Guía de Trabajos Prácticos – Matemática Superior

Tema: *Aproximación de Funciones por el método de Mínimos Cuadrados*

Ejercicio 1

Dada la siguiente tabla, se pide encontrar la función que mejor representa los datos teniendo en cuenta las siguientes funciones de aproximación:

$f_1(x) = c_1x + c_2$ *(aproximación lineal)*

$f_2(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$ *(aproximación parabólica)*

$f_3(x) = c_1e^x + c_2$ *(aproximación exponencial)*

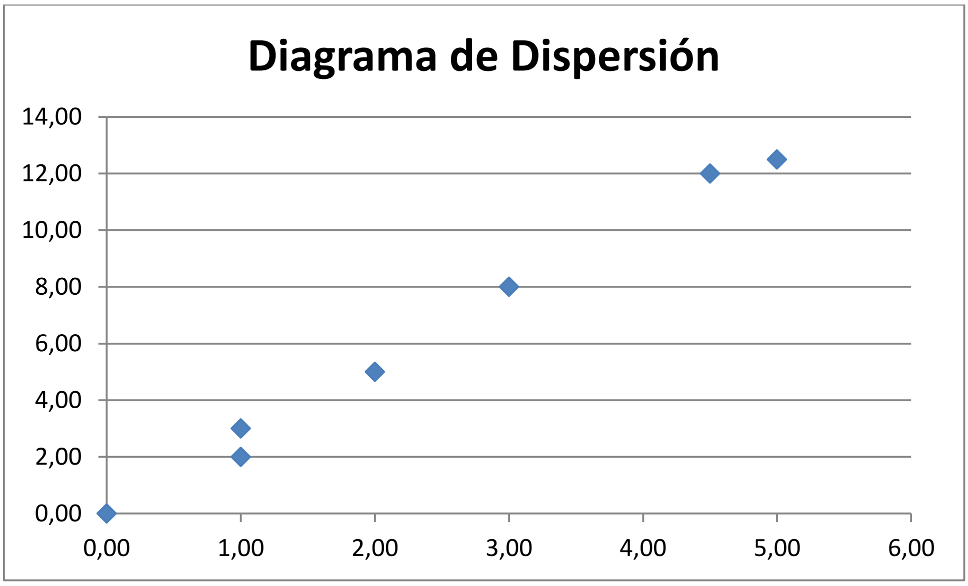
$f_4(x) = c_1.\ln(x+1) + c_2.x$ *(aproximación logarítmica, se elige ln(x+1) debido a que el ln x en x=0 no existe))*

Con la mejor aproximación, se pide calcular f(4) y f(1,5).

x	y
0	0
1	2
1	3
2	5
3	8
4,5	12
5	12,5

Solución

El diagrama de dispersión quedaría de la siguiente forma:



Para f1(x):

El sistema se formaría de la siguiente manera:

$\sum x^2$	$\sum x$	c1	$\sum x.y$
$\sum x$	n	c2	$\sum y$

Armamos la tabla para encontrar los valores del sistema:

x	***y***	***x²***	***x***	***1 (n)***	***y.x***	***y***
0	0	0	0	1	0	0
1	2	1	1	1	2	2
1	3	1	1	1	3	3
2	5	4	2	1	10	5
3	8	9	3	1	24	8
4,5	12	20,25	4,5	1	54	12
5	12,5	25	5	1	62,5	12,5
16,5	42,5	60,25	16,5	7	155,5	42,5

Quedando el sistema de la siguiente forma:

60,25	16,5	c1	155,5
16,5	7	c2	42,5

Cuya solución es:

c_1 = 2,5901

c_2 = - 0,0343

Por lo tanto ***f1(x) = 2,5901x – 0,0343***

Para f2(x):

El sistema se formaría de la siguiente manera:

$\sum x^4$	$\sum x^3$	$\sum x^2$	c1	$\sum x^2.y$
$\sum x^3$	$\sum x^2$	$\sum x$	c2	$\sum x.y$
$\sum x^2$	$\sum x$	n	c3	$\sum y$

Armamos la tabla para encontrar los valores del sistema:

x	*y*	x^4	x^3	x^2	*x*	*1 (n)*	$y.x^2$	*y.x*	*y*
0	0	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
1	2	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*
1	3	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*3*	*3*	*3*
2	5	*16*	*8*	*4*	*2*	*1*	*20*	*10*	*5*
3	8	*81*	*27*	*9*	*3*	*1*	*72*	*24*	*8*
4,5	12	*410,063*	*91,125*	*20,25*	*4,5*	*1*	*243*	*54*	*12*
5	12,5	*625*	*125*	*25*	*5*	*1*	*312,5*	*62,5*	*12,5*
16,5	***42,5***	***1134,063***	***253,125***	***60,25***	***16,5***	***7***	***652,5***	***155,5***	***42,5***

