

3.3 SISTEMAS LTI DE TIEMPO CONTINUO: LA INTEGRAL DE CONVOLUCION

En analogía con los resultados deducidos y discutidos en la sección anterior, el objetivo de esta sección es obtener una caracterización completa de un sistema LTI de tiempo continuo en términos de su respuesta al impulso unitario. Considere un sistema lineal con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. Mediante las ecuaciones (3.8) y (3.9) de la sección 3.1, vimos como una señal arbitraria de tiempo continuo se puede expresar en la forma de un límite de una combinación lineal de pulsos desplazados:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \quad (3.24)$$

donde $\delta_{\Delta}(t)$ está dada por la ecuación (3.6). Procediendo en forma análoga a la sección 3.2, definamos $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ como la respuesta de un sistema LTI a la entrada $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$. Entonces, de la ecuación (3.24) y de la propiedad de superposición de sistemas lineales,

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta \quad (3.25)$$

La interpretación de la ecuación (3.25) es similar a la de la ecuación (3.11) en tiempo discreto. En particular, considere la figura 3.14, que es la contraparte de tiempo continuo de la figura 3.5. En la figura 3.14(a) se muestra la entrada $x(t)$ y su aproximación $\hat{x}(t)$, mientras que en la figura 3.14(b)-(d), aparecen las respuestas del sistema para tres de los pulsos ponderados de la expresión para $\hat{x}(t)$. Entonces la salida $\hat{y}(t)$ correspondiente a $\hat{x}(t)$ es la superposición de todas estas respuestas [figura 3.14(e)]. Lo que falta para obtener la respuesta $y(t)$ para la entrada real $x(t)$, es tomar el límite de $\hat{y}(t)$ cuando $\Delta \rightarrow 0$, como se indica en la ecuación (3.25) y como se ilustra en la figura 3.14(f). Note que ya que el pulso $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$ corresponde a un impulso unitario desplazado cuando $\Delta \rightarrow 0$, la respuesta $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ llega a ser la respuesta a ese impulso en el límite. Por lo tanto, si denotamos $h_{\tau}(t)$ como la respuesta en el tiempo t al impulso unitario $\delta(t - \tau)$ localizado en el tiempo τ , entonces

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t) \Delta \quad (3.26)$$

Cuando $\Delta \rightarrow 0$, la sumatoria del lado derecho pasa a ser una integral, como se ve en la gráfica de la figura 3.15. Por tanto,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau \quad (3.27)$$

La interpretación de la ecuación (3.27) es análoga a la de la ecuación (3.25). Como demostramos en la sección 3.1, cualquier entrada $x(t)$ se puede representar como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Esto es, podemos por intuición pensar en $x(t)$ como una "suma" de impulsos ponderados y desplazados, donde el peso en el impulso $\delta(t - \tau)$ es $x(\tau) d\tau$. Con esta interpretación, la ecuación (3.27) representa la superposición de las respuestas a cada una de estas

