

MATEMÁTICA SUPERIOR

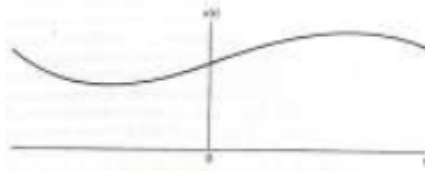
Unidad 1: Introducción a las señales y sistemas

Señales

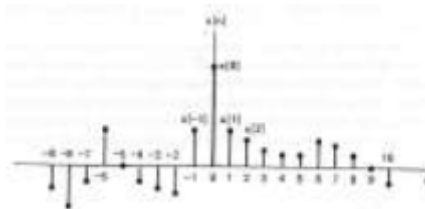
Las señales pueden describir una variedad muy amplia de fenómenos físicos. Aunque las señales se pueden representar de muchas maneras, en todos los casos la información dentro de una señal está contenida en un patrón de variaciones de alguna forma.

Las señales se representan matemáticamente como funciones de una o más variables independientes (siendo por lo general a la variable independiente como el tiempo).

- **De Tiempo Continuo:** La variable independiente es continua y entonces estas señales están definidas para una decisión continua de valores de la variable independiente. Se utiliza el símbolo t para denotar la variable de tiempo continuo y se encierra entre $()$. Ej.: $x(t)$

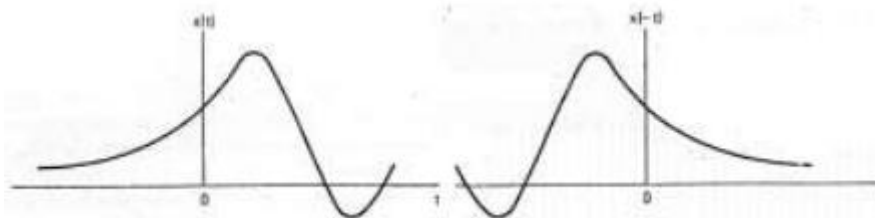


- **De tiempo Discreto:** Están definidos en tiempos discretos y, en consecuencia, para estas señales, la variable independiente toma solo un conjunto de valores discretos. Se simboliza con n a la variable independiente y se encierra entre $[]$. Ej.: $x[n]$

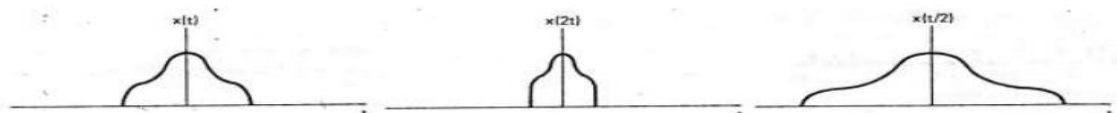


Las señales suelen estar relacionadas por **transformaciones de la variable independiente**, esto quiere decir que por cambios en la variable dos señales diferentes pueden estar perfectamente enlazadas y habilitadas para transformarse la una en la otra por medio de operaciones.

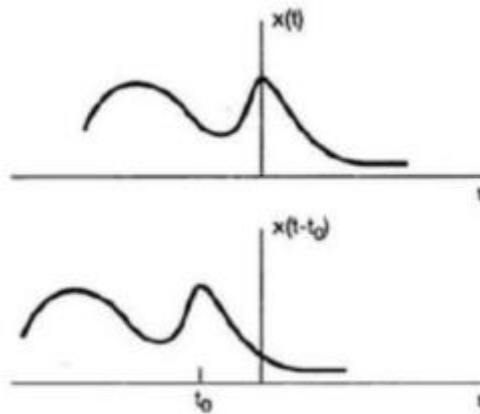
- **Reflexión:** La señal $x(-t)$ se obtiene a partir de $x(t)$ mediante una reflexión alrededor de $n=0$ (mediante la inversión de la señal).



- **Escalamiento:** Las señales $x(t)$, $x(2t)$, $x(t/2)$, están relacionadas por cambios lineales de escala en la variable independiente.

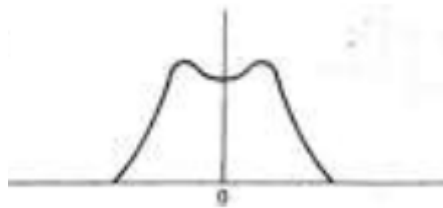


- **Desplazamiento:** Las señales $x(t)$ y $x(t - t_0)$ son idénticas en forma, pero están desplazadas o corridas una con respecto a otra.

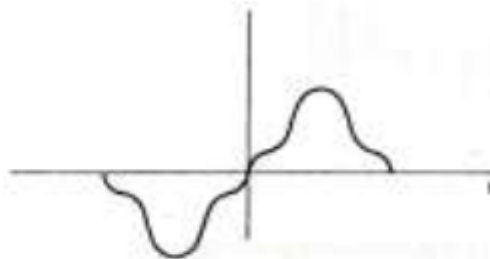


Si se usa como ejemplo una grabadora de cinta, entonces:
 $x(-t)$ es la misma grabación, pero reproducida en sentido contrario.
 $x(2t)$ es la grabación reproducida al doble de velocidad.
 $x(t/2)$ es la grabación reproducida a media velocidad.

Señal Par: Una señal $x(t)$ es una señal par si es idéntica a su reflexión alrededor del origen, esto es $x(t) = x(-t)$

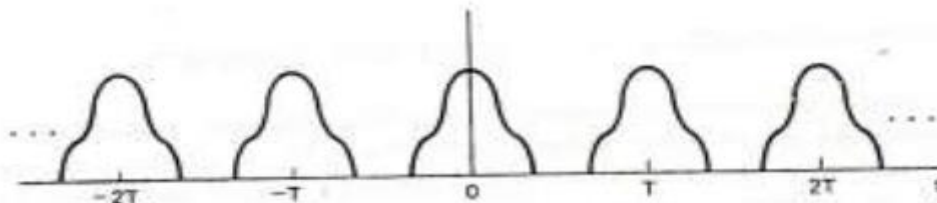


Señal Impar: Una señal es referida como señal impar si $x(-t) = -x(t)$ (esta señal debe ser 0 en $t=0$).



Una **señal periódica** $x(t)$ de tiempo continuo tiene la propiedad de que hay un valor positivo T para el cual $x(t) = x(t + T)$ para toda t .

#Ademas el periodo fundamental T_0 de $x(t)$ es el valor positivo más pequeño de T para el cual la ecuación $x(t) = x(t + T)$ se satisface. Definición valida a menos que $x(t)$ sea constante



1. Funciones impulso unitario y escalón unitario en tiempo continuo. Definiciones. Representación incremental. Propiedades del impulso y relación matemática entre ambas señales.

Impulso Unitario $\delta(t)$. Tiempo Continuo

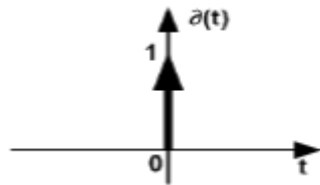
Definición

La Función Delta de Dirac, conocida también como Impulso Unitario o función Delta "es una función infinitamente angosta, infinitamente alta y cuya integral tiene un valor unitario".

(Vale 0 cuando $t \neq 0$ y tiende a infinito cuando t se acerca a 0).

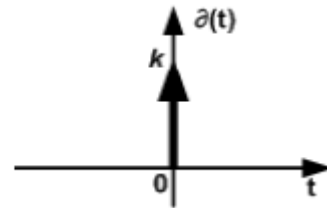
No es una función realmente, es lo que se conoce como una función generalizada o distribución.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty; & \text{p/ } t = 0 \\ 0; & \text{p/ } t \neq 0 \end{cases} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t).dt = 1$$



En General si tenemos $k \cdot \delta(t)$, un impulso escalado, el área es igual a k , con $k = \text{cte}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} k \cdot \delta(t).dt = k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t).dt = k$$

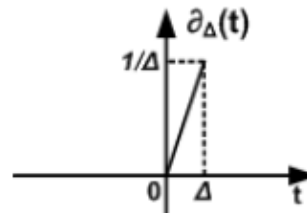


Representación incremental $\partial\Delta(t)$

$\partial\Delta(t)$ tiene área unitaria para cualquier valor de Δ y es 0 fuera del intervalo $0 < t < \Delta$. A medida que $\Delta \rightarrow 0$, $\partial\Delta(t)$ se hace más angosta y más alta y en el límite es igual a $\delta(t)$.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \partial_{\Delta}(t) = \delta(t)$$

$$\partial_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}; & \text{p/ } 0 < t < \Delta \\ 0; & \text{p/ otro } t \end{cases}$$



$\Delta = \text{crecimiento infinitesimal. Area} = \text{Base} \times \text{Altura} = 1$

$$\text{Area} = \Delta \times \frac{1}{\Delta} = 1$$

Propiedades

- Propiedad del desplazamiento

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t).dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(0) \cdot \delta(t).dt = x(0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t).dt = x(0) \cdot 1 = x(0)$$

$$x(t) \cdot \partial(t-t_0) = x(t_0) \cdot \partial(t-t_0)$$

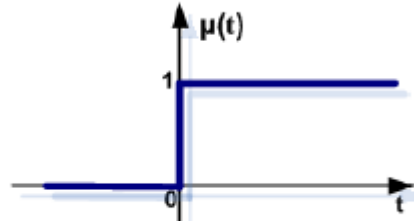
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \partial(t-t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) \cdot \partial(t-t_0) dt = x(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \partial(t-t_0) dt = x(t_0) \cdot 1 = x(t_0)$$

Escalón Unitario $\mu(t)$. Tiempo Continuo

Definición

Es una función que vale 0 para $t < 0$ y 1 para $t > 0$. Nótese que es discontinua en el origen, sin embargo no necesita ser definida en este punto ya que no es necesario en teoría de las señales.

$$\mu(t) = \begin{cases} 0; & p/ t < 0 \\ 1; & p/ t > 0 \end{cases} \quad ;;$$

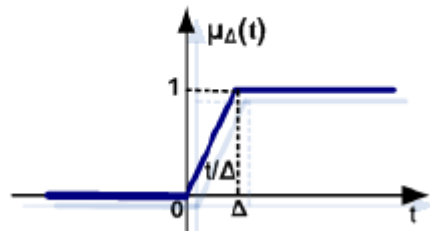


Representación incremental $\mu_{\Delta}(t)$.

A medida que $\Delta \rightarrow 0$, $\mu_{\Delta}(t)$ se asemeja más a $\mu(t)$, y en el límite se hacen iguales.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \mu_{\Delta}(t) = \mu(t)$$

$$\mu_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0; & p/ t < 0 \\ \frac{t}{\Delta}; & p/ 0 < t < \Delta \\ 1; & p/ t > \Delta \end{cases}$$



Relación matemática entre el Impulso y el Escalón Unitario

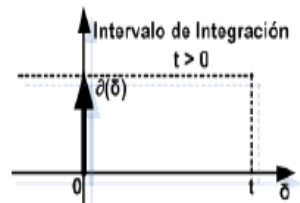
IMPORTANTE!!!

El Escalón Unitario $\mu(t)$ es la "integral" de la función Impulso Unitario $\partial(t)$. $\mu(t) = \int_{-\infty}^t \partial(\tau) d\tau$

El Impulso Unitario $\partial(t)$ es la "derivada" de la función Escalón Unitario $\mu(t)$. $\partial(t) = \frac{d\mu(t)}{dt}$

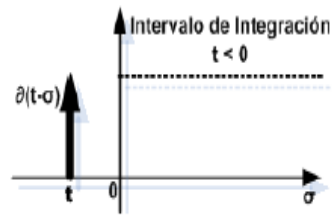
La relación $\mu(t) = \int_{-\infty}^t \partial(\tau) d\tau$, se puede escribir de forma diferente cambiando la variable de integración τ por $\sigma = t - \tau$. Despejando, $\tau = t - \sigma$ y $d\tau = -d\sigma$

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^t \partial(\tau) d\tau = \int_{\infty}^0 \partial(t - \sigma) (-d\sigma)$$



Otra forma equivalente,

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^t \partial(\tau) \cdot d\tau = \int_0^{\infty} \partial(t - \sigma) \cdot d\sigma$$



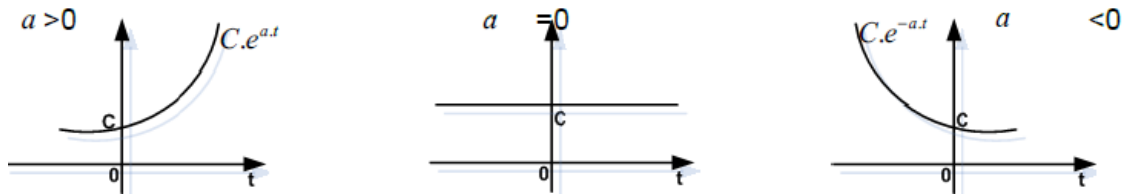
2. Funciones exponenciales de exponente imaginario puro en tiempo continuo. Periodicidad y frecuencias. Definición y características de las funciones exponenciales complejas armónicas. Funciones exponenciales de exponente complejo.

Funciones Exponenciales. Tiempo Continuo.

