TÉCNICA DE RESOLUCIÓN DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN.

Vimos cómo se puede obtener la respuesta de un sistema LTI, a una señal de entrada x(t), a partir de conocer la respuesta del mismo a la señal impulso unitario, dicha respuesta la denominamos h(t).

Para ello la operación matemática a resolver es la integral de convolución entre las dos señales x(t) y h (t). que tiene la forma :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau).d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau).x(t-\tau).d\tau$$

En las expresiones anteriores, se muestra una propiedad de la integral de convolución que es la conmutatividad. Si bien sus propiedades, las estudiaremos más adelante, ésta en particular puede ser útil al momento de resolver los ejercicios, ya que el resultado y(t) es el mismo al aplicar cualquiera de las dos expresiones, pero el procedimiento no, y a menudo conviene hacer un pequeño análisis de las señales x(t) y h (t), para elegir cuál de las integrales conviene utilizar.

Tomemos el caso de la primer integral. La expresión muestra que se debe integrar una señal, que surge del producto de otras dos señales, en las que una de ellas mantiene su forma original y sólo cambia la variable independiente t por τ ($x(\tau)$). La otra, además presenta una reflexión y un desplazamiento $h(t-\tau)$, siendo τ la variable de integración.

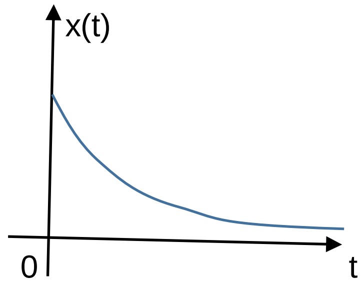
El desplazamiento de la señal $h(t-\tau)$, está dado por el valor de la variable externa a la integral t, que define el instante de tiempo para el cuál se calcula la respuesta y(t). Si tomamos valores puntuales por ejemplo, para y(5), quedaría $h(5-\tau)$, o para y(-2) quedaría $h(-2-\tau)$, en general, para un tiempo cualquiera y(t) decimos que es $h(t-\tau)$.

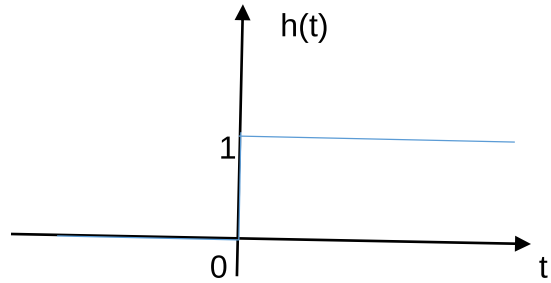
Desarrollaremos el ejemplo 3.3 de la página 97 del libro, con la salvedad que daremos un valor específico al coeficiente a = 2 de la función exponencial, quedando :

Señal de entrada : $x(t) = e^{-2.t}.u(t)$

Respuesta al impulso del S.L.T.I. : $h(t) = u(t)$

Para encontrar y(t), primeros grafiquemos de manera aproximada, tratando de visualizar la forma de estas señales en el plano cartesiano.



