Resumen Encuentro 2. Matemática Superior

1) SISTEMAS

- CONEXIONES BÁSICAS
  - Serie o Cascada
  - Paralelo o Suma.
- PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS
  - Memoria
  - Invertibilidad
  - Causalidad
  - Estabilidad
  - Invarianza en t.
  - Linealidad

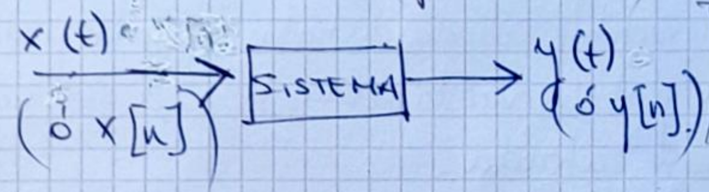
2) S. L. I. T.: Suma e Integral de convolución

- Suma de CONVOLUCION [n]
- INTEGRAL de CONVOLUCIÓN (t).
- Ejemplos de convolución en tiempo continuo

SISTEMAS.

Llamamos SISTEMA a cualquier proceso que produce una transformación de señales.

Es decir, dada una señal de entrada $x(t)$ ó $x[n]$, si existe un proceso por el cual $x(t)$ ó $x[n]$ se transforma en otra señal de salida ($y(t)$ ó $y[n]$), dicho proceso es un Sistema.

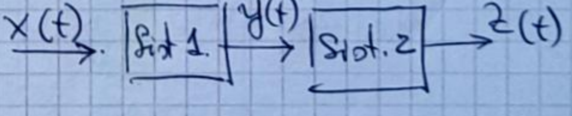


Esto se denomina SISTEMA ELEMENTAL

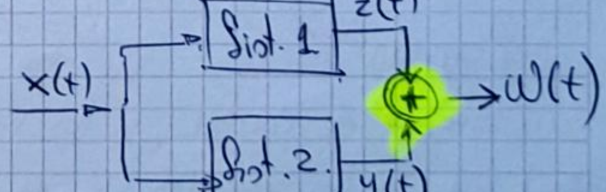
Cuando sistemas elementales se conetan entre sí, forman SISTEMAS COMPLEJOS. Si conocemos cómo responden sist. elementales a determinadas señales y cómo se comportan con los distintos tipos de conexiones, podemos representar y analizar SISTEMAS COMPLEJOS

Tipos de CONEXIONES BÁSICAS DE LOS SISTEMAS

- En Serie o CASCADA



- En Paralelo o SUMA



PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS

1) Memoria
2) Invertibilidad
3) Causalidad
4) Estabilidad
5) Invarianza en el tiempo
6) Linealidad

• MEMORIA:

Un sistema es SIN MEMORIA si su salida, para cada valor de la variable independiente $x(t)$ ó $x[n]$ depende sólo de la ENTRADA en ese mismo instante de tiempo.

Ejemplos

$$y(t) = K \cdot x(t) \quad \text{(sin memoria)}$$

$$\left.\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x[k] \\ y(t) &= x(t-1) \end{aligned}\right\} \text{(con memoria)}$$

INVERTIBILIDAD:

Un sistema es invertible cuando distintas entradas producen diferentes salidas y al observar la salida, se puede determinar (o identificar) su entrada.

Si un sistema es INVERTIBLE, podemos encontrar el sist. INVERSO, tal que si se conectan en CASCADA, la señal de salida es la misma que la de entrada.

Ejemplos

SISTEMA — SISTEMA INVERSO

$$x(t) \rightarrow \boxed{y(t) = 2\,x(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{z(t) = \tfrac{1}{2}\,y(t)} \rightarrow z(t) = x(t).$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]} \xrightarrow{y[n]} \boxed{z[n] = y[n] - y[n-1]} \rightarrow z[n] = x[n]$$

SISTEMA — SIST. INVERSO

CAUSALIDAD

Un sistema es CAUSAL, si los VALORES de su SALIDA en un instante de tiempo cualquiera, dependen de los valores de la entrada en el mismo instante de tiempo y/o de instantes anteriores.

