# Funciones y ecuaciones funcionales

Matías Saucedo

16 de marzo de 2016

## 1. ¿Qué es una función?

Supongamos que tenemos dos conjuntos de números $X$ e $Y$. Definir una **función** del conjunto $X$ en el conjunto $Y$ (situación que representaremos con el símbolo $X \to Y$) significa asignarle a cada elemento del conjunto $X$ un único elemento del conjunto $Y$. Vamos a ver algunos ejemplos para entender mejor este concepto.
Consideramos los conjuntos $A = \{3, 4, 5\}$ y $B = \{9, 10, 16, 25\}$. Hay muchas funciones distintas que se pueden definir de $A$ en $B$. Por ejemplo, una función podría hacer lo siguiente:

al 3 le asigna el 9,
al 4 le asigna el 10,
al 5 le asigna el 16.

Esto cumple con la definición que dimos porque le estamos asignando a cada elemento de $A$ un único elemento de $B$.
Notarán que no hay ningún elemento de $A$ al que le hayamos asignado el 25. No hay nada de malo con esto: la definición pide que asignemos valores a todos los elementos del conjunto «de salida» (en este caso $A$), no importa si en el conjunto «de llegada» (en este caso $B$) quedan valores sin usar. Con esto ya tiene que quedar claro que en general definir una función $A \to B$ y definir una función $B \to A$ son cosas distintas.
Por supuesto, no queremos tener que describir funciones escribiendo todo el tiempo la frase «le asigna». La manera habitual de hacer la escritura más compacta es la siguiente. Primero le ponemos un nombre a nuestra función (típicamente usamos para esto las letras $f, g, h$). Llamemos entonces $f$ a la función que describimos más arriba. Ahora, para cada elemento $x$ del conjunto $A$, llamamos $f(x)$ (se lee «$f$ de $x$») al elemento del conjunto $B$ que le asignamos a $x$. Entonces, en nuestro ejemplo sería correcto decir que $f(3) = 9$, pues el valor que le asignamos al 3 (que es un elemento de $A$) es el 9 (que es un elemento de $B$).
Escribimos además $f : A \to B$ para indicar que $f$ es una función del conjunto $A$ en el conjunto $B$. De este modo, para describir la función de antes alcanza con decir que es $f : A \to B$ tal que $f(3) = 9$, $f(4) = 10$ y $f(5) = 16$. No hace falta decir nada más porque con eso ya sabemos qué valor le asigna $f$ a cada elemento de $A$.
Por supuesto, esta no es la única función posible. También podríamos definir una función $g : A \to B$ que cumpla $g(3) = 9$, $g(4) = 16$ y $g(5) = 16$. Esta vez, hay un elemento de $B$ que fue asignado a dos elementos distintos de $A$. De nuevo, esto no contradice la definición: el problema sería si a un mismo elemento de $A$ le asignáramos dos elementos distintos de $B$.
La función $g$ es muy parecida a la función $f$, en el sentido de que sólo difieren en el valor que le asignan al 4, y coinciden en los otros dos elementos de $A$. Para poder decir que dos funciones son la misma se necesita que coincidan sobre *todos* los elementos. Es importante tener esto presente porque si en un problema nos piden encontrar una función que cumpla ciertas propiedades y sólo conseguimos ver que al 3 le asigna el 9 y al 5 le asigna el 16,

entonces todavía no encontramos la función: no podemos saber si es $f$, $g$, o alguna de las otras posibles hasta que sepamos qué valor se le asigna al 4.
Hasta ahora la única manera que vimos de definir funciones es especificar uno por uno los valores asignados a cada elemento del conjunto de salida. Esto lo pudimos hacer porque el conjunto $A$ tiene sólo tres elementos. Si $A$ fuera más grande, incluso infinito (por ejemplo podría ser el conjunto de todos los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) este esquema se vuelve impracticable.
La buena noticia es que la gran mayoría de las funciones que aparecen en los problemas de olimpíadas se pueden definir por medio de una *fórmula*. Esto significa que hay algún tipo de regla que determina qué valor se le asigna a cada elemento de $A$. Por ejemplo, sea $h : A \to B$ la función tal que $h(3) = 9$, $h(4) = 16$, $h(5) = 25$. Aquí está claro que lo que está haciendo $h$ es asignarle a cada número su cuadrado. De este modo, podemos resumir toda la información anterior diciendo que $h(x) = x^2$ para todo $x \in A$.
Veamos otros ejemplos de funciones definidas por fórmulas.

- La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n + 1$. Si, por ejemplo, queremos conocer el valor de $f(2016)$, basta reemplazar $n$ por 2016 en la fórmula que define a la función. Así, $f(2016) = 2016 + 1 = 2017$.

- La función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $g(n) = \frac{n}{2}$. Observar aquí que no podíamos poner como conjunto de llegada los números naturales ya que si $n$ es impar entonces $\frac{n}{2}$ no es un elemento de ese conjunto (pero sí de los números reales).

- La función $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $d(n) =$ cantidad de divisores positivos de $n$. Por ejemplo, $d(6) = 4$, pues los divisores positivos de 6 son 1, 2, 3 y 6.