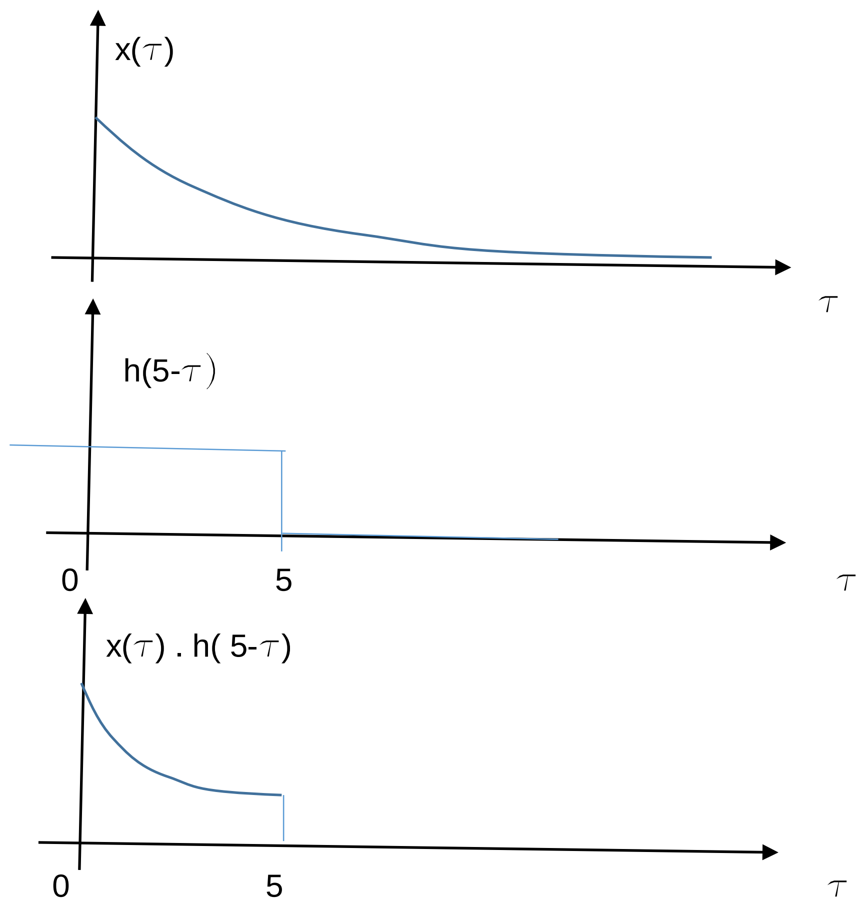


En este caso el dominio de las señales es el mismo, pero la señal h(t), es más simple que x(t), por lo que elegiremos la expresión en la que se desplaza y refleja h(t), (conviene siempre aplicar estas operaciones sobre la señal más sencilla).

Entonces utilizaremos :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau).d\tau$$

Para visualizar el producto de las señales a integrar, primero lo haremos suponiendo que queremos evaluar la respuesta en t = 5, es decir y(5). Graficamos las dos señales, una arriba de la otra, manteniendo la misma escala de la variable τ :

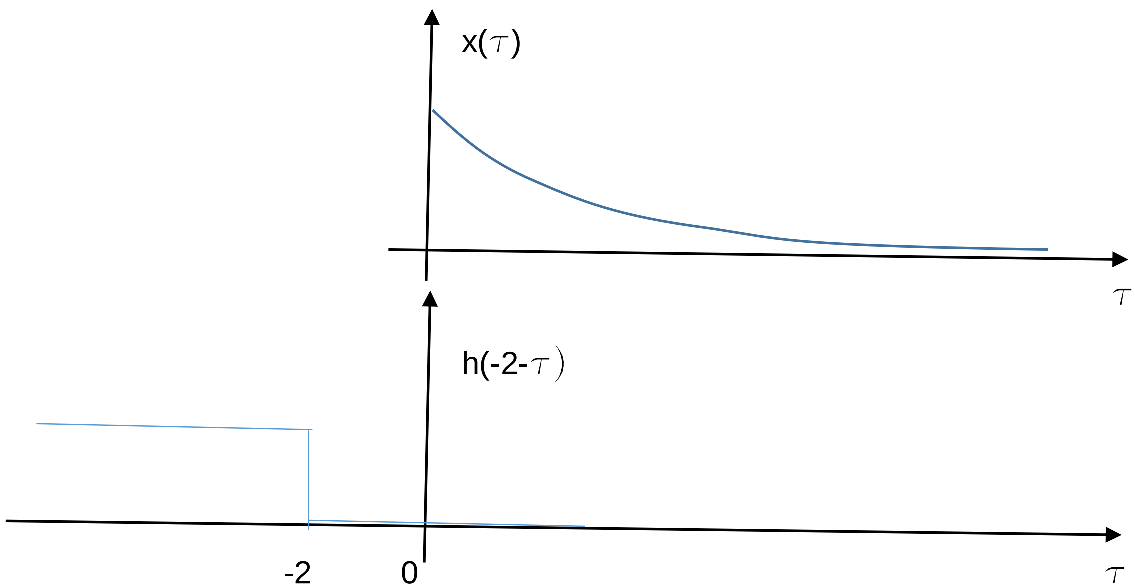


Vemos entonces que el intervalo de integración va de 0 a 5, que es el intervalo no nulo de la señal a integrar, quedando la respuesta :

