Desigualdades “obvias” (¿o no tanto?)

Matías Saucedo

0. Introducción

Aunque no lo hayamos leído en ningún lado, ni nos hayamos tomado la molestia de pensar una demostración, en general todos “sabemos” que el producto de dos enteros positivos suele ser mayor que su suma. Una desigualdad como esta, tan básica e intuitiva, puede ser fuente de muchas ideas interesantes si nos detenemos a pensar en ella un momento.

En estas páginas vamos a recordar varias de estas “obviedades”, que no pocas veces han sido la idea clave en la solución de un problema de olimpíadas, intentando aprovechar al máximo la información que ellas nos dan. Al finalizar cada sección, como es costumbre, encontrarán una lista de problemas para aplicar lo que aprendieron.

1. Suma versus producto

Podríamos estar tentados a pensar que si a, b son enteros positivos, entonces siempre vale que $ab \geq a + b$. Y muy equivocados no estaríamos, pero tampoco tendríamos toda la razón: basta pensar unos segundos para encontrar un contraejemplo obvio, que es que alguno de los números sea 1 (por ejemplo, si b es 1, en el miembro izquierdo queda a mientras que en el miembro derecho queda $a + 1$). De todos modos uno se termina convenciendo de que, por lo menos, si a y b no son muy chicos, la desigualdad vale.

El primer resultado básico que tenemos es el siguiente:

Teorema 1. Si a, b son enteros positivos mayores o iguales que 2, entonces $ab \geq a + b$.

Demostración A. Restamos b en ambos lados de la desigualdad y nos queda probar que $(a - 1)b \geq a$. El miembro izquierdo es mayor o igual que $2(a - 1)$, de modo que alcanza con probar que $2(a - 1) \geq a$. Esta desigualdad es equivalente a $a \geq 2$, que sabemos que se cumple por el enunciado. Entonces también se cumple la desigualdad original.

#

Aprovechando la simetría de la desigualdad, es decir que permutar a con b deja todo igual, podemos hacer algo todavía más corto:

Demostración B. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \leq b$. Entonces el segundo miembro es menor o igual que $2b$, mientras que el primero es mayor o igual que $2b$.

#

Ahora bien, si uno empieza a experimentar con más números se va dando cuenta que a medida que a y b se hacen más grandes, la desigualdad es cada vez más “alevosa”, es decir, el producto le gana por mucho a la suma. Nos gustaría entonces tener alguna desigualdad del tipo $ab - (a + b) \geq k$, donde el k va a ser más grande mientras más grandes sepamos que son a y b. La siguiente demostración alternativa del teorema anterior nos da una idea de qué k podemos elegir:

Demostración C. La desigualdad es equivalente a $ab - (a + b) \geq 0$. Sumando 1 en ambos miembros obtenemos $ab - a - b + 1 \geq 1$. El primer miembro se factoriza como $(a - 1)(b - 1)$, y ambos factores son mayores o iguales que 1 pues $a, b \geq 2$.

#

Al reescribir la desigualdad de esta manera ya queda claro que $ab - (a + b)$ es mayor mientras mayores son a y b. Y no solamente eso, sino que podemos conocer con exactitud cuál es el valor mínimo que puede tomar esa expresión. Combinando estas ideas obtenemos el siguiente enunciado general:

Teorema 2. Sean a, b, m, n enteros positivos de los que se sabe que $a \geq m$ y $b \geq n$. Entonces $ab - (a + b) \geq (m - 1)(n - 1) - 1 = mn - (m + n)$. En otras palabras, la diferencia (producto – suma) es mínima cuando a y b son lo más chicos posible.

Una manera de demostrar esto sería “copiar” la demostración B que vimos antes, es decir, sumamos 1 en ambos miembros y obtenemos $(a - 1)(b - 1) \geq (m - 1)(n - 1)$, que sabemos que se cumple pues $a \geq m$ y $b \geq n$.