La señal exponencial compleja tiene la forma $x(t) = C \cdot e^{a \cdot t}$, donde C y a son generalmente, números complejos. Dependiendo de estos valores, pueden presentarse distintas situaciones:

- 1) Exponencial Real: C y $a \in \mathbb{R}$

Dependiendo del valor de a puede darse que:



- 2) Complejos Completos - Forma General: C y $a \in \mathbb{C}$

Al ser números complejos, podemos escribir como:

$x(t) = |C| \cdot e^{j\theta} \cdot e^{(r+j \cdot w_0) \cdot t}$, donde $C = |C| \cdot e^{j\theta}$, según la forma polar de los números complejos y, $a = r + j \cdot w_0$, según la forma cartesiana.

-Entonces:

$$x(t) = |C| \cdot e^{j\theta} \cdot e^{(r+j \cdot w_0) \cdot t} = |C| \cdot e^{j\theta} \cdot e^{r \cdot t} \cdot e^{j \cdot w_0 \cdot t} = |C| \cdot e^{r \cdot t} \cdot e^{j(w_0 \cdot t + \theta)}$$

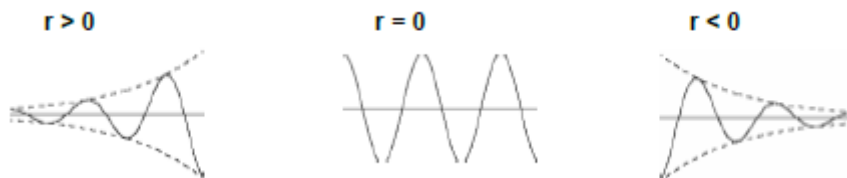
-Según la forma de Euler para los números complejos, podemos reescribir $e^{j(w_0 \cdot t + \theta)}$, por lo tanto:

$$x(t) = |C| \cdot e^{r \cdot t} \cdot e^{j(w_0 \cdot t + \theta)} = |C| \cdot e^{r \cdot t} [\cos(w_0 \cdot t + \theta) + j \cdot \text{sen}(w_0 \cdot t + \theta)]$$

-Finalmente, distribuyendo los términos:

$$x(t) = \underbrace{|C| \cdot e^{r \cdot t} \cdot \cos(w_0 \cdot t + \theta)}_{\text{parte Real}} + j \cdot \underbrace{|C| \cdot e^{r \cdot t} \cdot \text{sen}(w_0 \cdot t + \theta)}_{\text{parte Imaginaria}}$$

Dependiendo del valor de r puede darse que:



- 3) Forma Imaginaria Pura: $a \in \mathbb{C}$ y $C \in \mathbb{R}$, donde $a = r + j \cdot w_0$ y $C = 1$

Como la parte Real r es 0, $a = j \cdot w_0$. Entonces $x(t) = |C| \cdot e^{a \cdot t}$ puede escribirse como $x(t) = e^{j \cdot w_0 \cdot t}$

Periodicidad y Frecuencia

Una señal es "periódica", con período T si:

$$x(t) = x(t + T)$$

Una propiedad importante de la función $x(t) = e^{j \cdot w_0 \cdot t}$ es que se trata de una señal periódica, con lo cual podemos deducir:

$$\begin{aligned} e^{j \cdot w_0 \cdot t} &= e^{j \cdot w_0 \cdot (t+T)} \\ e^{j \cdot w_0 \cdot t} &= e^{j \cdot w_0 \cdot t} \cdot e^{j \cdot w_0 \cdot T} \\ \frac{e^{j \cdot w_0 \cdot t}}{e^{j \cdot w_0 \cdot t}} &= \frac{e^{j \cdot w_0 \cdot t}}{e^{j \cdot w_0 \cdot t}} \cdot e^{j \cdot w_0 \cdot T} \\ 1 &= e^{j \cdot w_0 \cdot T} \end{aligned}$$

Según la forma de Euler para los números complejos podemos reescribir $e^{j \cdot w_0 \cdot t}$ quedando:

$$1 = \cos(w_0 \cdot T) + j \cdot \text{sen}(w_0 \cdot T)$$

Si $w_0 = 0$ entonces $x(t) = 1$ es periódica para cualquier valor de T . Por otro lado, la Frecuencia Fundamental de una señal constante es igual a 0 (velocidad de oscilación igual a 0).

Si $w_0 \neq 0$, entonces $w_0 \cdot T = 2 \cdot K \cdot \pi$; con $K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ y el período queda determinado por:

$$T = \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{w}$$

Si $k = 1$, tenemos el Período y la Frecuencia Fundamental.

Período Fundamental:

$$T_0 = \frac{2 \cdot \pi}{w_0}$$

Frecuencia Fundamental:

$$w_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T_0}$$

“Se observa que ambas son inversamente proporcionales, si aumenta el Período disminuye la Frecuencia y viceversa”.

Funciones Exponenciales Complejas Armónicas

Definición

Señales Exponenciales Complejas relacionadas de forma Armónica, son un conjunto de Exponenciales periódicas todo múltiplo de una Frecuencia Fundamental positiva w_0 tal que:

$$\phi_k(t) = e^{j \cdot k \cdot w_0 \cdot t}, \text{ con } k = K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Características

Señales Exponenciales Complejas relacionadas de forma Armónica, son un conjunto de Exponenciales periódicas todo múltiplo de una Frecuencia Fundamental positiva w_0 tal que:

Si $k = 0$, entonces $\phi_k(t)$ es una constante.

Si $k \neq 0$, entonces $\phi_k(t)$ es periódica, con Período Fundamental $T_0 = \frac{2 \cdot \pi}{|k| \cdot w_0}$ o lo que es lo mismo, con Frecuencia Fundamental $|k| \cdot w_0$.

Como una señal periódica con período T es también periódica con $m \cdot T$, para cualquier entero positivo m , entonces todas las señales $\phi_k(t)$ tienen un periodo común $T_0 = \frac{2 \cdot \pi}{w_0}$

Funciones Exponenciales de Exponente Complejo????????

Definición

$$\phi_k(t) = e^{j \cdot k \cdot w_0 \cdot t}, \text{ con } k = K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Características

3. Propiedades de los sistemas: memoria, invertibles, Causalidad, Estabilidad, Linealidad, Invariabilidad en el tiempo.

Memoria

Un Sistema tiene Memoria, si su salida en cada instante de tiempo depende sólo de valores pasados o futuros. Ej: $y(t) = x(t \pm 1)$.

Un Sistema no tiene Memoria, si su salida en cada instante de tiempo depende sólo del valor de la entrada en ese instante de tiempo.

Ej. $y(t) = x(t)$. Señales Exponenciales Complejas relacionadas de forma Armónica, son un conjunto de Exponenciales periódicas todo múltiplo de una Frecuencia Fundamental positiva w_0 tal que:

$$\phi_k(t) = e^{j.k.w_0.t}, \text{ con } k = K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Invertibilidad

Un Sistema es Invertible, si al observar su salida puede recuperarse su entrada.

Ej. $y(t) = 2 \cdot x(t)$. por lo tanto, su inverso $y'(t) = \frac{1}{2}y(t) = x(t)$.

Causalidad

Un Sistema es Causal, si su salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de valores pasados o presentes, es no-anticipativo.

Ej: $y(t) = x(t) + x(t - 1)$.

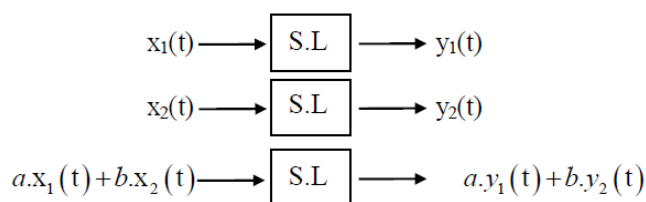
Estabilidad

Un Sistema es estable, si para toda entrada acotada produce una salida acotada y por lo tanto no diverge.

Ej: $|x(t)| \leq M_x < \infty \rightarrow |y(t)| \leq M_y < \infty, \text{ para todo } t$.

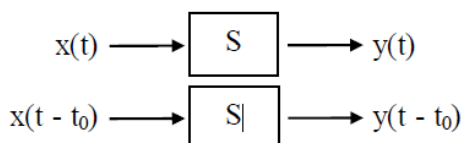
Linealidad

Un Sistema es Lineal, si satisface el principio de Superposición o Aditividad, o sea, si una entrada consiste en una suma de varias señales, entonces la salida es la superposición de las señales o suma de las respuestas del Sistema a cada una de las señales de entrada.



Invarianza en el Tiempo

Un Sistema es Invariante en el Tiempo, si un desplazamiento en la señal de entrada provoca un desplazamiento en la señal de salida.



Unidad 2: Introducción a las señales y sistemas

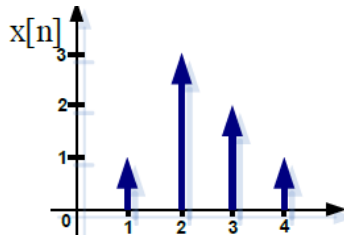
4. Convolución en tiempo continuo: escudriñamiento del impulso unitario, aproximación incremental, integral de convolución.

Convolución en Tiempo Continuo

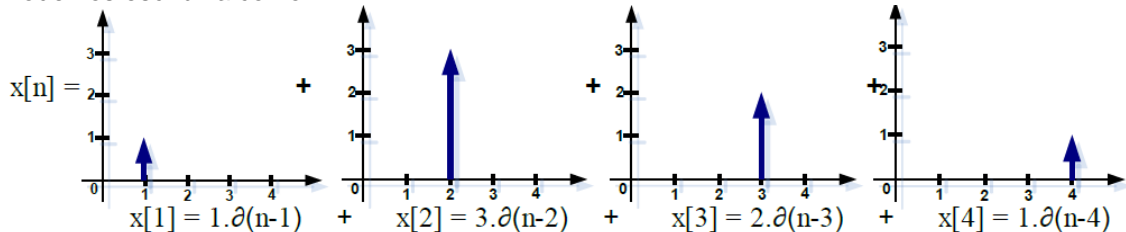
Los Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (SLIT), poseen la propiedad de superposición, con lo cual podemos representar la entrada en términos de señales básicas, en especial el Impulso Unitario.

Escudriñamiento del impulso en Tiempo Discreto

Es una combinación Lineal de Impulsos Unitarios desplazados en el tiempo. Por ejemplo, si tenemos una señal:



Podemos escribirla como:



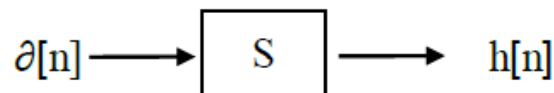
Generalizando:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta(n-k)$$

$x[k]$ = Altura (peso)
 $\delta[n-k]$ = Impulsos desplazados

Respuesta de un Sistema LTI

La salida de un Sistema ante la entrada de un Impulso Unitario, es la respuesta a ese impulso.



Por lo tanto, podemos escribir la salida $y[n]$ como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_k[n]$$

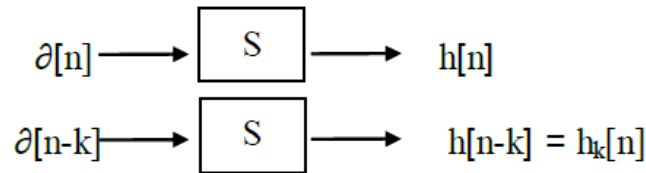
Suma de Convolución

Concepto

Si conocemos la respuesta de un Sistema Lineal para un conjunto de muestras unitarias desplazadas en el tiempo, podemos construir la respuesta a una determinada entrada a través de la superposición.

Entonces, la respuesta a un Sistema Lineal en un instante de tiempo, es sólo la superposición de las respuestas a cada uno de los valores de entrada.

Si además el Sistema es Invariante en el tiempo, podemos decir que $h_{\tau}[n] = h[n - k]$



De esta manera, la salida

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

Se conoce como "Suma de Convolución".

Por lo tanto, un Sistema Lineal Invariante en el Tiempo queda por completo caracterizado por su respuesta al impulso.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\text{SLIT}} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

De forma simbólica la Suma de Convolución se representa como:

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

Interpretación Gráfica

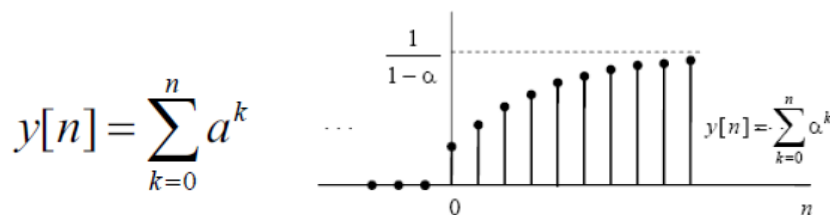
Como interpretación podemos observar que la respuesta a una entrada $x[k]$ en el instante k es $x[k] \cdot h[n-k]$, la cual es una versión desplazada y escalada de $h[n]$.

La respuesta real es la superposición de todas estas respuestas. Para cualquier instante fijo n , la salida $y[n]$ consiste de la suma de todos los valores $x[k] \cdot h[n-k]$.

