(4.27) Calcule la convolución de c/u de los sig. pares de señales $x(\tau)$ y $h(\tau)$, calculando primero $X(w)$ y $H(w)$, aplicando prop. de convolución y por último obteniendo la transformada inversa.

Datos: $x(\tau)$ y $h(\tau)$

Pasos: 1. Calcular $H(w)$ y $X(w)$

2. Aplicar prop. convolución $Y(w) = X(w) \cdot H(w)$

3. Aplico Antitransformada p/ obtener $Y(\tau)$

(a) i) $x(\tau) = \tau \cdot e^{-2\tau} \cdot u(\tau)$; $h(\tau) = e^{-4\tau} \cdot u(\tau)$

$a=2$; $a=4$

1.) Calculo $X(w)$ y $H(w)$ utilizando Fórmulas

$F_{14}(\tau \cdot e^{-a\tau} \cdot u(\tau),\ Re\{a\}>0) \Rightarrow \dfrac{1}{(a+jw)^2}$ $\quad F_{13}(e^{-a\tau} \cdot u(\tau)) \Rightarrow \dfrac{1}{a+jw}$

$$X(w) = \frac{1}{(2+jw)^2} \qquad H(w) = \frac{1}{4+jw}$$

2) Calculo $Y(w)$ Aplicando prop. de convolución $X(w) \cdot H(w) = Y(w)$

$$Y(w) = X(w) \cdot H(w) = \frac{1}{(2+jw)^2} \cdot \frac{1}{(4+jw)}$$

2.1) Aplico descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{(2+jw)^2} \cdot \frac{1}{(4+jw)} = \frac{A}{(2+jw)^2} + \frac{B}{(2+jw)} + \frac{C}{(4+jw)}$$

$$1 = \frac{A\,\cancel{(2+jw)^2} \cdot (4+jw)}{\cancel{(2+jw)^2}} + \frac{B\,(2+jw)^{\cancel{2}}(4+jw)}{\cancel{(2+jw)}} + \frac{C\,(2+jw)^2 \cdot \cancel{(4+jw)}}{\cancel{(4+jw)}}$$

$$1 = A\,(4+jw) + B\,(2+jw)(4+jw) + C\,(2+jw)^2$$

con $jw=-2$, cancelo B y C $\Rightarrow 1 = A(4+(-2)) + B.0 + C.0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$

con $jw=-4$, cancelo A y B $\Rightarrow 1 = A.0 + B.0 + C(2+(-4))^2 \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{4}}$

con $jw=0$ $\quad 1 = \frac{1}{2}(4+0) + B(2+0)(4+0) + \frac{1}{4}(2+0)^2 \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{4}}$

Rearmando

$$Y(w) = \frac{1/2}{(2+jw)^2} + \frac{(-1/4)}{(2+jw)} + \frac{1/4}{(4+jw)}$$

$a=2$ $\quad a=2$ $\quad a=4$

3) Calculo $Y(\tau)$ antitransformando F_{13}^{-1} F_{14}^{-1}

$$\boxed{y(\tau) = \frac{1}{2}\,\tau \cdot e^{-2\tau} \cdot u(\tau) - \frac{1}{4}\,e^{-2\tau} \cdot u(\tau) + \frac{1}{4}\,e^{-4\tau} \cdot u(\tau)}$$

(a ii) $\boxed{y(\tau) = \frac{1}{4}\,\tau \cdot e^{-2\tau} \cdot u(\tau) - \frac{1}{4}\,e^{-2\tau} \cdot u(\tau) + \frac{1}{4}\,\tau \cdot e^{-4\tau} \cdot u(\tau) + \frac{1}{4}\,e^{-4\tau} \cdot u(\tau)}$ $\Rightarrow$ para $x(\tau) = \tau \cdot e^{-2\tau} \cdot u(\tau)$, $h(\tau) = \tau \cdot e^{-4\tau} \cdot u(\tau)$

(4.42) La salida $y(t)$ de un sistema LTI causal está relacionada con la entrada $x(t)$ por la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) - x(t)$$

a) Determine la respuesta en frecuencia $\boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}}$ del sistema