- A veces una misma función puede aplicar una regla en algunos elementos y otra regla distinta en los restantes. Un buen ejemplo de esto es la *función módulo* (o valor absoluto), que a los números positivos los deja como están y en cambio a los negativos les quita el signo $-$. En símbolos, esto se puede describir como una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

## 1.1. Un poco de vocabulario

Si bien no es necesario para entender los enunciados ni para resolver varios de los problemas que veremos en este apunte, a la hora de escribir las soluciones muchas veces resulta conveniente conocer algunas palabras «técnicas» que permiten referirnos a alguna cosa o situación con precisión.
Si $f : X \to Y$ es una función, entonces el conjunto «de salida» $X$ se llama el **dominio** de $f$. De manera similar, el conjunto «de llegada» $Y$ se llama el **codominio** de $f$.
Por lo general, en los problemas de este apunte trabajaremos con funciones cuyo dominio y codominio son el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.
La **imagen** de una función $f : X \to Y$ es el conjunto formado por los elementos de $Y$ que fueron asignados a algún elemento de $X$. Es decir, un número $y$ pertenece a la imagen de $f$ si existe algún $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Ya observamos antes que puede pasar que algunos elementos de $Y$ no estén en la imagen de $f$. En caso de que todos los elementos del codominio estén en la imagen, decimos que la función es **sobreyectiva**.
Una función $f : X \to Y$ se dice **constante** si le asigna el mismo valor a todos los elementos del dominio, es decir, si existe un elemento $y \in Y$ tal que $f(x) = y$ para todo $x \in X$.

Si el dominio y el codominio son el mismo conjunto $X$, hay una función especial que es la que le asigna a cada $x$ el propio elemento $x$, es decir $f(x) = x$ para todo $x$. Esta función recibe el nombre de **función identidad**.

## 2. Ecuaciones Funcionales I: Reemplazos

Las ecuaciones con las que estamos acostumbrados a trabajar en el colegio se nos presentan como igualdades entre dos expresiones que involucran algunas cantidades desconocidas llamadas *incógnitas* cuyo valor debemos determinar. Por ejemplo, $x^2 + 4 = x + 6$, cuyas soluciones (es decir, los valores de $x$ que hacen que la igualdad sea cierta) son $x = 2$ y $x = -1$.
Similarmente, una *ecuación funcional* es una igualdad entre dos expresiones que involucran una función desconocida $f$ que debemos determinar. Por ejemplo:

**Problema 1**

Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

para todos los números reales $x, y$.

Lo que significa este enunciado es que, sin importar cuáles sean los valores que elijamos para las variables $x$ e $y$, si calculamos $f(x)f(y)$ vamos a obtener el mismo resultado que al calcular $f(xy) + x + y$. Entonces, por ejemplo, sabemos que las siguientes igualdades son ciertas:

$$\begin{aligned} f(5)f(7) &= f(35) + 12, \\ f(2)f(3) &= f(6) + 5, \\ f(-4)f(2) &= f(-8) - 2, \\ f\left(\sqrt{2}\right)f\left(\sqrt{3}\right) &= f\left(\sqrt{6}\right) + \sqrt{2} + \sqrt{3}, \end{aligned}$$

etcétera. En el fondo, una ecuación funcional no es más que un gigantesco sistema de ecuaciones numéricas (una ecuación por cada posible elección de valores para $x$ e $y$), con infinitas incógnitas (pues para determinar $f$ debemos conocer el valor de $f(t)$ para cada número real $t$).
Lo que sucede habitualmente es que para resolver el problema no se necesitan usar todas las ecuaciones que tenemos disponibles, sino solamente un puñado de ellas elegidas de manera astuta. Es decir que hay que reemplazar las variables $x$ e $y$ por valores o expresiones convenientes. La habilidad para detectar cuáles de estos reemplazos pueden servir para obtener la solución se adquiere con práctica y experiencia; mientras más difícil sea el problema más complicado puede ser que se nos ocurra el reemplazo correcto para hacer. Sin embargo, hay algunos reemplazos estándar que sirven en la mayoría de los problemas (aunque luego haya que complementar la solución con otras técnicas, como veremos más adelante). Intentaré mostrar varios de ellos en esta sección.
Generalmente, el objetivo que se tiene en mente al hacer los primeros reemplazos es «simplificar» la ecuación que nos dieron. Por ejemplo:

- Si hay términos que aparecen sumando, podemos hacer algún reemplazo que haga que todos o algunos de ellos sean iguales a 0, y así hacerlos desaparecer. Análogamente, podemos intentar hacer que algo que esté multiplicando sea igual a 0 o a 1.

- Otra cosa que suele ser útil es hacer que la $f$ quede evaluada en la menor cantidad de números distintos posible. Es decir, que después de hacer el reemplazo nos queden pocos valores desconocidos en la ecuación.

Veamos cómo aplicar estas ideas en el Problema 1. Un reemplazo posible es tomar $x = 0$, $y = 0$. Este reemplazo tiene dos ventajas: hace desaparecer dos de los tres términos que están en el lado derecho de la ecuación, lo cual puede llegar a ser bueno; y además hace que la $f$ siempre se evalúe en el mismo número, pues $x$, $y$ y $xy$ van a ser iguales a 0. Es decir que luego de hacer el reemplazo nos va a quedar una ecuación en la que el único valor que desconocemos es $f(0)$, con lo cual probablemente lo podamos despejar.
En efecto, lo que queda después de hacer este reemplazo es $f(0)^2 = f(0)$, de donde se deduce que $f(0)$ sólo puede ser 0 o 1.
Puede parecer que todavía estamos muy lejos de resolver el problema, dado que todavía no sabemos nada sobre los valores que toma $f$ en los números distintos de 0, y de hecho ni siquiera pudimos determinar $f(0)$ aún, sólo lo redujimos a dos posibilidades. Pero vamos a ver que en realidad no nos falta mucho.
Lo que vamos a hacer ahora es analizar por separado dos casos: el caso en el que $f(0) = 0$, y el caso en el que $f(0) = 1$. En ambos casos la idea es hacer un reemplazo que nos permita aprovechar que ya conocemos el valor de $f(0)$.