Si $x[n] = a^n$ y $h[n] = \mu[n]$

$$x[k] \cdot h[n-k] = \begin{cases} a^k, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{p/ otro } n \end{cases}$$

Entonces para $n \geq 0$



Aproximación Incremental

Toda señal se puede expresar en forma de un límite como una Combinación Lineal de Impulsos desplazados como:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \cdot \Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k \cdot \Delta) \cdot \Delta$$

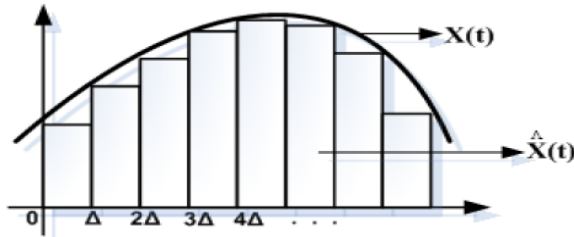
Donde:

$$\partial_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}; & \text{p/ } 0 < t < \Delta \\ 0; & \text{p/ otro } t \end{cases}$$

$$x(k.\Delta) \cdot \partial_{\Delta}(t - k.\Delta) = \text{Altura}$$

$$\Delta = \text{Base}$$

Gráficamente



$$\begin{aligned} \hat{X}(t) = & x(0.\Delta) \cdot \partial_{\Delta}(t - 0.\Delta) \cdot \Delta \\ & + x(1.\Delta) \cdot \partial_{\Delta}(t - 1.\Delta) \cdot \Delta \\ & + x(2.\Delta) \cdot \partial_{\Delta}(t - 2.\Delta) \cdot \Delta \\ & \dots \\ & + x(k.\Delta) \cdot \partial_{\Delta}(t - k.\Delta) \cdot \Delta \end{aligned}$$

Entonces:

$$\hat{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k.\Delta) \cdot \partial_{\Delta}(t - k.\Delta) \cdot \Delta$$

Aplicando el Límite para cuando $\Delta \rightarrow 0$

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{X}(t)$$

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k.\Delta) \cdot \partial_{\Delta}(t - k.\Delta) \cdot \Delta$$

Con lo cual, la sumatoria (de las áreas pasa a ser una integral)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \partial(t - \tau) \cdot d\tau \quad \left\{ \begin{array}{l} x(k.\Delta) \rightarrow x(\tau) \\ \partial_{\Delta}(t - k.\Delta) \rightarrow \partial(t - \tau) \\ \Delta \rightarrow d\tau \end{array} \right.$$

Integral de convolución

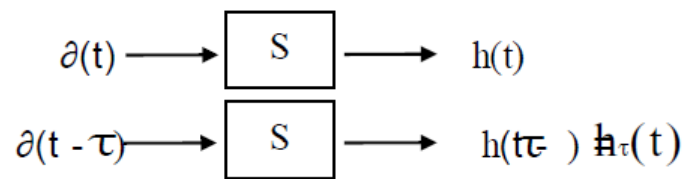
Si definimos $\hat{h}_{k,\Delta}(t)$ como la respuesta a la entrada $\partial_{\Delta}(t - k.\Delta)$, podemos determinar la salida $y(t)$ a través de la superposición.

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k.\Delta) \cdot \hat{h}_{k,\Delta}(t) \cdot \Delta$$

Cuando $\Delta \rightarrow 0$, la sumatoria pasa a ser una Integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h_{\tau}(t) \cdot d\tau \quad \left\{ \begin{array}{l} x(k.\Delta) \rightarrow x(\tau) \\ \hat{h}_{k,\Delta}(t) \rightarrow h_{\tau}(t) \\ \Delta \rightarrow d\tau \end{array} \right.$$

Además, al ser Lineal e Invariante en el Tiempo, podemos escribir $h_{\tau}(t) = h(t - \tau)$



De esta manera se conoce a la salida como “Integral de Convolución”

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

5. Condiciones en la respuesta al impulso de un sistema LTI ($h(t)$ o $h(n)$), para cumplir las propiedades de: no poseer memoria, ser invertible, ser causal, ser estable.

Condiciones en la respuesta al impulso de un sistema LTI para que el sistema sea:

Sin Memoria

"La salida en cualquier instante de tiempo depende sólo del valor de la entrada en ese instante".

Para $y(t) = x(t) * h(t)$ esta condición es posible solo si $h(t) = 0$, para $t \neq 0$ y en este caso, la respuesta al Impulso es de la forma $h(t) = k \cdot \delta(t)$, donde $k = h(0)$ y por lo tanto la salida es:

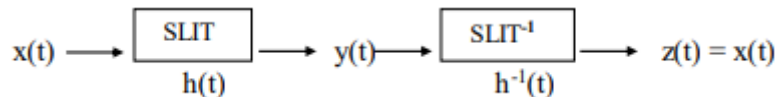
$$y(t) = k \cdot x(t)$$

Si $k=1$, el Sistema llega a ser el Sistema Identidad, con entrada igual a la salida y respuesta igual al Impulso Unitario.

$$y(t) = x(t) * \delta(t), \text{ "}\delta(t) \text{ es el elemento neutro en la Convolución"}$$

Invertible

"Si existe un sistema inverso conectado al sistema original, la salida es igual a la entrada original".



Por lo tanto $h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t)$

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ z(t) &= y(t) * h^{-1}(t) \end{aligned} \right\} z(t) = x(t) * h(t) * h^{-1}(t) = x(t) * \delta(t)$$

Causal

"La salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de valores de entrada presente y anteriores".

Para que el Sistema sea Causal debe darse que la respuesta al Impulso cumpla la condición:

$h(t) = 0$, para $t < 0 \therefore$ cualquier señal $x(t)$ es Causal si $x(t) = 0$, para $t < 0$
Y en este caso la Integral de Convolución se convierte en:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) \cdot d\tau$$

Estable

"Si la entrada al Sistema es acotada, entonces su salida también debe ser acotada".

Si $|x(t)| < \beta$, para todo t , entonces:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau < \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| \cdot |h(t - \tau)| \cdot d\tau$$

$$y(t) \leq \beta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |h(t - \tau)| \cdot d\tau < \infty \text{ por reemplazar } |x(\tau)|$$

Unidad 3: Fourier en tiempo continuo

6. Señales básicas exponenciales complejas, como funciones características de los Sistemas LTI. Serie de Fourier: Interpretación, aplicación a la respuesta de Sistemas LTI con excitación periódica y deducción de sus coeficientes. Condiciones de convergencia.

Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo: Señales Básicas Exponenciales Complejas:

Si la entrada a un SLIT se expresa como una combinación lineal de exponenciales complejas, la salida también se puede expresar de esta forma.

“La importancia de las exponenciales complejas proviene del hecho de que la respuesta a un SLIT ante una entrada exponencial compleja, es la misma exponencial compleja modificada sólo en Amplitud”.

$$e^{st} \rightarrow H(s).e^{st}$$

Siendo el factor de Amplitud $H(s)$ una función de una variable compleja s .

Una señal para la cual la salida es igual a la entrada multiplicada por una constante se conoce como “Función Característica” y el factor de Amplitud es el “Valor Característico”.

Considerando un SLIT con entrada $x(t) = e^{st}$ y respuesta al impulso $h(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).x(t-\tau).d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).e^{s(t-\tau)}.d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).e^{st}.e^{-s\tau}.d\tau$$

$$y(t) = e^{st} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).e^{-s\tau}.d\tau$$

Entonces, la salida queda determinada por

$$y(t) = H(s).e^{st}$$

Donde $H(s)$ es la respuesta del sistema a una exponencial compleja

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).e^{-s\tau}.d\tau$$

“Por lo tanto cualquier función exponencial compleja es Función Característica de un SLIT”. Si tenemos una señal de entrada como combinación lineal

$$x(t) = a_1.e^{s_1 t} + a_2.e^{s_2 t} + a_3.e^{s_3 t} + \dots + a_n.e^{s_n t}$$

Entonces la respuesta para cada señal por separado es:

$$\begin{aligned} a_1.e^{s_1 t} &\rightarrow a_1.H(s_1).e^{s_1 t} \\ a_2.e^{s_2 t} &\rightarrow a_2.H(s_2).e^{s_2 t} \\ &\dots \dots \dots \\ a_n.e^{s_n t} &\rightarrow a_n.H(s_n).e^{s_n t} \end{aligned}$$

Por propiedad de superposición, podemos escribir:

$$y(t) = a_1.H(s_1).e^{s_1 t} + a_2.H(s_2).e^{s_2 t} + \dots + a_n.H(s_n).e^{s_n t} \quad , \text{ o sea}$$

$$y(t) = \sum_k a_k.H(s_k).e^{s_k t}$$

Por lo tanto, si conocemos los valores característicos $H(sk)$, la respuesta se puede construir de manera directa.

Serie de Fourier

“La Serie de Fourier describe señales periódicas como una combinación de señales armónicas”. Se pueden analizar entonces, señales periódicas en término de sus frecuencias o espectros.

Interpretación

Como vimos, una señal es periódica si para algún valor positivo

$$T \neq 0, x(t) = x(t - T) \text{ para todo } t.$$

T_0 es el mínimo valor positivo de $T \neq 0$ para el cual se cumple la ecuación anterior y $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

Si $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, tenemos un conjunto de exponenciales complejas relacionadas armónicamente,

$$\phi_k(t) = e^{jkw_0 t}, \text{ con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Vemos que cada una de estas señales tiene una Frecuencia Fundamental múltiplo de w_0 o Frecuencia del Armónico de orden k ($k \cdot w_0$) y por lo tanto, cada una es periódica con Período Fundamental T_0 . Entonces, una combinación lineal de exponenciales complejas relacionadas armónicamente de la forma,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jkw_0 t}$$

Es también periódica y se la conoce como la representación en “Serie de Fourier”.

Aplicación a la respuesta de un SLIT con excitación periódica.

Del hecho de que cada exponencial compleja es una Función Característica del Sistema, se deduce la salida como:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot H(k \cdot w_0) \cdot e^{jkw_0 t}$$

Donde los Valores Característicos son:

$$H(k \cdot w_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-jkw_0 \tau} \cdot d\tau$$

Como vimos anteriormente, teniendo los Valores Característicos, podemos construir la respuesta al Sistema Directamente.

De esta manera si $\{a_k\}$ es el conjunto de coeficientes de la Serie de Fourier para la entrada $x(t)$, entonces $\{a_k \cdot H(k \cdot w_0)\}$ es el conjunto de coeficientes para la salida $y(t)$.

“La respuesta del Sistema a una señal periódica es también una señal periódica, con la misma frecuencia que la señal de entrada, pero diferentes magnitudes y fases”.

Deducción de los coeficientes de la Serie de Fourier.

Teniendo la representación en Serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jkw_0 t}, \text{ con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Multiplicando ambos miembros por $e^{-jn\omega_0 t}$

$$x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jkw_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t}$$

Integrando sobre un Periodo, por ejemplo, desde 0 a $T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$

$$\int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \left[\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} \cdot dt \right]$$

Teniendo en cuenta la Integral entre corchetes, puede darse que:

1) $k \neq n$

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} \cdot dt = \frac{e^{j(k-n)\omega_0 t}}{j(k-n)\omega_0} \bigg|_0^{T_0}$$

$$= \frac{1}{j \cdot (k-n) \cdot 2\pi} \cdot (e^{j \cdot (k-n) \cdot 2\pi} - 1)$$

Por la forma de Euler, $= \frac{1}{j \cdot (k-n) \cdot 2\pi} \cdot \underbrace{(\cos[(k-n) \cdot 2\pi] + j \cdot \text{sen}[(k-n) \cdot 2\pi] - 1)}_{=0}$

Por lo tanto $\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} \cdot dt = 0$, con lo cual no podemos determinar los valores a_k

2) $k = n$

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} \cdot dt = \int_0^{T_0} e^0 \cdot dt = \int_0^{T_0} dt = t \bigg|_0^{T_0} = T_0$$

Por lo tanto podemos determinar los valores a_k

$$\int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \left[\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} \cdot dt \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot T_0$$

En especial cada valor a_k de la Sumatoria se puede obtener despejando:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt$$

Cada uno de estos coeficientes complejos, miden la potencia de la señal $x(t)$ que está en cada armónica de la Componente Fundamental.

Condiciones de Convergencia

En algunos casos la Integral para obtener los coeficientes a_k de la Serie de Fourier puede ser un valor ∞ , por lo tanto puede divergir.

Para asegurar que esto no ocurra se deben cumplir ciertas condiciones (Condiciones de Dirichlet):

- 1) " $x(t)$ debe ser Absolutamente Integrable en un periodo".
Debe darse que:

$$\int_{T_0} |x(t)| \cdot dt < \infty$$

Con lo cual se garantiza que cada coeficiente a_k será finito ya que:

$$|a_k| \leq \frac{1}{T_0} \cdot \int_{T_0} |x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t}| \cdot dt; \quad |e^{-jk\omega_0 t}| = 1$$

$$|a_k| \leq \frac{1}{T_0} \cdot \int_{T_0} |x(t)| \cdot dt < \infty$$

Y, en consecuencia

$$|a_k| < \infty$$

- 2) “Existe un número finito de Máximos y Mínimos en un periodo”.

