

Unidad 5

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Una **ecuación lineal** es aquella que tiene la forma de un polinomio de primer grado, es decir, las incógnitas aparecen cada una en distintos términos, elevadas a la potencia uno y multiplicadas por una constante.

Un **sistema de ecuaciones lineales** (SEL) es un conjunto finito de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Donde:

- m son las ecuaciones
- n son las incógnitas
- ai los coeficientes (números reales)
- xi son las incógnitas (números a calcular)
- bi son los términos independientes

Resolver el sistema es calcular las incógnitas para que se cumplan todas las ecuaciones del sistema simultáneamente. Dos sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Expresión matricial de un sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ (forma simbólica)

↓

Matriz de coeficientes A
m x n

↓

Matriz de incógnitas X
n x 1

↓

Matriz de términos independientes B
m x 1

a_{ij} coeficiente genérico
i número de fila
j número de columna

x_n

b_1

Tipos de sistemas:

Buscamos soluciones de los sistemas en los números reales R, de acuerdo a esto pueden ser:

- **Incompatibles:** no tienen solución
- **Compatibles:** tienen solución
 - **Determinados:** solución única nxn
 - **Indeterminados:** infinitas soluciones

Sistema mal condicionado:
pequeñas variaciones en los datos producen grandes variaciones en la solución.


Métodos de resolución:

- ❖ **Métodos directos:** permiten obtener una solución exacta (si no existieran los errores de redondeo), en un número finito de operaciones. Se aplica el método una sola vez.
- ❖ **Métodos indirectos:** Parten de una aproximación inicial por medio de un algoritmo y conducen a aproximaciones sucesivamente mejores a cada paso. Es aconsejable su uso en sistemas de muchas incógnitas y en sistemas mal condicionados. Como son métodos infinitos se suma un error de truncamiento. Es decir, se aproxima a la incógnita, pero siempre tiene un error.

Método de eliminación de Gauss (método directo)

1. **Triangularización:** Mediante operaciones elementales de filas y columnas se transforma la matriz de coeficientes A en **Triangular Superior** (o sea que todos los elementos bajo la diagonal principal son cero).
2. **Sustitución inversa:** Obtenemos los valores de las incógnitas despejándolas desde la última ecuación hacia la primera; sustituyendo los valores que vamos encontrando.

Triangularización: Hacer 0 los coeficientes por debajo de la diagonal principal


$$\begin{array}{ccc|c} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 & b_1^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & a_{23}^0 & b_2^0 \\ a_{31}^0 & a_{32}^0 & a_{33}^0 & b_3^0 \end{array}$$

Operaciones elementales:

$e_{21}(m)$ a la fila 2 le sumo la fila 1, habiendo multiplicado por m previamente.

Ejemplo para hacer cero el elemento a_{21}^1 m sea:

$$m_2^1 = -\frac{a_{21}^0}{a_{11}^0}$$

- Subíndice: el número de fila que modifica
- Supraíndice: la cantidad de operaciones elementales de fila aplicadas a esa misma fila

Generalizamos:

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} + a_{kj}^{k-1} m_i^k$$

$$b_i^k = b_i^{k-1} + b_k^{k-1} m_i^k$$

$$m_i^k = -\frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}$$

Fórmula general para obtener las incógnitas:

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} \cdot x_j}{a_{kk}}$$

Técnicas de pivoteo

a_{ii} es el elemento pivot y es un coeficiente que se encuentra sobre la diagonal principal. Si es muy pequeño o cero, produce un error de redondeo muy grande que es subsanado a través de las técnicas de pivoteo.

Con las técnicas de Pivoteo, se busca que el mayor número posible dentro de la matriz de coeficientes A y según ciertas condiciones; se ubique en posición de elemento PIVOT. Existen 2 técnicas:

- Pivoteo parcial: Buscamos el mayor número en valor absoluto, en la columna o sub columna y realizamos intercambio de filas para ubicarlo en el lugar del elemento Pivot (no olvidar el término independiente)
- Pivoteo total: Buscamos el mayor número en valor absoluto, en la matriz o sub matriz y realizamos intercambio de filas o columnas para ubicarlo en el lugar del elemento Pivot (el intercambio de columnas cambia el orden de las incógnitas).

Al intercambiar las filas, se intercambian los términos independientes.

Al intercambiar columnas, se intercambian las incógnitas.