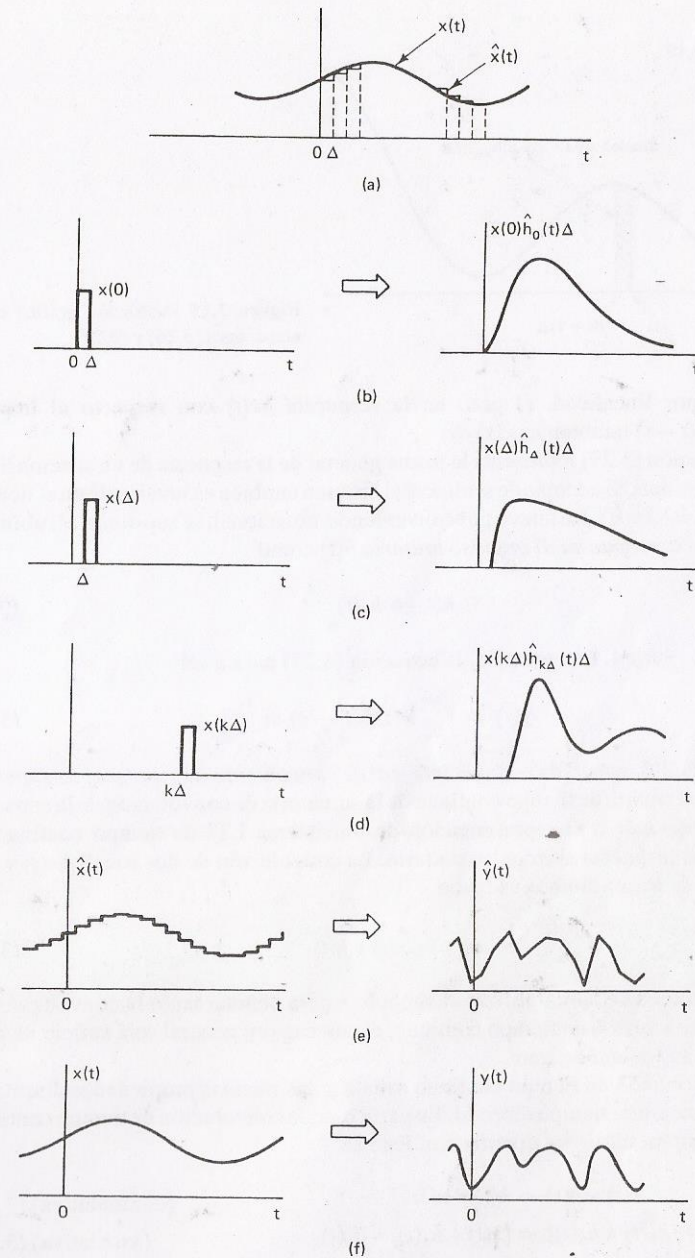


Figura 3.14 Interpretación gráfica de la respuesta de un sistema lineal de tiempo continuo tal como se expresa en la ecuación (3.25).

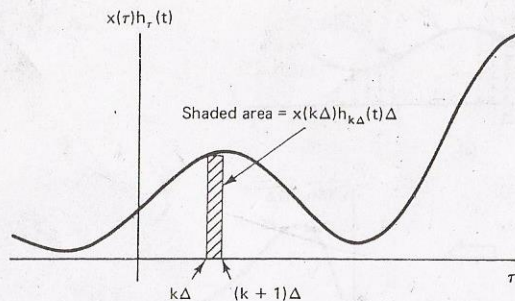


Figura 3.15 Ilustración gráfica de las ecuaciones (3.26) y (3.27).

entradas, y por linealidad, el peso en la respuesta $h\tau(t)$ con respecto al impulso desplazado $\delta(t - \tau)$ también es $x(\tau) d\tau$.

La ecuación (3.27) representa la forma general de la respuesta de un sistema lineal en tiempo continuo. Si además de ser lineal el sistema también es invariante en el tiempo, entonces $h_t(t) = h_0(t - \tau)$. De nuevo por conveniencia notacional, se suprimirá el subíndice y definiremos la *respuesta al impulso unitario* $h(t)$ como

$$h(t) = h_0(t) \quad (3.28)$$

[es decir, $\delta(t) \rightarrow h(t)$]. En este caso, la ecuación (3.27) pasa a ser

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (3.29)$$

La ecuación (3.29), conocida como la *integral de convolución* o la *integral de superposición* es la contraparte de tiempo continuo de la sumatoria de convolución de la ecuación (3.14) y corresponde a la representación de un sistema LTI de tiempo continuo en términos de su respuesta al impulso unitario. La convolución de dos señales $x(t)$ y $h(t)$ se representa de forma simbólica como

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (3.30)$$

Aun cuando hemos decidido utilizar el símbolo $*$ para denotar tanto la convolución de tiempo discreto como la de tiempo continuo, el contexto en general será suficiente para distinguir el caso de que se trate.

