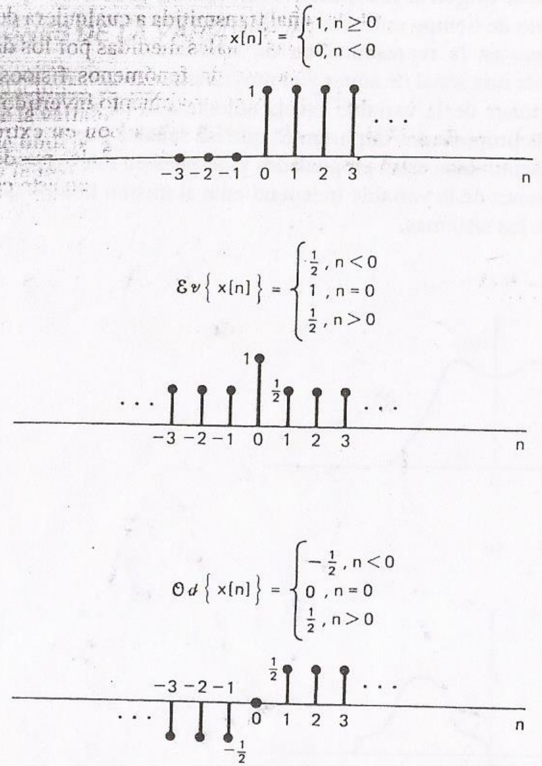

Figura 2.12 Descomposición par-impar de una señal de tiempo discreto.

Un hecho importante es que cualquier señal se puede separar en la suma de dos señales, una de las cuales es par y la otra es impar. Para ver esto, considere la señal

$$\mathcal{E}v\{x(t)\} = \tfrac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \tag{2.3}$$

que se refiere como la *parte par* de $x(t)$. De forma similar, la *parte impar* de $x(t)$ está dada por

$$\mathcal{O}d\{x(t)\} = \tfrac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \tag{2.4}$$

Un ejercicio simple es verificar que la parte par es de hecho par, que la parte impar es impar y que $x(t)$ es la suma de las dos. Definiciones exactas análogas son válidas en el caso de tiempo discreto y un ejemplo de la descomposición par-impar de una señal de tiempo discreto se presenta en la figura 2.12.

A lo largo de nuestro análisis de señales y sistemas tendremos la ocasión de referirnos a las señales *periódicas*, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto. Una señal periódica $x(t)$ de tiempo continuo tiene la propiedad de que hay un valor positivo T para el cual

$$x(t) = x(t + T) \qquad \text{para toda } t \tag{2.5}$$

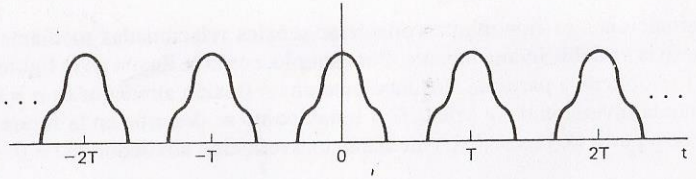

Figura 2.13 Señal periódica de tiempo continuo.

En este caso decimos que $x(t)$ es *periódica con período T*. Un ejemplo de tal señal está dado en la figura 2.13. A partir de la figura o de la ecuación (2.5) podemos fácilmente deducir que si $x(t)$ es con período T, entonces $x(t) = x(t+mT)$ para toda t y para cualquier entero m. Por tanto, $x(t)$ también es periódica con período $2T$, $3T$, $4T$,.... El *período fundamental* T_0 de $x(t)$ es el valor positivo más pequeño de T para el cual la ecuación (2.5) se satisface. Note que esta definición del período fundamental es válida excepto si $x(t)$ es una constante. En este caso el período fundamental es indefinido ya que $x(t)$ es periódica para *cualquier* valor de T (de manera que no hay un valor positivo más pequeño). En última instancia, una señal $x(t)$ que es no periódica se conoce como una señal *aperiódica*.

Las señales periódicas son definidas de manera análoga en el tiempo discreto. En específico, una señal de tiempo discreto $x[n]$ es periódica con período N, donde N es un entero positivo, si

$$x[n] = x[n + N] \qquad \text{para toda } n \tag{2.6}$$

Si la ecuación (2.6) se satisface, entonces $x[n]$ es también periódica con período $2N$, $3N$,... y el *período fundamental* N_0 es el valor positivo más pequeño de N para el cual la ecuación (2.6) se satisface.

