

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ СИСТЕМАМИ БЕЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМЫ

Рассматривается задача оптимального управления линейной стационарной дискретной системой по неточным измерениям ее выходных сигналов при условии гарантированного удовлетворения геометрических ограничений на выходные сигналы. Исследуется случай, когда минимальная реализация системы в пространстве состояний известна, и случай, когда параметрическая модель системы не известна. Предлагается новый метод решения поставленной задачи в случае неизвестной модели, опирающийся на единственную наблюдаемую траекторию входного и выходного сигнала системы и позволяющий опустить этап ее параметрической идентификации.

### 1. Введение

В современном мире неумолимо возрастает размерность и общая сложность систем управления. Моделирование многих процессов представляется чрезмерно трудоемким, а построенная модель зачастую слишком сложна и громоздка для практического использования. В последние годы все большую популярность набирают методы системного анализа и управления, базирующиеся не на достоверном знании внутренней организации системы (ее модели), но лишь на ее наблюдаемом поведении (измеренных выходных сигналах). В литературе (см., например, [1]) новые методы получили название *data-driven control methods*, т.е. методы управления на основе данных. Настоящая работа примыкает к направлению в рамках теории управления на основе данных, истоки которого находятся в поведенческой (бихевиористской) теории динамических систем. В рамках этой теории будем опираться в основном на результаты работы [2], согласно которой пространство всех траекторий линейной стационарной дискретной системы порождается сдвигами по времени априорных измерений выходных сигналов системы (и, таким образом, образующих матрицу Ганкеля), записанных в одном единственном процессе наблюдения при условии постоянно возбуждающего входного сигнала (управления), и на развитие этих результатов в [3] для описания систем в пространстве состояний. В качестве примеров успешного использования результатов [3] отметим работы по стабилизации линейных стационарных систем [4, 5, 6], а также одношаговый метод проверки системы на диссипативность [7]. Некоторые результаты получены и для нелинейных систем [6, 8], хотя в этом направлении продвижение не столь велико.

Цель настоящей работы — исследование задачи оптимального гарантированного управления линейной стационарной дискретной системой по неточным измерениям выходных сигналов и при наличии ограничений, в формулировке которой собственно модель в явном виде отсутствует, а динамика системы неявно задается данными априорного наблюдения. При наличии параметрической модели аналогичная задача для непрерывных систем и с терминальными ограничениями на состояния исследовалась в работе [9], где в режиме реального времени строятся реализации оптимальной обратной связи по измерениям на основе решения ряда задач оптимального наблюдения и управления. Принцип разделимости процесса на наблюдение и управление, а также формулировки соответствующих задач в рамках подхода на основе данных составляют центральные результаты настоящей работы.

## 2. Оптимальное гарантированное управление линейной системой

Рассмотрим линейную стационарную дискретную систему  $G$ , минимальная реализация  $(A, B, C, D)$  которой известна:

$$(1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \quad t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Здесь  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  — состояние системы, управление и выходной сигнал в момент времени  $t$ ,  $(A, B)$  — управляема,  $(A, C)$  — наблюдаема.

Траекторией системы  $G$  будем называть пару  $\{u, y\} = \{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$  из управления и выходного сигнала, удовлетворяющую (1) при некотором (наблюдателю неизвестном) начальном состоянии  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ .

Относительно начального состояния  $x(0) = x_0$  будем предполагать, что информация о нем ограничивается включением  $x_0 \in X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$ .

На траекторию  $\{u, y\}$  наложим ограничения:

$$(2) \quad u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

где  $U = \{u \in \mathbb{R}^m : u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}$  — множество доступных значений управления,  $Y(t) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \leq g(t)\}$  — множество допустимых значений выходного сигнала в момент времени  $t$ ,  $G(t) \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $g(t) \in \mathbb{R}^q$ ,  $t = 0, \dots, T-1$ .

Поставим задачу о минимизации энергетических затрат на управление системой

$$J(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$$

на множестве доступных управляющих воздействий  $u(t) \in U$ , гарантирующих выполнение ограничений на выходные сигналы (2) при всех возможных реализациях начального состояния  $x(0) \in X_0$ :

$$(3) \quad \begin{aligned} \min_u \quad & \sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2, \\ & x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \\ & y(t) = Cx(t) + Du(t), \\ & u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t) \quad \forall x(0) \in X_0, \\ & t = 0, 1, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Задача (3) решается до начала процесса управления и позволяет дать априорную оценку качества этого процесса.

В каждом конкретном процессе управления реализуется некоторая траектория  $\{u^p, y^p\} = \{u^p(t), y^p(t)\}_{t=0}^{T-1}$  системы  $G$ , которая определяется реализовавшимся, но наблюдателю неизвестным начальным состоянием  $x_0^p \in X_0$  и поданным на вход системы (1) управлением  $u^p$ . Далее будем считать, что в процессе управления доступны лишь неточные измерения выходных сигналов вида

$$\tilde{y}^p(t) = y^p(t) + \xi(t), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

где  $\xi(t)$  — ошибка измерения в момент времени  $t$ . Величина реализовавшейся ошибки  $\xi(t)$  достоверно неизвестна, однако полагаем ее в дальнейшем принадлежащей известному множеству  $\Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^p : \|\xi\|_\infty \leq \varepsilon\}$ , т.е.  $\xi(t) \in \Xi$ ,  $t = 0, \dots, T-1$ , где  $\|\cdot\|_\infty$  — равномерная норма.

