frecuencia de los sistemas de modulación y muestreo los cuales examinaremos con detalle en los capítulos 7 y 8.

Por último, en este capítulo hemos visto que las herramientas del análisis de Fourier son particularmente adecuadas para el examen de sistemas LTI caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Específicamente, hemos encontrado que la respuesta en frecuencia de tal sistema se podría determinar por inspección y que la técnica de la expansión en fracciones parciales podría entonces usarse para facilitar el cálculo de la respuesta al impulso del sistema. La forma de la respuesta en frecuencia para sistemas LTI especificados por ecuaciones diferenciales también nos condujo directamente al desarrollo de las estructuras en cascada y en paralelo para la implantación de tales sistemas LTI. Estas estructuras resaltan el papel importante de los sistemas de primero y segundo orden. Discutimos las propiedades de estos sistemas básicos con algún detalle y en el proceso utilizamos una representación gráfica conveniente, el diagrama de Bode, para mostrar la magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia de un sistema LTI.

El propósito de este capítulo ha sido el de introducir y desarrollar alguna destreza con las herramientas del análisis de Fourier y aprecio por el valor del dominio de la frecuencia para analizar y entender las propiedades de las señales y sistemas de tiempo continuo. En el capítulo 5 desarrollaremos un conjunto de herramientas análogas para el caso de tiempo discreto, y en los capítulos del 6 al 8 usaremos las técnicas del análisis de Fourier de tiempo continuo y de tiempo discreto al examinar los temas de filtrado, modulación y muestreo.

PROBLEMAS

4.1. Determine las representaciones en serie de Fourier para cada una de las siguientes señales.

(a) e^{j200t}

(b) $\cos[\pi(t-1)/4]$

(c) $\cos 4t + \operatorname{sen} 8t$

(d) $\cos 4t + \operatorname{sen} 6t$

(e) $x(t)$ es periódica con período 2, y

$$x(t) = e^{-t} \qquad \text{para } -1 < t < 1$$

Planteo (f) $x(t)$ tal como se ilustra en la figura P4.1(a)

(g) $x(t) = [1 + \cos 2\pi t][\cos(10\pi t + \pi/4)]$

(h) $x(t)$ es periódica con período 2 y

Mo

$$x(t) = \begin{cases} (1-t) + \operatorname{sen} 2\pi t, & 0 < t < 1 \\ 1 + \operatorname{sen} 2\pi t, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

Planteo (i) $x(t)$ como se ha dibujado en la figura P4.1(b)

" (j) $x(t)$ como se ha dibujado en la figura P4.1(c)

(k) $x(t)$ como se ha dibujado en la figura P4.1(d)

(l) $x(t)$ es periódica con período 4 y

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} \pi t & 0 \le t \le 2 \\ 0 & 2 \le t \le 4 \end{cases}$$

(m) $x(t)$ como se ha dibujado en la figura P4.1(e)

(n) $x(t)$ como se ha dibujado en la figura P4.1(f)

4.2. Una técnica para construir una fuente de potencia de CD es tomar una señal de CA y hacerle una rectificación de onda completa. Es decir, hacemos pasar la señal $x(t)$ a través de un sistema que genera como salida una señal $y(t) = |x(t)|$.

(a) Dibuje las formas de onda de la entrada y la salida si $x(t) = \cos t$. ¿Cuáles son los períodos fundamentales de la entrada y la salida?

(b) Si $x(t) = \cos t$, determine los coeficientes de la serie de Fourier para la salida $y(t)$.

(c) ¿Cuál es la amplitud de la componente de CD de la señal de entrada? ¿Cuál es la amplitud de la componente de CD de la señal de salida?

4.3. Como hemos visto en este capítulo, el concepto de función característica es una herramienta extremadamente importante en el estudio de sistemas LTI. Es cierto también que lo mismo puede decirse para los sistemas lineales pero variantes en el tiempo. Específicamente, considere uno de tales sistemas con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. Decimos que una señal $\phi(t)$ es una función característica del sistema si

$$\phi(t) \longrightarrow \lambda\phi(t)$$

Es decir, si $x(t) = \phi(t)$, entonces $y(t) = \lambda\phi(t)$, donde la constante compleja λ es llamada el *valor característico asociado con* $\phi(t)$.

(a) Suponga que podemos representar la entrada $x(t)$ a nuestro sistema como una combinación lineal de las funciones características $\phi_k(t)$, a cada una de las cuales le corresponde un valor característico λ_k.

NO

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \phi_k(t)$$

Exprese la salida $y(t)$ del sistema en términos de $\{c_k\}$, $\{\phi_k(t)\}$ y $\{\lambda_k\}$.

(b) Considere el sistema caracterizado por la ecuación diferencial

$$y(t) = t^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + t\,\frac{dx(t)}{dt}$$

¿Es lineal este sistema? ¿Es variante en el tiempo este sistema?

(c) Demuestre que el conjunto de funciones

$$\phi_k(t) = t^k$$

son funciones características del sistema de la parte (b). Para cada $\phi_k(t)$ determine el correspondiente valor característico λ_k.

(d) Determine la salida de este sistema si

$$x(t) = 10t^{-10} + 3t + \tfrac{1}{2}t^4 + \pi$$

4.4. (a) Considere un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = e^{-4t}u(t)$$

Encuentre la representación en serie de Fourier de la salida $y(t)$ para cada una de las siguientes entradas

(i) $x(t) = \cos 2\pi t$

(ii) $x(t) = \operatorname{sen} 4\pi t + \cos(6\pi t + \pi/4)$

(iii) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)$

(iv) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta(t-n)$

(v) $x(t)$ es la onda cuadrada periódica dibujada en la figura P4.4.