Minimos cuadrados

Es una técnica de cálculo numérico en la que, dados un conjunto de pares ordenados (x , y) y una familia de funciones, se intenta encontrar la **función continua**, dentro de dicha familia, que mejor se aproxime a los puntos datos (un "mejor ajuste"), de acuerdo con el criterio de mínimo error cuadrático.

Datos:

Conjunto de pares ordenados

x_k	y_k
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
\vdots	\vdots
x_n	y_n

Función de Aproximación:

$$f(x) = \sum_{j=1}^m c_j \cdot \Theta_j(x)$$

$m \leftarrow$ Cantidad de términos
 c_j COEFICIENTES $\Theta_j(x)$ FUNCIONES Θ QUE DEPENDEN DE LA VARIABLE X

El conjunto de pares ordenados no es exacto (contiene error).

La función de aproximación es una combinación lineal de funciones $\Theta(x)$ (polinómicas, trascendentales, etc. Según la naturaleza de los datos) y coeficientes C, con m términos.

Desviación: Sumatoria de las diferencias entre los valores datos y los calculados con la curva de ajuste.

$$\sum_{k=1}^n (y_k - f(x_k))$$

Los errores positivos se cancelan con los errores negativos, por lo que se introduce el valor absoluto, pero como la función valor absoluto no tiene definida la derivada en el mínimo entonces se utiliza el criterio de mínimos cuadrados, es decir, que para hacer a todos los errores positivos los elevo al cuadrado, siendo así:

$$S = \sum_{k=1}^n (y_k - f(x_k))^2$$

Funcional de Desviación

Esta función nos da una magnitud del error de esa función de aproximación y esos puntos datos.

También, permite elegir entre varias $f(x)$ distintas, cual es la que mejor aproxima a los puntos datos (es

decir, aproxima más la función que tenga el menor valor para S).

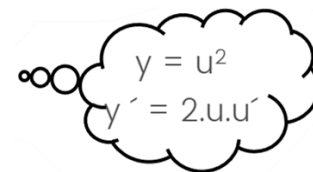
Reemplazando la función de aproximación en la funcional de desviación resulta:

n: Cant puntos datos m: Cant de términos de la función de aproximación

$$S = \sum_{k=1}^n \left(y_k - \sum_{j=1}^m c_j \cdot \Theta_j(x_k) \right)^2$$

y_k DATO c_j INCOGNITA $\Theta_j(x_k)$ Funciones Θ que dependen de la var x FUNCIÓN DE APROXIMACIÓN

Minimización del funcional de desviación: Para obtener los coeficientes “c” que minimicen el valor de la función S, se debe igualar las derivadas parciales de S respecto de cada una de las variables c_i a cero.



Luego se reacomodan los términos y generalizando, resulta:

$$\sum_{j=1}^m c_j \sum_{k=1}^n \Theta_i(x_k) \Theta_j(x_k) = \sum_{k=1}^n y_k \Theta_i(x_k)$$

Si derivamos respecto de todos los coeficientes “c” formaremos un S.E.L., la matriz de coeficientes A va a ser simétrica y de tamaño $m \times m$. Resolviendo el sistema encontraremos los valores de nuestras incógnitas c y obtendremos la función de aproximación.

Para el práctico entonces se siguen los siguientes pasos:

- Identificar las funciones Θ dentro de la función de aproximación
- Armar el SEL
- Resolver el SEL por método de Gauss aplicando las técnicas de pivoteo
- Una vez obtenidos los valores de las incógnitas armamos la función de aproximación
- Calcular el error S.

Si tengo 2 funciones de aproximación le aplico este proceso a cada una y la que tenga menor S será la mejor función de aproximación.

Si la función de aproximación propuesta no puede expresarse como una combinación lineal de funciones, la determinación de los coeficientes igualando a cero las derivadas parciales de S respecto de cada una de las incógnitas, conduce a la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales.

La **realidad** se representa a través de un **modelo matemático** por medio de **herramientas de cálculo numérico** que nos permiten obtener **resultados que se cotejan con la realidad**.

Unidad 6

Ecuaciones no lineales

Es una función en donde la variable está elevada a una potencia distinta de 1, o que incluye funciones trascendentes, como por ejemplo trigonométricas o algebraicas polinomios de grado mayor a 1. (Es decir, si es un polinomio, no tiene que ser recta).

El **Objetivo del modelo** es encontrar las raíces de la ecuación no lineal ya que dicha raíz nos da una información significativa para el modelo.

