(g) Determine los coeficientes $a_{mn}$ de la serie de Fourier para las señales siguientes:

(1) $\cos(2\pi t_1 + 2t_2)$

(2) La señal ilustrada en la figura P4.26-2.

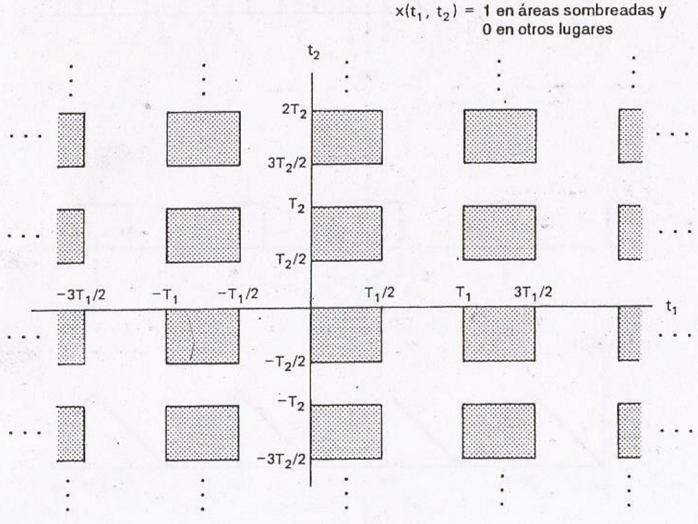


**Figura P4.26-2**

**4.27.** (a) Calcule la convolución de cada uno de los siguientes pares de señales $x(t)$ y $h(t)$ calculando primero $X(\omega)$ y $H(\omega)$, aplicando la propiedad de convolución y por último obteniendo la transformada inversa.

Sí

(i) $x(t) = te^{-2t}u(t)$, $h(t) = e^{-4t}u(t)$

(ii) $x(t) = te^{-2t}u(t)$, $h(t) = te^{-4t}u(t)$

(iii) $x(t) = e^{-t}u(t)$, $h(t) = e^{t}u(-t)$

(b) Suponga que $x(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ y que $h(t)$ es como se ha dibujado en la figura P4.27. Verifique la propiedad de convolución para este par de señales demostrando que la transformada de Fourier de $y(t) = x(t) * h(t)$ es igual a $H(\omega)X(\omega)$.

**4.28.** Como señalamos en el capítulo 3, la representación por integral de convolución para sistemas LTI de tiempo continuo enfatiza el hecho de que un sistema LTI está especificado completamente por su respuesta a $\delta(t)$. También es cierto, como se ilustró en los problemas 3.17 y 3.18, que sistemas LTI de tiempo continuo o de tiempo discreto también están completamente especificados por sus respuestas a otras entradas específicas. Por otro lado, hay algunas entradas

NO

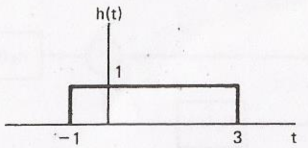


**Figura P4.27**



para las cuales éste no es el caso; es decir, muchos sistemas LTI diferentes pueden tener una respuesta idéntica a una de estas señales de entrada.

(a) Para ilustrar este punto, demuestre que los tres sistemas LTI con respuestas al impulso

$$h_1(t) = u(t)$$
$$h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t)$$
$$h_3(t) = 2te^{-t}u(t)$$

todos tienen la misma respuesta a $x(t) = \cos t$.

(b) Encuentre la respuesta al impulso de otro sistema LTI con la misma respuesta a $\cos t$.

**4.29.** En los problemas 2.23 y 3.28 definimos y examinamos varias de las propiedades y usos de las funciones de correlación. En este problema examinamos las propiedades de estas funciones en el dominio de la frecuencia. Sean $x(t)$ y $y(t)$ dos señales reales. La función de correlación cruzada $\phi_{xy}(t)$ se define como

NO

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)\,d\tau$$

En forma análoga, podemos definir $\phi_{yx}(t)$, $\phi_{xx}(t)$, y $\phi_{yy}(t)$ [las dos últimas son llamadas las funciones de autocorrelación de las señales $x(t)$ y $y(t)$, respectivamente]. Dejemos que $\Phi_{xy}(\omega)$, $\Phi_{yx}(\omega)$, $\Phi_{xx}(\omega)$ y $\Phi_{yy}(\omega)$ denoten las transformadas de Fourier de $\phi_{xy}(t)$, $\phi_{yx}(t)$, $\phi_{xx}(t)$ y $\phi_{yy}(t)$, respectivamente.

(a) ¿Cuál es la relación entre $\Phi_{xy}(\omega)$ y $\Phi_{yx}(\omega)$?

(b) Encuentre una expresión para $\Phi_{xy}(\omega)$ en términos de $X(\omega)$ y de $Y(\omega)$.

(c) Demuestre que $\Phi_{xx}(\omega)$ es real y no negativa para toda $\omega$.

(d) Suponga ahora que $x(t)$ es la entrada a un sistema LTI con una respuesta al impulso real y con respuesta en frecuencia $H(\omega)$, y que $y(t)$ es la salida. Encuentre expresiones para $\Phi_{xy}(\omega)$ y $\Phi_{yy}(\omega)$ en términos de $\Phi_{xx}(\omega)$ y $H(\omega)$.

