El principio de inducción

Matías Saucedo

Selectivo Cono Sur 2016

1. Razonamiento inductivo

El principio de inducción es una herramienta sumamente poderosa que ayuda a resolver problemas de temas muy variados, tanto de Álgebra como de Combinatoria o Teoría de Números. A grandes rasgos, podemos decir que la idea de fondo consiste en demostrar una cierta propiedad en *etapas*, comenzando por las más simples y avanzando hacia las más complejas, usando la información ya obtenida en las etapas anteriores para pasar a la etapa siguiente. Esto irá quedando más claro a medida que veamos ejemplos.

Problema 1

a) Se tienen 8 monedas, en apariencia idénticas, pero una de ellas es falsa y es más liviana que las demás. Se dispone de una balanza de dos platos, que únicamente informa si el peso del plato izquierdo es menor, igual o mayor que el peso del plato derecho. Mostrar cómo se puede identificar la moneda falsa usando la balanza solamente 3 veces.
b) La misma situación de antes, pero ahora son 16 monedas en total (1 sola falsa) y se permite usar la balanza 4 veces.

Solución. Resolvamos primero la parte a). Una posible solución es la siguiente.
En la primera pesada colocamos 4 monedas en cada platillo. Necesariamente entonces el plato en el que esté la moneda falsa será más liviano que el otro. Por lo tanto, observando la balanza podemos saber en qué plato está la falsa. De este modo, sabemos que la moneda falsa es una de las 4 monedas que están en ese plato, y las otras 4 monedas son auténticas.
Para la segunda pesada solamente usamos las 4 monedas que aún son «sospechosas», y colocamos 2 de ellas en cada plato. De nuevo, la balanza no se puede equilibrar, porque el plato que contenga a la moneda falsa es más liviano. Entonces, observando la balanza podemos reducir nuestra lista de sospechosas a sólo dos monedas (las dos que estén en el plato más liviano).
Finalmente, en la tercera pesada colocamos una de estas monedas en cada plato. La que resulte más liviana de las dos es la falsa, y cumplimos nuestro objetivo.
Ahora pasamos a la parte b). Tenemos 16 monedas. Supongamos que en una primera pesada colocamos la mitad en cada plato. La balanza no se puede equilibrar, porque el plato que contenga a la moneda falsa será más liviano que el otro. Entonces, observando la balanza podemos obtener un grupo de 8 monedas en el cual sabemos con certeza que se encuentra la moneda falsa. Ahora, usando las 3 pesadas que nos quedan tenemos que identificar cuál de estas 8 monedas es la falsa. ¡Este problema ya lo resolvimos antes! ■

La solución ya está completa, pero reflexionemos un poco sobre lo que acabamos de hacer. En cada pesada lo que conseguimos fue averiguar que ciertas monedas eran auténticas, reduciendo así nuestra lista de monedas candidatas a ser la falsa. Luego de esto, es como si empezáramos el problema de nuevo sólo que esta vez en un caso más sencillo (con menos monedas). Así, pasamos de querer resolver el problema para 8 monedas a querer resolverlo para 4 monedas y luego para 2 (aquí por «el problema» me refiero a identificar la moneda falsa usando pocas pesadas).

Cuando resolvimos la parte a), no contábamos con nada de información previa, y por eso tuvimos que seguir el desarrollo hasta el final. En cambio, al pasar a la parte b) vimos que si ya sabemos que se puede resolver el problema con 8 monedas usando 3 pesadas, entonces podemos afirmar que el problema con 16 monedas se puede resolver en 4 pesadas, pues la primera pesada nos permite reducir el problema al caso anterior. Está claro que este razonamiento se puede repetir más veces. Así, sabiendo que para 16 monedas nos bastan 4 pesadas podemos afirmar que para 32 monedas alcanzan 5 pesadas, para 64 monedas alcanzan 6 pesadas, para 128 monedas alcanzan 7 pesadas, etcétera.

Observen que la afirmación que estamos haciendo es que si la cantidad de monedas es 2^n, entonces se puede identificar la falsa usando n veces la balanza. Al principio vimos que esto era cierto para $n = 3$. Luego nos dimos cuenta de que si ya sabemos que la afirmación se cumple para un cierto valor particular de n, entonces también se cumple para el valor siguiente. Combinando estas dos cosas se puede concluir que nuestra afirmación es verdadera para **todos** los números naturales a partir del 3. El principio de inducción, justamente, es lo que nos dice que este esquema de razonamiento que hicimos, completamente intuitivo, es formalmente correcto.