- Supongamos que $f(0) = 0$. Reemplazamos $y = 0$ en la ecuación original (el valor de $x$ por el momento no lo especificamos). Del lado izquierdo nos queda $f(x)f(0) = f(x) \cdot 0 = 0$. Del lado derecho nos queda $f(0)+x+0 = x$. Es decir que llegamos a la igualdad $0 = x$, y esto se tiene que cumplir **para todo** $x \in \mathbb{R}$. ¡Absurdo! Entonces, no hay ninguna función que cumpla la ecuación del enunciado y además $f(0) = 0$.

- La única otra posibilidad que teníamos es que $f(0) = 1$. De nuevo, reemplazamos $y = 0$ en la ecuación original. Del lado izquierdo nos queda $f(x) \cdot f(0) = f(x) \cdot 1 = f(x)$. Del lado derecho nos queda $f(0) + x + 0 = x + 1$. Es decir, obtuvimos que $f(x) = x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ¡Ya encontramos la función!

¿La solución está completa? Aunque no lo crean, no. La sutileza es la siguiente. Lo que hicimos hasta ahora fue probar que si una función $f$ cumple la condición del enunciado, entonces necesariamente tiene que pasar que $f(x) = x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En otras palabras, ninguna función que no sea $f(x) = x + 1$ cumple la condición del enunciado. Ahora, ¿cómo sabemos si esa función efectivamente cumple la condición? Esto no se deduce de los pasos que ya hicimos. Observen que de hecho para obtener quién tenía que ser $f$ sólo usamos reemplazos en los que $y = 0$. Es decir que todavía no sabemos si la ecuación se va a satisfacer en los demás casos. En resumen, *si hay alguna solución*, tiene que ser la que encontramos. ¡Pero podría no haber ninguna!
Para completar la solución, entonces, hay que *verificar* que la función que encontramos satisface la ecuación dada. Si $f(x) = x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces el lado izquierdo de la ecuación es $(x + 1)(y + 1)$, que haciendo la distributiva vemos que es $xy + x + y + 1$. Por otra parte, el lado derecho es $xy + 1 + x + y$. Como el lado izquierdo y el lado derecho son iguales sin importar qué valores tomen $x$ e $y$, vemos que la función $f(x) = x + 1$ satisface la condición del enunciado, y ya habíamos visto que no puede haber ninguna otra función que la cumpla. Ahora sí, terminamos. ■

Como ocurre habitualmente, la que acabamos de ver no es la única solución posible para este problema. Otro posible reemplazo que puede parecer prometedor es tomar $x = y = 1$. De nuevo, la ventaja con este reemplazo es que la $f$ queda evaluada siempre en el mismo número (en este caso, el 1). Veamos ahora una solución alternativa para el Problema 1 que usa este reemplazo.

*Solución.* Reemplazamos $x = y = 1$ en la ecuación original. Obtenemos así $f(1)^2 = f(1) + 2$, o equivalentemente $f(1)^2 - f(1) - 2 = 0$. Esto es una ecuación cuadrática cuya incógnita es $f(1)$. Al resolverla obtenemos que los posibles valores para $f(1)$ son $-1$ y $2$. Analizamos cada caso por separado.

- Si $f(1) = -1$, reemplazando $y = 1$ en la ecuación original obtenemos $-f(x) = f(x)+x+1$, de donde se despeja $f(x) = -\frac{x+1}{2}$. Sin embargo, esta función no satisface la condición del enunciado, pues por ejemplo no se cumple que $f(0)^2 = f(0)$ (¿ven por qué es importante verificar?). Entonces no hay soluciones con $f(1) = -1$.

- Si $f(1) = 2$, reemplazando $y = 1$ en la ecuación original obtenemos $2f(x) = f(x)+x+1$, de donde se despeja $f(x) = x + 1$. Ahora habría que verificar que esta función satisface la condición del enunciado, pero esto ya lo hicimos en la solución anterior.

Hemos probado que la única función que cumple la condición del enunciado es $f(x) = x+1$. ■

**Problema 2** (Cono Sur 1998)

Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f\left(x^2\right) - f\left(y^2\right) + 2x + 1 = f(x+y)f(x-y)$$

para todos los números reales $x, y$.