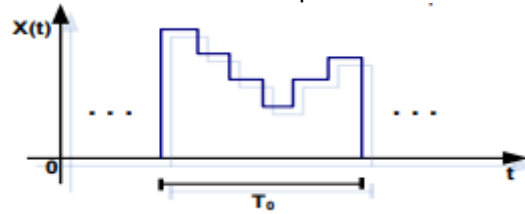
Esto es así, si consideramos la variación de $x(t)$ en un periodo de tiempo está Acotada.

Caso contrario, si tenemos una señal como:

$$x(t) = \sin \frac{2\pi}{t}; 0 < t < 1$$

Vemos que cumple la primera condición, pero tiene un número infinito de máximo y mínimos.

- 3) “El número de Discontinuidades dentro de un periodo es finito”.



7. Transformada de Fourier: deducción a partir de la serie de Fourier. Interpretación gráfica. Condiciones de convergencia.

Transformada de Fourier

“Se busca representar una señal No Periódica, la cuál puede ser vista como el Límite de una señal Periódica, cuando el período tiende a infinito”.

Partiendo de una señal No Periódica $x(t)$, se trata de construir una señal periódica $\bar{x}(t)$, donde $x(t)$ es un periodo.

Teniendo en cuenta el Periodo Fundamental y tomando el límite para $T_0 \rightarrow \infty$, con lo cuál $w_0 \rightarrow 0$, entonces $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = x(t)$, para cualquier valor finito de t .

Deducción a partir de la serie de Fourier

Representando $\bar{x}(t)$ en Serie de Fourier,

$$\bar{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jkw_0 t} \quad (1)$$

Tomando por conveniencia el intervalo $-\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$ para la integral de los coeficientes,

$$a_k = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \bar{X}(t) \cdot e^{-jkw_0 t} \cdot dt$$

Ya que $x(t) = \bar{x}(t)$ para el intervalo $-\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$ y $x(t) = 0$ fuera de ese intervalo,

$$a_k = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \bar{X}(t) \cdot e^{-jkw_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-jkw_0 t} \cdot dt$$

Definiendo la envolvente $x(w)$ de $T_0 \cdot a_k$ como:

$$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-jw t} \cdot dt$$

Obtenemos la “Transformada de Fourier”

Los coeficientes a_k se pueden expresar de la forma:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \cdot x(k \cdot w_0) \quad (2)$$

Relacionando las ecuaciones 1 y 2, podemos expresar \bar{x} en términos de $x(w)$,

$$\bar{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \cdot x(k \cdot w_0) \cdot e^{jkw_0 t}$$

O, su equivalente en frecuencia

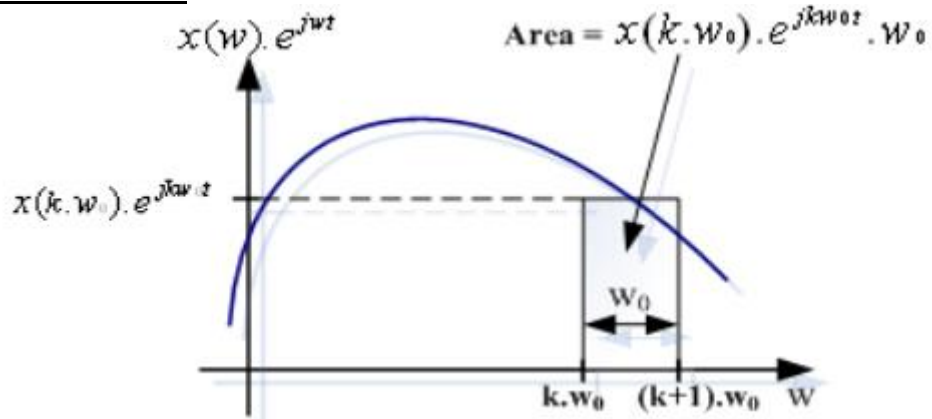
$$\bar{X}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \cdot w_0) \cdot e^{jkw_0 t} \cdot w_0$$

Como $w_0 \rightarrow 0$, $k \cdot w_0 \rightarrow w$ y $\bar{x} \rightarrow x(t)$, conforme $T_0 \rightarrow \infty$, la sumatoria pasa a ser una integral,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(w) \cdot e^{jw t} \cdot dw$$

Y se la conoce como “Transformada Inversa o Anti transformada de Fourier”.

Interpretación Gráfica



Cada término de la Sumatoria anterior pasa a ser un Área de Altura $x(k.w_0). e^{jk.w_0.t}$ y Base w_0 . La transformada $x(\omega)$ de una señal No Periódica $x(t)$ se refiere comúnmente como al espectro de $x(t)$, ya que proporciona información acerca de cómo $x(t)$ está compuesta por señales senoidales de diferentes frecuencias.

Condiciones de Convergencia

Mismas condiciones que la Serie de Fourier.

8. Obtención de los coeficientes de la serie de Fourier, a partir de la transformada de Fourier de la señal en un período.

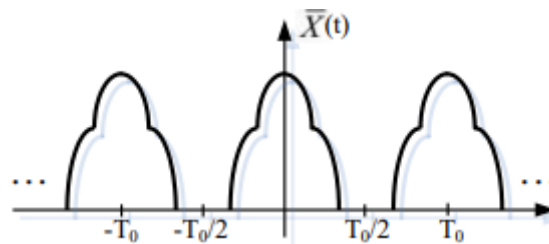
Coeficientes de la Serie de Fourier a partir de su Transformada

Los coeficientes de la señal periódica $\bar{x}(t)$ se pueden obtener de las muestras de una envolvente, que vimos era igual a la Transformada de Fourier de una señal No Periódica $x(t)$, la cual es igual a un periodo $\bar{x}(t)$.

Considerando el Periodo Fundamental T_0 , si $x(t)$ se toma como:

$$x(t) = \begin{cases} \bar{X}(t) & ; -T_0/2 < t < T_0/2 \\ 0 & ; t < -T_0/2 \text{ y } t > T_0/2 \end{cases}$$

Por ejemplo



Entonces, los coeficientes a_k de $\bar{x}(t)$ se pueden expresar en términos de las muestras de la Transformada de Fourier $x(w)$ de $x(t)$.

$$a_k = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \bar{X}(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \cdot x(k \cdot \omega_0)$$

Como los coeficientes a_k se pueden obtener al integrar sobre cualquier intervalo de T_0 , podemos generalizar la ecuación.

Sea s un punto cualquiera en el tiempo y una señal $x(t) = \bar{x}(t)$ sobre el intervalo $s \leq t \leq s + T_0$ y 0 en cualquier otro lado,

$$x(t) = \begin{cases} \bar{X}(t) & ; s \leq t \leq s + T_0 \\ 0 & ; t < s \text{ y } t > s + T_0 \end{cases}$$

Entonces, los coeficientes a_k de la Serie de Fourier $\bar{x}(t)$ están dados por,

$$a_k = \frac{1}{T_0} \cdot x(k \cdot \omega_0)$$

Donde $x(w)$ es la Transformada de Fourier de $x(t)$. La ecuación anterior es válida para cualquier selección de s y no sólo para $s = -\frac{T_0}{2}$. Sin embargo no implica que la Transformada $x(w)$ sea la misma para todos los valores de s , pero si implica que el conjunto de muestras $x(k \cdot \omega_0)$ es independiente de s .

9. Transformada de Fourier en señales periódicas.

Transformada de Fourier en señales periódicas

La Transformada de Fourier resultante para una señal periódica consiste de un tren de Impulsos en Frecuencia, siendo las áreas de los Impulsos proporcionales a los coeficientes de la Serie de Fourier.

Considerando una señal $x(t)$ con transformada $x(w)$, la cual es un Impulso de área $2 \cdot \pi$ en $w = w_0$,

$$x(w) = 2 \cdot \pi \cdot \delta(w - w_0) \cdot e^{jw_0 t} \cdot dw = e^{jw_0 t}$$

Para obtener $x(t)$ podemos aplicar la relación de la Transformada Inversa,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot \delta(w - w_0) \cdot e^{jw t} \cdot dw = e^{jw_0 t}$$

Generalizando, si $x(w)$ es una combinación lineal de Impulsos igualmente espaciados en Frecuencia, o sea:

$$x(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot a_k \cdot \delta(w - w_0)$$

Entonces

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk w_0 t}$$

Por lo tanto, la Transformada de Fourier de una señal periódica $\{a_k\}$ con coeficientes de la Serie de Fourier se puede interpretar como un tren de Impulsos que ocurren sobre las Frecuencias Armónicamente relacionadas y para las cuáles el área del Impulso en la k-ésima Frecuencia el armónico $k \cdot w_0$ es $2 \cdot \pi$ veces el k-ésimo coeficiente a_k de la Serie de Fourier.

10. Propiedades de la Transformada:

Mencionar: Linealidad, Simetría en w , Dualidad.

Demostrar: Desplazamiento en el tiempo, Diferenciación, Convolución.

Propiedades de la Transformada de Fourier

Linealidad

La Transformada de Fourier de una combinación lineal de señales es la misma combinación lineal de las Transformadas de las componentes individuales.

$$\begin{aligned} \text{Si,} \quad & x_1(t) \xleftrightarrow{F} x_1(w) \\ & x_2(t) \xleftrightarrow{F} x_2(w) \\ \text{Entonces} \quad & a.x_1(t) + b.x_2(t) \xleftrightarrow{F} a.x_1(w) + b.x_2(w) \end{aligned}$$

Simetría en w

Si $x(t)$ es una función de tiempo Real, entonces

$$x(-w) = x^*(w)$$

Donde $*$ denota el complejo conjugado y se refiere como Simetría Conjugada de la Transformada de Fourier. Se obtiene evaluando el complejo conjugado,

$$x^*(w) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \cdot e^{j\omega t} \cdot dt$$

Como $x(t)$ es Real entonces $x^*(t) = x(t)$, con lo cual

$$x^*(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{j\omega t} \cdot dt = x(-w)$$

Dualidad

La simetría vista anteriormente conduce a esta propiedad, por lo que decimos que existe una relación entre los pares de Transformadas de Fourier.

Específicamente, si hay características de una función del tiempo que tiene implicaciones con respecto a la Transformada de Fourier, entonces las mismas características asociadas con una función de frecuencia, tendrán implicaciones duales en el dominio del tiempo.

Considerando dos funciones relacionadas mediante la integral,

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v) \cdot e^{-j\omega v} \cdot dv$$

Si $u = w$ y $v = t$

$$f(w) = F[g(t)]$$

Si $u = t$ y $v = w$

$$g(-w) = \frac{1}{2\pi} \cdot F[f(t)]$$

O sea, si tenemos la función de tiempo $g(t)$, el par de Transformadas de Fourier es

$$g(t) \xleftrightarrow{F} f(w)$$

Y después consideramos la función de tiempo $f(t)$, su par de Transformadas es

$$f(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi \cdot g(-w)$$

Esto es útil para reducir la complejidad de los cálculos de la Transformada y Transformada Inversa de Fourier.

Desplazamiento en el Tiempo

El efecto de un Desplazamiento en el Tiempo de una señal es introducir un desplazamiento de fase en su Transformada, la cual es una función lineal de w .

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad & x(t) \xleftrightarrow{F} x(w) \quad , \text{ entonces} \\ & x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} x(w) \cdot e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

Demostración:

$$\text{Considerando } F[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

Haciendo $\sigma = t - t_0$, $t = \sigma + t_0$, $dt = d\sigma$, tenemos

$$F[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma) \cdot e^{-j\omega(\sigma+t_0)} \cdot d\sigma =$$

$$F[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma) \cdot e^{-j\omega\sigma} \cdot e^{-j\omega t_0} \cdot d\sigma =$$

$$F[x(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma) \cdot e^{-j\omega\sigma} \cdot d\sigma =$$

$$F[x(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0} \cdot x(\omega)$$

Diferenciación

Esta propiedad reemplaza la operación de diferenciación en el dominio del tiempo con la de multiplicación por $j \cdot \omega$ en el dominio de la frecuencia.

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega \cdot x(\omega)$$

Demostración

Sea $x(t)$ una señal con Transformada de Fourier $x(\omega)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

Diferenciando a ambos lados

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} j\omega \cdot x(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

Por lo tanto

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega \cdot x(\omega)$$

En General,

$$\frac{dx^n(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j\omega)^n \cdot x(\omega)$$

Para el caso de la Integración, la relación es

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} \cdot x(\omega) + \pi \cdot x(0) \cdot \delta(\omega)$$

Convolución

Esta propiedad es consecuencia del hecho de que las exponenciales complejas son funciones propias de un SLIT y puede ser obtenida por la ecuación de la Transformada de Fourier como una combinación lineal de exponenciales complejas.

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F} y(\omega) = x(\omega) \cdot H(\omega)$$

$H(\omega)$, se refiere como la Respuesta en Frecuencia del sistema y es simplemente el cambio en amplitud compleja de una exponencial compleja de frecuencia ω , conforme pasa a través de un SLIT.

Demostración:

Considerando un SLIT con entrada $x(t)$, respuesta al impulso $h(t)$ y salida $y(t)$ de manera,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

Se desea conocer $y(w) = F[y(t)]$, que es

$$y(w) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

Reemplazando $y(t)$

$$y(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau \right) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

Intercambiando el orden de integración

$$y(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \right] \cdot d\tau$$

Por propiedad de desplazamiento, el término entre corchetes es $H(w)e^{-j\omega\tau}$.

$$y(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot H(w) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau = H(w) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau$$

Por lo tanto,

$$y(w) = H(w) \cdot x(w)$$

11. Aplicación de las propiedades en la búsqueda de la respuesta de Sistemas LTI en general (transformada de la convolución), y de sistemas caracterizados por Ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes (diferenciación). Función de respuesta en frecuencia.