Proposición 1.1 (Principio de inducción)

Para demostrar que una cierta propiedad se cumple para todo número natural n a partir de un cierto valor a, alcanza con ver dos cosas:

- La propiedad se cumple para el valor a.
- Siempre que la propiedad se cumple para un cierto valor, también se cumple para el valor siguiente.

Esta situación les puede recordar a lo que ocurre cuando uno hace una fila con fichas de dominó. Sabemos que si un dominó se cae, empuja al siguiente, que entonces se caerá también. Por lo tanto, empujando el primer dominó de la fila, se caen todos.

La parte de ver que la propiedad se cumple para el valor a se llama **caso base**. Toda demostración por inducción requiere de (al menos) un caso base. Muchas veces el valor a será simplemente el 1 y así nuestra propiedad será válida para todos los números naturales.

La otra parte, ver que si se cumple para un valor entonces se cumple para el siguiente, es lo que se llama **paso inductivo**.

Volvamos al problema de las monedas. ¿Qué pasaría si alguien viene y nos dice que en realidad, para 8 monedas alcanza con hacer 2 pesadas para identificar la falsa? Si suponemos que esto es cierto, entonces se puede demostrar inductivamente que para 16 monedas alcanzan 3 pesadas, para 32 monedas alcanzan 4 pesadas, y en general, que para 2^n monedas alcanzan $n - 1$ pesadas. El paso inductivo se hace exactamente de la misma manera que antes. Supongamos que para cierto valor de n se cumple que $n - 1$ pesadas son suficientes para identificar la falsa entre 2^n monedas. Si ahora en vez de 2^n tenemos 2^{n+1} monedas, en nuestra primera pesada ponemos la mitad en cada plato, reduciendo la cantidad de monedas sospechosas a 2^n. Como estamos suponiendo que lo que sigue se puede resolver usando $n - 1$ pesadas, en total usamos $1 + (n - 1) = n = (n + 1) - 1$ pesadas, así que la afirmación también se cumple para $n + 1$.

Pero (y esto es clave) no habremos demostrado nada hasta que no resolvamos el caso base. Hasta ahora sólo pudimos ver que, *si fuera cierto* que para 8 monedas alcanzan 2 pesadas, entonces para cualquier $n \geq 3$ se cumple que $n-1$ pesadas son suficientes para identificar la falsa entre 2^n monedas. En el paso inductivo uno solamente ve que la validez de una cierta afirmación *implica* la validez de otra, pero nunca prueba que estas afirmaciones se cumplan. El único paso de una demostración por inducción en el cual uno demuestra una cosa de forma concreta, sin suponer ningún tipo de información previa, es el caso base; por eso es que este paso no puede faltar. Usando la metáfora de los dominós, en este momento tenemos todos los dominós en fila y ya sabemos que si uno se cae entonces también se caerá el siguiente, pero todavía nos falta empujar el primer dominó.

Veamos entonces cómo se puede identificar la moneda falsa entre 8 monedas usando solamente 2 pesadas. En la primera pesada colocamos 3 monedas en cada plato y dejamos 2 monedas sin usar. Si la balanza se equilibra, significa que la falsa está entre las dos monedas que no usamos, y entonces comparando estas dos monedas en la segunda pesada logramos el objetivo. En cambio, si la balanza no se equilibra, sabemos que la falsa está en el plato más liviano, así que nos quedan 3 monedas «sospechosas». En este caso, en la segunda pesada colocamos una de estas monedas en cada plato y la tercera la dejamos afuera. Si la balanza no se equilibra, la moneda que esté en el plato más liviano es la falsa; y si la balanza se equilibra, la falsa es la moneda que dejamos afuera.

Cubiertos todos los casos, vemos que para 8 monedas son suficientes 2 pesadas, y entonces por inducción (ya explicamos antes cómo hacer el paso inductivo) se deduce que para cualquier $n \geq 3$, si tenemos 2^n monedas entonces se puede identificar la moneda falsa haciendo $n-1$ pesadas. ■

Pasemos ahora a nuestro próximo ejemplo.

Problema 2

Demostrar que para todo número natural n existe un número de n dígitos, formado sólo por dígitos 1 y 2, que es divisible por 2^n.

Por ejemplo, para $n = 4$ podemos considerar 2112, que es un número de 4 dígitos formado sólo por dígitos 1 y 2 que es divisible por $2^4 = 16$. Lo que nos pide el problema es ver que un tal número existe para *cualquier* n.

La pregunta que tenemos que hacernos para ver si la inducción nos podría ayudar a resolver este problema es la siguiente.