Los **métodos** nos permiten aproximar a las raíces de ecuaciones no lineales para poder resolver el modelo. Es decir, hablar de raíces es encontrar el valor de "x" cuando la función se anula, esto es, $f(x)=0$.

¿Por qué decimos que vamos a obtener aproximaciones a las raíces?

Dependiendo de la función $f(x)$, es posible que sea difícil poder obtener los valores de raíces exactas. Por medio de herramientas del cálculo numérico y técnicas computacionales podremos obtener sucesivas aproximaciones a nuestra raíz. Aceptaremos la aproximación que cumpla con el error propuesto y la adoptaremos como nuestra solución aproximada.

Raíces de la función

$F(x)$ está definida y es continua en un intervalo $[a, b]$ las raíces de la función representan cada valor ϵ para el cual la función se anula, esto es, $f(\epsilon) = 0$.

Para poder encontrar la raíz y aplicar las herramientas del cálculo numérico, se deben cumplir dos etapas, siempre trabajando de a una raíz por vez:

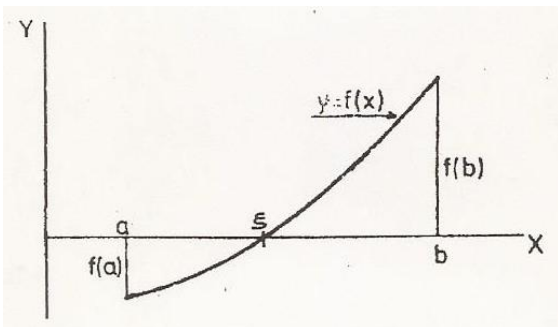
- 1) **Aislamiento de las raíces**: consiste en establecer un intervalo $[a, b]$ lo más pequeño posible, tal que en su interior se encuentre **una única raíz**.

TEOREMA 1: Si una función continua $f(x)$ asume valores de signos opuestos en los extremos de un intervalo $[a, b]$, y por lo tanto $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Luego el intervalo $[a, b]$ contendrá al menos un punto ϵ tal que $f(\epsilon) = 0$.

Esto asegura que el intervalo contenga al menos una raíz o un **número impar de raíces**.

Cuando tomamos dos extremos de intervalos con el mismo signo siempre van a quedar 0, 2, 4 o un **número par de raíces**.



El teorema 1 es una **CONDICION SUFICIENTE**.

CONDICIÓN NECESARIA: La raíz ϵ será definitivamente única dentro del intervalo $[a, b]$, si la derivada de $f(x)$ existe y conserva su signo en todo el intervalo.

Tips para encontrar el intervalo $[a, b]$ en el práctico:

- Construir una tabla de pares ordenados (x, y) donde busquemos el cambio de signo en y_k
- Hacer un gráfico de la función
- Si la función es muy compleja de graficar se suele dividirla en 2 funciones que sean más simples de representar, esto es, $f(x) = 0$ y luego hacer $f_1(x) = f_2(x)$ y entonces buscamos los puntos donde f_1 y f_2 se cortan, siendo estas las raíces de $f(x)$

2) Métodos para el cálculo de raíces: métodos iterativos e indirectos:

- a. Método de punto fijo o de aproximaciones sucesivas: Parte de una aproximación inicial y por medio de un algoritmo conduce a aproximaciones sucesivamente mejores en cada paso a la raíz. Este método consiste en reemplazar nuestra función original $f(x) = 0$ en otra expresión equivalente de la forma $x = G(x)$ tal que cualquier solución de ésta lo sea también de la primera.

Pueden existir muchas alternativas de distintas $G(x)$ cada una de ellas puede constituir una fórmula iterativa, pero no todas van a ser satisfactorias. (condición de convergencia que dice que no todas las $G(x)$ van a converger a mi raíz).

$$x_{k+1} = G(x_k)$$

Fórmula iterativa

La fórmula iterativa nos dice que si evaluamos un punto inicial en G entonces obtendremos la próxima iteración o la primera aproximación a la raíz. Luego esa primera aproximación la evaluamos en G y obtenemos otra iteración u otra aproximación a la raíz. Y así vamos obteniendo sucesivas aproximaciones.