Quedando el sistema de la siguiente forma:

1134,0625	253,125	60,25	c1	652,5
253,125	60,25	16,5	c2	155,5
60,25	16,5	7	c3	42,5

Cuya solución es:

$c_1 = -0.0295$

$c_2 = 2.7437$

$c_3 = -0.1421$

Por lo tanto:

f2(x) = $-0.0295x^2 + 2.7437x - 0.1421$

Para f3(x):

El sistema se formaría de la siguiente manera:

$\sum e^{2x}$	$\sum e^x$	c1	$\sum e^x.y$
$\sum e^x$	n	c2	$\sum y$

Armamos la tabla para encontrar los valores del sistema:

x	*y*	e^{2x}	e^x	*1 (n)*	$e^x.y$	*y*
0	0	1	1	1	0	0
1	2	7,389056	2,718282	1	5,436564	2
1	3	7,389056	2,718282	1	8,154845	3
2	5	54,59815	7,389056	1	36,94528	5
3	8	403,4288	20,08554	1	160,6843	8
4,5	12	8103,084	90,01713	1	1080,206	12
5	12,5	22026,47	148,4132	1	1855,164	12,5
16,5	42,5	30603,35	272,3414	7	3146,591	42,5

Quedando el sistema de la siguiente forma:

30603,35	272,3414	c1	3146,59
272,3414	7	c2	42,5

Cuya solución es:

$c_1 = 0.0746$

$c_2 = 3.168$

Por lo tanto ***f3(x) =0.0746e^x + 3.168***

Para f4(x):

El sistema se formaría de la siguiente manera:

$\sum(\ln(x+1))^2$	$\sum \ln(x+1).x$	c1	$\sum \ln(x+1).y$
$\sum \ln(x+1).x$	$\sum x^2$	c2	$\sum x.y$

Armamos la tabla para encontrar los valores del sistema:

x	**y**	**$\ln^2(x+1)$**	**ln (x+1).x**	**x^2**	**ln (x+1).y**	**x.y**
0	0	0	0	0	0	0
1	2	0,480453	0,6931472	1	1,3862944	2
1	3	0,480453	0,6931472	1	2,0794415	3
2	5	1,206949	2,1972246	4	5,4930614	10
3	8	1,921812	4,1588831	9	11,090355	24
4,5	12	2,906166	7,6713664	20,25	20,456977	54
5	12,5	3,210402	8,9587973	25	22,396993	62,5
16,5	42,5	10,20624	24,372566	60,25	62,903123	155,5

Quedando el sistema de la siguiente forma:

10,2062	24,3726	c1	62,9031
24,3726	60,25	c2	155,5

Cuya solución es:

$c_1 = -0.0013$

$c_2 = 2.5814$

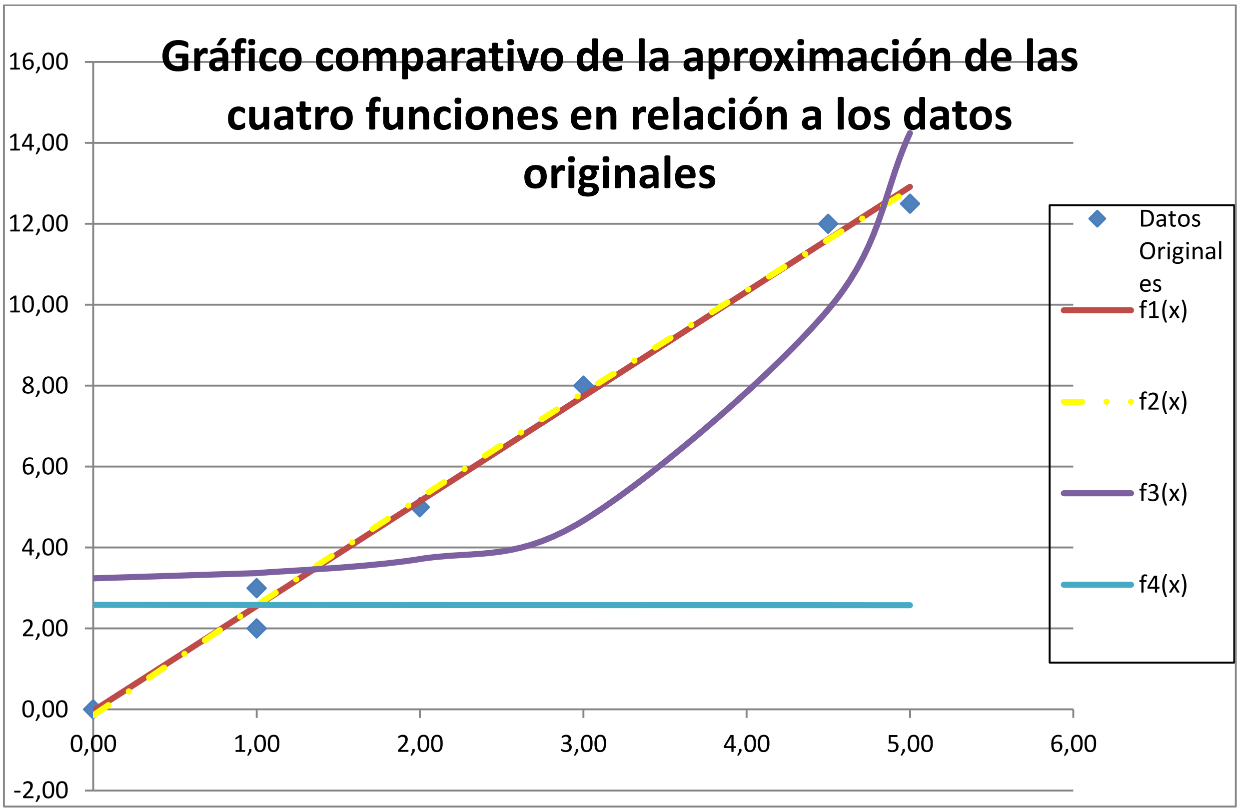
Por lo tanto ***f4(x) = -0.0013ln(x+1) + 2.5814x***