Otra manera de decir lo mismo sería la siguiente. Supongamos que tenemos enteros positivos a y b tales que $ab - (a + b) = P$. Lo que nos gustaría demostrar es que si aumentamos alguno de los números a y b, entonces P también aumenta, o a lo sumo se mantiene constante, pero nunca disminuye. De aquí se deduce que el valor mínimo de P se alcanza cuando a y b son mínimos.

Pero esto es muy fácil de ver. Supongamos por ejemplo que reemplazamos b por $b + 1$. La suma de los números aumentó en 1, mientras que el producto aumentó en a. Como a es un entero positivo, el producto aumentó al menos tanto como aumentó la suma, y por lo tanto P no disminuye, como queríamos ver.

Todas estas propiedades se pueden enunciar en general para un conjunto de n enteros positivos. Por ejemplo:

Teorema 3. Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son enteros positivos mayores o iguales que 2, entonces $a_1a_2a_3\ldots a_n \geq a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

Demostración. Basta aplicar repetidas veces el teorema para $n = 2$. Como a_1 y $a_2\ldots a_n$ son mayores o iguales que 2, tenemos $a_1a_2\ldots a_n \geq a_1 + a_2\ldots a_n$. Ahora aplicamos el teorema para a_2 y $a_3\ldots a_n$, y así siguiendo, obteniendo la cadena de desigualdades

$$a_1a_2a_3...a_n \geq a_1 + a_2a_3...a_n \geq a_1 + a_2 + a_3...a_n \geq ... \geq a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n\ .$$

#

Se demuestra exactamente de la misma manera que antes que si aumentamos alguno de los n números, la diferencia (producto – suma) aumenta o se mantiene constante.

Veamos ahora un ejemplo de problema de olimpíadas relacionado con este tema.

(P1N2 Mayo 2004) Julián escribe cinco números enteros positivos, no necesariamente distintos, tales que su producto sea igual a su suma. ¿Cuáles pueden ser los números que escribe Julián?

Solución.

Vamos a usar el lema que ya demostramos de que al aumentar alguno de los cinco números, la diferencia (producto – suma) aumenta o se mantiene constante. (Ojo, para que la solución esté completa habría que demostrarlo explícitamente en la prueba, yo no lo hago de vuelta porque ya está en la página anterior.)

La primera observación es que entre los números de Julián tiene que haber unos, porque si fueran todos mayores o iguales que 2 entonces la diferencia entre el producto y la suma sería mayor o igual que $2·2·2·2·2 – (2 + 2 + 2 + 2 + 2) = 22$. Más aún, si 4 de los números fueran mayores o iguales que 2, la diferencia entre el producto y la suma sería mayor o igual que $1·2·2·2·2 – (1 + 2 + 2 + 2 + 2) = 7$. Entonces hay a lo sumo 3 números que son mayores o iguales que 2, y por lo tanto al menos dos de los números de Julián son unos.

Si los números de Julián son $\{1, 1, 2, 2, 2\}$, se cumple la condición, pues la suma y el producto son iguales a 8. Esta es la única solución con exactamente dos unos, ya que en cualquier otro caso la diferencia entre el producto y la suma es mayor o igual que $1·1·2·2·3 – (1 + 1 + 2 + 2 + 3) = 3$.

Ahora buscamos las soluciones con tres o más unos, es decir, buscamos los enteros positivos a y b tales que $a + b + 3 = ab$, o lo que es lo mismo, $ab – a – b = 3$. Sumamos 1 en ambos miembros de la ecuación y obtenemos $(a – 1)(b – 1) = 4$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \leq b$. Entonces las únicas posibilidades son que los factores valgan 1 y 4 o 2 y 2 respectivamente. Obtenemos así las soluciones {1, 1, 1, 2, 5} y {1, 1, 1, 3, 3}.

Los números que escribe Julián pueden ser {1, 1, 2, 2, 2}, {1, 1, 1, 2, 5} o {1, 1, 1, 3, 3}.

