

Figura P4.16-1

y sea  $\tilde{y}(t)$  la convolución periódica de  $\tilde{x}_1(t)$  y  $\tilde{x}_2(t)$ .

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}_1(t) \otimes \tilde{x}_2(t)$$

Demuestre que si  $T_0$  es suficientemente grande, podemos recuperar  $y(t)$  por completo a partir de un período de  $\tilde{y}(t)$ , es decir,

$$y(t) = \begin{cases} \tilde{y}(t), & |t| \leq T_0/2 \\ 0, & |t| > T_0/2 \end{cases}$$

- (d) Sea  $T = 1$  y sean  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  como en la figura P4.16-2(a) y (b). Use los resultados de las partes (a) y (c) para encontrar una representación de  $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$  de la forma

$$y(t) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk(2\pi/T_0)t}, & |t| \leq T_0/2 \\ 0, & |t| > T_0/2 \end{cases}$$

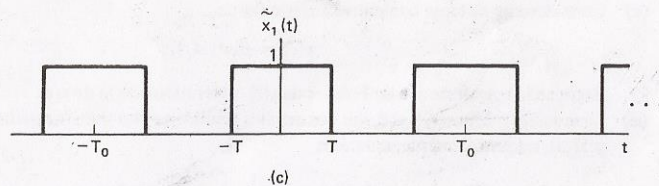
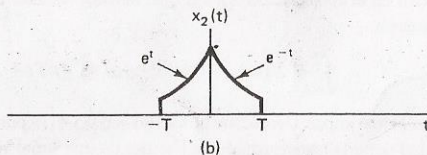
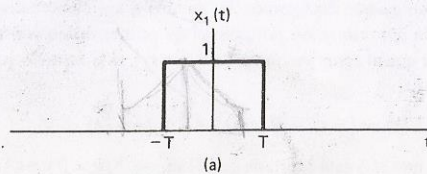


Figura P4.16-2

4.17. Calcule la transformada de Fourier de cada una de las señales siguientes.

(a)  $[e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t]u(t)$ ,  $\alpha > 0$

(b)  $e^{2t}u(-t+1)$

(c)  $e^{-3|t|} \sin 2t$

(d)  $e^{-3[u(t+2) - u(t-3)]}$

(e)  $x(t)$  como en la figura P4.17(a)

(f)  $u_1(t) + 2\delta(3-2t)$

(g)  $x(t) = \begin{cases} 1 + \cos \pi t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

(h)  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t - kT)$ ,  $|\alpha| < 1$

(i)  $[te^{-2t} \sin 4t]u(t)$

(j)  $\sin t + \cos(2\pi t + \pi/4)$

(k)  $\left[ \frac{\sin \pi t}{\pi t} \right] \left[ \frac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)} \right]$

(l)  $x(t)$  como en la figura P4.17(b)

(m)  $x(t)$  como en la figura P4.17(c)

(n)  $x(t)$  como en la figura P4.17(d)

(o)  $x(t) = \begin{cases} 1-t^2, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{para cualquier otro} \end{cases}$

(p)  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|t-2n|}$

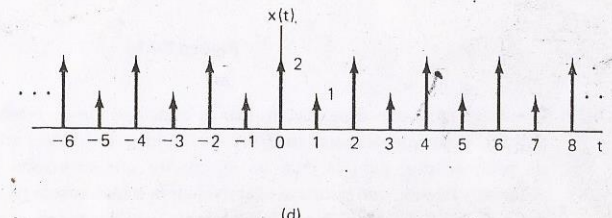
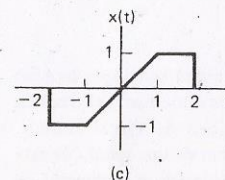
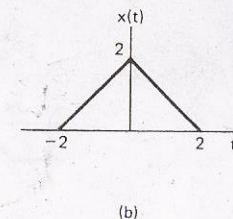
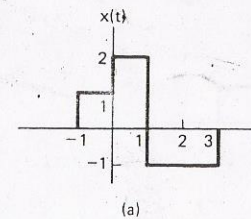


Figura P4.17

4.18. Las siguientes son las transformadas de Fourier de señales de tiempo continuo. Determine la señal de tiempo continuo correspondiente a cada transformada.

(a)  $X(\omega) = \frac{2 \sin[3(\omega - 2\pi)]}{(\omega - 2\pi)}$

(b)  $X(\omega) = \cos(4\omega + \pi/3)$

(c)  $X(\omega)$  tal como está dada por los diagramas de magnitud y fase de la figura P4.18(a)

(d)  $X(\omega) = 2[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)] + 3[\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)]$

(e)  $X(\omega)$  como en la figura P4.18(b)

4.19. Use las propiedades de la transformada de Fourier para demostrar por inducción que la transformada de Fourier de

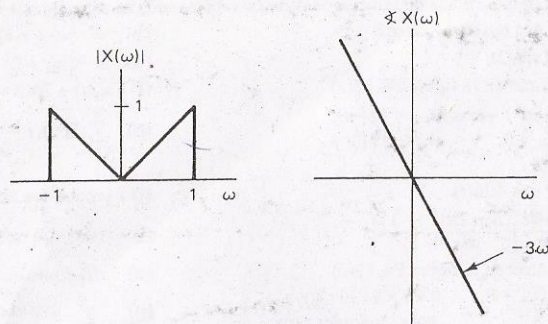
no

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \quad a > 0$$

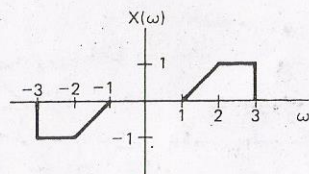
es

$$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$$





(a)