Para que este algoritmo sea de utilidad debemos comprobar lo siguiente, dado x_0 aproximación inicial de la raíz ϵ :

- Para el punto de partida x_0 podemos calcular con el algoritmo $x_1 \ x_2 \ x_3 \dots$
- La sucesión $x_1 \ x_2 \ x_3$ convergen a la raíz ϵ
- El límite ϵ constituye un punto fijo en sí mismo de $G(x) \rightarrow \epsilon = G(\epsilon)$ (es decir, si en la formula iterativa obtengo ϵ y no sé qué esa es mi raíz exacta, cuando vuelva a evaluar ϵ en G me va a volver a dar ϵ).

Convergencia
 x_0 aproximación inicial
 $x = \epsilon$ raíz
 $I \rightarrow$ intervalo que contiene la raíz
 Sean $G(x), G'(x)$ continuas en I
 Si: $|G'(x)| < 1$ Condición de convergencia

Condición de convergencia: si la derivada primera de $G(x)$ valuado en todos los puntos del intervalo es menor que 1 significa que la $G(x)$ va a ser convergente a la raíz.

Para todos los puntos en I y si además la aproximación inicial pertenece a I , entonces la formula iterativa sirve.

Error en la iteración k	Error en la iteración k+1	Para que converja
$ x_k - \epsilon = e_k $	$ x_{k+1} - \epsilon = e_{k+1} $	$ e_{k+1} < e_k $
Restamos miembro a miembro	$\begin{aligned} x_{k+1} &= G(x_k) \\ \epsilon &= G(\epsilon) \\ \hline x_{k+1} - \epsilon &= G(x_k) - G(\epsilon) \end{aligned}$	Se desprecia
Taylor	$G(x_k) = G(\epsilon) + (x_k - \epsilon) G'(\epsilon) + \frac{(x_k - \epsilon)^2}{2} G''(\epsilon) + \dots$	
Reemplazamos	$x_{k+1} - \epsilon = \cancel{G(\epsilon)} + (x_k - \epsilon) \cancel{G'(\epsilon)} + \frac{(x_k - \epsilon)^2}{2} \cancel{G''(\epsilon)} + \dots$	
	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div>Error en la iteración k+1</div> <div>Error en la iteración k</div> </div>	
Para que converja	y la igualdad se respete	Condición de Convergencia
$ e_{k+1} < e_k $		$ G'(x_k) < 1$

- b. **Método de Newton Raphson:** Parte de una aproximación inicial y por medio de un algoritmo conduce a aproximaciones sucesivamente mejores a cada paso. Es uno de los métodos más conocidos para la determinación de una raíz de $f(x)$, una de las razones es por la velocidad de convergencia. Puede ser visto de 2 maneras: Se deriva de la serie de Taylor o se ve como un caso particular del método de Punto Fijo.

<p>Taylor</p> $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2} + \dots$ <p>$f(x)=0$ Despejamos x</p> <p>Buscamos x = la raíz, $f(x) = 0$</p> $(x-a) = -\frac{f(a)}{f'(a)}$ $x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$	<p>Se desprecia</p> <p>Cambiamos nombres de variables $x = x_{k+1}$ $a = x_k$</p>	<p>En la fórmula iterativa de N-R el segundo miembro es una función G que depende de x_k, por ende se puede representar como la formula iterativa del punto fijo y por eso se dice que es un caso particular del método de Punto</p>
$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ <p>Fórmula iterativa N-R</p>	$x_{k+1} = G(x_k)$ <p>F. Iterativa de Punto Fijo</p>	

Fijo.

Condición de convergencia en Newton Raphson:

Derivamos $G(x_k)$

$$G'(x_k) = 1 - \frac{f'(x_k) \cdot f'(x_k) - f''(x_k) \cdot f(x_k)}{[f'(x_k)]^2}$$

$$G'(x_k) = 1 - \frac{\cancel{f'(x_k) \cdot f'(x_k)}}{[f'(x_k)]^2} + \frac{f''(x_k) \cdot f(x_k)}{[f'(x_k)]^2}$$

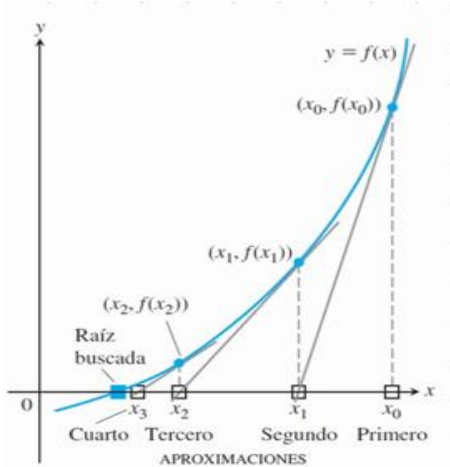
1

La derivada primera de $G(x_k)$ valuada en todos los puntos del intervalo debe ser menor que 1.

$$\left| \frac{f''(x_k) \cdot f(x_k)}{[f'(x_k)]^2} \right| < 1$$

Condición de Convergencia de N-R

Interpretación gráfica del método de Newton Raphson:



Siendo x_0 la primer aproximación y la función es la curva pintada y el cuadradito pintado es la raíz buscada. El método de Newton Raphson traza rectas tangentes a la curva en el punto en donde estamos valuando (siendo x_0 la primera vez).