Ejemplos

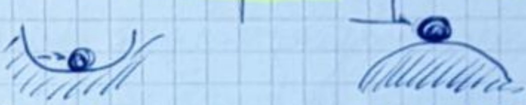
$$y[n] = x[n] - x[n-1]. \quad \text{(Causal)}$$

$$y[n] = x[n] + x[2n+1] \quad \text{(NO CAUSAL)}$$

Clase (2) Matemática Superior (6)

ESTABILIDAD Un sistema es ESTABLE, si entradas pequeñas (limitadas) conducen a respuestas que no divergen (limitadas).

Ej gráfico



ESTABLE INESTABLE

Puede representarse un sist. **Inestable** con la expresión $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$, si le damos una entrada $x[n] = U[n]$ (escalón) (limitado por un valor máximo = 1) la salida es ilimitada, ya que crece indefinidamente en la medida q' crece n.

Evaluando: $y[0] = 1$ $y[1] = 2$, $y[2] = 3$

INVARIANZA EN EL TIEMPO

Un sistema cumple con esta propiedad, cuando un desplazamiento en t de la entrada, produce el mismo desplazamiento en t sobre la salida.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema IT}} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n-n_0] \rightarrow \boxed{\text{Sistema IT}} \longrightarrow y[n-n_0]$$

LINEALIDAD

(*) Un sist. es lineal cuando posee la propiedad de SUPERPOSICIÓN: si la entrada es la suma ponderada de varias señales, entonces la salida es la suma pond. de las rtas. del sist. a c/u de esas entradas (superposición). Sean $x_1(t) \to y_1(t)$, $x_2(t) \to y_2(t)$; $ax_1(t) + bx_2 \to ay_1 + by_2$

Siendo a y b constantes complejas cualesquiera.

Podemos decir: $x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + \ldots$

Entonces $y[n] = \sum a_k y_k[n]$.

(*) Además: Un sist. es Lineal si la salida = $\emptyset$ con entrada $\emptyset$.

* Los INCREMENTAL LINEAL: Ej: $y[n] = 2x[n] + 3$ (se analizan como lineales)

Clase ② Matemática Superior

CONVOLUCION EN TIEMPO DISCRETO:
SUMA DE CONVOLUCIÓN.

Consideremos a una señal de entrada $x[n]$ que es alterada por un SLIT y se obtiene una salida $y[n]$.

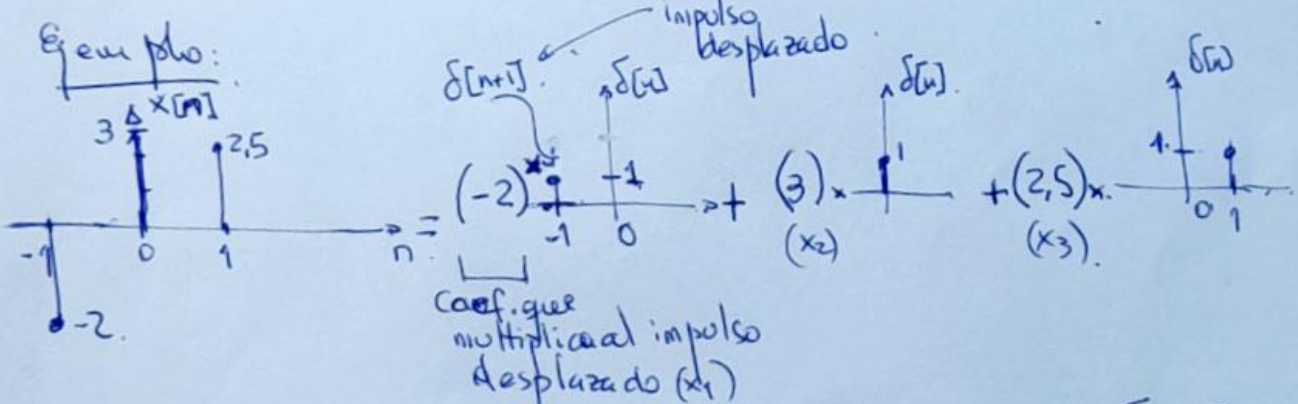
$$x[n] \rightarrow \boxed{SLIT} \rightarrow y[n]$$