#

2. Producto versus potencia

Ya que estamos, analicemos esta otra situación, que es bastante parecida a la del capítulo anterior. De nuevo, uno a lo largo de su vida aprendió que así como la multiplicación "le gana" a la suma, la potencia le gana a la multiplicación, es decir, la desigualdad $a^b \geq ab$ vale siempre o casi siempre. Los contraejemplos triviales (o sea los que tienen $a = 1$, $b > 1$) afortunadamente son los únicos.

Para demostrarlo vamos a usar el siguiente lema, que es una desigualdad muy sencilla que suele aparecer como ejercicio cuando estamos aprendiendo inducción.

Lema. Para todo entero positivo n se cumple que $2^{n-1} \geq n$, valiendo la igualdad para $n = 1$ y $n = 2$.

Demostración. Es inmediato verificar que para $n = 1$ y $n = 2$ se cumple la igualdad, mientras que para $n = 3$ la desigualdad es estricta pues $4 > 3$. Supongamos que para algún n se cumple $2^{n-1} > n$. Entonces, $2^{(n+1)-1} = 2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1} > 2n \geq n + 1$, como queríamos.

#

Ahora sí podemos darle status de teorema a esta desigualdad que todos conocemos o creíamos conocer:

Teorema 4. Si a, b son enteros positivos con $a \geq 2$, entonces $a^b \geq ab$.

Demostración. La desigualdad equivale a $a^{b-1} \geq b$. Como $a \geq 2$, por el Lema tenemos $a^{b-1} \geq 2^{b-1} \geq b$, como queríamos demostrar.

#

3. Ejercicios (primera parte)

1) Probar la siguiente "generalización" del teorema 3: si a_1, a_2, a_3, …, a_n son enteros positivos mayores o iguales que 2, entonces $a_1a_2a_3\ldots a_n \geq a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + 2^n - 2n$.

2) Se tienen 2011 enteros positivos entre los cuales al menos 11 son mayores que 1. Probar que el producto de los 2011 enteros es mayor que su suma.

3) Fede elige un entero positivo k y se lo dice a Matías. A continuación Matías debe elegir tres números primos distintos p, q, r. Si la diferencia entre el producto de los tres primos y la suma de los tres primos es menor o igual que k, gana Matías, en caso contrario gana Fede. Hallar todos los valores de k que le garantizan a Fede la victoria.

4) Hallar todos los pares de enteros positivos x, y tales que la diferencia entre su producto y su suma es igual a 2011.

5) ¿Cuándo vale la igualdad en el teorema 4? (Es decir, hallar todos los enteros positivos a, b tales que $a^b = ab$).

5) A cada entero positivo n se le asigna un número $f(n)$ que se calcula de la siguiente manera. Si la descomposición en factores primos de n es $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, entonces $f(n) = p_1^{\alpha_1} + \ldots + p_s^{\alpha_s} + 1$. Hallar todos los n para los cuales $f(n) \geq n$.

6) **(P2 Cono Sur 2007)** Se tienen 100 enteros positivos tales que su suma es igual a su producto. Determinar la mínima cantidad de números 1 que hay entre los 100 enteros.

7) **(P6 Sel Cono Sur 2007)** Un programa de computadora genera una sucesión de números naturales con la siguiente regla: el primer número es un entero mayor que 1 y lo elige Matías; a partir de entonces, el programa factoriza en primos el último número generado y el nuevo número generado es 1 más la suma de cada primo de la factorización multiplicado por el exponente que le corresponde. Por ejemplo, si el número de Matías es 80, la computadora halla $80 = 2^4 \cdot 5^1$ y genera $14 = 1 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 1$. El siguiente número generado es 10, pues $14 = 2^1 \cdot 7^1$ y $10 = 1 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1$. Demostrar que cualquiera sea el número inicial de Matías (mayor que 1), en algún momento la sucesión de los números generados se hace periódica (tiene un ciclo de valores que se repiten indefinidamente), y hallar los posibles ciclos de acuerdo a la elección inicial de Matías.