$$y(5) = \int_0^5 e^{-2.\tau}\ d\tau = \frac{1}{(-2)}\ [e^{-2.\tau}\ ]_0^5$$

$$y(5) = -\frac{1}{2}[e^{-10} - 1\ ]$$

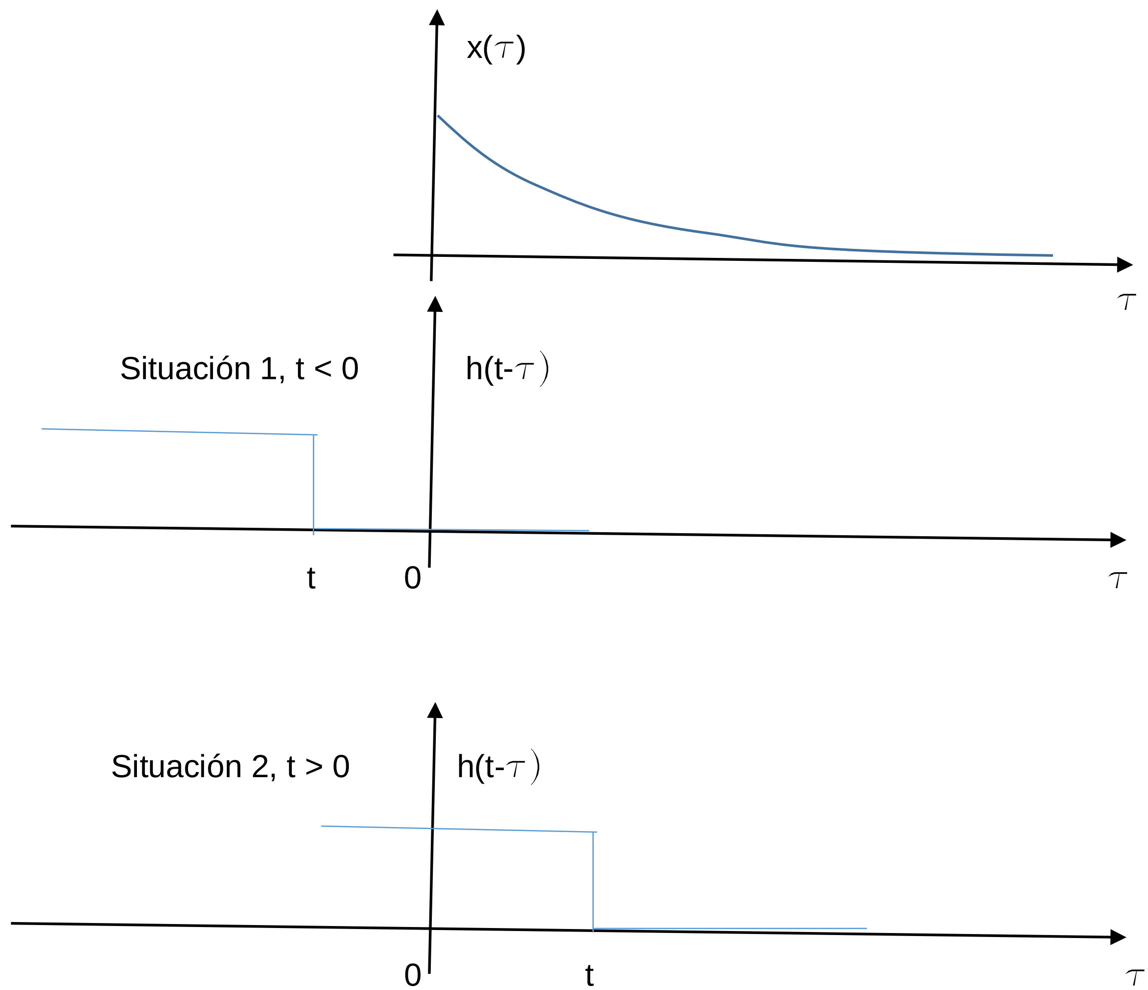
Vamos a obtener ahora, la respuesta para t = -2. Veamos el gráfico de las señales a multiplicar :



Vemos ahora que el producto, x(τ). h(-2-τ) = 0 para todo t, luego la integral es nula e y(-2).=0

Encontramos así, que la respuesta del sistema y(t), puede estar dadas por distintas expresiones, dependiendo del valor de t. Es por ello, que para tener una idea general de la respuesta en cualquier valor de t, y las expresiones que corresponde aplicar a un valor específico, realizaremos los gráficos anteriores, sin dar un valor particular a t como lo hicimos, quedando el desplazamiento de la señal y la respuesta del sistema, sujetos a los valores que pueda tomar t.

:



En este ejemplo, vemos que para la respuesta del sistema, existen dos situaciones posibles, que definen dos intervalos de tiempo en los que la respuesta se define con distintas expresiones matemáticas :

- Situación 1 : Es la situación que se presenta cuando t < 0, y las partes no nulas de las señales no se superponen, por lo tanto el producto es nulo para todo t, y la respuesta es y(t) = 0, si t<0.