«Resolver el problema para un valor particular de n, ¿nos ayuda en algo para resolver el problema para $n+1$?»

Si la respuesta es no, es decir, si para resolver el caso siguiente hay que empezar desde cero, entonces seguramente no podamos hacer una demostración por inducción. Típicamente identificamos a los problemas que se pueden resolver por inducción porque al intentar resolver un caso del problema nos topamos con un caso anterior (como nos pasó con el problema de las balanzas), o equivalentemente, porque se puede ir avanzando usando los casos ya probados para probar el caso siguiente.

Veamos qué sucede con este problema. Supongamos que ya lo resolvimos para un cierto valor de n, es decir, encontramos un número de n dígitos, digamos $d_1 d_2 \ldots d_n$, con todos los d_i iguales a 1 o a 2, que es divisible por 2^n. Para resolver el caso siguiente necesitamos encontrar un número similar, pero con un dígito más, que sea divisible por 2^{n+1}. Si queremos usar lo que ya

tenemos para resolver este nuevo caso, lo más razonable sería que el número nuevo se obtenga a partir del que ya tenemos agregándole un dígito.
Llamemos entonces M al número viejo. Como estamos suponiendo que M es un múltiplo de 2^n, podemos escribir $M = 2^n \cdot t$ con t un número entero. Supongamos que agregamos un dígito 1 a la izquierda de M. El número que se forma es $10^n + M = 2^n \cdot 5^n + 2^n \cdot t = 2^n(5^n + t)$. Si $5^n + t$ fuese par, digamos $5^n + t = 2x$, entonces el número nuevo resultaría ser $2^n \cdot 2x = 2^{n+1}x$, es decir que es múltiplo de 2^{n+1}, y cumplimos el objetivo. Sin embargo, no tenemos manera de saber si dicho número es par o impar: sabemos que 5^n es impar, pues es producto de números impares, pero no sabemos nada sobre la paridad de t.
La otra opción que tenemos es agregar a la izquierda de M un dígito 2. En este caso, el número nuevo es $2 \cdot 10^n + M = 2^n(2 \cdot 5^n + t)$. Otra vez, para que este número cumpla lo que queremos necesitamos que lo que está entre paréntesis sea un número par.
Notemos ahora que $5^n + t$ y $2 \cdot 5^n + t$ tienen distinta paridad: en el primer caso le estamos sumando a t un número impar, y en el segundo caso le estamos sumando a t un número par. Por lo tanto, necesariamente uno de estos dos números es par (es el primero en caso de que t sea impar, y es el segundo en caso de que t sea par). Recapitulando, aunque no podamos saber cuál de los dos es sin conocer la paridad de t, sabemos que uno de los dos números que se obtienen agregando un dígito a la izquierda de M cumple lo que queremos. Así, vimos que si existe un ejemplo para n dígitos entonces también existe uno para $n + 1$ dígitos, con lo cual ya tenemos nuestro paso inductivo.
Para completar la solución sólo tenemos que resolver el caso base $n = 1$. Allí podemos tomar como ejemplo el número 2, que tiene 1 dígito y es divisible por $2^1 = 2$.
A continuación mostramos cómo esta construcción inductiva va generando los ejemplos para distintos valores de n:

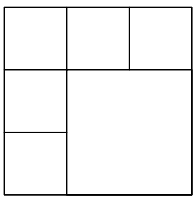
$$2 \to 12 \to 112 \to 2112 \to 22112 \to 122112 \to 2122112 \to \dots$$

2. Una variante: varios casos base

Consideremos el siguiente problema.

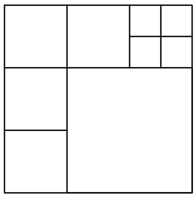
Problema 3
Demostrar que para todo entero $n \geq 6$ es posible dividir un cuadrado de papel en n cuadrados más pequeños (no necesariamente iguales).

Por ejemplo, para $n = 6$ una posible manera de hacer la división es:

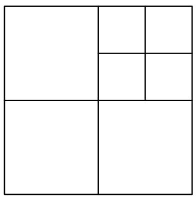


Aquí, el lado del cuadrado más grande es igual al doble del lado de los otros 5 cuadrados, que son iguales entre sí.
Vamos a resolver este problema usando inducción. El inconveniente es que no está claro cómo uno podría obtener una división en $n + 1$ cuadrados a partir de una división en n cuadrados. No se puede tomar una de las piezas que ya tenemos y dividirla en dos, pues claramente un cuadrado no se puede dividir en 2 cuadrados.

