2.3.2 Funciones Escalón Unitario e Impulso Unitario de Tiempo Continuo

Otra señal básica de tiempo continuo es la *función escalón unitario*

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

la cual se muestra en la figura 2.18. Note que es discontinua en $t = 0$. Como con la

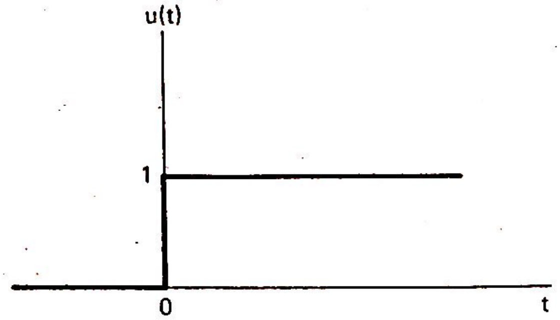

Figura 2.18 Función escalón unitario de tiempo continuo.

exponencial compleja, la función escalón unitario será muy importante en nuestro análisis de las propiedades de los sistemas. Otra señal que encontramos bastante útil es la *función impulso unitario* de tiempo continuo $\delta(t)$, la cual está relacionada con el escalón unitario por la ecuación

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \tag{2.19}$$

Esto es, $u(t)$ es la *integral* de la función impulso unitario. Esto sugiere que

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{2.20}$$

Es obvio que existe alguna dificultad formal con esta expresión como una definición de la función impulso unitario ya que $u(t)$ es discontinua en $t = 0$ y en consecuencia es diferenciable formalmente. Sin embargo, podemos interpretar la ecuación (2.20) considerando $u(t)$ como el límite de una función continua. Entonces, definimos $u_\Delta(t)$ como se indica en la figura 2.19, de manera que $u(t)$ sea igual al límite de $u_\Delta(t)$ cuando $\Delta \to 0$, y definimos $\delta_\Delta(t)$ como

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt} \tag{2.21}$$

tal como se muestra en la figura 2.20.

Observamos que $\delta_\Delta(t)$ tiene área unitaria para cualquier valor de Δ y es cero fuera del intervalo $0 \le t \le \Delta$. Conforme $\Delta \to 0$, $\delta_\Delta(t)$ se hace más angosta y más alta,

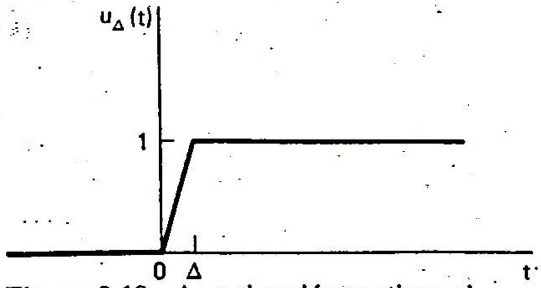

Figura 2.19 Aproximación continua al escalón unitario.

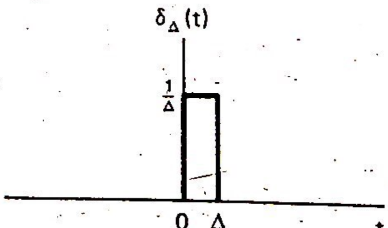

Figura 2.20 Derivada de $u_\Delta(t)$.

manteniendo su área unitaria. En su forma límite,

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) \tag{2.22}$$

será dibujada como se muestra en la figura 2.21. Más general, un impulso escalado $k\delta(t)$ tendrá un área k y por tanto

$$\int_{-\infty}^{t} k\delta(\tau)\, d\tau = ku(t)$$

Un impulso escalado se muestra en la figura 2.22. Aunque el "valor" en $t = 0$ es infinito, la altura de la flecha usada para representar el impulso escalado será escogida como representativa de su *área*.

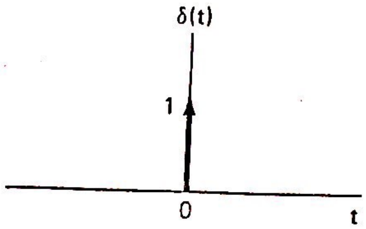

Figura 2.21 Impulso unitario.

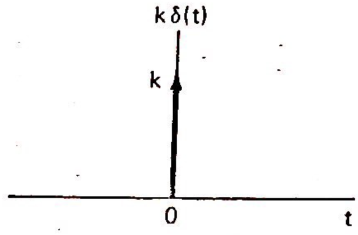

Figura 2.22 Impulso escalado.

La interpretación gráfica de la integral de la ecuación (2.19) se ilustra en la figura 2.23. Como el área del impulso unitario de tiempo continuo $\delta(\tau)$ está concentrada en $\tau = 0$, vemos que la integral es 0 para $t < 0$ y 1 para $t > 0$. También, notamos que la relación entre el escalón y el impulso unitario de tiempo continuo en la ecuación (2.19) se puede escribir en forma diferente, cambiando la variable de integración de τ a $\sigma = t - \tau$,

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \int_{\infty}^{0} \delta(t - \sigma)(-d\sigma)$$