2.3 SEÑALES BÁSICAS DE TIEMPO CONTINUO

En esta sección introducimos varias señales de tiempo continuo en particular importantes. No sólo estas señales ocurren con frecuencia en la naturaleza, sino también sirven como bloques básicos a partir de los cuales podemos construir muchas otras señales. En este y en los subsecuentes capítulos encontraremos que el construir señales de esta manera nos permitirá examinar y entender con profundidad las propiedades de las señales así como de los sistemas.

2.3.1 Señales de Tiempo Continuo Exponencial Compleja y Senoidal

La *señal exponencial compleja* de tiempo continuo es de la forma

$$x(t) = Ce^{at} \tag{2.7}$$

donde C y a son, en general, números complejos. Dependiendo de los valores de estos parámetros, la exponencial compleja puede adoptar varias características diferentes. Como se ilustra en la figura 2.14, si C y a son reales [en cuyo caso $x(t)$ se llama

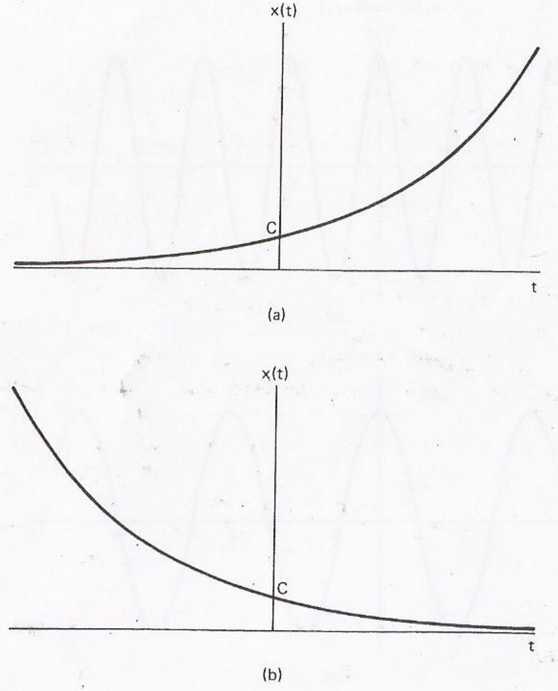

Figura 2.14 Exponencial real de tiempo continuo $x(t) = Ce^{at}$: (a) $a > 0$; (b) $a < 0$.

exponencial real], básicamente hay dos tipos de comportamiento. Si a es positiva, entonces conforme t se incrementa $x(t)$ es una exponencial creciente, adoptando una forma que se usa para describir una variedad amplia de fenómenos, incluyendo reacciones en cadena en explosiones atómicas, reacciones químicas complejas o el crecimiento no inhibido de poblaciones tal como en cultivos de bacterias. Si a es negativa, entonces $x(t)$ es una exponencial decreciente. Tales señales también encuentran un uso amplio en la descripción de muchos fenómenos, tales como la desintegración radiactiva, la respuesta de los circuitos RC y de sistemas mecánicos amortiguados y muchos otros procesos físicos. Por último, notamos que para $a = 0$, $x(t)$ es constante.

Una segunda clase importante de exponenciales complejas se obtiene forzando a que a sea sólo imaginaria. En especial considere que

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \tag{2.8}$$

Una propiedad importante de esta señal es que es periódica. Para verificar esto, recordamos de la ecuación (2.5) que $x(t)$ será periódica con período T si

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} \tag{2.9}$$

o, ya que

$$e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

debemos tener que

$$e^{j\omega_0 T} = 1 \tag{2.10}$$

Si $\omega_0 = 0$, entonces $x(t) = 1$, la cual es periódica para cualquier valor de T. Si $\omega_0 \neq 0$, entonces el período fundamental T_0 de $x(t)$, esto es, el valor positivo más pequeño de T para el cual la ecuación (2.10) se cumple, está dado por

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|} \tag{2.11}$$

Entonces, las señales $e^{j\omega_0 t}$ y $e^{-j\omega_0 t}$ tienen ambas el mismo período fundamental.