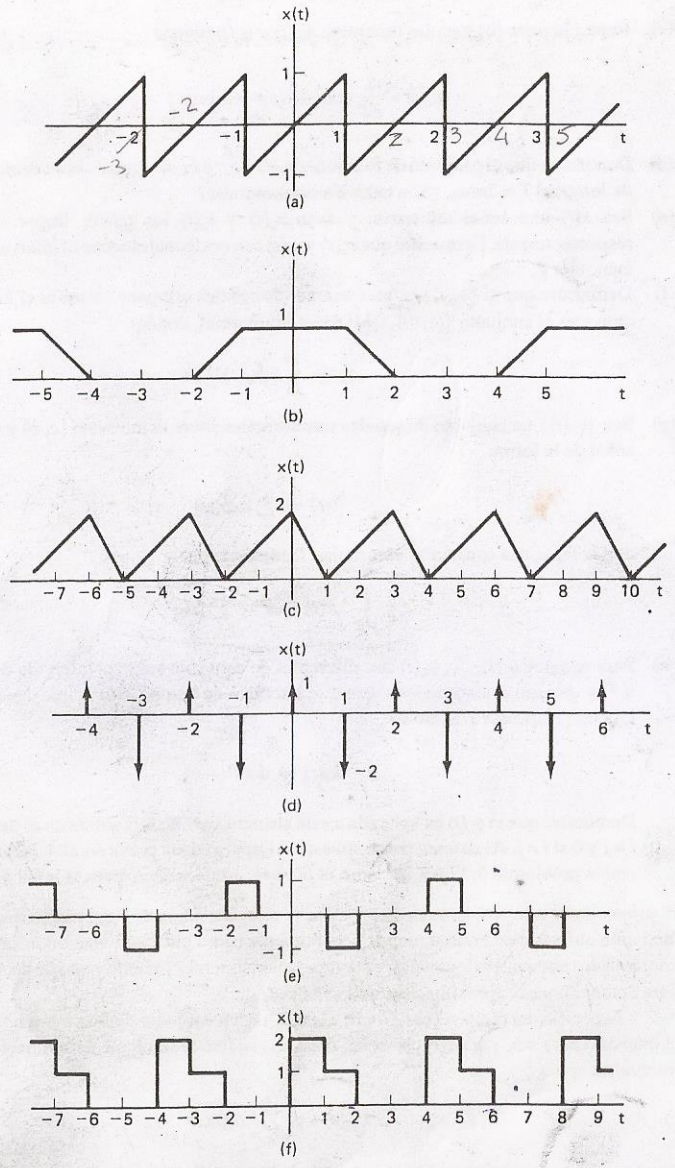

Figura P4.1

(b) Repita la parte (a) para

$$h(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} 2\pi t, + \cos 4\pi t & 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{para cualquier otro} \end{cases}$$

Ho

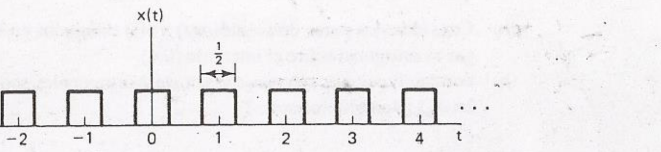

Figura P4.4

c) Repita la parte (a) para

$$h(t) = e^{-4|t|}$$

4.5. Como hemos visto, las técnicas del análisis de Fourier son de valor para examinar sistemas LTI de tiempo continuo porque las exponenciales complejas periódicas son funciones características de los sistema LTI. En este problema deseamos substanciar el siguiente enunciado: Aunque algunos sistemas LTI pueden tener funciones características adicionales, las exponenciales complejas son las *únicas* señales que son funciones características para *todo* sistema LTI.

NO

(a) ¿Cuáles son las funciones características del sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = \delta(t)$? ¿Cuáles son los valores característicos asociados?

(b) Considere el sistema LTI con respuesta al impulso unitario $h(t) = \delta(t - T)$. Encuentre una señal que no es de la forma e^{st} pero que es una función característica con valor característico 1. Similarmente, encuentre funciones características con valores característicos $\frac{1}{2}$ y 2 que no sean exponenciales complejas. (*Sugerencia:* Es posible encontrar trenes de impulsos que satisfagan estos requerimientos.)

(c) Considere un sistema LTI estable con respuesta al impulso $h(t)$ que es real y par. Demuestre que $\cos \omega t$ y $\operatorname{sen} \omega t$ son funciones características de este sistema.

(d) Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = u(t)$. Suponga que $\phi(t)$ es una función característica de este sistema con valor característico λ. Encuentre la ecuación diferencial que $\phi(t)$ debe satisfacer y resuelva esta ecuación diferencial. Este resultado, junto con los de las partes precedentes, debe demostrar la validez del enunciado hecho al principio del problema.

4.6. Considere la señal

Ja Ho

$$x(t) = \cos 2\pi t$$

Ya que $x(t)$ es periódica con período fundamental 1, es también periódica con período N, siendo N cualquier entero positivo. ¿Cuáles son los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$ si la consideramos como una señal periódica con período 3?

4.7. Se dice que dos funciones del tiempo $u(t)$ y $v(t)$ son *ortogonales en el intervalo* (a,b) si

$$\int_a^b u(t)\, v^*(t)\, dt = 0 \qquad \text{(P4.7-1)}$$

NO

Si, además

Dar Conclusion

Ver yo

$$\int_a^b |u(t)|^2\, dt = 1 = \int_a^b |v(t)|^2\, dt$$

se dice que las funciones están *normalizadas* y por consiguiente son llamadas *ortonormales*. Un conjunto de funciones $\{\phi_k(t)\}$ es llamado conjunto *ortogonal* (*ortonormal*) si cada par de funciones de este conjunto es ortogonal (ortonormal).