De esta manera, cuando la recta tangente corta al eje de abscisas, ese punto en el eje es mi primera aproximación.

Para una segunda aproximación, se obtiene el par ordenado $(x_1, f(x_1))$ y se traza una nueva recta tangente a la curva en ese punto. Cuando esta recta tangente corte el eje de las abscisas va a ser la próxima aproximación a la raíz siendo esta x_2 y así sucesivamente.

Convergencia cuadrática del método de Newton Raphson:

Su principal ventaja es su velocidad de convergencia cuadrática hacia la raíz, lo que implica que el error del paso $k+1$ está en función del cuadrado del error en el paso k .

Recordando que:

Error en la iteración k

$$|x_k - \varepsilon| = |e_k|$$

Error en la iteración $k+1$

$$|x_{k+1} - \varepsilon| = |e_{k+1}|$$

ε es la raíz exacta ; $f(\varepsilon) = 0$

Restamos miembro a miembro

Taylor

Reemplazamos

$$x_{k+1} = G(x_k)$$

$$\varepsilon = G(\varepsilon)$$

$$x_{k+1} - \varepsilon = G(x_k) - G(\varepsilon)$$

$$G(x_k) = G(\varepsilon) + (x_k - \varepsilon) G'(\varepsilon) + \frac{(x_k - \varepsilon)^2}{2} G''(\varepsilon) + \dots$$

$$x_{k+1} - \varepsilon = G(\varepsilon) + (x_k - \varepsilon)^2 G''(\varepsilon) \frac{1}{2} - G(\varepsilon)$$

$$e_{k+1} = e_k^2 G''(\varepsilon) \frac{1}{2}$$

Calculamos $G'(x)$ en la convergencia

$$\left| \frac{f''(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon)}{[f'(\varepsilon)]^2} \right| = 0$$

El error del paso $k+1$ está en función del cuadrado del error en el paso k , haciendo que disminuya más rápidamente, al ser valores pequeños ($e_k^2 \ll e_k$ para $e_k < 1$)

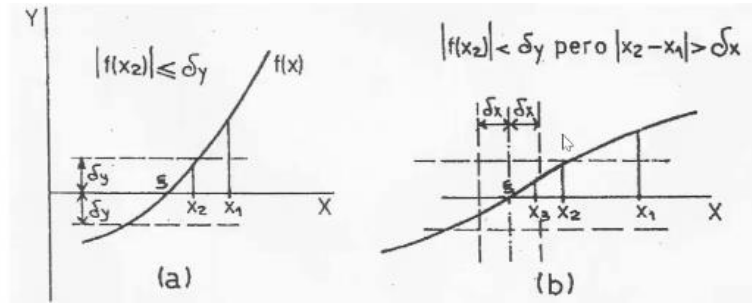
¿Hasta cuándo se continúa calculando?

El proceso iterativo se debe continuar hasta satisfacer las condiciones de corte.

Existen 2 condiciones de corte, delta X y delta Y

Precisión sobre el eje x: δx
 $|x_{k+1} - x_k| \leq \delta x$

Precisión sobre el eje y: δy
 $|f(x)| \leq \delta y$



Unidad 7

Se llama **Ecuación Diferencial** a una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes respecto a una o más variables independientes. La variable independiente es X y la variable dependiente es Y.

Las ecuaciones diferenciales se pueden clasificar como:

- **Ordinarias**: Contiene derivadas ordinarias o totales de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente (respecto a x).
- **Derivadas parciales**: Contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes respecto a más de una variable independiente.

Además, las ecuaciones diferenciales pueden tener:

- **Condiciones iniciales**: Cuando las condiciones iniciales están relacionadas a un solo valor de x.
- **Condiciones de contorno**: Cuando las condiciones iniciales están relacionadas a más de un valor de x.