Aplicación de las propiedades en la búsqueda de la respuesta de un SLIT

Propiedad de Modulación. Transformada de la Convolución

Así como la Convolución en el dominio del Tiempo corresponde a la multiplicación en el dominio de la Frecuencia y debido a la Dualidad entre los dominios de tiempo y frecuencia, la Propiedad de Modulación nos dice que:

- La multiplicación en el dominio del Tiempo corresponde a la Convolución en el dominio de la Frecuencia, de forma que:

$$y(t) = x(t) \cdot h(t) \xleftrightarrow{F} y(w) = \frac{1}{2\pi} [x(w) * H(w)]$$

- La multiplicación de una señal por otra, puede considerarse como el empleo de una señal para escalar o modular la amplitud de la otra.

Diferenciación. Función de respuesta en frecuencia

Una vez obtenida la respuesta en Frecuencia, se puede determinar la repuesta al Impulso usando la Transformada Inversa. La técnica de expansión en fracciones parciales es muy útil para determinar la respuesta al Impulso y por lo tanto para caracterizar y determinar la respuesta a un SLIT descrito por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Considerando un SLIT dado por,

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \cdot \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Por propiedad de Convolución tenemos que

$$y(w) = x(w) \cdot H(w)$$

O también

$$H(w) = \frac{y(w)}{x(w)}$$

Donde $x(w)$, $y(w)$ y $H(w)$, son las Transformadas de Fourier para la entrada $x(t)$, la salida $y(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$ respectivamente.

Si tomamos las Transformadas de Fourier en ambos miembros de la primera ecuación,

$$F \left[\sum_{k=0}^N a_k \cdot \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right] = F \left[\sum_{k=0}^M b_k \cdot \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]$$

Por propiedad de Linealidad,

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot F \left[\frac{d^k y(t)}{dt^k} \right] = \sum_{k=0}^M b_k \cdot F \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]$$

Por propiedad de Diferenciación,

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot (jw)^k \cdot y(w) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot (jw)^k \cdot x(w)$$

O también

$$y(w) \cdot \left[\sum_{k=0}^N a_k \cdot (jw)^k \right] = x(w) \cdot \left[\sum_{k=0}^M b_k \cdot (jw)^k \right]$$

Por lo tanto,

$$H(w) = \frac{y(w)}{x(w)} = \frac{\left[\sum_{k=0}^M b_k \cdot (jw)^k \right]}{\left[\sum_{k=0}^N a_k \cdot (jw)^k \right]}$$

Como se observa $H(w)$ es un cociente de polinomios en $(j \cdot w)$, por la respuesta para el SLIT puede escribirse directamente por inspección. También es posible resolver la Ecuación Diferencial, o sea, encontrar la respuesta $y(t)$ para una entrada $x(t)$, utilizando la expansión en fracciones parciales.

Unidad 4: Transformada de Laplace

12. Transformada de Laplace: Definición, relación con la transformada de Fourier. Representación en el plano S, diagrama de polos y ceros, La ROC y sus propiedades.

Transformada de Laplace

Definición

Es una operación que convierte a una función definida en el dominio del tiempo en una función de variable compleja.

La Transformada de Laplace de una señal $x(t)$ se define como

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \quad , \quad x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$$

También se la conoce como Transformada de Laplace Bilateral. La variable compleja s es en general de la forma $s = \sigma + jw$, siendo σ la parte real y w la parte imaginaria

Relación con la Transformada de Fourier

Cuando $s = jw$, o sea $\sigma = 0$, la ecuación puede escribirse como

$$X(0 + jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{0t} \cdot e^{-jw t} \cdot dt$$
$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-jw t} \cdot dt$$

Que corresponde a la Transformada de Fourier de $x(t)$

$$X(s) \big|_{s=jw} = F[x(t)]$$

Si $s = \sigma + jw$

$$X(\sigma + jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-jw t} \cdot dt$$
$$X(\sigma + jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-(\sigma + jw) \cdot t} \cdot dt$$
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Que corresponde a la Transformada de Laplace Bilateral de $x(t)$

La transformada de Laplace de $x(t)$ se puede interpretar como la Transformada de Fourier de $x(t)$ después de multiplicarla por una señal exponencial real, esto es

$$X(\sigma + jw) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) \cdot e^{-\sigma t}] \cdot e^{-jw t} \cdot dt$$

$$X(s) \big|_{s=\sigma + jw} = F[x(t) \cdot e^{-\sigma \cdot t}]$$

Representación en el plano S

Así como la Transformada de Fourier no converge para todas las señales, la Transformada de Laplace converge para algunos valores de $\Re\{s\}$ y para otros no. En general el rango de valores

para el cual la integral en la Transformada de Laplace converge se conoce como Región de Convergencia (ROC).

Condición de Convergencia:

$$\text{Fourier} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot dt < \infty$$

$$\text{Laplace} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) \cdot e^{-\sigma \cdot t}| \cdot dt < \infty$$

σ es el conjunto de valores de s de Laplace para los que converge.

Una forma de representar la ROC es a través de ejes de coordenadas. Sobre el eje horizontal se representan las coordenadas $\Re\{s\}$ y sobre el eje vertical las coordenadas $\text{Im}\{s\}$. También son llamados eje σ y eje $j\omega$ respectivamente. La variable s es un número complejo, por lo que se presenta en el plano complejo.

El eje imaginario divide el plano s en dos semiplanos, el semiplano izquierdo donde están los valores negativos σ , y el semiplano derecho donde están los valores positivos de σ .

Ejemplos:

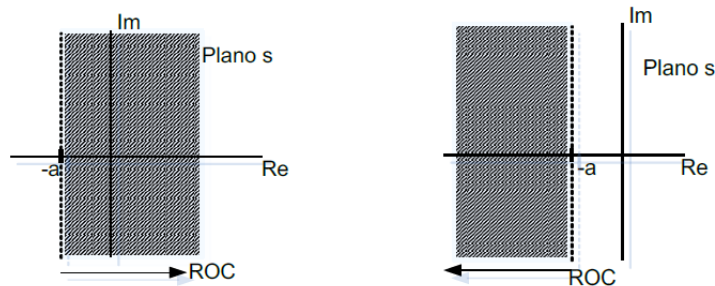


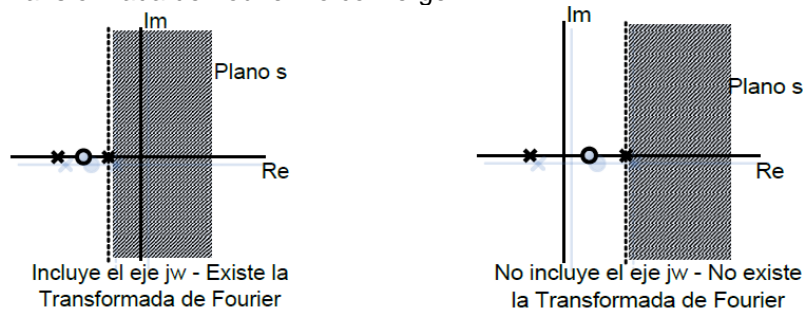
Diagrama de polos y ceros

Cuando la Transformada de Laplace es racional de la forma,

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Se puede especificar a través de sus raíces (Ceros en el numerador y Polos en el denominador) y por lo tanto al marcarlas en el plano s se puede obtener una grafica que describa la Transformada. Si el orden del polinomio del denominador es mayor que el orden del polinomio del numerador, entonces $X(s) \rightarrow 0$ conforme $s \rightarrow \infty$. Inversamente si el orden del polinomio del numerador es mayor que el del denominador, $X(s)$ será ilimitada.

Como vimos, si $s = j\omega$ la Transformada de Laplace corresponde a la Transformada de Fourier. Sin embargo, si la ROC de la Transformada de Laplace no incluye el eje $j\omega$, es decir $\Re\{s\} = 0$, entonces la Transformada de Fourier no converge.



La ROC y sus propiedades

Dos señales diferentes pueden tener la misma expresión $X(s)$, por lo que se las puede distinguir únicamente a través de la ROC.

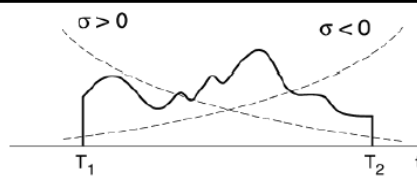
Propiedad 1: La ROC de $X(s)$ consiste de líneas paralelas al eje jw en el plano s , es decir, la ROC depende sólo de σ (parte Real)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) \cdot e^{-s \cdot t}| \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) \cdot e^{-\sigma \cdot t}| \cdot dt < \infty$$

Propiedad 2: Para Transformadas de Laplace racionales, la ROC no contiene ningún Polo

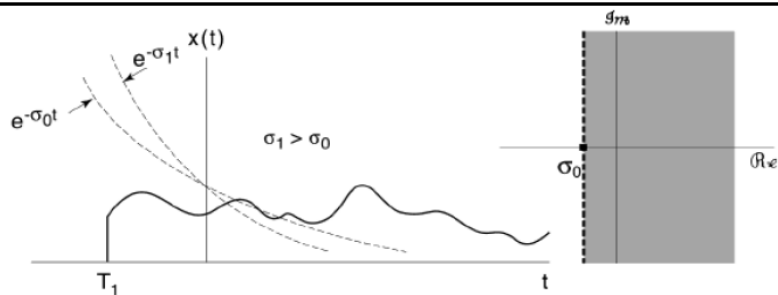
Los polos se ubican donde $D(s) = 0$, entonces $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \infty$, y por lo tanto la ROC no puede contener esos valores de s .

Propiedad 3: Si $x(t)$ es de duración finita y hay al menos un valor de s para el cual la Transformada de Laplace converge, entonces la ROC es el plano s completo.

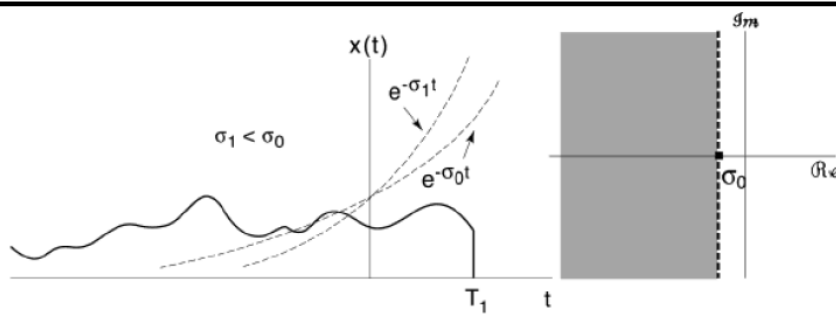


$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = \int_{T_1}^{T_2} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt < \infty \text{ si } \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| \cdot dt$$

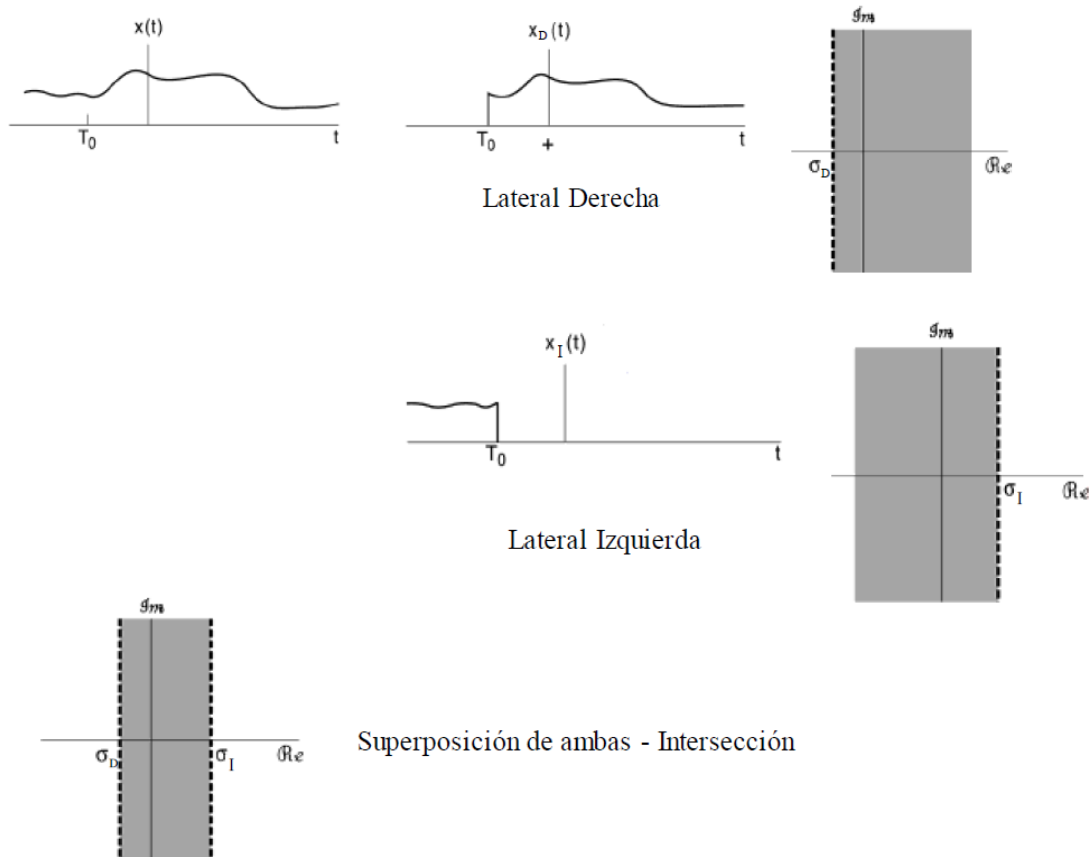
Propiedad 4: Si $x(t)$ es derecha y la línea $\Re\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de s para los cuales $\Re\{s\} > \sigma_0$ también estarán en la ROC