La convolución de tiempo continuo satisface las mismas propiedades discutidas para la convolución de tiempo discreto. En particular, la convolución de tiempo continuo es *conmutativa*, *asociativa* y *distributiva*. Esto es

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (\text{conmutativa}) \quad (3.31)$$

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \quad (\text{asociativa}) \quad (3.32)$$

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] + [x(t) * h_2(t)] \quad (\text{distributiva}) \quad (3.33)$$

Estas propiedades tienen las mismas implicaciones que las tratadas para la convolución de tiempo discreto. Como una consecuencia de la propiedad conmutativa, los papeles

de la señal de entrada y de la respuesta al impulso son intercambiables. A partir de la propiedad asociativa, una combinación de sistemas LTI en cascada se puede condensar en un solo sistema cuya respuesta total al impulso es la convolución de las respuestas al impulso individuales. Más aún, la respuesta total al impulso no se afecta por el orden de los sistemas conectados en cascada. Por último, como resultado de la propiedad distributiva, una combinación en paralelo de sistemas LTI es equivalente a un solo sistema cuya respuesta total al impulso es la suma de las respuestas individuales al impulso de los sistemas configurados en paralelo.

Es importante enfatizar de nuevo que estas propiedades son particulares de los sistemas LTI. Al igual que en el tiempo discreto, un sistema no lineal de tiempo continuo no es caracterizado por completo por su respuesta a un impulso unitario. También, la respuesta total al impulso de una conexión en cascada de dos sistemas no lineales (o sistemas lineales pero variantes en el tiempo) depende del orden en el cual estén conectados.

El procedimiento para evaluar la integral de convolución es muy similar al de la contraparte de tiempo discreto, esto es, al de la suma de convolución. En particular, en la ecuación (3.29) vemos que para cualquier valor de t la salida $y(t)$ es una integral ponderada de la entrada, donde el peso de $x(\tau)$ es $h(t - \tau)$. Para evaluar esta integral para un valor específico de t , primero obtenemos la señal $h(t - \tau)$ (considerada como una función de τ con t fija) a partir de $h(\tau)$ reflejándola alrededor del origen y desplazándola t a la derecha si $t > 0$, o hacia la izquierda $|t|$ para $t < 0$. Enseguida multiplicamos las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ y se obtiene $y(t)$ al integrar el producto resultante desde $\tau = -\infty$ hasta $\tau = +\infty$. Para ilustrar la evaluación de la integral de convolución, consideremos dos ejemplos.

Ejemplo 3.3

Considere que $x(t)$ es la entrada a un sistema LTI con respuesta al impulso unitario $h(t)$ donde

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$h(t) = u(t)$$

donde $a > 0$. En la figura 3.16 hemos dibujado las funciones $h(\tau)$, $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ para un valor negativo de t y para un valor positivo de t . A partir de esta figura vemos que para $t < 0$ el producto de $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ es cero y consecuentemente $y(t)$ es cero. Para $t > 0$

$$x(\tau)h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

A partir de esta expresión podemos calcular $y(t)$ para $t > 0$ como

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a}e^{-a\tau} \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) \end{aligned}$$

Entonces, para toda t , $y(t)$ es

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$$

que aparece en la figura 3.17.