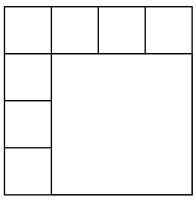
¿Qué hacer, entonces? Bueno, algo que sí está claro es que si existe una división en n cuadrados, entonces también existe una división en $n+3$ cuadrados: para obtenerla, basta tomar alguna de las piezas que ya tenemos y dividirla en cuatro cuadrados iguales usando los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos. Por ejemplo, a partir de la división que habíamos dado para $n = 6$ se puede obtener la siguiente división para $n = 9$:



Como lo que antes era un solo cuadrado pasó a ser 4 cuadrados, la cantidad de piezas aumentó en 3. Está claro que esto siempre se puede hacer.
Entonces, a diferencia de los ejemplos anteriores donde vimos que tener el problema resuelto para n nos permitía resolverlo para $n+1$, ahora tener el problema resuelto para n nos permite resolver el problema con $n+3$. Si usamos $n = 6$ como caso base, a partir de esto sólo podemos deducir que el problema es verdadero para $n = 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$, es decir, los múltiplos de 3. No tenemos manera de saber qué ocurre con los números que no son múltiplos de 3.
Lo que hacemos en estos casos entonces es agregar más casos base. Si conseguimos encontrar una manera de hacer la división para $n = 7$, el razonamiento anterior nos dice que la división se puede hacer para $n = 10, 13, 16, 19, 22, \ldots$, es decir, los números que tienen resto 1 en la división por 3. Y si además damos un ejemplo para $n = 8$, cubriremos todos los números que faltan, que son los que tienen resto 2 en la división por 3.
Para $n = 7$ simplemente dividimos el cuadrado en 4 cuadrados de la manera que ya explicamos y luego subdividimos a su vez uno de estos cuadraditos en 4.



Para $n = 8$ tenemos un ejemplo similar al que vimos para $n = 6$ donde ahora el lado del cuadrado grande es el triple del lado de los demás cuadrados:



En conclusión, como se puede para $n = 6, 7, 8$, y vimos que si se puede para n se puede para $n + 3$, por inducción concluimos que se puede para todo número natural $n \geq 6$, como nos pedían demostrar. ■

3. Ejercicios

Los primeros cuatro problemas de esta lista tienen muchas similitudes con los que vimos como ejemplos. Los demás no siguen ningún tipo de orden en especial.

(1) Se tienen 3^n monedas, en apariencia idénticas, pero una de ellas es falsa y es más liviana que las demás. Demostrar que se puede identificar la moneda falsa usando n veces una balanza de dos platos.

(2) Demostrar que para todo entero positivo n existe un número de n dígitos que es divisible por 5^n y además todos sus dígitos son impares.

(3) En un lejano país sólo se usan billetes de 3 pesos y de 7 pesos. Demostrar que usando estos billetes se puede pagar cualquier precio entero mayor o igual a 12 pesos.

(4) Demostrar que para todo entero $n \geq 4$ es posible dividir cualquier triángulo dado en n triángulos isósceles (no necesariamente iguales).

(5) Demostrar que para todo entero positivo n, el número formado por 3^n dígitos 1 es un múltiplo de 3^n.

(6) a) Demostrar que para todo entero positivo n se cumple que

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

b) Demostrar que todo entero positivo se puede escribir como suma de una o más potencias de 2 distintas, incluyendo $2^0 = 1$ (a esto se lo llama *desarrollo binario*).

(7) Sea x un número real mayor que -1. Demostrar que para todo entero positivo n se cumple la desigualdad $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

(8) Se tiene un tablero de $2^n \times 2^n$ al que se le ha recortado una casilla de una esquina. Demostrar que este tablero se puede cubrir completamente, sin huecos ni superposiciones, usando fichas en forma de L, cada una de las cuales cubre exactamente tres casillas del tablero.

(9) Decimos que un conjunto de rectas en el plano está en *posición general* si no hay entre ellas dos que sean paralelas ni tres que se corten en un mismo punto. Demostrar que al trazar n rectas en posición general, la cantidad de regiones en las que queda dividido el plano es $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$.

4. ¿Cómo seguir?

A los que estén interesados en leer más sobre este y otros temas, les recomiendo visitar

`http://www.omaforos.com.ar`

Allí podrán encontrar algunos apuntes teóricos como este y sobre todo un montón de problemas de certámenes anteriores, con varias soluciones aportadas por los usuarios del foro. Si se hacen una cuenta de usuario pueden, además, postear todas sus dudas.