De acuerdo a la propiedad de escudriñamiento del impulso unitario, cualquier señal puede descomponerse en la suma ponderada de impulsos desplazados en el tiempo

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[k]\,\delta[n-k]} \quad y \quad \boxed{x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau}$$

TIEMPO DISCRETO — TIEMPO CONTINUO

Ejemplo:



La descomposición de esta $x[n] = x_1 \cdot \delta[n+1] + x_2\,\delta[n] + x_3\,\delta[n-1]$

Considerando que el sistema sea LINEAL E INVARIANTE EN EL TIEMPO (SLIT) (Cumple con la propiedad de superposición)

Si $\delta[n] \rightarrow \boxed{SLIT} \rightarrow h[n]$.

y $\delta[n-n_0] \rightarrow \boxed{SLIT} \rightarrow h[n-n_0]$

Además, por prop de superposición: (del ejemplo).

$$y[n] = x_1 \cdot h[n+1] + x_2\, h[n] + x_3 \cdot h[n-1].$$

Entonces: Si $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$.

$$\downarrow$$

$$\boxed{SLIT}$$

$$\downarrow$$

Suma de convolución

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[k] \cdot h[n-k]}$$

notación

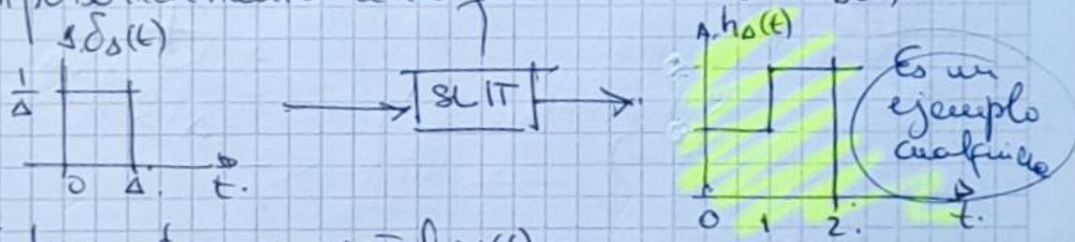
$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n]}$$

Clase 2 Matemática Superior hoja 8

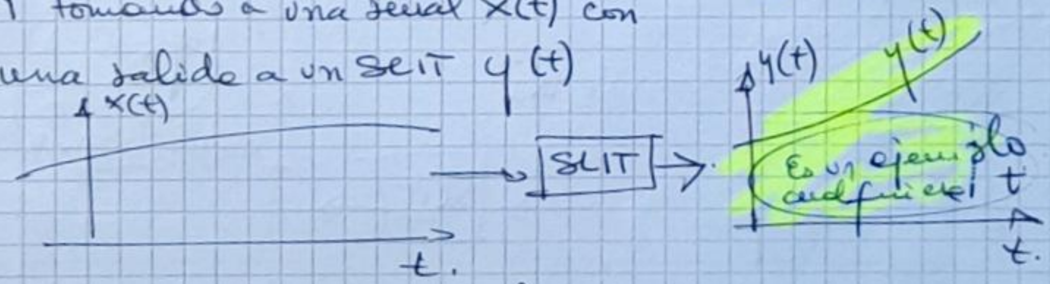
2) CONVOLUCIÓN EN TIEMPO CONTINUO: INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

A partir del concepto de SUMA DE CONVOLUCIÓN (en [n]), un análisis a la convolución en tiempo continuo puede realizarse utilizando la interpretación incremental del impulso unitario.