Trabajamos con **ecuaciones ordinarias y con condiciones iniciales**.

El **Orden de la Ecuación Diferencial** está dado por el orden de la derivada de mayor orden (o sea, solo vamos a poder tener derivadas primeras). Por lo tanto, tendremos:

$$y' = f(x, y) ; y(x_0) = y_0$$

La solución de una Ecuación Diferencial de una variable dependiente Y, con una variable independiente x, es la función $y = f(x)$, tal que satisface a la misma con las condiciones iniciales.

La **solución analítica** de la ecuación diferencial conduce a obtener la función **y(x) en forma explícita**. (lo que vimos en análisis matemático II xd)

Los **métodos numéricos**, permiten obtener valores aproximados de la solución de la Ecuación diferencial, es decir, conducen a los **valores aproximados que forman la función y(x)**, para valores determinados de la variable independiente x, que selecciona el usuario. Obtenemos la Función de

manera DISCRETIZADA (es decir, que vamos a tener pares ordenados de la función y por ende son soluciones aproximadas porque estamos usando métodos numéricos).

Relación entre modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales:

Las derivadas nos permiten expresar la variación de una variable respecto de otra variable, por lo tanto, la formulación matemática de estos problemas da lugar a Ecuaciones diferenciales.

Las Ecuaciones Diferenciales se han originado al intentar resolver numerosos problemas en varias ramas de las ciencias y la ingeniería:

- Determinar el movimiento de un satélite, planeta
- El estudio de crecimiento de poblaciones
- El problema de determinar la corriente en un circuito eléctrico

La solución de estas ecuaciones diferenciales nos proporciona una explicación o un dato que es utilizado por los científicos o aquellos profesionales que hayan aplicado las mismas.

A. Resolución de una Ecuación Diferencial Ordinaria de primer orden con Condiciones Iniciales

La solución consiste en encontrar los valores de Y para un X dado.: $y' = f(x, y) ; y(x_0) = y_0$
Solución $y(x)$

Se debe calcular el Htrabajo de la siguiente forma:

$$h_{\text{TRABAJO}} = \frac{X_{\text{FINAL}} - X_{\text{INICIAL}}}{\text{pasos}}$$

Métodos numéricos de Runge Kutta:

Los métodos numéricos de Runge Kutta son directos, lo que implica que en cada paso que se haga se obtiene un valor de Y.

Las expresiones utilizadas en este método pueden compararse con la serie de Taylor, truncada en algún término, lo que define el orden del método y la precisión de la solución comparada entre ellos.

Método	Hasta el término de Taylor	Cantidad de términos
a. Euler	Derivada primera	2
b. Euler Mejorado	Derivada Segunda	3
c. Runge Kutta de 4to orden	Derivada Cuarta	5

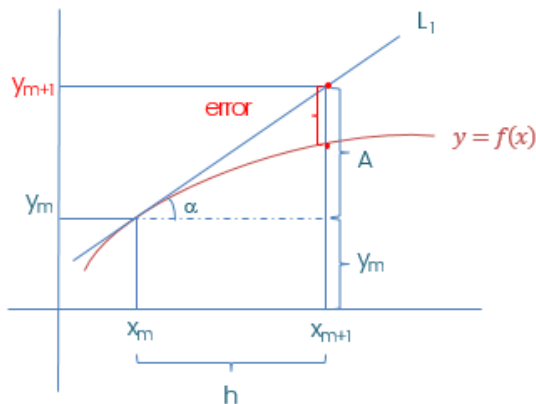
Son métodos Directos que nos permiten obtener en cada aplicación del método un par ordenado; partiendo de las condiciones iniciales (x_0, y_0)

Obtenemos: $(x_1, y_1); (x_2, y_2); \dots (x_m, y_m); (x_{m+1}, y_{m+1})$.

- **Método de Euler:** partiendo de la ecuación diferencial y de las condiciones iniciales, vamos a generalizar a las condiciones iniciales obteniendo un par ordenado genérico de la forma (x_m, y_m) . Por lo que el objetivo es encontrar los valores siguientes, es decir, (x_{m+1}, y_{m+1}) .

$$x_{m+1} = x_m + h \quad h: \text{"paso"} \text{ debe ser menor a } 1$$

Análisis del método de Euler:



Siendo $y = f(x)$ la función resolución de la ecuación diferencial, la condición inicial (x_m, y_m) pertenece a la función solución. El método de Euler traza una recta tangente (llamada L_1) a la curva en el punto (x_m, y_m) cuya pendiente es:

$$y' = f(x_m, y_m)$$

Es decir, la pendiente es valorar la ecuación diferencial dada como dato en el punto (x_m, y_m) .