(e) Sea $x(t)$ como se ilustra en la figura P4.29, y sea $h(t) = e^{-at}u(t)$ la respuesta al impulso del sistema LTI para $a > 0$. Calcule $\Phi_{xx}(\omega)$, $\Phi_{xy}(\omega)$ y $\Phi_{yy}(\omega)$ usando los resultados de las partes precedentes de este problema.

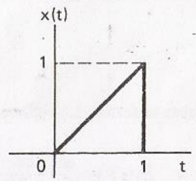


**Figura P4.29**

(f) Suponga que nos dan la siguiente transformada de Fourier de una función $\phi(t)$:

$$\Phi(\omega) = \frac{\omega^2 + 100}{\omega^2 + 25}$$

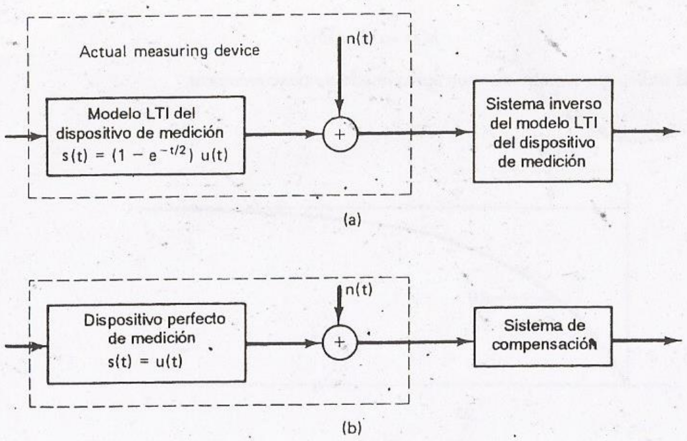


**Figura P4.39**

En la parte (b) vimos que este compromiso implica que al intentar acelerar la respuesta de un dispositivo de medición (por medio de un sistema inverso), producimos un sistema que también amplificaría señales senoidales corruptoras. Para ilustrar este concepto, considere un dispositivo de medición que responde de manera instantánea a cambios en temperatura pero que también es interferido por ruido. La respuesta de tales sistemas puede modelarse, como se muestra en la figura P4.39(b), como la suma de la respuesta de un dispositivo de medición perfecto y una señal $n(t)$ corruptora. Suponga que como se muestra en la figura P4.39(b), deseamos diseñar un sistema de compensación que hará más lenta la respuesta a las variaciones reales de la temperatura pero también atenuará el ruido $n(t)$. Sea la respuesta al impulso del sistema de compensación

$$h(t) = ae^{-at}u(t)$$

Escoja $a$ de manera que el sistema total de la figura P4.39(b) responda tan rápidamente como sea posible a un cambio en escalón de la temperatura, sujeto a la condición de que la amplitud de la porción de la salida debida al ruido $n(t) = \operatorname{sen} 6t$ no sea mayor que $\frac{1}{4}$.

**4.40.** Considere un sistema LTI cuya respuesta a la entrada

$$x(t) = [e^{-t} + e^{-3t}]u(t)$$

es

$$y(t) = [2e^{-t} - 2e^{-4t}]u(t)$$

(a) Encuentre la respuesta en frecuencia de este sistema.
(b) Determine la respuesta al impulso del sistema.
(c) Encuentre la ecuación diferencial que relaciona la entrada y la salida y construya una realización de este sistema usando integradores, sumadores y multiplicadores de coeficiente.



AGREGAR EC. DIFER.

**4.41.** La salida $y(t)$ de un sistema LTI causal está relacionada con la entrada $x(t)$ por la ecuación

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)z(t-\tau)\,d\tau - x(t)$$

donde $z(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t)$.
(a) Encuentre la respuesta en frecuencia de este sistema $H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$ y dibuje el diagrama de Bode de su magnitud y fase.
(b) Determine la respuesta al impulso de este sistema.

**4.42.** La salida $y(t)$ de un sistema LTI causal está relacionada con la entrada $x(t)$ por la ecuación diferencial

SI

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

(a) Determine la respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

del sistema y dibuje su diagrama de Bode.
(b) Si $x(t) = e^{-t}u(t)$, determine $Y(\omega)$, la transformada de Fourier de la salida.
(c) Usando la técnica de expansión por fracciones parciales, determine la salida $y(t)$ para la entrada $x(t)$ en la parte (b).
(d) Repita primero las partes (b) y (c) si la entrada tiene como transformada de Fourier

(i) $X(\omega) = \dfrac{1+j\omega}{2+j\omega}$

después si

(ii) $X(\omega) = \dfrac{2+j\omega}{1+j\omega}$

y por último si

(iii) $X(\omega) = \dfrac{1}{(2+j\omega)(1+j\omega)}$

**4.43.** La entrada y la salida de un sistema LTI causal están relacionadas por la ecuación diferencial

SI

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

(a) Encuentre la respuesta al impulso de este sistema.
(b) ¿Cuál es la respuesta de este sistema si $x(t) = te^{-2t}u(t)$?
(c) Repita la parte (a) para el sistema LTI causal descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2x(t)$$

**4.44.** En la sección 4.12 introdujimos la idea de una constante de tiempo para un sistema de primer orden. Como vimos, la constante de tiempo proporciona una medida de qué tan rápido un sistema de primer orden responde a las entradas. La idea de medir la velocidad de respuesta de un sistema también es importante para sistemas de orden mayor y en este problema investigamos la extensión del concepto para tales sistemas.