Una señal muy relacionada con la exponencial periódica compleja es la *señal senoidal*

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{2.12}$$

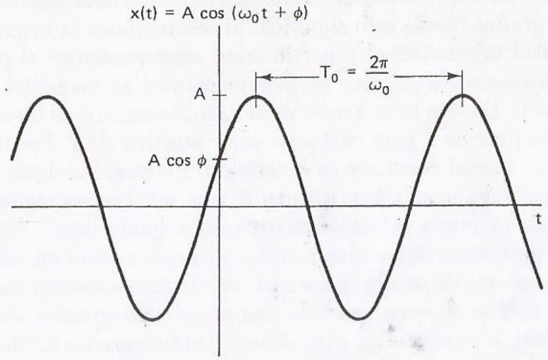

Figura 2.15 Señal senoidal de tiempo continuo.

tal como se muestra en la figura 2.15. Siendo segundos las unidades de t, las de ϕ y ω_0 son radianes y radianes por segundo respectivamente. Es también común escribir $\omega_0 = 2\pi f_0$, donde f_0 tiene las unidades de ciclos por segundo o Hertz (Hz). La señal senoidal también es periódica con período fundamental T_0 dado por la ecuación (2.11). Las señales senoidal y exponencial compleja periódica se usan también para describir las características de muchos procesos físicos. La respuesta de un circuito LC es senoidal, así como el movimiento armónico simple de un sistema mecánico que consiste en una masa conectada por un resorte a un soporte estacionario. Las variaciones de presión acústica correspondientes a una sola nota musical son también senoidales.

Usando la relación de Euler,† la exponencial compleja en la ecuación (2.8) se puede escribir en términos de señales senoidales con el mismo período fundamental:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \operatorname{sen} \omega_0 t \tag{2.13}$$

†La relación de Euler y otras ideas básicas relacionadas a la manipulación de números complejos y exponenciales son revisadas en los primeros problemas al final del capítulo.

De manera similar, la señal senoidal de la ecuación (2.12) se puede escribir en términos de exponenciales complejas periódicas, de nuevo con el mismo período fundamental:

$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t} \quad (2.14)$$

Note que las dos exponenciales en la ecuación (2.14) tienen amplitudes complejas. De forma alternativa, podemos expresar una senoide en términos de la señal exponencial compleja de la siguiente manera:

$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\,\mathcal{R}e\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\} \quad (2.15)$$

en donde si c es un número complejo, $\mathcal{R}e\{c\}$ denota su parte real. También usaremos la notación $\mathcal{I}m\{c\}$ para la parte imaginaria de c.

De la ecuación (2.11) vemos que el período fundamental T_0 de una señal senoidal de tiempo continuo o una exponencial compleja periódica es inversamente proporcional a $|\omega_0|$, a la cual nos referiremos como la *frecuencia fundamental.* En la figura 2.16 vemos en la gráfica lo que esto significa. Si disminuimos la magnitud de ω_0, reducimos la velocidad de oscilación y por lo tanto incrementamos el período. Exactamente los efectos contrarios ocurren si incrementamos la magnitud de ω_0. Considere ahora que $\omega_0 = 0$. En este caso, como ya mencionamos, $x(t)$ es constante y por tanto es periódica con período T para cualquier valor positivo de T. Por tanto, el período fundamental de una señal constante es indefinido. En otras palabras, no hay ambigüedad al definir que la frecuencia fundamental de una señal constante sea cero. Esto es, una señal constante tiene una velocidad de oscilación igual a cero.

Las exponenciales periódicas complejas jugarán un papel central en una parte sustancial de nuestro tratamiento de señales y sistemas. En varias ocasiones encontraremos útil considerar la noción de exponenciales complejas *relacionadas de forma armónica,* esto es, conjuntos de exponenciales periódicas con frecuencias fundamentales que son todas múltiplos de una sala frecuencia positiva ω_0:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (2.16)$$

Para $k = 0$, $\phi_k(t)$ es una constante, mientras que para cualquier otro valor de k, $\phi_k(t)$ es periódica con período fundamental $2\pi/(|k|\,\omega_0)$ o con frecuencia fundamental $|k|\,\omega_0$. Como una señal que es periódica con período T es también periódica con mT para cualquier entero positivo m, vemos que todas la señales $\phi_k(t)$ tienen un período común $2\pi/\omega_0$. Nuestro uso del término "armónica" es congruente con su uso en música, donde se refiere a tonos que resultan de variaciones de la presión acústica a frecuencias que están relacionadas de forma armónica.