Empezamos igual que en el problema anterior. Reemplazamos $x = y = 0$ y obtenemos que $1 = f(0)^2$, de donde se deduce que $f(0)$ puede ser $1$ o $-1$.
Para el siguiente reemplazo, razonamos de la siguiente manera. En el lado izquierdo tenemos $f\left(x^2\right) - f\left(y^2\right)$. Si hacemos que $x$ e $y$ sean iguales, esa parte desaparece, pues estamos restando dos números iguales. Además, en el lado derecho $f(x-y)$ pasaría a ser $f(0)$, sobre el cual ya tenemos algo de información. Por todo esto, el reemplazo $y = x$ parece prometedor.
Dejamos entonces que $x$ tome cualquier valor real pero elegimos el mismo valor para $y$. De este modo, nuestra ecuación se convierte en $2x + 1 = f(2x)f(0)$.
Supongamos primero que $f(0) = 1$. Entonces, por lo anterior sabemos que $f(2x) = 2x+1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto se ve un poco raro, porque nos gustaría haber obtenido una expresión para $f(x)$, y en vez de eso conseguimos una expresión para $f(2x)$. Pero no hay nada que temer, pues todo número real es de la forma $2x$ para algún $x \in \mathbb{R}$. Más precisamente, si $t$ es un número real cualquiera, reemplazamos $x = \frac{t}{2}$ en la igualdad anterior y obtenemos que $f(t) = t + 1$. Esto se cumple para todo $t$, así que ya determinamos la función.
Para este paso fue fundamental que estuviéramos trabajando sobre los números reales. Si por ejemplo el dominio de $f$ fuera el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros y sólo se nos permitiera darle valores enteros a $x$, entonces ya no es cierto que cualquier elemento del dominio se pueda expresar en la forma $2x$ (sólo se puede si es un número par).
En el caso $f(0) = -1$ nos queda que $-f(2x) = 2x+1$. Hacemos lo mismo de antes y obtenemos la función $f(t) = -t - 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
Veamos ahora si las funciones que obtuvimos (que son las únicas soluciones posibles) cumplen la condición del enunciado.

Para $f(t) = t + 1$ el lado izquierdo es

$$x^2 + 1 - (y^2 + 1) + 2x + 1 = x^2 - y^2 + 2x + 1,$$

mientras que el lado derecho es

$$(x + y + 1)(x - y + 1) = (x + 1)^2 - y^2 = x^2 + 2x + 1 - y^2.$$

Como en ambos casos obtuvimos el mismo resultado, $f(t) = t + 1$ es una solución.
Para $f(t) = -t - 1$ el lado izquierdo es

$$-x^2 - 1 - (-y^2 - 1) + 2x + 1 = y^2 - x^2 + 2x + 1,$$

mientras que el lado derecho es

$$(-x - y - 1)(-x + y - 1) = (-x - 1)^2 - y^2 = x^2 + 2x + 1 - y^2.$$

Estas dos expresiones son iguales si y sólo si $y^2 - x^2 = x^2 - y^2$, lo cual equivale a que $x^2 = y^2$. Esto evidentemente no se cumple para cualquier elección de $x$ e $y$. Por ejemplo podemos tomar $x = 1$, $y = 0$ y entonces $x^2 \neq y^2$. Así, la función $f(t) = -t - 1$ no cumple la condición del enunciado para **cualquier** elección de $x$ e $y$, y por lo tanto no es solución del problema.
En conclusión, la única función que cumple la condición del enunciado es $f(t) = t + 1$. ■

Vale la pena comentar que, si bien en estos dos problemas encontramos una única función que cumplía lo pedido, al igual que en las ecuaciones numéricas una ecuación funcional puede tener una, ninguna o varias soluciones. Veamos ahora un ejemplo en el cual hay infinitas soluciones.

**Problema 3** (Selectivo IMO 2012)
Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = y - x^2$$

para todos los números reales $x, y$.

Ya por costumbre empezamos haciendo el reemplazo $x = y = 0$, que en este caso nos dice que $f(f(0)) = 0$. Ahora, para aprovechar esta información vamos a reemplazar $y = f(0)$, así la parte que dice $f(y)$ en el lado izquierdo desaparece. (Observar que todavía no conocemos el valor de $f(0)$, pero sabemos que es un número real, así que es un posible valor que le podemos asignar a $y$.)
Haciendo este reemplazo obtenemos que $f\big(x^2\big) = f(0) - x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Este es un punto en el que resulta muy fácil equivocarse. Si fuera cierto que todo número real es de la forma $x^2$ para algún $x \in \mathbb{R}$, entonces de manera similar a lo que hicimos en el problema anterior obtendríamos que $f(t) = f(0) - t$ para todo $t$, lo cual ya es casi determinar la función (excepto porque no conocemos el valor de $f(0)$). El problema es que sólo los números reales no negativos son el cuadrado de otro número real. Es decir que hasta ahora sólo podemos afirmar que $f(t) = f(0) - t$ para todo $t \geq 0$, y no sabemos qué pasa en los negativos.
Hay varias maneras de subsanar este inconveniente, mostramos una de ellas.
Supongamos que $y$ es un número real cualquiera (fijo), no necesariamente positivo. Elegimos un valor de $x$ lo suficientemente grande como para que se cumpla $x^2 + f(y) \geq 0$ (es claro que esto se puede hacer). Para estos valores de $x$ e $y$ tenemos por un lado que

$$f(x^2 + f(y)) = y - x^2,$$

pues nos lo dice el enunciado; pero por otra parte, como $x^2 + f(y)$ es no negativo se deduce de lo que ya probamos que

$$f(x^2 + f(y)) = f(0) - x^2 - f(y).$$

Igualando las dos expresiones obtenidas llegamos a que $y = f(0) - f(y)$, o equivalentemente, $f(y) = f(0) - y$. Como esto lo pudimos hacer para **cualquier** número real $y$, ahora sí podemos afirmar que $f(t) = f(0) - t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
Es decir que nuestra función tiene la forma $f(t) = c - t$, donde $c$ es un número real fijo que corresponde al valor de $f(0)$. Lo que hay que hacer ahora es reemplazar esto en la ecuación original para obtener condiciones sobre qué valores puede tomar $c$.
El lado izquierdo queda $c - x^2 - (c - y) = y - x^2$, que es justamente lo que tenemos en el lado derecho. Es decir que la igualdad se cumple sin importar el valor de $c$. Por lo tanto, *todas* las funciones de la forma $f(t) = c - t$ con $c \in \mathbb{R}$ son solución de la ecuación, y son las únicas soluciones. ■