- Situación 2 : Es la situación que se presenta si t >0, donde la expresión de la respuesta para este intervalo queda

$$y(t) = \int_0^t e^{-2.\tau} \; d\tau = \frac{1}{(-2)} \; [e^{-2.\tau} \,]_0^t$$

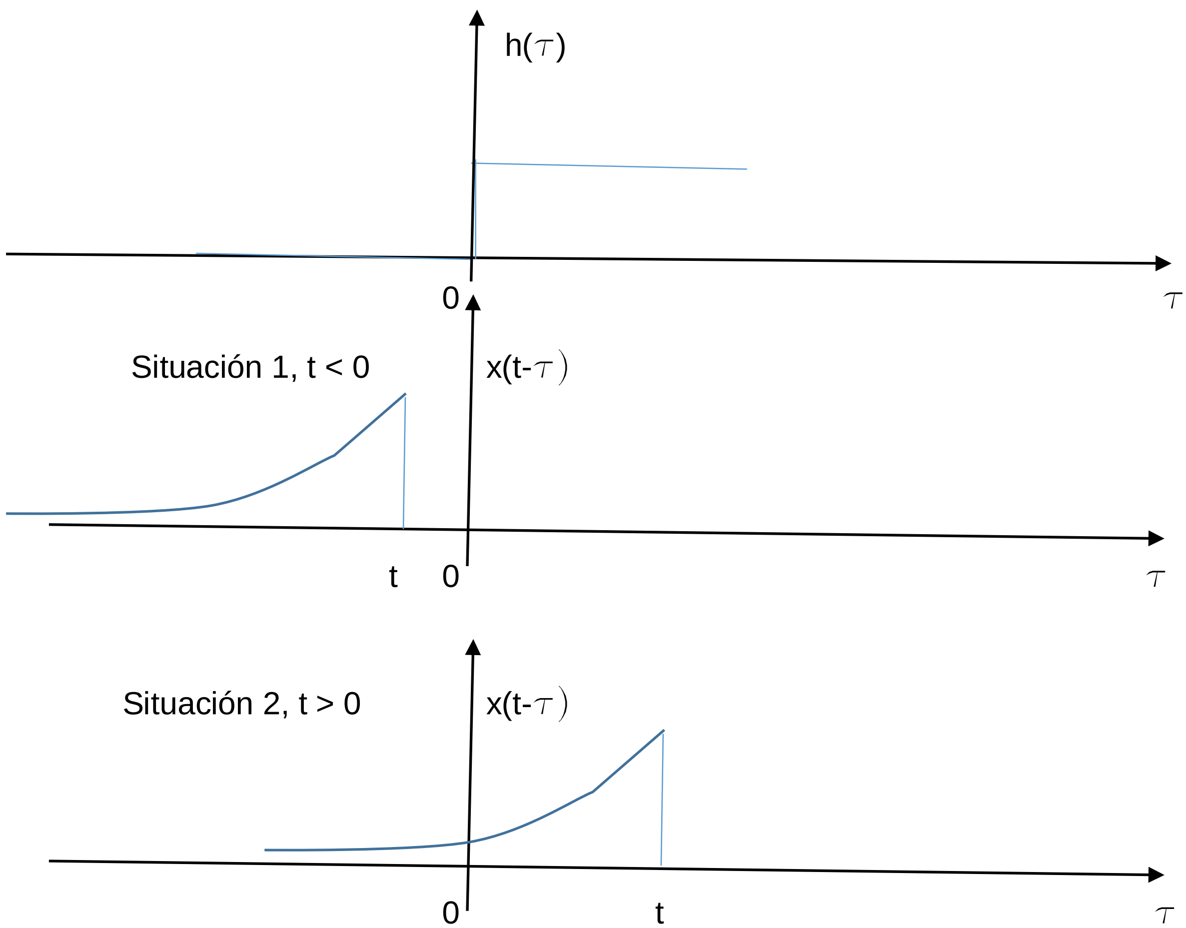
$y(t) = -\frac{1}{2}[e^{-\,2.t} - 1\,]$ válida si t > 0.

Resolvemos el mismo ejemplo utilizando la integral :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau).x(t-\tau).d\tau$$

Al ser x(t), la señal a reflejar y desplazar, su expresión matemática queda

$$x(t-\tau) = e^{-2.(t-\tau)}.u(t-\tau)$$



Advertimos que nuevamente, se presentan situaciones idénticas al caso anterior, aunque no las mismas integrales a resolver::

- Situación 1 : Es la situación que se presenta cuando t < 0, y las partes no nulas de las señales no se superponen, por lo tanto el producto es nulo para todo t, y la respuesta es y(t) = 0, si t<0.

- Situación 2 : Es la situación que se presenta si t >0, donde la expresión de la respuesta para este intervalo queda

$$y(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \ d\tau = \int_0^t e^{-2t}.e^{2\tau} \ d\tau = e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau} \ d\tau$$

$$y(t) = e^{-2\ t}\ [e^{2.\tau}\ ]_0^t$$

$y(t) = e^{-2\ t}\ .\frac{1}{2}[e^{\ 2.t} - 1\ ]$ válida si t > 0.

Si operamos algebraicamente, vemos que es la misma solución ya obtenida anteriormente

$y(t) = -\frac{1}{2}[e^{-\ 2.t} - 1\ ]$ para t > 0