1- transformar prop $\frac{d^n(x(t))}{dt^n} \Rightarrow (j\omega)^n \cdot X(\omega)$

$$j\omega \cdot Y(\omega) + 2\,Y(\omega) = X(\omega)$$

2) Armo $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ $\quad (j\omega+2) \cdot Y(\omega) = X(\omega)$

$$(j\omega+2) \cdot \underbrace{\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}}_{H(\omega)} = 1 \Rightarrow \boxed{H(\omega) = \frac{1}{(j\omega+2)}}$$

b) si $x(t) = e^{-t} \cdot u(t)$ $a=1$. determine $Y(\omega)$

1_ transformo la ecuac. diferencial y reemplazo $X(\omega)$ por $F_{13}\; e^{-at} \cdot u(t) = \frac{1}{a+j\omega}$

$$j\omega \cdot Y(\omega) + 2\,Y(\omega) = \underbrace{\frac{1}{(1+j\omega)}}_{X(\omega)}$$

2- Despejo $Y(\omega)$

$$Y(\omega) \cdot (j\omega+2) = \frac{1}{1+j\omega} \Rightarrow \boxed{Y(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)} \cdot \frac{1}{(2+j\omega)}}$$

c) usando técnica de expansión x fracc. parciales determinar $y(t)$

1. Aplico expans x fracc parciales

$$Y(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \cdot \frac{1}{2+j\omega} = \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{2+j\omega}$$

$1 = A(2+j\omega) + B\,(1+j\omega) \rightarrow$ si $j\omega = -1$ $\quad 1 = A(2+(-1)) + B0 \Rightarrow \boxed{A=1}$

si $j\omega = -2$ $\quad 1 = A.0 + B\,(1+(-2)) \Rightarrow \boxed{B=-1}$

$$Y(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{(-1)}{2+j\omega}$$

2. calculo $y(t)$ antitransformando $Y(\omega)$ $\quad F_{13}^{-1}\; \frac{1}{a+j\omega} \Rightarrow e^{-at}\,u(t)$

$$\boxed{y(t) = 1.\,e^{-t}\,u(t) - 1.\,e^{-2t}\,u(t)}$$

d) i $\quad X(\omega) = \frac{1+j\omega}{2+j\omega}$

$$\boxed{\begin{array}{l} Y(\omega) = \dfrac{1+j\omega}{(2+j\omega)^2} \\ y(t) = (-1).\,t.\,e^{-2t}\,u(t) + e^{-2t}\,u(t) \end{array}}$$

4.43) La entrada y la salida de un sistema LTI causal están relacionadas por la ecuación diferencial.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t).$$

a) Encuentre la rta al impulso de este sistema.

1 - Calculamos $H(w)$ por inspección sabiendo que $H(w) = \frac{Y(w)}{Xw}$.

Por propiedad $\frac{d^n(x(t))}{dt} \Rightarrow (jw)^n \cdot X(w)$

$$(jw)^2 \cdot Y(w) + 6(jw)^1 \cdot Y(w) + 8Y(w) = 2X(w)$$

$$Y(w)\left[jw^2 + 6jw + 8\right] = 2X(w)$$

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{2}{(jw^2+6jw+8)} = \frac{2}{(4+jw)(2+jw)} = \frac{A}{(4+jw)} + \frac{B}{(2+jw)}$$

Expansión x Fracc. parciales

$$2 = A(2+jw) + B(4+jw) \Rightarrow \text{si } jw=-4 \Rightarrow 2 = A(2-4)+B.0 \Rightarrow \boxed{A=-1}$$

$$\text{si } jw=-2 \Rightarrow 2 = A.0+B(4-2) \Rightarrow \boxed{B=1}$$

$$H(w) = \frac{-1}{\underset{a=4}{(4+jw)}} + \frac{1}{\underset{a=2}{(2+jw)}}$$

2 - Antitransformo $H(w)$ para obtener $h(t)$ $\quad F^{-1}_{13}\ \frac{1}{a+jw} \Rightarrow e^{-at}.u(t)$.

$$\boxed{h(t) = (-1).e^{-4t}.u(t) + e^{-2t}.u(t)}$$

b) cuál es la respuesta y t) si $x(t) = t.e^{-2t}.u(t)$

2 opciones $<$ $x(t) * h(t) \Rightarrow y(t)$
$X(w) \cdot H(w) = Y(w) \xrightarrow{F^{-1}} y(t)$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t}.u(t) + \frac{1}{4}.e^{-2t}.u(t) - \frac{1}{2}t.e^{-2t}.u(t) + \frac{t^2}{2}.e^{-2t}.u(t)}$$