

3.0 INTRODUCCION

En el capítulo 2 introdujimos y analizamos varias propiedades de los sistemas básicos. Dos de éstas, la linealidad y la invariancia en el tiempo, juegan un papel fundamental en el análisis de señales y sistemas, ya que muchos procesos físicos pueden ser modelados mediante sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) y porque tales sistemas pueden ser analizados con gran detalle. Los objetivos básicos de este libro son alcanzar el entendimiento de las propiedades y herramientas para analizar señales y sistemas LTI, y proporcionar una introducción a varias de las aplicaciones importantes de esas herramientas. En el presente capítulo iniciamos este desarrollo al deducir y examinar una representación fundamental y de gran utilidad para los sistemas LTI, y mediante la introducción de una importante clase de tales sistemas.

Una de las principales razones de la flexibilidad para analizar los sistemas LTI es que poseen la propiedad de superposición descrita en las ecuaciones (2.75) y (2.76) para sistemas LTI de tiempo discreto. De manera similar, si la entrada a un sistema LTI de tiempo continuo consiste de una combinación lineal de señales

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + a_3 x_3(t) + \dots \quad (3.1)$$

entonces por superposición la salida está dada por

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + a_3 y_3(t) + \dots \quad (3.2)$$

donde $y_k(t)$ es la respuesta a $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ Por tanto, si podemos representar la entrada a un sistema LTI en términos de un conjunto de señales básicas, entonces se puede

Sistemas lineales invariantes en el tiempo

3

utilizar la superposición para determinar la salida del sistema en términos de sus respuestas a estas señales básicas.

Como veremos en la sección siguiente, una de las características más importantes del impulso unitario, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, es que se puede utilizar como un bloque elemental para construir muchas señales de tipo general. Este hecho, junto con las propiedades de superposición e invariancia en el tiempo nos permitirá desarrollar una caracterización completa de sistemas LTI en términos de su respuesta al impulso unitario. Esta representación, conocida como la sumatoria de convolución en el caso de tiempo discreto, y la integral de convolución en tiempo continuo, proporciona una considerable ventaja analítica al ocuparse de los sistemas LTI. Siguiendo nuestro desarrollo de la sumatoria de convolución en la sección 3.2 y de la integral de convolución en la sección 3.3, usaremos estas caracterizaciones en la sección 3.4 para examinar algunas de las otras propiedades de los sistemas LTI. En las secciones 3.5 y 3.6 introducimos la clase de sistemas de tiempo continuo descritos por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y su contraparte en tiempo discreto, la clase de sistemas descritos por ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes. Volveremos a examinar estas dos clases de sistemas muy importantes, en muchas ocasiones en los subsecuentes capítulos conforme continuemos nuestro desarrollo de las técnicas para analizar señales y sistemas LTI.

3.1 REPRESENTACION DE SEÑALES EN TERMINOS DE IMPULSOS

Como se mencionó en la sección 3.0, el impulso unitario de tiempo continuo y el impulso unitario de tiempo discreto, pueden ser utilizados, cada uno, como la señal básica a partir de la cual podemos construir una clase muy amplia de señales. Para ver cómo se desarrolla esta construcción, examinaremos primero el caso de tiempo discreto. Considere la señal $x[n]$ dibujada en la figura 3-1(a). En las partes restantes de esta figura hemos dibujado cinco secuencias, cada una con un impulso unitario escalado y desplazado en tiempo, donde el escalamiento de cada impulso es igual al valor de $x[n]$ en el instante de tiempo en particular en el que se encuentra dicha muestra unitaria. Por ejemplo,

$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1], & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