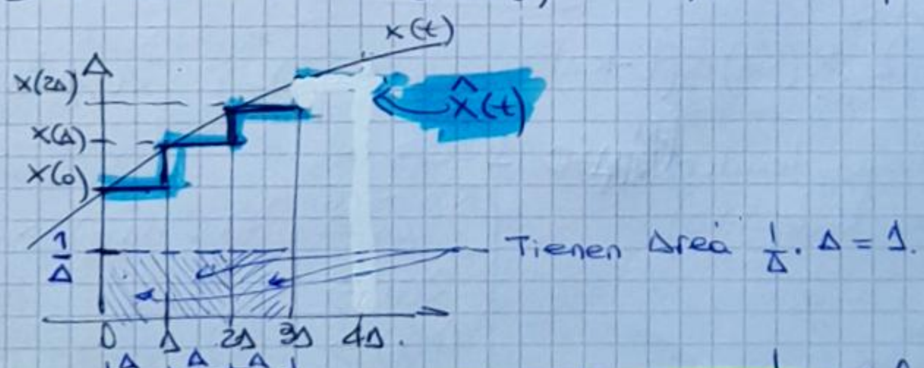
Definiendo un impulso incremental $\delta_\Delta(t)$ y suponiendo (a modo de ejemplo) una respuesta de un SLIT a ese impulso incremental a la que llamamos $h_\Delta(t)$.



Y tomando a una señal $x(t)$ con una salida a un SLIT $y(t)$



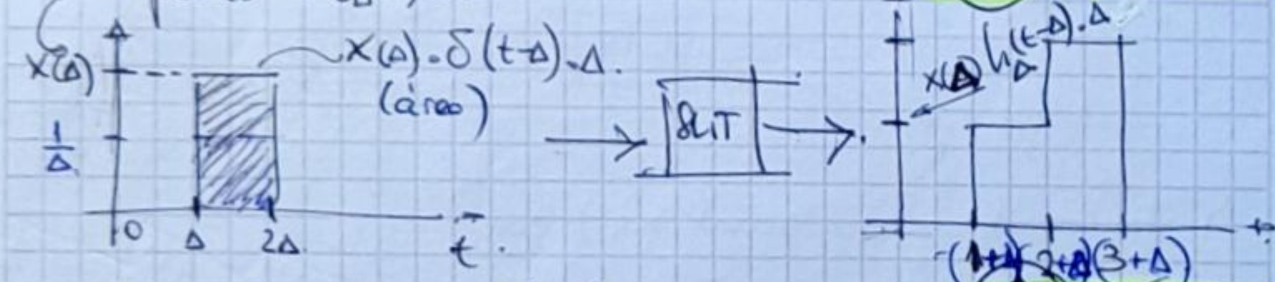
Podemos representar a la $x(t)$ por una aproximación incremental $\hat{x}(t)$

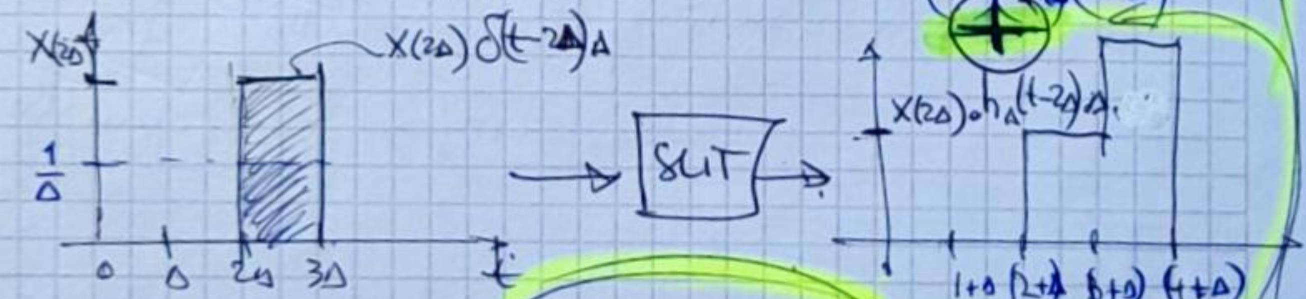


Según la propiedad de escudriñamiento del impulso unitario en tiempo continuo y en tiempo discreto, cualquier señal puede descomponerse en la suma ponderada de impulsos desplazados en el tiempo

Si Reemplazamos la $\hat{x}(t)$ (incremental) por los impulsos ponderados desplazados, y haciendo sus respuestas a un SLIT (RECORDAR QUE SON LINEALES e INV. en T)

Desplazo al $\delta_\Delta(t)$ a Δ.