Interpretación gráfica de la fórmula:

$$y_{m+1} = y_m + A$$

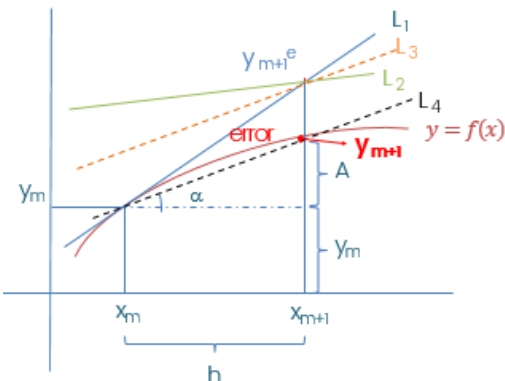
$$y' = \tan \alpha = \frac{\text{cat op}}{\text{cat ady}}$$

$$f(x_m, y_m) = \frac{A}{h}$$

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m) \quad A = h \cdot f(x_m, y_m)$$

a. Método de Euler

- **Método de Euler mejorado:**



Para mejorar el método de Euler, se traza una L_2 que es una recta tangente a la curva en el punto (x_{m+1}, y_{m+1}^e) cuya pendiente es:

$$y' = f(x_{m+1}, y_{m+1}^e)$$

Es decir, la pendiente es valorar la ecuación diferencial dada como dato en el punto (x_{m+1}, y_{m+1}^e) de Euler.

Luego, se traza una bisectriz entre L_1 y L_2 , es decir, se traza una recta L_3 que pasa por el ángulo formado entre L_1 y L_2 partiendo este ángulo en dos partes iguales. La pendiente de L_3 es el promedio de ambas pendientes, esto es:

$$\text{pend: } 1/2 \cdot [f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^e)]$$

Finalmente, se traza una recta (llamada L_4) paralela a L_3 que pase por el punto (x_m, y_m) , y por ende, tiene la misma pendiente que L_3 .

El punto en donde L_4 corta a la vertical de x_{m+1} va a ser el y_{m+1} de Euler mejorado.

Interpretación gráfica de la fórmula:

$$y_{m+1} = y_m + A \quad y' = \tan \alpha = \frac{\text{cat op}}{\text{cat ady}}$$

$$1/2 \cdot [f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^e)] = \frac{A}{h}$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \cdot [f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^e)]$$

b. Método de Euler Mejorado

- **Método de Runge Kutta:** no lo deducimos, solo vemos las fórmulas xd

Resumen para el práctico

$$y' = f(x, y) ; y(x_0) = y_0$$

	Orden del Método	Fórmula
a. Método de Euler	Primer orden	$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m)$
b. Euler Mejorado	Segundo orden	$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \cdot [f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^e)]$
c. Runge Kutta de 4to orden	Cuarto Orden	$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $k_1 = f(x_m, y_m)$ $k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2}k_1\right)$ $k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}; y_m + \frac{h}{2}k_2\right)$ $k_4 = f(x_{m+h}; y_m + h \cdot k_3)$

$$x_{m+1} = x_m + h$$

$$h_{\text{TRABAJO}} = \frac{x_{\text{FINAL}} - x_{\text{INICIAL}}}{\text{pasos}}$$

B. Resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con condiciones iniciales

Sistema de 2 Ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$$

Condiciones Iniciales

$$x_0 ; y(x_0) = y_0 ; z(x_0) = z_0$$

Las condiciones iniciales tienen todas un mismo valor de x. El “H de trabajo” se calcula igual que antes y el x_{m+1} también se calcula igual que antes.