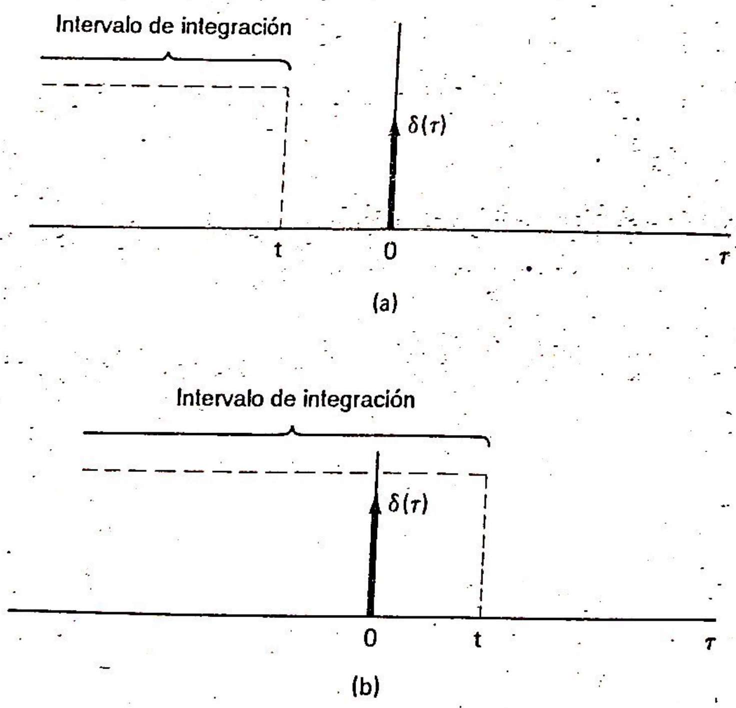

Figura 2.23 Integral dada en la ecuación (2.19): (a) $t < 0$; (b) $t > 0$.

o, en forma equivalente,

$$u(t) = \int_0^{\infty} \delta(t - \sigma)\, d\sigma \tag{2.23}$$

La interpretación de esta forma de la relación entre $u(t)$ y $\delta(t)$ se da en la figura 2.24. Ya que en este caso el área de $\delta(t - \sigma)$ está concentrada en el punto $\sigma = t$, de nuevo vemos que la integral en la ecuación (2.23) es 0 para $t < 0$ y 1 para $t > 0$. Este tipo de interpretación gráfica del comportamiento del impulso unitario bajo la integración será de forma extrema útil en el capítulo 3.

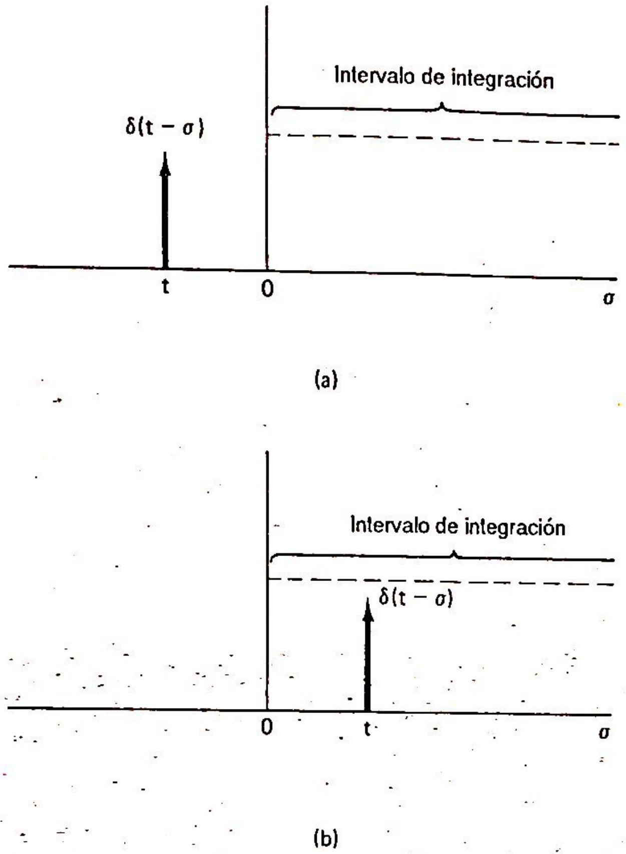

Figura 2.24 Relación dada en la ecuación (2.23): (a) $t < 0$; (b) $t > 0$.

Aunque el análisis anterior del impulso unitario es un tanto informal, es adecuado para nuestros propósitos presentes y nos proporciona algunas ideas importantes relacionadas con el comportamiento de esta señal. Por ejemplo, en ocasiones será importante considerar el producto de un impulso y una función de tiempo continuo de mejor comportamiento. La interpretación de esta cantidad se desarrolla con mayor facilidad recurriendo a la definición de $\delta(t)$ de acuerdo a la ecuación (2.22). Entonces, consideremos $x_1(t)$ dada por

$$x_1(t) = x(t)\, \delta_\Delta(t)$$

En la figura 2.25(a) hemos dibujado las dos funciones de tiempo $x(t)$ y $\delta_\Delta(t)$, y en la figura 2.25(b) vemos una vista ampliada de la porción diferente de cero de su producto. Por construcción, $x_1(t)$ es cero fuera del intervalo $0 \le t \le \Delta$. Para Δ suficientemente pequeña, de manera que $x(t)$ sea aproximadamente ~~sea~~ constante sobre este intervalo,

$$x(t)\, \delta_\Delta(t) \simeq x(0)\, \delta_\Delta(t)$$