Si los sumo

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k\cdot\Delta)\,\delta_\Delta(t-k\cdot\Delta)\cdot\Delta$$

Suma de convolución

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k\Delta)\, h_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

Si hago tender $\lim_{\Delta\to 0}$ (hago límite $\Delta\to 0$)

$\Delta \to d\tau$.
$k\cdot\Delta \to \tau$
$\delta_\Delta(t) \to \delta(t)$. $h_\Delta(t) \to h(t)$ (de la función)
$\hat{x}(t) \to x(t)$
$\hat{y}(t) \to y(t)$
$\sum \to \int$

Entonces: $\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau}$

Además:

$$\boxed{y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\,d\tau}$$

INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN (convol. en tiempo continuo)

$y(t) = x(t) * h(t)$

Ejemplos

Ejemplo 3.3 (pág. 97)

Consideremos que $x(t)$ es la entrada de un SLIT, con respuesta al impulso unitario $h(t)$, donde:

$x(t) = e^{-at}\,u(t) \quad (a>0)$ &

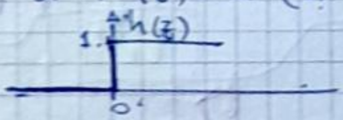
$h(t) = u(t)$

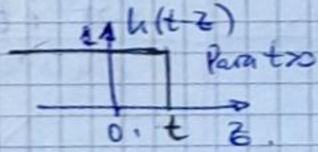
} Calcular $y(t)$ y Graficarla.

Para calcular la integral de convolución $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$, debemos primeramente fijar los límites de integración. Para eso analizamos las funciones a integrar:

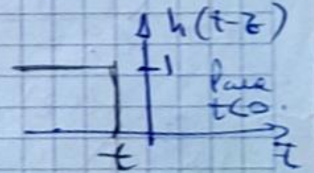
$x(\tau) = e^{-a\tau}\,u(\tau)$ para $a>0$

Si $h(\tau) = u(\tau)$





y



al observar los gráficos, vemos que la superposición (el producto) entre $x(t)$ y $h(t-\tau)$ para $t<0 = 0 \Rightarrow y(t)=0$. para $t<0$ (lim. infer.) y el límite superior es t

Por lo tanto, el producto $x(\tau)\,h(t-\tau) = e^{-a\tau}$ (para $0<\tau<t$)

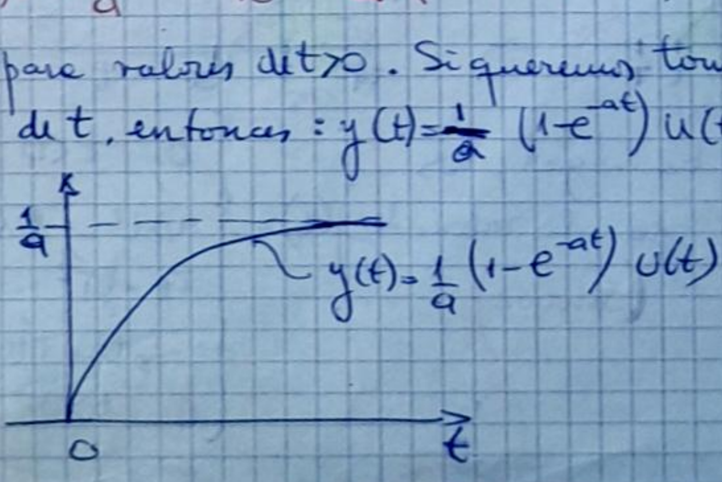
$= 0$ para cualq. otro valor

Entonces: $y(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} e^{-a\tau}\,d\tau =$

$$y(t) = -\frac{1}{a}\,e^{-a\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$$