	Las Fórmulas las obtenemos por extensión de las anteriores	
a. Método de Euler	$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m, z_m)$ $z_{m+1} = z_m + h \cdot g(x_m, y_m, z_m)$	
b. Euler Mejorado	$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \cdot [f(x_m, y_m, z_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^e, z_{m+1}^e)]$ $z_{m+1} = z_m + \frac{h}{2} \cdot [g(x_m, y_m, z_m) + g(x_{m+1}, y_{m+1}^e, z_{m+1}^e)]$	
c. Runge Kutta de 4to orden	$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $k_1 = f(x_m, y_m, z_m)$ $k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1, z_m + \frac{h}{2}L_1\right)$ $k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2, z_m + \frac{h}{2}L_2\right)$ $k_4 = f(x_{m+h}, y_m + h \cdot k_3, z_m + h \cdot L_3)$	$z_{m+1} = z_m + \frac{h}{6} \cdot (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$ $L_1 = f(x_m, y_m, z_m)$ $L_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1, z_m + \frac{h}{2}L_1\right)$ $L_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2, z_m + \frac{h}{2}L_2\right)$ $L_4 = f(x_{m+h}, y_m + h \cdot k_3, z_m + h \cdot L_3)$

C. Resolución de una ecuación diferencial ordinaria de orden superior con condiciones iniciales

Las **Ecuaciones Diferenciales de orden mayor a uno**, pueden transformarse en un sistema de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y de esta manera resolverlo con los métodos ya estudiados. Si la Ecuación Diferencial es de segundo orden se transformará en un sistema de 2 Ecuaciones Diferenciales de primer orden. En general si la ecuación es de orden n obtendremos un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden.

Una ecuación diferencial de orden n , puede incluir en sus elementos la variable independiente, la variable dependiente, derivada primera, segunda, ..., enésima menos uno.

Ecuación diferencial de orden n	$y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1})$
Condiciones Iniciales	$x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{n-1}$

Se despeja la derivada de mayor orden

Para transformar esta expresión en un sistema de ecuaciones de primer orden, se definen **funciones auxiliares**.

- **En una ecuación diferencial de orden 2:** $y'' = f(x, y, y')$

Condiciones Iniciales

$$x_0, y_0, y_0'$$

Para transformar esta expresión en un sistema de ecuaciones de primer orden, se definen funciones auxiliares de la siguiente manera:

Armado del sistema	Método Euler por ej.	Asignación C.I.
$y' \rightarrow y' = z \Rightarrow \text{Sería } f(x, y, z)$	$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m, z_m)$	$y_0 = y_0$
$y'' \rightarrow z' = \text{la Ec. Dif dada} \Rightarrow \text{Sería } g(x, y, z)$	$z_{m+1} = z_m + h \cdot g(x_m, y_m, z_m)$	$y_0' = z_0$
	$x_{m+1} = x_m + h$	$x_0 = x_0$

- **En una ecuación diferencial de orden 3:** $y''' = f(x, y, y', y'')$

Condiciones Iniciales

$$x_0, y_0, y_0', y_0''$$

Para transformar esta expresión en un sistema de ecuaciones de primer orden, se definen funciones auxiliares de la siguiente manera:

Armado del sistema	Método Euler por ej.	Asignación C.I.
$y' \rightarrow y' = z \Rightarrow \text{Sería } f(x, y, z, w)$	$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m, z_m, w_m)$	$y_0 = y_0$
$y'' \rightarrow z' = w \Rightarrow \text{Sería } g(x, y, z, w)$	$z_{m+1} = z_m + h \cdot g(x_m, y_m, z_m, w_m)$	$y_0' = z_0$
$y''' \rightarrow w' = \text{la Ec. Dif dada} \Rightarrow \text{Sería } q(x, y, z, w)$	$w_{m+1} = w_m + h \cdot q(x_m, y_m, z_m, w_m)$	$y_0'' = w_0$
	$x_{m+1} = x_m + h$	$x_0 = x_0$

- **En una ecuación diferencial de orden n:** $y^n = f(x, y, y', \dots, y^{n-1})$

Condiciones Iniciales

$$x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{n-1}$$

Para transformar esta expresión en un sistema de ecuaciones de primer orden, se definen funciones auxiliares de la siguiente manera:

Armado del sistema	Método Euler por ej.	Asignación C.I.
$y' \rightarrow y' = z \Rightarrow \text{Sería } f(x, y, z, r)$	$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(x_m, y_m, z_m, r_m)$	$y_0 = y_0$
$y'' \rightarrow z' = w \Rightarrow \text{Sería } g(x, y, z, r)$	$z_{m+1} = z_m + h \cdot g(x_m, y_m, z_m, r_m)$	$y_0' = z_0$
\vdots		
$y^n \rightarrow r' = \text{la Ec. Dif dada} \Rightarrow \text{Sería } q(x, y, z, r)$	$r_{m+1} = r_m + h \cdot q(x_m, y_m, z_m, r_m)$	$y_0^{n-1} = r_0$
	$x_{m+1} = x_m + h$	$x_0 = x_0$