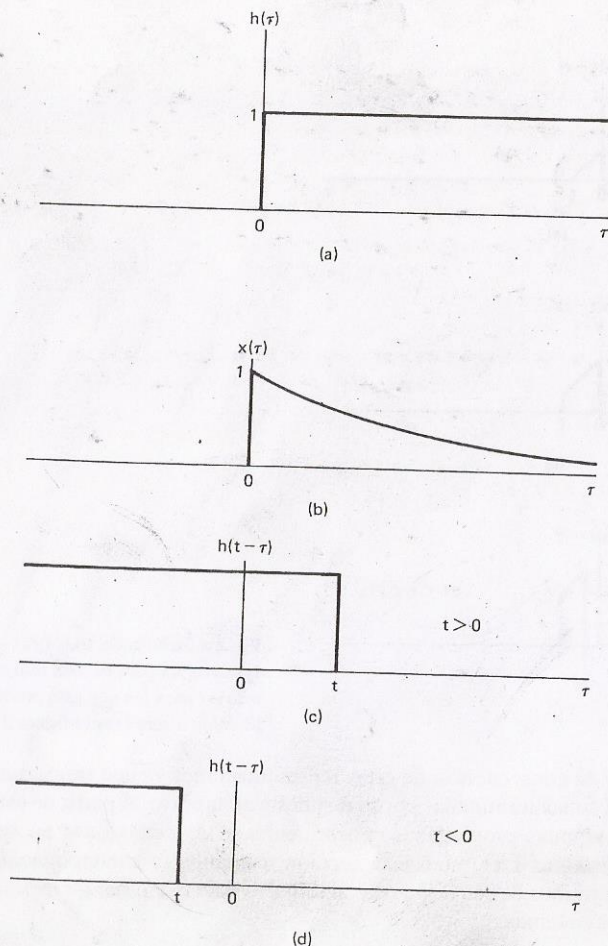


Figura 3.16 Cálculo de la integral de convolución para el ejemplo 3.3.

Ejemplo 3.4

Considere la convolución de las dos señales siguientes:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u(t)$$

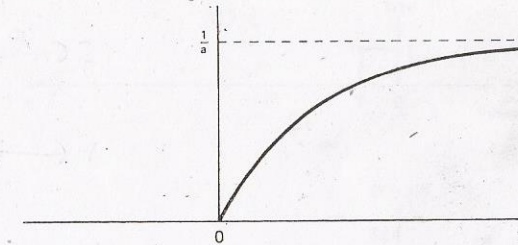


Figura 3.17 Respuesta del sistema del ejemplo 3.3 con respuesta al impulso $h(t) = u(t)$ a la entrada $x(t) = e^{-at}u(t)$.

Como en el ejemplo 3.2 para la convolución de tiempo discreto, es conveniente considerar la evaluación de $y(t)$ en intervalos separados. En la figura 3.18 hemos dibujado $x(\tau)$ y hemos ilustrado $h(t-\tau)$ en cada uno de los intervalos de interés. Para $t < 0$ y para $3T < t$, $x(\tau)h(t-\tau) = 0$ y en consecuencia $y(t) = 0$. Para el resto de los intervalos, el producto $x(\tau)h(t-\tau)$ es como se indica en la figura 3.19. Entonces, para estos tres intervalos, la integración puede llevarse a cabo de forma gráfica, con el siguiente resultado

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T < t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & 3T < t \end{cases}$$

que aparece en la figura 3.20.

A partir de estos ejemplos vemos, como hicimos para la convolución de tiempo discreto, que por lo general es útil para considerar la evaluación gráfica de la integral de convolución.

3.4 PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

En las dos secciones anteriores desarrollamos las representaciones, de gran importancia, de los sistemas LTI de tiempo continuo y tiempo discreto en términos de sus respuestas al impulso unitario. En tiempo discreto esta representación toma la forma de la sumatoria de convolución, mientras que su contraparte de tiempo continuo es la integral de convolución, las cuales repetimos por conveniencia.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = x[n] * h[n] \quad (3.34)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau = x(t) * h(t) \quad (3.35)$$