Resolvimos la $\int$ para valores de $t>0$. Si queremos tomar todos los valores de t, entonces: $y(t)=\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)u(t)$

Graficando:

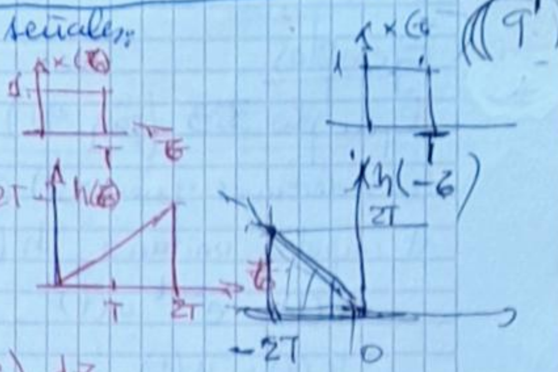


Ejemplo 3.4 (Pág 98) (Para analizar los intervalos)

Considere la convolución de las siguientes señales:

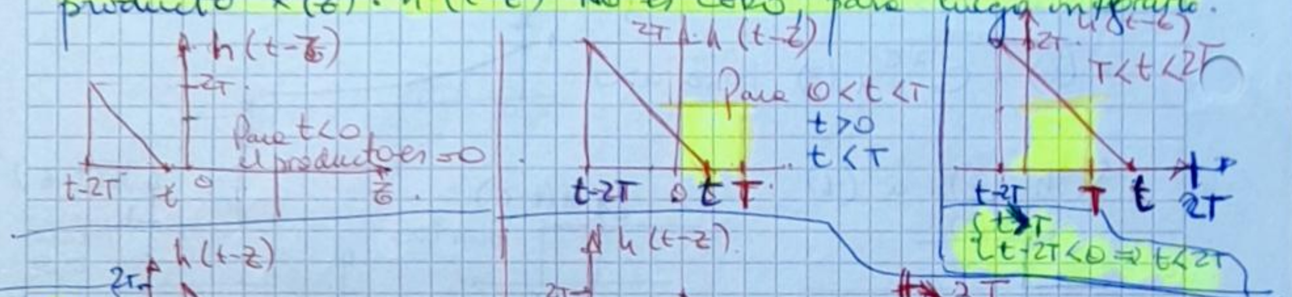
$$x(t) = \begin{cases} 1; & 0 < t < T \\ 0; & \text{para cualq. otro valor} \end{cases}$$

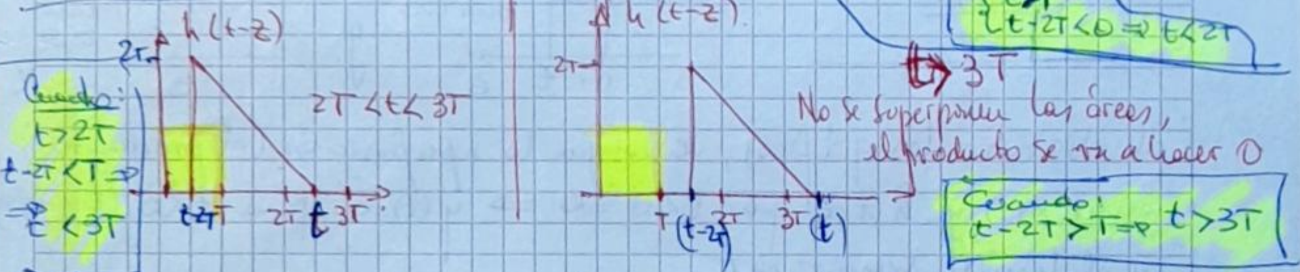
$$h(t) = \begin{cases} t; & 0 < t < 2T \\ 0; & \text{para cualq. otro valor.} \end{cases}$$