## 3. Ecuaciones Funcionales II: Funciones Inyectivas y Sobreyectivas

Volvamos a mirar el Problema 3. Un reemplazo que no usamos pero que parece bastante razonable es $y = x^2$. Este reemplazo podría llegar a ser útil porque hace que el lado derecho de la ecuación sea igual a 0.
Reemplazamos entonces $y = x^2$ y obtenemos que $f\left(x^2 + f\left(x^2\right)\right) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Por otra parte, habíamos visto que $f(f(0)) = 0$. Es decir que $f$ le asigna el mismo valor a los números $f(0)$ y $x^2 + f\left(x^2\right)$. En general, esto no nos da información, porque dijimos al principio que no había problemas con que una función le asigne el mismo valor a dos números distintos.
¿Qué pasaría si alguien nos dijera que esto no sucede, es decir, si ya supiéramos que la función $f$ le asigna valores distintos a números distintos? Si ese fuera el caso, de lo anterior podríamos deducir que $f(0) = x^2 + f\left(x^2\right)$, o equivalentemente, que $f\left(x^2\right) = f(0) - x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o sea que $f(t) = f(0) - t$ para todo $t \geq 0$. Ya vimos antes cómo se puede terminar la solución a partir de este punto.
Con esto vemos que el hecho de que $f$ «repita valores» o no puede ser una propiedad importante a tener en cuenta a la hora de resolver ecuaciones funcionales. Esta propiedad merece tener un nombre.

**Definición 3.1**
Una función $f : X \to Y$ se dice **inyectiva** si siempre que $a$ y $b$ sean elementos de $X$ tales que $f(a) = f(b)$ se cumple que $a = b$.

Esta definición dice simplemente que si $f$ le asigna el mismo valor a dos elementos del dominio, entonces esos dos elementos en realidad tenían que ser el mismo. También podríamos haber dicho que si $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$, pero la definición así como la dimos suele ser más práctica en algunas situaciones.
Lo que observamos hace un rato es que si $f$ cumple la ecuación del Problema 3 *y además* es inyectiva, entonces $f(t) = f(0) - t$ para todo $t \geq 0$. Entonces, si consiguiéramos demostrar que *cualquier* función que cumpla la ecuación del Problema 3 *debe* ser inyectiva, combinando esto con lo anterior obtendríamos una solución alternativa para este problema.
Entonces, ¿cómo hacemos para demostrar que $f$ debe ser inyectiva? Simplemente vamos a aplicar la definición: suponemos que tenemos dos números reales $a$ y $b$ tales que $f(a) = f(b)$, y trataremos de concluir, haciendo reemplazos convenientes, que $a = b$.

En este caso, si reemplazamos $y = a$ tenemos

$$f\big(x^2 + f(a)\big) = a - x^2,$$

mientras que si reemplazamos $y = b$ tenemos

$$f\big(x^2 + f(b)\big) = b - x^2.$$

Ahora bien, en ambas ecuaciones lo que está del lado izquierdo es lo mismo, porque justamente estamos suponiendo que $f(a) = f(b)$. Entonces, los lados derechos también deben ser iguales. Es decir que $a - x^2 = b - x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es claro que esto implica que $a = b$, y por lo tanto, $f$ es inyectiva, como queríamos ver. ■

**Problema 4** (EGMO 2012)

Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

para todos los números reales $x, y$.

*Solución.* Reemplazando $y = 0$ obtenemos que $f(f(x)) = 4x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De esto se deduce que la función $f$ es inyectiva, pues si $f(a)$ y $f(b)$ son iguales, también son iguales $f(f(a))$ y $f(f(b))$, es decir que $4a = 4b$, de donde $a = b$.
Si en lo anterior ponemos $x = 0$ vemos que $f(f(0)) = 0$. Ahora aplicamos $f$ de ambos lados y obtenemos que $f(f(f(0))) = f(0)$, pero lo de la izquierda también es igual a $4f(0)$ (porque dijimos que aplicarle $f$ dos veces a un número nos daba el mismo número multiplicado por 4). Entonces $4f(0) = f(0)$, de donde se despeja que $f(0) = 0$.
A continuación reemplazamos $x = 0$ en la ecuación original, usando que ya sabemos que $f(0) = 0$, y obtenemos que $f(yf(y)) = 2yf(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$. En particular, si tomamos $y = 1$, esto nos dice que $f(f(1)) = 2f(1)$. Pero el lado izquierdo sabemos que es igual a $4 \cdot 1 = 4$. De todo esto deducimos que $f(1) = 2$ y $f(2) = 4$.
Ahora, como $f(x + y)$ aparece a ambos lados de la ecuación, y conocemos el valor de $f(1)$, reemplazamos $y = 1 - x$ (para que $x + y$ quede igual a 1). Lo que nos queda es

$$f((1-x) \cdot 2 + f(x)) = 4x + 2(1-x) \cdot 2,$$

es decir,

$$f(2 - 2x + f(x)) = 4.$$

Como sabíamos que $f(2) = 4$, y $f$ es inyectiva, necesariamente debe ser $2 - 2x + f(x) = 2$, es decir que $f(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Verifiquemos que esta función cumple la condición del enunciado.
El lado izquierdo queda $2(y \cdot 2(x + y) + 2x) = 4xy + 4y^2 + 4x$.
El lado derecho queda $4x + 2y \cdot 2(x + y) = 4x + 4xy + 4y^2$.
Como las expresiones en ambos lados son iguales, vemos que la función $f(x) = 2x$ efectivamente satisface la condición del enunciado, y ya probamos que no hay otras funciones que la cumplan. Esto completa la solución. ■

Así como la inyectividad, la sobreyectividad es otra propiedad importante de las funciones que sirve para resolver problemas. Recordemos la definición, que ya habíamos mencionado al principio del apunte.