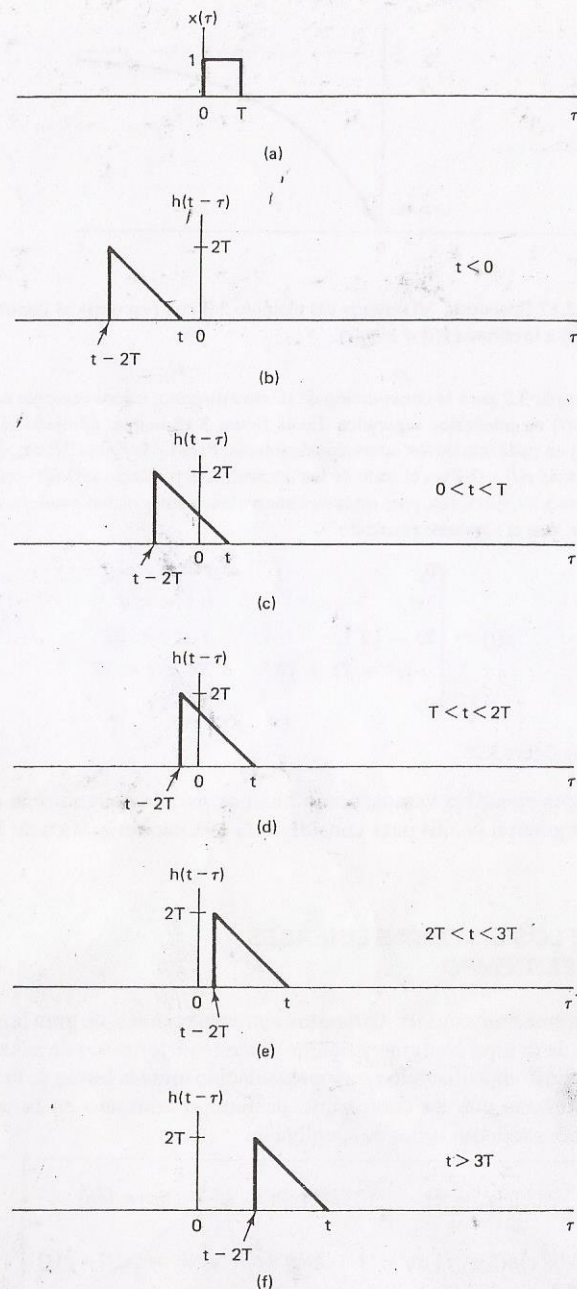


Figura 3.18 Señales $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ para diferentes valores de t para el ejemplo 3.4.

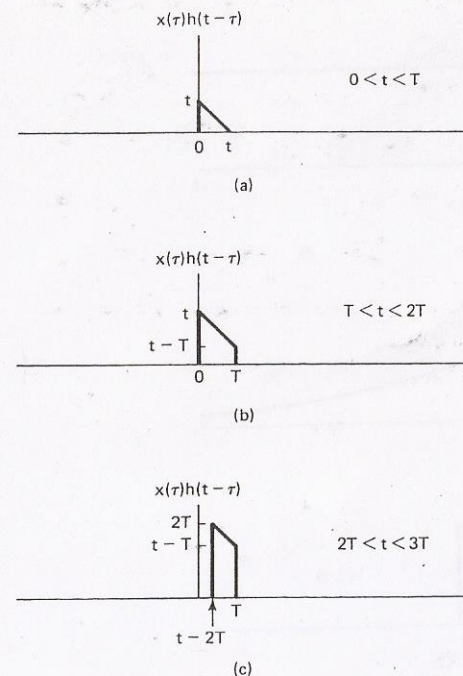


Figura 3.19 Producto $x(\tau)h(t-\tau)$ para el ejemplo 3.4 para los tres rangos de valores de t para los que este producto no es idéntico a cero (ver la figura 3.18).

Como se enfatizó, la consecuencia de estas representaciones es que las características de un sistema LTI son determinadas por su respuesta al impulso. A partir de este hecho, hemos deducido algunas propiedades concernientes a las conexiones en serie y en paralelo de los sistemas LTI, y en esta sección usaremos la caracterización de los sistemas LTI en términos de sus respuestas al impulso para examinar otras propiedades importantes de los sistemas.

3.4.1 Sistemas LTI con y sin Memoria

Recuerde de la sección 2.6.1 que un sistema carece de memoria si su salida en cualquier instante de tiempo depende sólo del valor de la entrada en ese mismo instante de tiempo.

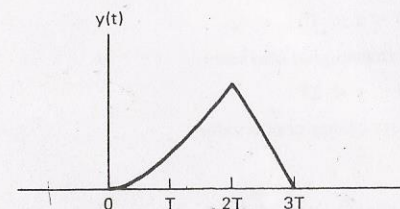


Figura 3.20 Señal $y(t) = x(t) * h(t)$ para el ejemplo 3.4.