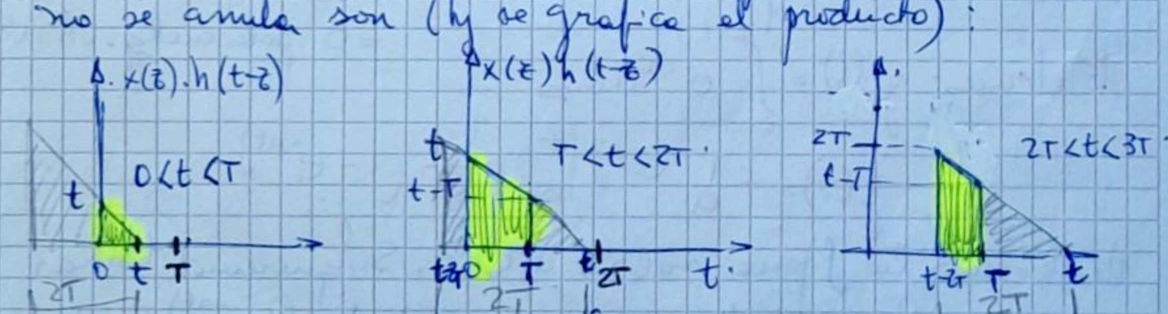
La convolución $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

1) Conviene analizar la evaluación de $y(t)$ en intervalos separados para realizar la convolución. (Analizamos en donde el producto $x(\tau) \cdot h(t-\tau)$ NO es CERO, para luego integrarlo.





II) Los Rangos de valores para los que el producto $x(\tau)\, h(t-\tau)$ no se anula son (y se grafica el producto):



La integral, nos da los valores de (Solución)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0<t<T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T<t<2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T<t<3T \\ 0, & t>3T \end{cases}$$

GRÁFICO DE LA SOLUCIÓN:

Clase 2

9

Ejemplo de convolución en tiempo continuo

3.2.a) Para los siguientes pares de formas de onda, utiliza la integral de convolución para encontrar la respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t)$ del sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h(t)$.

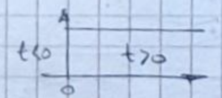
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t}\, u(t) \\ h(t) &= e^{-\beta t}\, u(t) \end{aligned}\right\} \quad \text{obtener resultado para } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \alpha = \beta \end{cases}$$

Para $\alpha \neq \beta$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} e^{-\alpha\tau} \cdot \overset{*1}{u(\tau)} \cdot e^{-\beta(t-\tau)}\, \overset{*2}{u(t-\tau)}\, d\tau$$

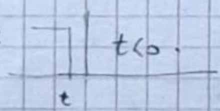
Para determinar los límites de integración:

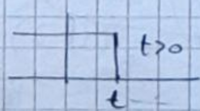
La $u(t)$ de $*1$



dice que el límite inferior de $\int$ va a ser 0 porque para valores inferiores se anula (límit inf).

La $u(t-\tau)$ de $*2$





Dice que se va a anular el producto para valores $>t$ para $t>0$. (límite sup)

Entonces:

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau} \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{\beta\tau}\, d\tau = e^{-\beta t} \cdot \int_0^t e^{(\beta\tau - \alpha\tau)}\, d\tau$$

$$\boxed{\int e^{u}\, dt = \frac{1}{u'} e^{u}}$$

$$= e^{-\beta t} \cdot \left[\frac{1}{(\beta-\alpha)} \left| e^{(\beta\tau - \alpha\tau)} \right|_0^t \right] = e^{-\beta t} \left(\frac{1}{\beta-\alpha} \right) \left(e^{(\beta t - \alpha t)} - 1 \right)$$

Y para todo t:

$$\boxed{y(t) = e^{-\beta t} \left[\left(\frac{1}{\beta-\alpha} \right) \left(e^{(\beta t - \alpha t)} - 1 \right) \right] \cdot u(t)}$$

Para $\alpha = \beta$.

$$\int_0^t \cancel{e^{-\alpha\tau}} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cancel{e^{\alpha\tau}}\, d\tau = e^{-\alpha t} \int_0^t 1 \cdot d\tau = e^{-\alpha t} \cdot t$$

$$\boxed{y(t) = e^{-\alpha t} \cdot t \cdot u(t)}$$

(Para todo t)