**Definición 3.2**

Una función $f : X \to Y$ se dice **sobreyectiva** si todos los elementos de $Y$ están en la imagen de $f$, es decir, si para todo $y \in Y$ existe algún $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

La sobreyectividad es útil porque nos permite hacer reemplazos que no serían posibles sin tener esa información. Veámoslo con un ejemplo.

**Problema 5** (Selectivo Ibero 2015)

Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x)$$

para todos los números reales $x, y$.

La observación clave que nos permitirá resolver el problema es la siguiente. Supongamos que existiera un número real $a$ tal que $f(a) = -1$. (Quiero dejar en claro que en principio esto no tiene por qué pasar, sólo estamos teniendo un poco de fe.) Entonces, el reemplazo $y = a$ sería muy bueno, porque $xf(y) + x$ sería simplemente 0, y nos queda que $f(0) = ax + f(x)$, es decir que $f(x) = f(0) - ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con lo cual ya casi resolvimos el problema (sólo faltaría determinar los posibles valores de $f(0)$ y $a$).

Habiendo visto esto, nuestro nuevo objetivo es probar que existe tal número $a$, y para eso, probaremos directamente que $f$ es sobreyectiva.

Muchas de las veces que uno tiene que probar que toda solución de una ecuación funcional es sobreyectiva se tiene la siguiente situación:

- En uno de los lados de la ecuación se tiene un solo término, que es la $f$ evaluada en una cierta expresión (qué tan complicada sea la expresión en cuestión no nos interesa).
- Del otro lado de la ecuación se tiene una expresión que, eligiendo adecuadamente los valores de las variables, se puede lograr que el resultado sea cualquier número real que uno desee. Para hacer esto van a ser esenciales los términos que estén *afuera* de la $f$, pues son los que podemos manejar con total libertad.

En nuestro ejemplo, del lado izquierdo tenemos la $f$ evaluada en una cierta expresión, y del lado derecho tenemos una suma de dos términos: $xy$ y $f(x)$. El segundo término no lo podemos manejar con libertad, ya que sólo puede tomar valores que estén en la imagen de $f$, y todavía no sabemos si esta imagen será todo $\mathbb{R}$ o no. Por este motivo, el término que nos tiene que ayudar para la sobreyectividad es el otro, que como habíamos dicho es el que está «afuera» de la $f$.

Reemplazamos $x = 1$. Entonces el lado derecho es $y + f(1)$, y es claro que al variar el valor de $y$ esta expresión puede tomar cualquier valor que se desee. Concretamente, si $c$ es un número real cualquiera, podemos reemplazar $y = c - f(1)$, y así el lado derecho de la ecuación queda igual a $c$. Pero entonces, lo que probamos es que para esas elecciones particulares de $x$ e $y$ se tiene $f(xf(y) + x) = c$, con lo cual el número $c$ está en la imagen de $f$. Como esto se puede hacer para cualquier $c \in \mathbb{R}$, resulta que la función es sobreyectiva, como queríamos ver.

Como $f$ es sobreyectiva, en particular existe $a$ tal que $f(a) = -1$, y por lo que vimos al principio sabemos que $f(x) = f(0) - ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para completar la solución tenemos que determinar los posibles valores de $f(0)$ y $a$.

Reemplazamos la expresión que obtuvimos para $f$ en la ecuación original. El lado izquierdo queda

$$f(0) - a(x(f(0) - ay) + x) = f(0) - axf(0) + a^2xy - ax.$$

Por otra parte, el lado derecho es

$$xy + f(0) - ax.$$

Igualando las dos expresiones y cancelando los términos repetidos obtenemos que

$$-axf(0) + a^2xy = xy \tag{$\bigstar$}$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Como si fuera una ecuación funcional, vamos a reemplazar $x$ e $y$ por valores convenientes en ($\bigstar$) para obtener información.
Si reemplazamos $y = 0$ nos queda $-axf(0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con lo cual o bien $a$ o bien $f(0)$ debe ser igual a 0 (si no, la igualdad anterior no vale para $x \neq 0$). Pero si fuera $a = 0$, entonces ($\bigstar$) nos diría que $0 = xy$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$, lo cual es falso. Entonces $a \neq 0$, y por lo tanto es $f(0) = 0$. Ahora ($\bigstar$) se traduce en que $a^2xy = xy$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. En particular, tomando $x = y = 1$ se obtiene $a^2 = 1$, de donde $a$ sólo puede ser 1 o $-1$, y en consecuencia $f$ tiene que ser alguna de las funciones $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ o $f(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como en ambos casos se cumple ($\bigstar$), ambas son soluciones. ■

Terminamos esta sección con una definición que combina las dos anteriores.