4. Suma dado producto, o producto dada suma

Siguiendo con las desigualdades conocidas. Sean a y b enteros positivos cuya suma es $2n$. ¿Cuál es el máximo valor posible del producto ab? La respuesta es n^2, y se alcanza cuando los números son iguales. Esto es solamente un caso particular de la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, que vale para números positivos en general (no necesariamente enteros):

Teorema 5. Para todos x, y reales positivos vale que $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, con igualdad si y sólo si $x = y$. Es decir, fija la suma, el producto se maximiza cuando los números son iguales.

Demostración. La desigualdad es equivalente a $x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$. El primer miembro no es otra cosa que $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2$, que por ser un cuadrado es no negativo, y es 0 si y sólo si $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, lo cual implica $x = y$, tal como queríamos demostrar.

#

Ahora supongamos que los enteros positivos a y b suman $2n + 1$ y nuevamente queremos hallar el máximo valor posible del producto ab. Esta vez el caso $a = b$ no es una posibilidad, pero lo que va a seguir valiendo es que el producto se maximiza cuando a y b están lo más cerca posible uno de otro. Así, en nuestro ejemplo, el máximo valor posible del producto ab se alcanzará cuando los números difieren en 1, es decir va a ser $n(n + 1)$. Vamos a escribir con más precisión esta propiedad, que también vale para números positivos en general y de alguna manera generaliza al teorema anterior.

Teorema 6. Sean $x \leq y$ reales positivos con una cierta suma fija S. Entonces, mientras mayor sea la diferencia $y - x$, menor será el producto xy.

Demostración. Sea $t = y - x$. Como $y + x = S$, tenemos que $2y = (y + x) + (y - x) = S + t$. Entonces $y = \frac{S+t}{2}$ y despejando obtenemos $x = \frac{S-t}{2}$. El producto de estos dos números es $\frac{(S+t)(S-t)}{4} = \frac{S^2 - t^2}{4}$, que es claro que se hace cada vez más chico al aumentar t.

#

Estos temas pueden llegar a aparecer en problemas que a primera vista no parecen tener mucho que ver con desigualdades. Por ejemplo:

Problema.

Se tiene un tablero cuadrado de 100×100 dividido en casillas de 1×1. Iván pintó de verde 2011 casillas del tablero. Llamamos *línea* a cada fila y cada columna del tablero. Una línea es *buena* si tiene al menos una casilla pintada. Determinar la mínima cantidad posible de líneas buenas.

Solución.

Sea m la cantidad de filas buenas y n la cantidad de columnas buenas. Cada fila buena tiene a lo sumo n casillas que están coloreadas (las casillas que corresponden a columnas buenas). Luego la cantidad de casillas coloreadas, que es 2011, es menor o igual que mn.

Así, sabemos que $mn \geq 2011$ y queremos hallar el menor valor posible de $m + n$.

Si $m + n \leq 89$, tendríamos que $mn \leq 44 \cdot 45 = 1980 < 2011$. De modo que debe ser $m + n \geq 90$. Este es efectivamente el mínimo valor posible, y se logra por ejemplo marcando un cuadrado de 45×45 contenido en el tablero y pintando todas sus casillas salvo 14 de la última fila. Como $45^2 - 14 = 2025 - 14 = 2011$ y todas las filas y columnas de este subtablero de 45×45 tienen al menos una casilla pintada, se cumplen todas las condiciones.

#

5. Ejercicios (segunda parte)

1) **(P6N1 Nacional OMA 2010)** Algunas casillas de un tablero de 99×99 se colorean con uno de 5 colores de modo que no haya casillas de distinto color en una misma fila o columna. La cantidad de casillas de cada color es la misma. ¿Cuál es el mayor número posible de casillas coloreadas?

2) En cada casilla de un tablero de 19×19 se escribe un número entero del 1 al 19, de manera que cada número aparezca exactamente 19 veces. Demostrar que hay una fila o una columna del tablero que contiene al menos 5 números distintos. Mostrar con un ejemplo que no es necesariamente cierto que hay una fila o una columna del tablero que contiene al menos 6 números distintos.