(b)

Figura P4.18

4.20. Con frecuencia uno desea determinar la transformada de Fourier de una señal que ha sido definida experimentalmente mediante un conjunto de valores medidos o mediante el trazo en un osciloscopio, para la cual no se conoce una expresión analítica de forma cerrada. Alternativamente, uno podría desear evaluar la transformada de Fourier de una señal que está definida con toda precisión en forma cerrada pero que es tan complicada que la evaluación de su transformada es virtualmente imposible. En ambos casos, sin embargo, uno puede emplear métodos numéricos para obtener una aproximación de la transformada de Fourier con cualquier exactitud que se desee. Uno de tales métodos se delineó en la parte (a) y está basado en una aproximación polinomial por partes de la señal que será transformada.

- (a) Si la función  $x(t)$  que será transformada es suficientemente suave,  $x(t)$  puede ser aproximada por un número pequeño de piezas polinomiales. En la siguiente discusión, solamente se considerarán polinomios de primer orden; la extensión a polinomios de orden superior se realiza de manera directa. La figura P4.20-1 muestra una función  $x(t)$  y una función  $\phi(t)$  compuesta de segmentos de línea recta (los puntos  $t_i$  indican los puntos de inicio y fin de los segmentos lineales). Ya que  $\phi(t) \approx x(t)$ , entonces  $\Phi(\omega) \approx X(\omega)$ . Mediante la evaluación de la transformada  $\Phi(\omega)$ , demuestre que

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \sum k_i e^{-j\omega t_i}$$

Determine las  $k_i$  en términos de los instantes de tiempo  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , y de los valores de  $x(t)$  en esos tiempos.

- (b) Suponga que  $x(t)$  es el trapecioide mostrado en la figura P4.20-2. Dado que  $x(t)$  ya consiste de segmentos lineales, no es necesaria ninguna aproximación. Determine  $X(\omega)$  en este caso.

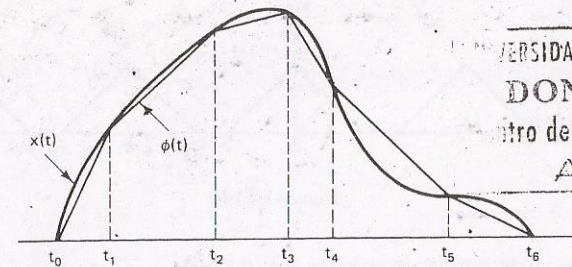


Figura P4.20-1

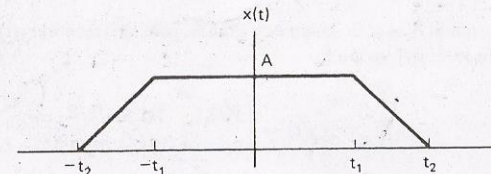


Figura P4.20-2

- (c) Suponga que deseamos evaluar numéricamente la transformada de Fourier de una señal  $x(t)$  la cual se sabe que es limitada en el tiempo, es decir,

$$x(t) = 0 \quad \text{para } |t| > T$$

Además, suponga que escogemos los puntos  $t_i$  suficientemente cerca unos de otros de manera que la aproximación polinomial de primer orden  $\phi(t)$  es suficientemente exacta para asegurar que el error absoluto,  $|x(t) - \phi(t)|$ , está acotado por alguna constante  $\epsilon$  para  $|t| < T$ , esto es,

$$E(t) = |x(t) - \phi(t)| \leq \epsilon \quad \text{para } |t| < T$$

[Nota: Dado que  $x(t)$  está limitada en el tiempo,  $E(t) = 0$  para  $|t| > T$ .] Demuestre que la energía del error en la aproximación a  $\Phi(\omega)$  de la transformada de Fourier  $X(\omega)$ , es menor que  $4\pi T\epsilon^2$ , es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega) - \Phi(\omega)|^2 d\omega \leq 4\pi T\epsilon^2$$

- 4.21. (a) Sea  $x(t)$  una señal real impar. Demuestre que  $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$  es puramente imaginaria e impar.  
(b) ¿Qué propiedad tiene la transformada de Fourier de una señal  $x(t)$  si  $x(-t) = x^*(t)$ ?  
(c) Considere un sistema con entrada  $x(t)$  y salida

$$y(t) = \mathcal{R}\{x(t)\}$$

Expresé la transformada de Fourier de  $y(t)$  en términos de la de  $x(t)$ .

- (d) Demuestre que si  $x(t)$  y  $y(t)$  son dos señales arbitrarias con transformadas de Fourier  $X(\omega)$  y  $Y(\omega)$ , respectivamente, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega) d\omega$$

Este resultado es una generalización del teorema de Parseval.