**Definición 3.3**
Una función $f : X \to Y$ se dice **biyectiva** si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva. Equivalentemente, si para cada $y \in Y$ existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

## 4. Cómo (no) perder puntos

La manera más fácil de perder puntos en una ecuación funcional es no verificar que las funciones obtenidas sean efectivamente soluciones de la ecuación. En la IMO es habitual encontrarse con gente que recibe 6 puntos (de un total de 7) por omitir este paso. Muchas veces la verificación es absolutamente trivial, y es bastante frustrante perder un punto «sólo por no escribir un renglón». En este apunte ya insistimos con que hay que verificar las soluciones y de hecho mostramos por qué es necesario hacerlo. Con todo, vamos a repetirlo por última vez:
**No olviden verificar que las funciones obtenidas efectivamente sean soluciones de la ecuación dada.**
Ahora bien, hay otra situación bastante más delicada en la cual es común que los participantes pierdan puntos, con la cual no nos topamos en los problemas que vimos hasta ahora.

**Problema 6** (Selectivo Ibero 1998)
Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(f(x) + y) = f\left(x^2 - y\right) + 4f(x)y$$

para todos los números reales $x, y$.

Reemplazando $x = y = 0$ obtenemos $f(f(0)) = f(0)$.

A continuación reemplazamos $x = 0$, $y = -f(0)$. Del lado izquierdo nos queda $f(0)$, y del lado derecho $f(f(0)) - 4f(0)^2$, que por lo que obtuvimos antes es lo mismo que $f(0) - 4f(0)^2$. Igualando estas dos expresiones obtenemos que $4f(0)^2 = 0$, lo cual ocurre si y sólo si $f(0) = 0$.
Ahora para aprovechar que conocemos el valor de $f(0)$ hacemos dos reemplazos que hacen que la $f$ quede evaluada en ese valor.
Reemplazando $y = x^2$ obtenemos

$$f\big(f(x) + x^2\big) = 4f(x)x^2, \tag{1}$$

pues sabemos que $f(0) = 0$.
Reemplazando $y = -f(x)$ obtenemos

$$0 = f\big(x^2 + f(x)\big) - 4f(x)^2,$$

o equivalentemente

$$f\big(x^2 + f(x)\big) = 4f(x)^2. \tag{2}$$

Como en (1) y (2) lo que hay del lado izquierdo es lo mismo, podemos igualar los lados derechos, y luego de dividir por 4 obtenemos que

$$f(x)x^2 = f(x)^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Juntamos todo del lado izquierdo y factorizamos, obteniendo

$$f(x)\left[x^2 - f(x)\right] = 0, \tag{3}$$

de donde $f(x) = 0$ o $f(x) = x^2$.
Acá viene el momento de la verdad. ¿Es correcto decir que las funciones $f(x) = 0$ y $f(x) = x^2$ son las dos únicas posibles soluciones de la ecuación? La respuesta es no (o al menos, no *todavía*). Miremos con cuidado lo que hicimos. Nosotros sabemos que para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple la ecuación (3). Esto significa que, **para cada** $x \in \mathbb{R}$, o bien $f(x) = 0$ o bien $f(x) = x^2$. Podría pasar perfectamente entonces que para algunos valores de $x$ se cumpla $f(x) = 0$ y para los demás valores se cumpla $f(x) = x^2$.
Lo que vamos a hacer entonces es demostrar que estas funciones *no se pueden mezclar*, es decir, que o bien $f(x)$ es siempre 0, o bien es siempre $x^2$. Algunas posibles maneras de hacer esto serían:

- Suponer que hay dos números $a, b$ distintos de 0 tales que $f(a) = 0$ y $f(b) = b^2$, y llegar a un absurdo.
- Suponer que existe $a \neq 0$ tal que $f(a) = 0$, y concluir que $f(x) = 0$ para todo $x$.
- Suponer que existe $b \neq 0$ tal que $f(b) = b^2$, y concluir que $f(x) = x^2$ para todo $x$.

Vamos a usar la primera opción. Supongamos que existen $a$ y $b$ distintos de 0 tales que $f(a) = 0$ y $f(b) = b^2$. Reemplazamos $x = a$, $y = b$ en la ecuación original y obtenemos $b^2 = f(a^2 - b)$. Como $b^2 \neq 0$, necesariamente es

$$f(a^2 - b) = (a^2 - b)^2 = a^4 - 2a^2b + b^2.$$

Igualando esto con $b^2$ obtenemos que

$$a^4 - 2a^2b = a^2(a^2 - 2b) = 0,$$

y como también estamos suponiendo que $a \neq 0$, concluimos que $a^2 = 2b$.
Esta conclusión nos lleva a un absurdo, de la siguiente manera. Supongamos que existiera otro número $c$, distinto de 0 y de $b$, tal que $f(c) = c^2$. Repitiendo el razonamiento anterior llegaríamos a que $a^2 = 2c$. Pero $a^2$ no puede ser igual a $2b$ y a $2c$ a la vez, pues estamos suponiendo que $b \neq c$. Entonces, $b$ es el **único** número distinto de 0 para el cual se cumple que $f(x) = x^2$. Ahora tomemos cualquier número real $d$ que no sea ni 0, ni $a$, ni $-a$, ni $b$. Por lo anterior sabemos que $f(d) = 0$, y repitiendo el razonamiento del párrafo anterior obtenemos que $d^2 = 2b$. Pero entonces $a^2 = d^2$, y como elegimos $d$ distinto de $a$ y $-a$, esto es un absurdo.
Así, queda demostrado que las funciones no se pueden mezclar, es decir que o bien $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o bien $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Resta solamente verificar que ambas funciones cumplen la ecuación del enunciado.
Para $f(x) = 0$ es trivial porque queda $0 = 0 + 0$. Si $f(x) = x^2$, entonces el lado izquierdo es

$$(x^2 + y)^2 = x^4 + 2x^2y + y^2,$$

mientras que el lado derecho es

$$(x^2 - y)^2 + 4x^2y = x^4 - 2x^2y + y^2 + 4x^2y = x^4 + 2x^2y + y^2.$$

Como ambas expresiones son iguales, la función satisface la ecuación planteada. No hay nada más que hacer. ■