Propiedad 5: Si $x(t)$ es izquierda y la línea $\Re\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de s para los cuales $\Re\{s\} < \sigma_0$ también estarán en la ROC



Propiedad 6: Si $x(t)$ es bilateral y la banda $\Re\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces la ROC consistirá de una banda en el plano s que incluye la banda $\Re\{s\} = \sigma_0$



Transformada Inversa

Como vimos la Transformada de Laplace de una señal $x(t)$ está dada por,

$$X(\sigma + jw) = F[x(t) \cdot e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-jw t} \cdot dt$$

Esta relación se puede invertir usando la Transformada Inversa de Laplace como,

$$x(t) \cdot e^{-\sigma t} = F^{-1}[X(\sigma + jw)] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + jw) \cdot e^{jw t} \cdot dw$$

Multiplicando ambos miembros por $e^{\sigma t}$,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + jw) \cdot e^{(\sigma + jw) \cdot t} \cdot dw$$

Haciendo el cambio de variable de w a s y aplicando el hecho de que σ es constante, con lo cual $ds = jdw$, obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\sigma - jw}^{\sigma + jw} X(s) \cdot e^{st} \cdot ds$$

13. Propiedades de la Transformada:

Mencionar: Linealidad, Desplazamiento en s, diferenciación en s.

Demostrar: Desplazamiento en el tiempo, Diferenciación, Convolución.

(Se demuestran igual que Fourier).

Propiedades de la Transformada

Linealidad

Si

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s), ROC = R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s), ROC = R_2$$

Entonces

$$a_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) \xleftrightarrow{L} a_1 X_1(s) + b_2 X_2(s), ROC = R_1 \cap R_2$$

Si $R_1 \cap R_2$ es vacía ($X(s)$ no tiene ROC), no tiene Transformada de Laplace.

Desplazamiento en s

Si

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), ROC = R_1$$

Entonces

$$e^{s_0 t} \cdot x(t) \xleftrightarrow{L} X(s - s_0), ROC = R = R_1 + \Re\{s_0\}$$

La ROC asociada con $X(s - s_0)$ es la de $X(s)$ desplazada por $\Re\{s_0\}$. Por lo tanto para cualquier valor de $s \in R$, el valor $s + \Re\{s_0\}$ estará en R .

Diferenciación en s

Tomando la Transformada de Laplace,

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Diferenciando ambos miembros

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} (-t) \cdot x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Tenemos que

$$-t \cdot x(t) \xleftrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds}, ROC = R$$

Desplazamiento en el tiempo

Si $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), ROC = R$

Entonces $x(t - t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} \cdot X(s), ROC = R$

Demostración:

Tomando la Transformada de Laplace para $x(t - t_0)$

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{L} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Haciendo $p = t - t_0$, $t = p + t_0$, $dt = dp$ y reemplazando en la integral,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x(p) \cdot e^{-s(p+t_0)} \cdot dp \\ & \int_{-\infty}^{\infty} x(p) \cdot e^{-sp} \cdot e^{-st_0} \cdot dp \\ & e^{-st_0} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(p) \cdot e^{-sp} \cdot dp}_{= X(s)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} \cdot X(s)$$

Diferenciación en el tiempo

Si $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$, $ROC = R$

Entonces $\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} s \cdot X(s)$, $ROC = R$

Demostración:

Tomando la Transformada Inversa de Laplace,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} X(s) \cdot e^{st} \cdot ds$$

Diferenciando en ambos miembros

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} s \cdot X(s) \cdot e^{st} \cdot ds$$

Por lo tanto $\frac{dx(t)}{dt}$ es la Transformada Inversa de Laplace de $s \cdot X(s)$. La ROC de $s \cdot X(s)$ incluye la ROC de $X(s)$ y puede ser más grande si tiene un polo de primer orden de $s = 0$, cancelado por la multiplicación por s .

Convolución

Si

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s), \quad ROC = R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s), \quad ROC = R_2$$

Entonces

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s).X_2(s), \text{ ROC} = R_1 \cap R_2$$

Por lo tanto, la ROC de $X_1(s).X_2(s)$ incluye la intersección y puede ser mas grande si la cancelación de polos y ceros ocurre en el producto.

Demostración:

Sea

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau).x_2(t-\tau).d\tau$$

Se desea conocer $Y(s) = X_1(s).X_2(s) = L[y(t)]$ que es

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t).e^{-st}.dt$$

Reemplazando $y(t)$

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau).x_2(t-\tau).d\tau \right).e^{-st}.dt$$

Intercambiando el orden de Integración

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau). \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau).e^{-st}.dt \right].d\tau$$

Por propiedad del desplazamiento, el término entre corchetes es $X_2(s).e^{-s\tau}$

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau).X_2(s).e^{-s\tau}.d\tau = X_2(s). \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau).e^{-s\tau}.d\tau$$

Por lo tanto

$$Y(s) = X_2(s).X_1(s)$$

14. Análisis de sistemas LTI mediante transformada de Laplace. Causalidad, Estabilidad.

Análisis de sistemas LTI mediante transformada de Laplace

A través de la propiedad de Convolución se deduce que las Transformadas de Laplace de la entrada y salida de un SLIT están relacionadas mediante la multiplicación por la Transformada de Laplace de la respuesta al Impulso de la forma,

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

Donde $Y(s)$, $X(s)$ y $H(s)$ son las Transformadas de Laplace de la salida, la entrada y la respuesta al impulso, respectivamente. Si $s = j\omega$, cada una de las Transformadas de Laplace se reduce a las correspondientes Transformadas de Fourier.

En contexto de Laplace $H(s)$ se conoce como "Función del Sistema o Función de Transferencia del Sistema" y muchas de las propiedades se relacionan con la misma.

Causalidad

Para un SLIT Causal, la respuesta al Impulso $h(t) = 0$, para $t < 0$ (en este caso está del lado derecho). Por lo tanto, la ROC asociada con la Función de Transferencia de un Sistema Causal con una Función de Transferencia Racional, será la región del plano s situada a la derecha del polo que está más hacia la derecha (polo con parte real más positiva).

Si el Sistema es Anti causal $h(t) = 0$, para $t > 0$ (en este caso está del lado izquierdo), entonces la RC será la región del plano s situada a la izquierda del polo que está más hacia la izquierda (polo con parte real más negativa).

Estabilidad

Como se vio, la Transformada de Fourier de la respuesta al Impulso de un Sistema Estable sí existe, o sea, converge. Por lo tanto, para un Sistema Estable la ROC de $H(s)$ debe incluir el eje imaginario $j\omega$ ($\Re\{s\} = 0$).

La relación de la ROC con la Causalidad y la Estabilidad también conducen a la conclusión de que para un SLIT con Función de Transferencia Racional que sea tanto Causal como Estable, todos los polos deben caer en el semiplano s izquierdo (todos deben tener parte real negativa).

15. Transformada Unilateral, aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes, con condiciones iniciales diferentes al reposo. (demostración de la transformada de la derivada primera).

Transformada Unilateral

Aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes, con condiciones iniciales diferentes al reposo.

La Transformada de Laplace Unilateral de una señal $x(t)$ se define como,

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Este tipo de Transformada sirve para Sistemas Causales, es decir que la ROC es derecha por lo tanto no tiene sentido trabajar con la parte negativa, la señal existe en el eje positivo.

Notamos también que la Transformada Unilateral no incluye a $t = 0$, por lo que no incorpora ningún impulso o función singular de mayor orden.

Demostración de la transformada de la derivada primera.

Una diferencia importante con la Transformada Bilateral es la propiedad diferenciación.

Si $x(t) \xleftrightarrow{Lu} X(s)$

Entonces $\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{Lu} \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot e^{-st} \cdot dt$

Resolviendo la integral anterior por partes

$$\int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot e^{-st} \cdot dt = u \cdot v - \int_0^{\infty} v \cdot du$$

$$u = e^{-st}, \quad du = -s \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$$dv = \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot dt \rightarrow v = x(t)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot e^{-st} \cdot dt &= e^{-st} \cdot x(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x(t) \cdot (-s) \cdot e^{-st} \cdot dt \\ &= e^{-\infty} - e^0 \cdot x(0) + s \cdot \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \\ &= -x(0) + s \cdot X(s) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{Lu} s \cdot X(s) - x(0)$$

Con lo cual necesitamos una condición inicial $x(0)$ para resolver. Si la derivada es de orden n , se necesitarán n condiciones iniciales.

Unidad 5: Sistemas de Ecuaciones Lineales (Métodos Numéricos)

16. Métodos directos: Método de Gauss: Obtención de las expresiones para aplicar el algoritmo de Gauss, tanto para el proceso de Triangularización, como de Sustitución Inversa.

Un Sistema de Ecuaciones "Lineales", es un conjunto de ecuaciones donde las incógnitas están elevadas a la potencia 1 y las ecuaciones son linealmente independientes entre sí. Se puede escribir en forma matricial como,

$$A \cdot x = b \rightarrow A_{m \times n} \cdot X_{n \times 1} = b_{m \times 1}$$

Donde $A_{m \times n}$, es una matriz con m filas y n columnas (matriz de los coeficientes), $X_{n \times 1}$ es el vector de incógnitas con n elementos y $b_{m \times 1}$ es el vector de los términos independientes con m elementos.

Existen distintos tipos de Sistemas de Ecuaciones Lineales,

- 1) Compatible: Tienen solución.
 - a. Determinado: La solución es única, para lo cual el Sistema debe ser cuadrado ($m=n$)
 - b. Indeterminado: Tiene múltiples soluciones, en este caso $m \neq n$
- 2) Incompatible: No tiene solución.
- 3) Mal Condicionado: Donde pequeñas variaciones en los datos producen grandes variaciones en la solución.

Para resolver los Sistemas existen dos tipos de métodos:

Directos: Permiten encontrar una solución exacta en un número finito de operaciones. Se aplica una sola vez.

Indirectos o Iterativos: Parten de una aproximación inicial y por medio de un algoritmo, obtienen aproximaciones sucesivas y mejores en cada iteración.

Métodos directos

Método de Gauss

Tiene dos etapas:

- 1) *Triangularización*: Mediante operaciones elementales de fila y columna transforma una matriz A, de coeficientes, en una matriz triangular superior (ceros debajo de la diagonal principal).
- 2) *Sustitución Inversa*: Despejar las incógnitas de abajo hacia arriba.

Suponiendo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Para Triangular la matriz de coeficientes definimos los multiplicadores necesarios, $m_i^k = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$

Con i = fila y k = n° de modificación de la fila, para obtener

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} + m_i^k \cdot a_{kj}^{k-1}$$

$$b_i^k = b_i^{k-1} + m_i^k \cdot b_k^{k-1}$$

Y así sucesivamente hasta triangular la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Por último, despejamos las incógnitas X_k de abajo hacia arriba. Se puede verificar el resultado a través de

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} \cdot x_j}{a_{kk}}$$

Método de Eliminación de Gauss Jordan

Tiene dos etapas:

- 1) *Diagonalización*: Convertir en ceros todos los elementos por encima y debajo de la diagonal principal.
- 2) *Resolución Directa*: Obtengo directamente el valor de cada incógnita.

Para este método se aplican técnicas de Pivoteo,

-*Pivoteo Parcial*: Intercambiar filas para ubicar el elemento mayor (de la columna) en el lugar del Pívor.

-*Pivoteo Total*: Intercambiar filas y columnas para ubicar el elemento mayor de la matriz en el lugar del Pívor.

El intercambio de columnas implica un cambio en el orden de las incógnitas.

Si el elemento Pívor es 0 o cercano a 0, el error es muy grande, por lo que se busca que el Pívor sea el mayor de la columna a la que pertenece.

Una fila que fue Pívor, no puede volver a serlo.

17. Método de los Mínimos Cuadrados. Aproximación funcional de datos relacionados, por medio de una combinación lineal de funciones apropiadas.

Métodos de los Mínimos Cuadrados

Cuando realizamos cualquier medición, estamos cometiendo errores de diferente índole según el instrumento utilizado y su magnitud de medición.

Para este método contamos con un “conjunto de valores”, con errores de medición, y se trata de encontrar “una curva o función de aproximación” que represente este conjunto de valores.