El caso más general de una exponencial compleja puede ser expresado e interpretado en términos de los dos casos que hemos examinado hasta ahora: la exponencial real y la exponencial compleja periódica. En específico, considere una exponencial compleja Ce^{at}, donde C se expresa en forma polar y a en forma rectangular. Esto es,

$$C = |C|\,e^{j\theta}$$

y

$$a = r + j\omega_0$$

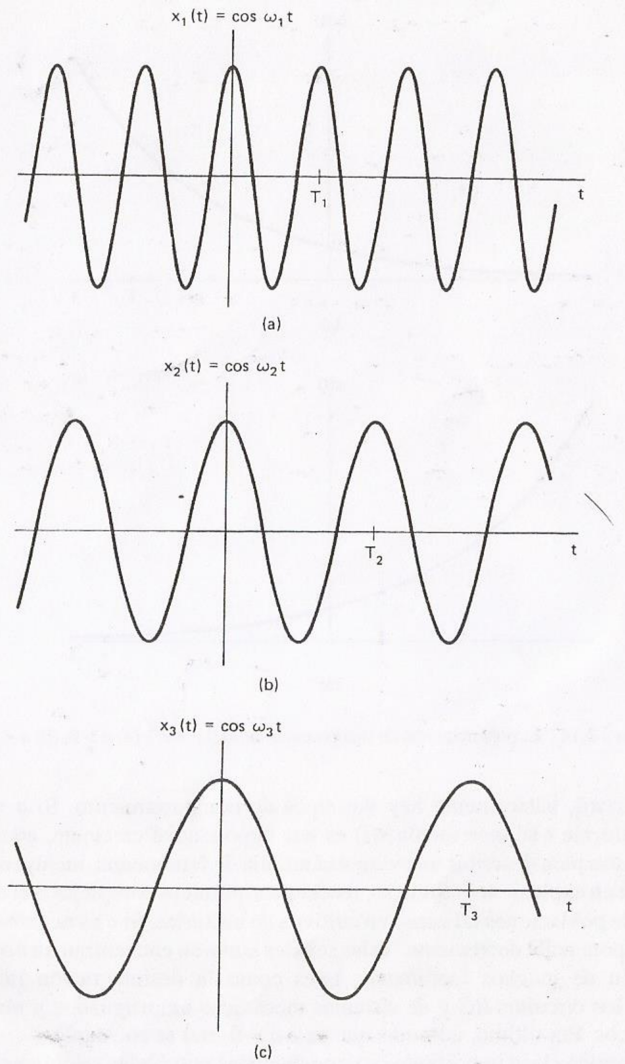

Figura 2.16 Relación entre la frecuencia fundamental y el período fundamental para las señales senoidales de tiempo continuo; aquí $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ lo que implica que $T_1 < T_2 < T_3$.

Entonces

$$Ce^{at} = |C|\,e^{j\theta} e^{(r + j\omega_0)t} = |C|\,e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)} \quad (2.17a)$$

Usando la relación de Euler podemos expandir ésta aún más de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
Ce^{at} &= |C|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt}\operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta) \\
&= |C|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt}\cos\left(\omega_0 t + \theta - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (2.17b)
\end{aligned}
$$

Entonces, para $r = 0$ las partes real e imaginaria de una exponencial compleja son senoidal. Para $r < 0$ corresponden a señales senoidales multiplicadas por una exponencial creciente, y para $r < 0$ corresponden a señales senoidales multiplicadas por una exponencial decreciente. Estos dos casos se muestran en la figura 2.17. Las líneas punteadas en la figura 2.17 corresponden a las funciones $\pm |C| e^{rt}$. A partir de la ecuación (2.17a) vemos que $|C| e^{rt}$ es la magnitud de la exponencial compleja. Entonces, la curva punteada actúa como una *envolvente* de la curva oscilatoria de la figura 2.17 ya que los picos de las oscilaciones justo tocan estas curvas, y de esta manera la envolvente nos proporciona una manera conveniente de visualizar la tendencia general de la amplitud de las oscilaciones. Las señales senoidales multiplicadas por las exponenciales decrecientes se conocen comúnmente como *senoides amortiguadas*. Ejemplos de tales señales surgen de la respuesta de circuitos *RLC* y en sistemas mecánicos que contienen tanto fuerzas de amortiguamiento como de restauración, tales como los sistemas de suspensión automotriz.