Por tanto, la suma de las cinco secuencias, de la figura, esto es

$$x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] \quad (3.3)$$

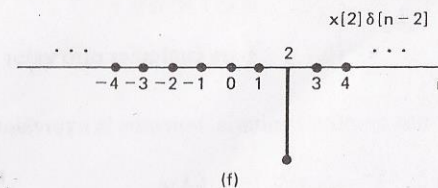
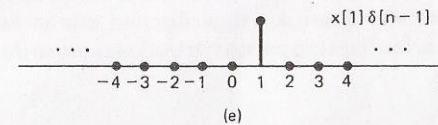
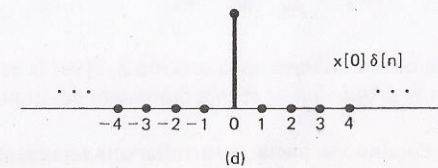
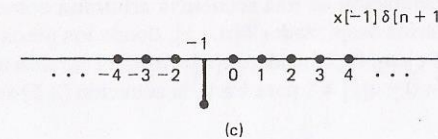
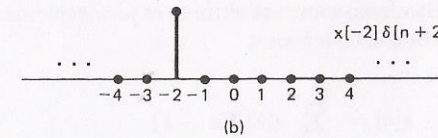
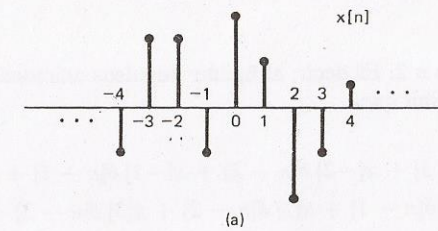


Figura 3.1 Descomposición de una señal de tiempo discreto en una suma de impulsos ponderados y desplazados.

es igual a $x[n]$ para $-2 \leq n \leq 2$. Es decir, al incluir impulsos adicionales, escalados y desplazados, podemos escribir que

$$x[n] = \dots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \dots \quad (3.4)$$

Para cualquier valor de n , sólo uno de los términos del lado derecho de la ecuación (3.4) es diferente de cero y el escalamiento sobre ese término es precisamente $x[n]$. Al escribir la sumatoria en forma más compacta, tenemos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (3.5)$$

Esto corresponde a la representación de una secuencia arbitraria como una combinación lineal de impulsos unitarios desplazados $\delta[n-k]$, donde los pesos en esta combinación lineal son $x[k]$. Como ejemplo, considere $x[n] = u[n]$, el escalón unitario. En este caso, ya que $u[k] = 0$ para $k < 0$ y $u[k] = 1$ para $k \geq 0$, la ecuación (3.5) se puede escribir de la siguiente forma:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

que es idéntica a la expresión que obtuvimos en la sección 2.4 [ver la ecuación (2.30)]. La ecuación (3.5) es llamada la *propiedad de escudrinamiento* del impulso unitario de tiempo discreto.

Para el caso de tiempo continuo se puede desarrollar una representación análoga, de nuevo en términos del impulso unitario. En particular, considere el pulso o la aproximación de "escalera", $\hat{x}(t)$, para una señal de tiempo continuo $x(t)$ como se ilustra en la figura 3.2(a). En forma similar al caso de tiempo discreto, esta aproximación puede expresarse como una combinación lineal de pulsos retrasados como se ilustra en la figura 3.2(a)-(e). Si definimos

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases} \quad (3.6)$$

entonces, ya que $\Delta\delta_{\Delta}(t)$ tiene una amplitud unitaria, tenemos la expresión

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta) \quad (3.7)$$

De la figura 3.2 vemos que, como en el caso de tiempo discreto, para cualquier valor de t , sólo un término en la sumatoria en el lado derecho de la ecuación (3.7) es diferente de cero.

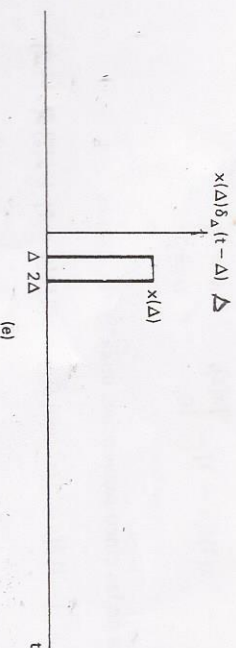
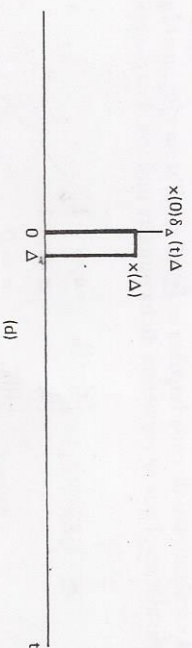
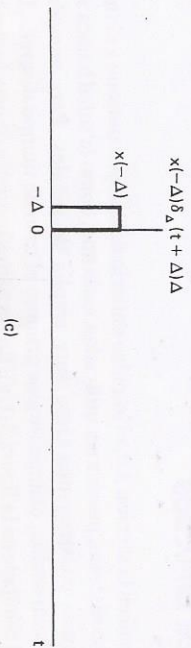
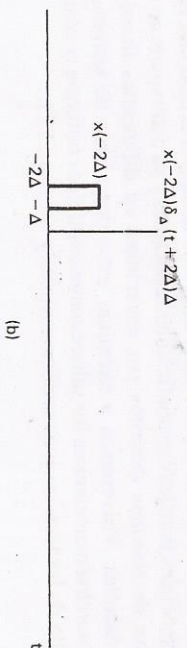
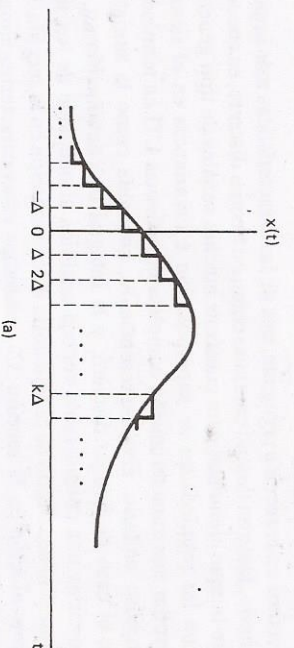