Conjunto de Valores

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_k, y_k)\}$$

Función de Aproximación: Combinación lineal de C y θ .

$$f(x) = C_1 \cdot \theta_1(x) + C_2 \cdot \theta_2(x) + \dots + C_m \cdot \theta_m(x) = \sum_{j=1}^m C_j \cdot \theta_j(x)$$

C_j = coeficientes de ajuste

$\theta_j(x)$ = funciones linealmente independientes de cierto espacio de funciones

m = número de incógnitas

El “Error Total o Error Cuadrático” cometido entre los valores dados y la función que la aproxima puede ser calculado como la suma de las distancias de cada punto a la función, elevada al cuadrado.

$$S = \sum_{k=1}^n (y_k - f(x_k))^2, \quad n = \text{nº de datos}$$

“Lo que busca este modelo es hacer mínima esta expresión y contar con una función generalizada con la cual se podrán determinar valores desconocidos”.

Aproximación funcional de datos relacionados, por medio de una combinación lineal de funciones apropiadas

Dada la Función de Aproximación de la forma anterior.

$$f(x) = \sum_{j=1}^m C_j \cdot \theta_j(x)$$

Se traduce en encontrar los m coeficientes C_j que minimicen el valor de S .

En concreto, se desea encontrar una función que sea la mejor aproximación de los valores dados, empleando el criterio del mínimo error cuadrático.

Para ello, utilizando la expresión del Error Total,

$$S = \sum_{k=1}^n (y_k - f(x_k))^2$$

Reemplazando $f(x)$

$$S = \sum_{k=1}^n \left(y_k - \sum_{j=1}^m C_j \cdot \theta_j(x_k) \right)^2$$

Si tenemos en cuenta que S es una función de C , los coeficientes C_j , que minimizan el Error, pueden ser calculados derivando e igualando a 0 la expresión anterior.

$$\frac{\partial S}{\partial C_i} = \sum_{k=1}^n \left(2 \cdot \left(y_k - \sum_{j=1}^m C_j \cdot \theta_j(x_k) \right) \cdot (-\theta_i(x_k)) \right) = 0$$

Operando sobre los términos,

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m C_j \cdot \theta_j(x_k) \cdot \theta_i(x_k) - y_k \cdot \theta_i(x_k) \right) = \frac{0}{2} \\
 &= \sum_{j=1}^m C_j \cdot \sum_{k=1}^n \theta_j(x_k) \cdot \theta_i(x_k) - \sum_{k=1}^n y_k \cdot \theta_i(x_k) = 0 \\
 &= \sum_{j=1}^m C_j \cdot \sum_{k=1}^n \theta_j(x_k) \cdot \theta_i(x_k) = \sum_{k=1}^n y_k \cdot \theta_i(x_k)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial S}{\partial C_i} = \sum_{k=1}^n y_k \cdot \theta_i(x_k)$$

En forma matricial se puede expresar como $\theta \cdot C = b$, con θ simétrica

$$\begin{array}{ccccc}
 & \theta & & C & b \\
 \left(\begin{array}{cccc} \sum \theta_1 \cdot \theta_1 & \sum \theta_1 \cdot \theta_2 & \dots & \sum \theta_1 \cdot \theta_m \\ \sum \theta_2 \cdot \theta_1 & \sum \theta_2 \cdot \theta_2 & \dots & \sum \theta_2 \cdot \theta_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum \theta_m \cdot \theta_1 & \sum \theta_m \cdot \theta_2 & \dots & \sum \theta_m \cdot \theta_m \end{array} \right) & \cdot & \left(\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_m \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{c} \sum \theta_1 \cdot y \\ \sum \theta_2 \cdot y \\ \dots \\ \sum \theta_m \cdot y \end{array} \right)
 \end{array}$$

Donde,

$$\theta_{ij} = \sum_{k=1}^n \theta_i(x_k) \cdot \theta_j(x_k)$$

$$b_i = \sum_{k=1}^n y_k \cdot \theta_i(x_k)$$

Unidad 6: Sistemas de Ecuaciones No Lineales (Métodos Numéricos)

18. Método de Punto Fijo: Aislamiento de las raíces. Expresiones iterativas del método de punto fijo. Condición de Convergencia.

Un Sistema de Ecuaciones "No Lineales", es un conjunto de ecuaciones donde las incógnitas están elevadas a una potencia distinta de 1, o que incluye funciones trascendentales como seno, coseno, exponenciales, etc.

El objetivo de los métodos utilizados consiste en aproximar a las raíces de las ecuaciones No Lineales $F(x) = 0$.

Método de Punto Fijo

Consiste en reemplazar la función original $f(x) = 0$, en otra expresión "equivalente" de la forma $x = g(x)$, tal que cualquier solución de ésta, lo sea también de la función original. La función $g(x)$ se denomina "Función de Iteración".

Teniendo una condición inicial $x = x_0$ y las condiciones de corte ∂_x y/o ∂_y definidas,

- 1) Se determina el intervalo donde se encuentra la raíz (gráfica y/o tabla)
- 2) Se determina la siguiente aproximación de x , $x_{k+1} = g(x_k)$
- 3) Se verifican las condiciones de corte, $|x_{k+1} - x_k| \leq \partial_x$ y/o $|f(x_k)| \leq \partial_y$. Si no se verifican continuo el proceso.
- 4) Se determina un nuevo intervalo y se repite el proceso desde el paso 2.

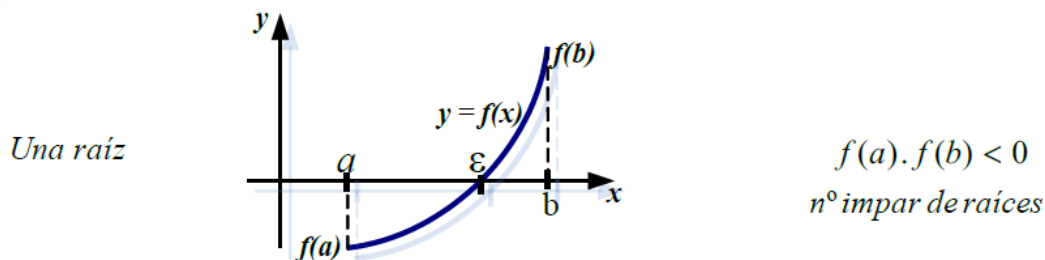
Siendo la condición inicial $x = x_0$, una aproximación inicial para la raíz $x = \varepsilon$, la fórmula de iteración $x_{k+1} = g(x_k)$ será válida si:

- a) Para el punto de partida x_0 , podemos calcular sucesivamente x_1, x_2, x_3, \dots
- b) La sucesión x_1, x_2, x_3, \dots converge al mismo punto ε , que es la raíz buscada
- c) El límite ε , es un "Punto Fijo" de $g(x)$, o sea $\varepsilon = g(\varepsilon)$.

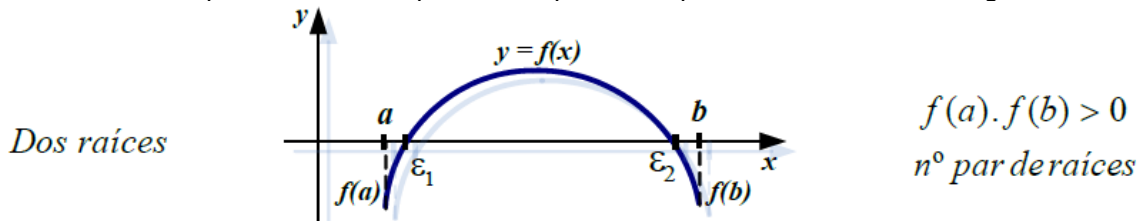
Aislamiento de las raíces

Aislar las raíces consiste en establecer un intervalo $[a, b]$ lo más pequeño posible, tal que en su interior se encuentre una sola raíz. Para ello tendremos en cuenta el siguiente Teorema:

"Si una función continua $f(x)$ asume valores de signo opuesto en los extremos de un intervalo $[a, b]$, es decir si $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces el intervalo contendrá al menos un punto ε , tal que $f(\varepsilon) = 0$ "



Esta es una condición suficiente pero no necesaria, ya que si la condición se cumple existe al menos una raíz, pero si no se cumple todavía puede ser posible la existencia de alguna raíz.



Por otra parte, la raíz ε será definitivamente única dentro del intervalo $[a, b]$, si la derivada de $f(x)$ existe y conserva su signo dentro del intervalo.

"El aislamiento de Raíces se puede realizar en forma gráfica o mediante tabla de valores".

Expresiones iterativas del método de punto fijo

Las expresiones iterativas $x_{k+1} = g(x_k)$ se pueden obtener,

- 1) Despejando la variable $x = g(x)$ de la función $f(x)$, por ejemplo

$f(x) = x^2 - x - 2$, puede ser representada como

$$x_{k+1} = g_1(x_k) = x^2 - 2 \quad x_{k+1} = g_2(x_k) = \sqrt{2+x} \quad x_{k+1} = g_3(x_k) = 1 + \frac{2}{x}$$

- 2) Mediante el "Método de la M" (asegura convergencia),

$$x_{k+1} = g(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{m}, \quad \text{donde } m = f'(x_k)$$

Condiciones de Convergencia

Dado el intervalo $[a, b]$ y una raíz $x = \varepsilon$ de $f(x)$ que pertenece al intervalo, si se cumple la condición,

$$|g'(x)| < 1$$

Para todos los puntos del intervalo, y además la aproximación inicial escogida pertenece al intervalo, entonces la ecuación $x_{k+1} = g(x_k)$ converge en la raíz ε .

Demostración:

Dada la fórmula iterativa $x_{k+1} = g(x_k)$ y un punto fijo $\varepsilon = g(\varepsilon)$, si realizamos la resta entre ellas,

$$\begin{array}{r} x_{k+1} = g(x_k) \\ - \quad \varepsilon = g(\varepsilon) \\ \hline x_{k+1} - \varepsilon = g(x_k) - g(\varepsilon) \end{array}$$

Por el Teorema del Valor Medio, habrá un punto η_k entre x_k y ε , tal que

$$g'(\eta_k) = \frac{x_{k+1} - \varepsilon}{x_k - \varepsilon}$$

Despejando,

$$x_{k+1} - \varepsilon = g'(\eta_k) \cdot (x_k - \varepsilon) \quad (1)$$

Dado que η_0 pertenece al intervalo y por hipótesis $|g'(x)| < 1$, entonces

$$|x_1 - \varepsilon| < |x_0 - \varepsilon|$$

Lo cual equivale a decir que la nueva aproximación x_1 está más cerca de la raíz que x_0 y en definitiva para primera iteración del método converge.

Por inducción, para cualquier iteración k del método se tiene que $|g'(\eta_k)| < 1$ dado que η_k y x_k pertenecen al intervalo.

Definiendo el error E_k de forma genérica como,

$$E_k = x_k - \varepsilon \quad \text{y} \quad E_{k+1} = x_{k+1} - \varepsilon$$

Y reemplazando en (1)

$$E_{k+1} = g'(\eta_k) \cdot E_k$$

Considerando la expresión $|g'(\eta_k)| < 1$, entonces

$$|E_{k+1}| < |E_k|$$

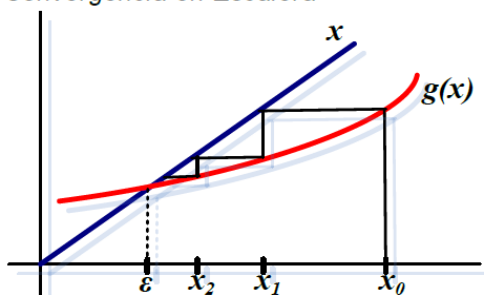
El error se va haciendo más pequeño con cada iteración y si el número de iteraciones tiende a ∞

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |g(E_{k+1})| = 0$$

Con lo cual el método converge cuando se verifica que $|g'(x)| < 1$

Interpretación Gráfica de los distintos tipos de convergencia o divergencia

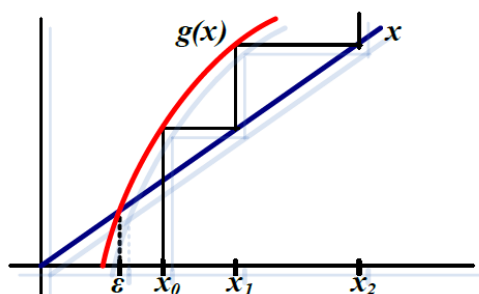
Convergencia en Escalera



Partiendo de una aproximación inicial, a medida que avanzamos en las iteraciones el error se hace más pequeño $|x_{k+1} - \epsilon| < |x_k - \epsilon|$, y nos acercamos más al valor de la raíz en forma de escalera. Por lo tanto converge, $|g'(x)| < 1$.

$g'(x) > 0$, o sea, $g'(x)$ tiene pendiente positiva.

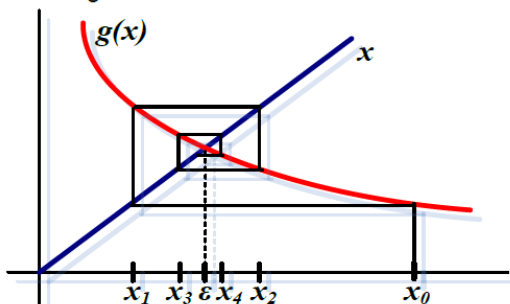
Divergencia en Escalera



Partiendo de una aproximación inicial, a medida que avanzamos en las iteraciones el error se hace más grande $|x_{k+1} - \epsilon| > |x_k - \epsilon|$, y nos alejamos más del valor de la raíz en forma de escalera. Por lo tanto diverge, $|g'(x)| > 1$.

