a A, etc.), y de forma que los vértices P, X e Y estén en sentido antihorario. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos Y (cuando X se mueve por toda la recta *l*)?

* P es un punto en el interior del cuadrado ABCD. Si PA = 1, PB = 2 y PC = 3, ¿cuánto vale <APB?

* a) Dado un cuadrado ABCD, construir con regla y compás puntos P y Q en BC y CD respectivamente tales que APQ sea un triángulo equilátero.

b) Dado un triángulo ABC, construir con regla y compás puntos P y Q en AB y AC, respectivamente, y puntos R y S en BC, tales que PQRS sea un cuadrado.

c) Dado un cuadrado ABCD y un triángulo no rectángulo XYZ, construir con regla y compás puntos P y Q en las rectas BC y CD respectivamente tales que APQ sea semejante a XYZ.

* Sean ABCD y EFGH cuadriláteros cíclicos tales que AB = EF, BC = FG, CD = GH y DA = HE. Probar que son cuadriláteros congruentes. *Sugerencia*: Probar que tienen el mismo *circunradio* (¿qué pasa si uno tiene un radio más grande?).

* Sea ABCD un cuadrilátero (convexo) y sean M y N los puntos medios de AB y CD respectivamente. Sean R y S dos puntos interiores al cuadrilátero de forma que se tienen las igualdades de ángulos <RBA = <DMN, <RAB = <NMC, <SCD = <ANM y <SDC = <MNB. Probar que RS es paralelo a MN.

* Sea ABC un triángulo con V y U sobre los lados AB y AC respectivamente tales que BU y CV son bisectrices de los ángulos <ABC y <ACB. Probar que si BU = CV entonces AB = AC.

* Sea ABCD un cuadrado. Sobre los lados AB y BC se toman los puntos E y F, respectivamente, tales que BE = BF. En el triángulo EBC, N es el pie de la altura relativa al lado EC. La prolongación de dicha altura corta al lado AD del cuadrado en el punto G. Los segmentos FG y EC se cortan en el punto P, y las rectas NF y DC se cortan en T. Probar que la recta DP es perpendicular a la recta BT.

* Una circunferencia tiene su centro situado en el lado AB de un cuadrilátero cíclico ABCD. Los otros tres lados son tangentes a la circunferencia. Demostrar que AD + BC = AB.

* Exteriormente a un triángulo ABC se marcan puntos A', B' y C' tales que A'BC, B'CA y C'AB son triángulos equiláteros. Probar (a) que AA', BB' y CC' concurren, y (b) que los centros de esos triángulos equiláteros (llamados *triángulos de Napoleón*) forman, a su vez, un triángulo equilátero. *Pregunta*: ¿Cuál problema anterior es un caso particular de éste?

* Los puntos P y Q están en el lado BC del triángulo acutángulo ABC de modo que <PAB = <BCA y <CAQ = <ABC. Los puntos M y N están en las rectas AP y AQ, respectivamente, de modo que P es el punto medio de AM, y Q es el punto medio de AN. Demostrar que las rectas BM y CN se cortan en la circunferencia circunscripta del triángulo ABC.

* Dados dos puntos A y B distintos y k una constante positiva distinta de 1, probar que el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que AP = k.PB es una circunferencia (se la conoce como la *circunferencia de Apolonio*).

* Sea ABCD un trapecio con AB y CD paralelas, y sean M y N puntos en BC y DA respectivamente tales que MN es paralelo a AB y AM es paralelo a NC.

a) Si se borran de la figura los puntos M y N, construirlos usando sólo regla y compás.

b) Si AB = 16 y CD = 25, hallar MN.

* Sea ABC un triángulo y sean D y E en AC y AB respectivamente tales que BCDE es un cuadrilátero cíclico. BD y CE se cortan en P, y M es el punto medio de AP. Sea F la otra intersección de la recta DM con la circunferencia circunscripta de BCDE, y sea Q la otra intersección de la recta FP con dicha circunferencia. Probar que AP y BQ son paralelas.

* En un triángulo equilátero ABC está marcado un punto interior P de modo que <PBC = 2.<PCB y <PAC = 3.<PCB. Hallar <PCB.

* Se eligen seis puntos en los lados de un triángulo equilátero ABC: A_1 y A_2 en BC, B_1 y B_2 en CA, C_1 y C_2 en AB. Estos puntos son los vértices de un hexágono convexo $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ cuyos lados son todos iguales. Demuestre que las rectas A_1B_2, B_1C_2 y C_1A_2 son concurrentes.

Anexo: Criterios de congruencia y de semejanza

La idea general detrás de la noción de “congruencia” entre dos figuras es justamente la de que sean figuras iguales, si omitimos su ubicación y orientación; que coincidan en su forma y en su tamaño, de manera tal de que podríamos agarrar una y “superponerla” exactamente sobre la otra (quizás teniendo que darla vuelta). Para simplificar las cosas, podemos decir que dos polígonos de igual cantidad de lados ABC... y A'B'C'... son *congruentes* si todos sus lados correspondientes son iguales (AB = A'B', BC = B'C', etc.) y todos sus ángulos correspondientes también lo son (<ABC = <A'B'C', y lo mismo con todos los demás) [esta caracterización no explicita todo lo que vale, pero es conveniente para enunciar las propiedades]. Los *criterios de congruencia de triángulos* afirman que, para concluir que dos triángulos ABC y A'B'C' son congruentes, nos alcanza con determinar que se da cualquiera de las siguientes condiciones:

* AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A', es decir, que los tres pares de lados correspondientes sean iguales (*Criterio LLL* o “Lado-Lado-Lado”).