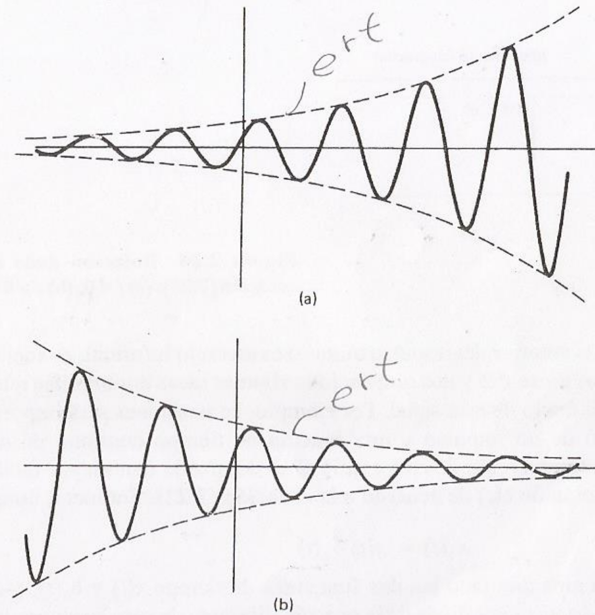

Figura 2.17 (a) Señal senoidal creciente $x(t) = Ce^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta)$, $r > 0$; (b) senoidal decreciente $x(t) = Ce^{rt}\cos\omega_0 t + \theta)$, $r < 0$.

2.3.2 Funciones Escalón Unitario e Impulso Unitario de Tiempo Continuo

Otra señal básica de tiempo continuo es la *función escalón unitario*

$$
u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \qquad (2.18)
$$

la cual se muestra en la figura 2.18. Note que es discontinua en $t = 0$. Como con la

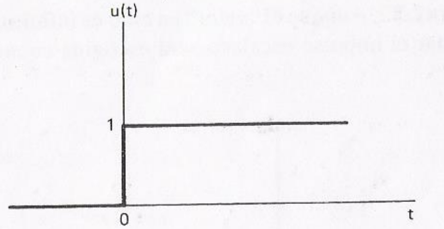

Figura 2.18 Función escalón unitario de tiempo continuo.

exponencial compleja, la función escalón unitario será muy importante en nuestro análisis de las propiedades de los sistemas. Otra señal que encontramos bastante útil es la *función impulso unitario* de tiempo continuo $\delta(t)$, la cual está relacionada con el escalón unitario por la ecuación

$$
u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \qquad (2.19)
$$

Esto es, $u(t)$ es la *integral* de la función impulso unitario. Esto sugiere que

$$
\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \qquad (2.20)
$$

Es obvio que existe alguna dificultad formal con esta expresión como una definición de la función impulso unitario ya que $u(t)$ es discontinua en $t = 0$ y en consecuencia es diferenciable formalmente. Sin embargo, podemos interpretar la ecuación (2.20) considerando $u(t)$ como el límite de una función continua. Entonces, definimos $u_\Delta(t)$ como se indica en la figura 2.19, de manera que $u(t)$ sea igual al límite de $u_\Delta(t)$ cuando $\Delta \to 0$, y definimos $\delta_\Delta(t)$ como

$$
\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt} \qquad (2.21)
$$

tal como se muestra en la figura 2.20.

Observamos que $\delta_\Delta(t)$ tiene área unitaria para cualquier valor de Δ y es cero fuera del intervalo $0 \le t \le \Delta$. Conforme $\Delta \to 0$, $\delta_\Delta(t)$ se hace más angosta y más alta,

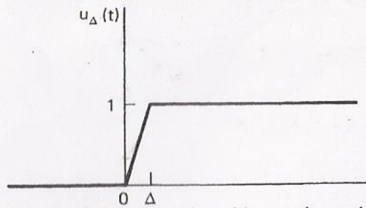

Figura 2.19 Aproximación continua al escalón unitario.

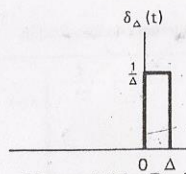

Figura 2.20 Derivada de $u_\Delta(t)$.