$g'(x) > 0$, o sea, $g'(x)$ tiene pendiente positiva.

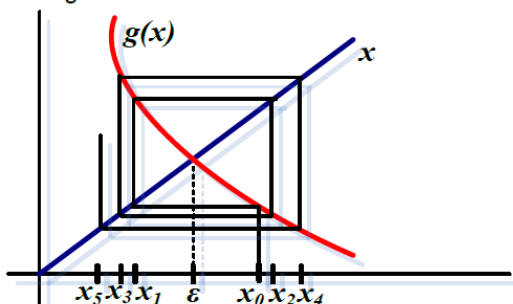
Convergencia en Caracol



Partiendo de una aproximación inicial, a medida que avanzamos en las iteraciones el error se hace más pequeño $|x_{k+1} - \epsilon| < |x_k - \epsilon|$, y nos acercamos más al valor de la raíz en forma espiral o caracol. Por lo tanto converge, $|g'(x)| < 1$.

$g'(x) < 0$, o sea, $g'(x)$ tiene pendiente negativa.

Divergencia en Caracol



Partiendo de una aproximación inicial, a medida que avanzamos en las iteraciones el error se hace más grande $|x_{k+1} - \epsilon| > |x_k - \epsilon|$, y nos alejamos más del valor de la raíz en forma de espiral o caracol. Por lo tanto diverge, $|g'(x)| > 1$.

$g'(x) < 0$, o sea, $g'(x)$ tiene pendiente negativa.

19. Método de Newton-Raphson. Aislamiento de raíces. Deducción de la fórmula iterativa del método. Representación Gráfica. Condición de convergencia. Demostración del tipo de convergencia cuadrática del método.

Método de Newton-Raphson

Al igual que el método de Punto fijo, Consiste en reemplazar la función original $f(x) = 0$, en otra expresión "equivalente" de la forma $x = g(x)$, tal que cualquier solución de ésta, lo sea también de la función original.

Aislamiento de raíces

Igual que el método de Punto Fijo.

Deducción de la fórmula iterativa del método

Teniendo una raíz x o sea que $f(x) = 0$ y una aproximación x_0 de la raíz, si aplicamos el desarrollo en Serie de Taylor de la función respecto de su aproximación tenemos que:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} \cdot f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \cdot f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} \cdot f'''(x_0) + \dots$$

Truncando la Serie en la derivada de primer orden y teniendo en cuenta que $f(x)=0$, entonces

$$0 = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} \cdot f'(x_0)$$

Despejando x

$$(x-x_0) \cdot f'(x_0) = -f(x_0)$$

$$x-x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Generalizando

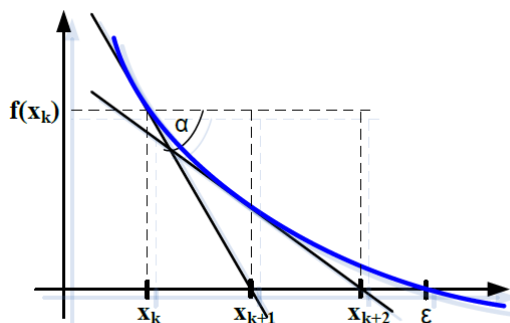
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Que se conoce como "Fórmula Iterativa" y es un caso particular del método de Punto Fijo.

Representación Gráfica

Según la fórmula general anterior, podemos ver que

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{f'(x_k)}{f(x_k)}, \text{ además } f'(x_k) = \text{tg}(\alpha)$$



$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{cat.op}}{\text{cat.ady}}$$

$$-f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{f'(x_k)}{f(x_k)}$$

Condición de Convergencia

Dado el intervalo $[a, b]$ y una raíz $x = \varepsilon$ de $f(x)$ que pertenece al intervalo, si se cumple la condición,

$$|g'(x)| < 1$$

Para todos los puntos del intervalo, y además la aproximación inicial escogida pertenece al intervalo, entonces la ecuación $x_{k+1} = g(x_k)$ converge a la raíz ε .

Recordando que,

$$g(x) = x_{k+1} \rightarrow g(x) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

entonces

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x_k) \cdot f'(x_k) - f(x_k) \cdot f''(x_k)}{[f'(x_k)]^2}$$
$$g'(x) = \frac{[f'(x_k)]^2 - [f'(x_k)]^2 + f(x_k) \cdot f''(x_k)}{[f'(x_k)]^2}$$

Por lo tanto,

$$|g'(x)| = \left| \frac{f(x_k) \cdot f''(x_k)}{[f'(x_k)]^2} \right| < 1$$

Demostración del tipo de convergencia cuadrática del método

Dado la fórmula iterativa $x_{k+1} = g(x_k)$ y un punto fijo $\varepsilon = g(\varepsilon)$, si realizamos la resta entre ellas,

$$\begin{array}{r} x_{k+1} = g(x_k) \\ - \quad \varepsilon = g(\varepsilon) \\ \hline x_{k+1} - \varepsilon = g(x_k) - g(\varepsilon) \end{array}$$

Por expansión en Serie de Taylor podemos escribir $g(x_k)$ como,

$$g(x_k) = g(\varepsilon) + (x_k - \varepsilon) \cdot g'(\varepsilon) + \frac{(x_k - \varepsilon)^2 \cdot g''(\varepsilon)}{2!} + \dots$$

Entonces,

$$x_{k+1} - \varepsilon = \cancel{g(\varepsilon)} + (x_k - \varepsilon) \cdot \underbrace{g'(\varepsilon)}_0 + \frac{(x_k - \varepsilon)^2 \cdot g''(\varepsilon)}{2!} + \dots - \cancel{g(\varepsilon)}$$

Por lo tanto

$$x_{k+1} - \varepsilon = \frac{(x_k - \varepsilon)^2 \cdot g''(\varepsilon)}{2}$$

Tiene convergencia cuadrática ya que el error en el siguiente paso será proporcional al cuadrado del paso anterior. También se dice que tiene Velocidad de Convergencia Cuadrática.

Si $x_{k+1} - \varepsilon = E_{k+1}$, es el Error Máximo, podemos expresarlo como

$$E_{k+1} = \frac{E_k^2 \cdot g''(\varepsilon)}{2}$$

Unidad 7: Métodos Numéricos en la Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con condiciones iniciales.

20. Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales:
- 1 – Ecuación diferencial ordinaria:
 - A- Con condiciones iniciales.
 - B- con condiciones de contorno.
 - 2- Ecuación diferencial a derivadas parciales.

Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales

1) Ecuación diferencial ordinaria

Involucra una función de una sola variable independiente y sus derivadas. Puede verse como $y^n = F(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1})$. La solución de la ecuación será una familia de curvas $y = f(x)$ que sustituida dentro de la ecuación la convierte en una igualdad en la que todos los términos son conocidos.

Primeramente, trabajaremos con las ecuaciones diferenciales de primer orden, $y' = F(x, y)$, para luego extender a ecuaciones de orden superior.

La solución se puede hallar “Analíticamente” ($y = f(x)$), o “Numéricamente” (conjunto de puntos).

A- Con condiciones iniciales.

Se trata de encontrar una solución tal que para ciertos valores (x_0, y_0) , se satisface una condición inicial $y(x_0) = y_0$. Para el caso se toma el extremo inferior del intervalo considerado.

Sea la ecuación diferencial de primer orden, con condición inicial como sigue

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

Una función $y(x)$ derivable en el intervalo $[a, b]$, será solución del problema con valor inicial anterior, si cumple que:

- 1) $y'(x) = f(x, y(x))$
- 2) $y(a) = \alpha$

Si el orden de la ecuación diferencial es n , entonces se necesitarán $n-1$ condiciones iniciales.

B- Con condiciones de contorno

Se trata de encontrar una solución que satisfaga ciertas condiciones en los extremos del intervalo considerado.

Sea la ecuación diferencial de segundo orden, con condiciones de frontera como sigue

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta \end{cases}$$

Tomando a f como una función lineal, $f(x, y, y') = p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y + r(x)$, si se cumple que:

- 1) $p(x), q(x)$ y $r(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$
- 2) $q(x) > 0$ en $[a, b]$ entonces

Existe una solución única $y(x)$ en $[a, b]$.

2) Ecuación diferencial a derivadas parciales

Involucra una función de varias variables independientes y sus derivadas parciales. Puede verse

$$F(x, \dots, x_n, u, \frac{\partial}{\partial x_1} .u, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} .u, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} .u, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} .u, \dots) = 0.$$

como

. La solución de la ecuación será

$f(y) = u(x, y)$ donde u es una función de x e y , y f una función arbitraria de y .

21. Métodos Runge-Kutta: El método de Euler. Demostración de la fórmula del método a partir de su interpretación gráfica.

Métodos Runge-Kutta

Tienen tres propiedades distintivas:

- 1) Son métodos de un paso, para encontrar y_{n+1} necesitamos solamente la información del punto anterior (x_n, y_n) .
- 2) Coinciden con la Serie de Taylor hasta los términos de orden h^p , donde p es distinto para los diferentes métodos y se denomina orden del método.
- 3) No requieren la evaluación de ninguna derivada de $f(x, y)$, sino únicamente de la función f .

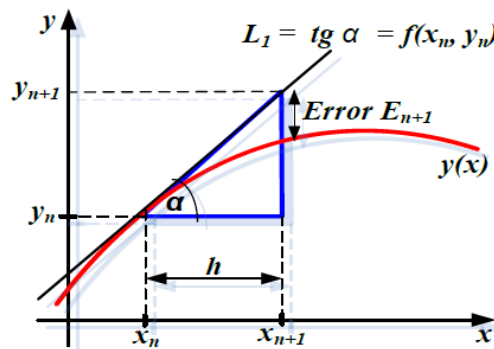
El método de Euler

Su ecuación corresponde a:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad \text{y} \quad x_{n+1} = x_n + h$$

La precisión del método depende del valor que se le da a h . Además, es un método de primer orden ya que coincide con los términos en h de la Serie de Taylor.

Demostración:



Suponiendo una solución y_n para el punto x_n , podemos dibujar la pendiente

$L_1 = y'_n = f(x_n, y_n)$, que pasa por (x_n, y_n) , un punto de la curva $y(x)$ que es solución exacta (pero desconocida). De esta manera, y_{n+1} es el punto donde $x_{n+1} = x_n + h$ interseca L_1 .

Sabemos que la ecuación de una recta puede ser descrita por

$$y - y_0 = a(x - x_0), \text{ con } a \text{ como pendiente}$$

Por lo tanto, L_1 puede ser escrita como

$$y_{n+1} - y_n = y'_n \cdot (x_{n+1} - x_n)$$

Como $y'_n = f(x_n, y_n)$ y $h = x_{n+1} - x_n$ tenemos que

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

La cuál corresponde con el Método de Euler. En este se utiliza solamente el valor de la pendiente en el punto (x_n, y_n) , para calcular el valor de y_{n+1} y el Error cometido es relativamente grande.

22. Método de Euler Mejorado. Demostración de la fórmula del método a partir de su interpretación gráfica.

Método de Euler Mejorado

Su ecuación corresponde a

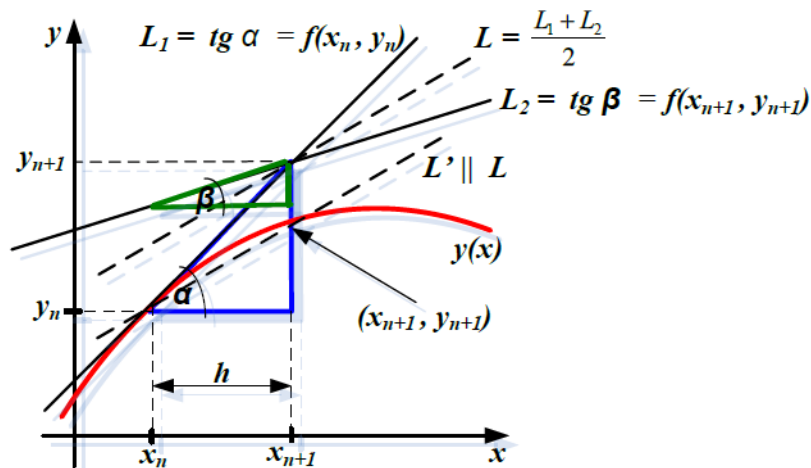
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + h \cdot f(x_n, y_n))] \quad \text{y} \quad x_{n+1} = x_n + h$$

Como $y_{n+1}^e = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$ es la solución para Euler, también podemos escribir

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^e)]$$

En este método se promedian pendientes. Además, es un método de segundo orden ya que coincide con los términos en h^2 de la Serie de Taylor.

Demostración:



Se trabaja con dos pendientes, la que pasa por el punto (x_n, y_n) , y llamamos L_1 y la que pasa por el punto $(x_n + h, y_n + h \cdot f(x_n, y_n))$ y L_2 . Esta última corresponde al punto (x_{n+1}, y_{n+1}) en el método de Euler.