* AB = A'B', AC = A'C' y <BAC = <B'A'C', es decir, que un par de ángulos correspondientes sean iguales y que tengan sus respectivos pares de lados adyacentes iguales unos con otros (*Criterio LAL* o “Lado-Ángulo-Lado” -notar el énfasis en que el ángulo sea el adyacente a ambos lados-).

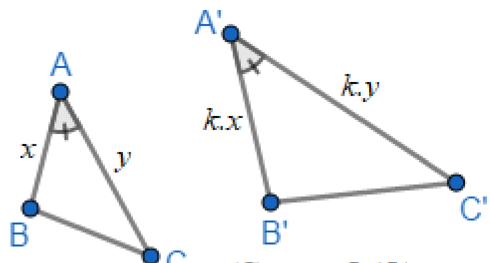
* BC = B'C', <ABC = <A'B'C' y <ACB = <A'C'B', es decir, que un par de lados correspondientes sean iguales y que tengan sus respectivos pares de ángulos adyacentes también iguales unos con otros (*Criterio ALA* o “Ángulo-Lado-Ángulo”).

Cada uno de los criterios establece que con cierta información parcial adecuada sobre los triángulos ya podemos concluir la información total, es decir, que los tres pares de lados correspondientes son iguales entre sí y los tres pares de ángulos correspondientes también. Como vimos con los ejemplos del comienzo, en los cuadriláteros (y en general en los polígonos de más de tres lados) la igualdad entre los lados correspondientes no garantiza que también se dé la igualdad entre los ángulos. Necesitamos más condiciones para que la figura sea “rígida”, para que quede determinada la congruencia (hay muchas clases de condiciones distintas que pueden servir para garantizarla, y, cuando se dan las suficientes, en el proceso de establecer la congruencia suelen intervenir varias veces los criterios de congruencia de triángulos -en oportunidades la demostración es muy simple, pero no siempre, depende de cuáles sean las condiciones involucradas-).

Con la semejanza sucede lo mismo que con la congruencia, sólo que el tamaño no necesita ser igual. La idea es que dos figuras son semejantes si tienen la misma forma. Nuevamente, para simplificar las cosas digamos que dos polígonos de igual cantidad de lados ABC... y A'B'C'... son *semejantes* si todos sus lados correspondientes tienen la misma *razón* (esto es, que exista un k positivo tal que A'B' = k.AB, B'C' = k.BC, etc.) y todos sus ángulos correspondientes son iguales (<ABC = <A'B'C', y lo mismo con todos los demás). La semejanza vendría a ser como una congruencia pero donde podemos hacer “zoom” (en la figura completa). De aquí que *los criterios de semejanza de triángulos* estén asociados directamente a los criterios de congruencia. Dos triángulos ABC y A'B'C' son semejantes si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

* A'B' = k.AB, B'C' = k.BC, C'A' = k.CA, es decir, que los tres pares de lados correspondientes sean proporcionales.

* A'B' = k.AB, A'C' = k.AC y <BAC = <B'A'C', es decir, que dos pares de lados correspondientes sean proporcionales y que sean iguales entre sí los ángulos adyacentes en cada caso a ambos lados.



(Criterio LAL)

* El más conocido de todos: que los ángulos correspondientes sean iguales entre sí. A este a veces se lo da como “definición” de semejanza de triángulos, pero no es una buena idea pensarlo como definición porque no se la puede extender según lo que dijimos, “falla”, para figuras de más lados (los rectángulos de lados desiguales y el cuadrado, por ejemplo, coinciden en todos sus pares de ángulos correspondientes, y sin embargo no son figuras semejantes).

Ejercicios (¡pueden omitirse en una primera lectura!)*:*

a) Sean puntos A, B, C, B', C' de manera tal que los triángulos ABC y AB'C' tengan sus vértices en el orden indicado siguiendo el mismo sentido (por ejemplo, antihorario en ambos casos), y tales que <ABC = <AB'C', <ACB = <AC'B'. Probar que ABB' y ACC' son triángulos semejantes.
b) ¿Qué sucede cuando dos triángulos ABC y A'B'C' tienen dos pares de lados correspondientes iguales (AB = A'B', AC = A'C'), y un ángulo correspondiente también igual (<ABC = <A'B'C') pero que no es el adyacente a los dos lados? ¿Cuántos “tipos” de triángulos con estas condiciones puede haber (cuántas clases distintas de triángulos XYZ hay con XY = *a*, XZ = *b*, <XYZ = *β*, valores fijos)? ¿Cómo se relacionan?... (¿Y qué “condiciones extras” necesito o me sirven para crear criterios de congruencia o de semejanza “LLA” *válidos*? ¿Cómo prueban estos criterios?)
c) Sean ABC y A'B'C' triángulos semejantes, k la razón de semejanza A'B'/AB, y puntos P, Q, R, S, T, P', Q', R', S' y T' tales que: P y P' están en AB y AB' y Q y Q' en AC y A'C', respectivamente, de modo que AP/PB = A'P'/P'B' = ½ y <QBC = <Q'B'C'. R y R' son los pies de las perpendiculares por Q y Q' a BC y B'C', respectivamente, S es el punto medio de PQ y S' el de P'Q', T la intersección de BQ y PR y T' la de B'Q' y P'R'. ¿Cómo podemos probar, al estilo “paso a paso”, que S'T'/ST = k?