Figura 3.2 Aproximación de escalera a una señal de tiempo continuo.

Al permitir que Δ se aproxime a 0, la aproximación dada por $\hat{x}(t)$ es cada vez mejor y en el límite se iguala con $x(t)$. Por lo tanto,

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \quad (3.8)$$

También, cuando $\Delta \rightarrow 0$, la sumatoria en la ecuación (3.8) se aproxima a una integral. Es más fácil observar esto, si se considera la interpretación gráfica de la ecuación (3.8) ilustrada en la figura 3.3. Aquí hemos ilustrado las señales $x(\tau)$, $\delta_{\Delta}(t - \tau)$ y su producto. También indicamos una región sombreada cuya área se aproxima al área bajo $x(t)\delta_{\Delta}(t - \tau)$ cuando $\Delta \rightarrow 0$. Note que la región sombreada tiene un área igual a $x(m\Delta)$ donde $t - \Delta < m\Delta < t$. Además, para este valor de t , sólo el término con $k = m$ es diferente de cero en la sumatoria de la ecuación (3.8) y entonces el lado derecho de esta ecuación también es igual a $x(m\Delta)$. Por tanto, a partir de la ecuación (3.8) y del argumento anterior, tenemos que $x(t)$ es igual al límite cuando $\Delta \rightarrow 0$ del área bajo $x(\tau)\delta_{\Delta}(t - \tau)$. Más aún, de la ec. (2.22) sabemos que el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$ de $\delta_{\Delta}(t)$ es la función impulso unitario $\delta(t)$. Por consiguiente,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (3.9)$$

Como en el caso de tiempo discreto, nos referiremos a la ecuación (3.9) como la *propiedad de escudriñamiento* del impulso de tiempo continuo. Note que para el ejemplo específico de $x(t) = u(t)$, la ecuación (3.9) queda

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau \quad (3.10)$$

ya que $u(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, y $u(\tau) = 1$ para $\tau > 0$. La ecuación (3.10) es idéntica a la expresión obtenida en la sección 2.3 [ver la ec. (2.23)].

Note que se pudo deducir de forma directa la ecuación (3.9) utilizando las propiedades del impulso unitario discutidas en la sección 2.3.2. Según se ilustra en la figura 3.4(b) la señal $\delta(t - \tau)$ (para t fija) es un impulso unitario localizado en $\tau = t$. Entonces, como se muestra en la figura 3.4(c), la señal $x(\tau) \delta(t - \tau)$ es igual a $x(t) \delta(t - \tau)$ [es decir, es un impulso escalado localizado $\tau = t$ con área igual al valor de $x(t)$]. Por tanto, la integral de $\tau = -\infty$ a $t = +\infty$ de esta señal es igual a $x(t)$, esto es,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$$

Aunque esta deducción es una consecuencia directa de la sección 2.3.2, hemos incluido la deducción dada en las ecuaciones (3.6)-(3.9), para reforzar las similitudes con el caso de tiempo discreto y en particular para enfatizar la interpretación de la ecuación (3.9) como la representación de la señal $x(t)$ como una "suma" (es decir, una integral) de impulsos ponderados y desplazados. En las próximas dos secciones utilizaremos esta representación de señales en tiempo discreto y continuo, para ayudarnos a obtener una caracterización importante de la respuesta de los sistemas LTI.