*Observación.* Una manera más fácil de llegar al absurdo suponiendo que las funciones se mezclan es la siguiente. Reemplazando $x = 0$ en la ecuación original se obtiene que $f(y) = f(-y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$ (estamos usando que ya sabemos que $f(0) = 0$). Entonces, lo que dijimos para el número $b$ que cumplía $f(b) = b^2$ también vale para el número $-b$, pues

$$f(-b) = f(b) = b^2 = (-b)^2.$$

Así llegamos a que $2b = a^2 = -2b$, que es absurdo pues $b \neq 0$.

## 5. Un ejemplo con dominio $\mathbb{R}^+$

Antes de terminar y pasar a la lista de problemas para practicar, mostramos un ejemplo en el que el dominio de la función no son todos los números reales.

**Problema 7** (Selectivo IMO 2008)
Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que satisfacen

$$x^2\left(f(x) + f(y)\right) = (x + y)f(f(x)y)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Lo más molesto que tienen estos problemas es que no se nos permite reemplazar las variables $x$ e $y$ por 0, cosa que tanto nos ayudó en el pasado. De todos modos, las técnicas que fuimos viendo a lo largo del apunte siguen siendo aplicables.

*Solución.* Reemplazando $x = y = 1$ se obtiene $2f(1) = 2f(f(1))$, de donde $f(1) = f(f(1))$.
Ahora, para aprovechar esta información, reemplazamos $x = f(1)$, $y = 1$. Este reemplazo hace que en los lugares donde aparece $f(x)$ tengamos lo mismo que si hubiésemos reemplazado $x = 1$, pero en los lugares donde la $x$ aparece «suelta» tendremos algo diferente.

$$f(1)^2 \cdot 2f(1) = (f(1) + 1)\, f(1)$$

Dividimos ambos miembros por $f(1)$, cosa que se puede hacer porque sabemos que no es 0 (¡algo bueno tenía que tener trabajar en los reales positivos!) y obtenemos

$$2f(1)^2 = f(1) + 1,$$

o equivalentemente

$$2f(1)^2 - f(1) - 1 = 0.$$

Esta es una ecuación cuadrática en $f(1)$, cuyas soluciones son 1 y $-\frac{1}{2}$, pero la segunda la descartamos porque sabemos que $f(1)$ es positivo. Por lo tanto, $f(1) = 1$.
Finalmente, reemplazando $x = 1$ en la ecuación original obtenemos

$$1 + f(y) = (1 + y)f(y)$$

para todo $y \in \mathbb{R}$, de donde se despeja $yf(y) = 1$, es decir, $f(y) = \frac{1}{y}$. Verifiquemos que esta función cumple la ecuación del enunciado: el lado izquierdo es

$$x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = x + \frac{x^2}{y},$$

mientras que el lado derecho es

$$(x + y)\frac{1}{\frac{1}{x} \cdot y} = (x + y)\frac{x}{y} = \frac{x^2}{y} + x.$$

Por lo tanto, la única función que cumple la condición del enunciado es $f(y) = \frac{1}{y}$ para todo $y \in \mathbb{R}$. La solución está completa. ■

## 6. Problemas para practicar

A continuación tienen una lista de problemas de este tema para practicar. Prefiero no indicarles de qué competencia es cada problema, por dos razones: para reducir el factor psicológico («uy, este es de IMO, no me va a salir»), y para que no les resulte tan fácil buscar las soluciones en Internet, así le dedican un buen tiempo a pensar cada uno.
Los problemas están *aproximadamente* en orden creciente de dificultad.

**(1)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x)f(y) + 2xf(y) + y^2 = f(y)f(x + 1)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

**(2)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que

$$(f(x) + f(y))^2 - \sqrt{xy} = x + y + f(xy)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$.

**(3)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f\,(x - f(y)) = 1 - x - y$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

**(4)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

**(5)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x + y) \cdot f(x - y)) = x^2 - yf(y)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

En los siguientes dos problemas, $\max\{a, b\}$ y $\min\{a, b\}$ denotan el máximo y el mínimo, respectivamente, entre los números $a$ y $b$.
Por ejemplo, $\max\{3, 7\} = 7$, $\min\{3, 7\} = 3$, $\max\{5, 5\} = \min\{5, 5\} = 5$.

**(6)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x + y) = \max\{f(x), y\} + \min\{f(y), x\}$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

**(7)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xy) = \max\{f(x + y), f(x)f(y)\}$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

**(8)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. (Aquí $\lfloor z \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que $z$.)

**(9)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

**(10)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

**(11)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x) - y) \cdot f(x + f(y)) = x^2 - y^2$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

El siguiente problema tiene la particularidad de que no se puede asignar cualquier valor a las variables, sino que tienen que cumplir una restricción adicional.

**(12)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que

$$\frac{f(w)^2 + f(x)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

para todos los números reales positivos $w, x, y, z$ que satisfacen $wx = yz$.

**(13)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x + xy + f(y)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y) + \frac{1}{2}\right)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

**(14)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x + y)f(f(x) - y) = xf(x) - yf(y)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

**(15)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = f(x)^2 + y$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

**(16)** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.