Una vez realizadas las aproximaciones, es muy interesante visualizar cuál de ellas provoca menor error en la aproximación. Para ello se calcula S (desviación) para cada una de ellas:

x	y	f1(x)	S1	f2(x)	S2	f3(x)	S3	f4(x)	S4
0,00	0,00	-0,03	0,00	-0,14	0,02	3,24	10,51	0	0
1,00	2,00	2,56	0,31	2,57	0,33	3,37	1,88	2,58	0,33
1,00	3,00	2,56	0,20	2,57	0,18	3,37	0,14	2,58	0,18
2,00	5,00	5,15	0,02	5,23	0,05	3,72	1,64	5,15	0,02
3,00	8,00	7,74	0,07	7,82	0,03	4,67	11,11	7,74	0,06
4,50	12,00	11,62	0,14	11,61	0,15	9,88	4,48	11,60	0,16
5,00	12,50	12,92	0,17	12,84	0,11	14,24	3,03	12,89	0,15
			0,92		**0,88**		**32,79**		**0,92**

Como se verá, la función cuadrática es la que permite una mejor aproximación a los datos (notar que la función lineal – dado el carácter de los datos – es buena aproximación casi de tanta calidad como la cuadrática[i]*).*

El gráfico siguiente muestra cómo se aproxima cada una de las funciones a los datos originales:



Seleccionamos, por lo tanto, f2(x) para calcular los valores que se desea conocer:

f2(x) = -0.0295x² + 2.7437x – 0.1421

Valuamos:

f(4) = 10,36
f(1,5) = 3,91

Y con ello concluimos el ejercicio.

---

[i] En general, los polinomios cumplen con esta condición. A medida que se aproxima con un polinomio de mayor grado, la calidad de la aproximación es mayor.

<u>Ejercicio 2</u>

A partir de la siguiente tabla de valores:

x	***y***
-3	4
-2,1	2
1	1,5
2	3
2,5	2,9
5,5	2,7
6,7	2,2
7,5	3,8
8,1	7,6

Se pide encontrar el valor de f(3) y f(10) con la mejor función que represente los datos. Utilizar para ello las siguientes funciones de aproximación:

$f1(x) = c1.x^3 + c2.x$
$f2(x) = c1.\text{sen}\ (0,2x) + c2$

Luego de ello, se pide buscar una tercera función de aproximación que represente mejor a los datos.

Solución

Las funciones de aproximación son:

$f1(x) = 0{,}0139.x^3 - 0{,}1274.x$
$f2(x) = 0{,}9156.\text{sen}\ (0{,}2x) + 2{,}8975$

Siendo la mejor aproximación a los datos f2(x) con una desviación de 23,55 contra 46,13 de f1(x). Por lo tanto, utilizamos f2(x) para calcular los valores solicitados:

f(3) = 3,4142
f(10) = 3,7301

<u>Ejercicio 3</u>

Teniendo en cuenta la siguiente tabla de datos:

x	y
0,1	8,4
0,5	8,25
0,6	7,7
0,9	6,6
1,1	6,4
1,9	6,3
2,1	5,95
2,3	4,75
3,5	4,6

Se pide:

1) Realizar el diagrama de dispersión.
2) Encontrar las siguientes funciones de aproximación:
    a. Una función lineal.
    b. Un polinomio de grado mayor a uno.
    c. Una función exponencial.
    d. Una función logarítmica.
3) Con la mejor aproximación encontrar el valor para $x = 2$; $x = 3$ y $x = 7$.
4) Teniendo en cuenta el punto anterior: ¿Por qué el cálculo de $x = 7$ tiene mayor probabilidad de error que los demás?