К некоторому моменту времени  $\tau$  пара  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\} = \{u^p(t), \tilde{y}^p(t)\}_{t=0}^{\tau-1}$  из реализовавшихся в рассматриваемом процессе управления и измерений составляет текущую позицию процесса. Она позволяет оценить реализовавшееся начальное состояние, скорректировать будущее управление и улучшить априорную оценку качества процесса управления, которую дает задача (3).

*Определение 1.* Состояние  $x(\tau)$  назовем согласующимся с позицией  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ , если найдутся такие допустимые начальное состояние  $x_0 \in X_0$  и ошибки измерения  $\xi(t) \in \Xi$ ,  $t = 0, \dots, \tau-1$ , что выполняются тождества

$$x(\tau) = x(\tau|x_0, u_\tau^p), \quad \tilde{y}^p(t) = Cx(t|x_0, u_t^p) + Du^p(t) + \xi(t), \quad t = 0, \dots, \tau-1,$$

где  $x(t|x_0, u_t^p)$  — состояние, в которое система (1) приходит в момент  $t$ , двигаясь из начальной точки  $x(0) = x_0$  под воздействием управления  $u_t^p$ .

Отметим, что начальное состояние  $x_0$ , о котором идет речь в определении 1, порождает траекторию  $\{u_\tau^p, y_\tau\}$ , в которой, возможно,  $y_\tau \neq y_\tau^p$ .

Обозначим через  $X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$  множество всех состояний  $x(\tau)$ , согласующихся с измеренной траекторией  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ . В момент времени  $\tau$  сформулируем задачу оптимального управления:

$$(4) \quad \begin{aligned} \min_u \quad & \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2, \\ & x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \\ & y(t) = Cx(t) + Du(t), \\ & u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t) \quad \forall x(\tau) \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p), \\ & t = \tau, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Пусть  $u^*(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ ,  $t = \tau, \dots, T-1$ , — оптимальное управление в задаче (4). Согласно [9], в момент  $\tau$  на вход системы  $G$  подается первое значение оптимального управления

$$(5) \quad u^p(\tau) = u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

после чего в момент  $\tau + 1$  решается следующая задача оптимального программного управления (4), в которой на единицу уменьшается горизонт управления и обогащается знание о поведении системы за счет новой позиции  $\{u_{\tau+1}^p, \tilde{y}_{\tau+1}^p\}$ .

Управление  $u^p(\tau)$ ,  $\tau = 0, \dots, T-1$ , построенное по правилу (5) представляет собой [9] *реализацию в конкретном процессе управления оптимальной обратной связи по неточным измерениям*.

Таким образом, для оптимального управления системой  $G$  по неточным измерениям ее выходных сигналов при наличии модели системы необходимо в каждый момент  $\tau$  решать задачу (4). Ее решение основано на принципе разделимости процессов управления и наблюдения (см., например, [10]). Для рассматриваемой задачи можно применить результаты работы [9], модифицируя их с учетом нового типа ограничений и дискретности динамической системы. Соответствующая модификация приводится в Приложении к данной работе.

### 3. Оптимальное гарантированное управление линейной системой на основе данных

Далее сосредоточимся на задаче управления системой  $G$ , однако условимся, что реализация  $(A, B, C, D)$  системы в пространстве состояний не известна. Классический подход в подобных ситуациях состоит в предварительной идентификации системы и последующей формулировке и решении задачи из разд. 2.

В настоящей работе будет предложен альтернативный подход, не нуждающийся в явном параметрическом представлении системы. Вместо модели  $(A, B, C, D)$  будем использовать полученное в [3] представление любой траектории системы  $G$  на основе одной предварительно сгенерированной траектории из управления и выходного сигнала

$$\{u^d, y^d\} = \{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1},$$

которую далее будем называть априорной траекторией.

Будем считать, что априорная траектория  $\{u^d, y^d\}$  измерена точно и для системы  $G$  дана верхняя оценка размерности ее состояния  $n$  (см. [3]).

#### 3.1. Информативность априорной траектории

Предварительно приведем результаты работ [2, 3], в которых показано, как априорная траектория  $\{u^d, y^d\}$  при определенных условиях может иметь ту же информационную ценность, что и модель системы  $(A, B, C, D)$ .

**Определение 2.** Пусть  $L, L^d \in \mathbb{N}$ ,  $L \leq L^d$ . Управление  $u = \{u(t)\}_{t=0}^{L^d-1}$  называется постоянно возбуждающим порядка  $L$ , если матрица Ганкеля

$$H_L(u) = \begin{pmatrix} u(0) & u(1) & \cdots & u(L^d - L) \\ u(1) & u(2) & \cdots & u(L^d - L + 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(L-1) & u(L) & \cdots & u(L^d - 1) \end{pmatrix}$$

имеет полный строчный ранг, т.е.  $\text{rank } H_L(u) = mL$ .

*Замечание 1.* Если управление  $u$  является постоянно возбуждающим порядка  $L$ , то оно должно быть достаточно длинным. Поскольку матрица  $H_L(u) \in \mathbb{R}^{mL \times (L^d - L + 1)}$  имеет полный строчный ранг, число строк не превышает число столбцов:  $L^d - L + 1 \geq mL$ . Отсюда следует необходимое условие на длину  $L^d$  постоянно возбуждающего управления порядка  $L$ :  $L^d \geq L(m + 1) - 1$ .

Согласно [2, 3], априорная траектория  $\{u^d, y^d\}$ , порожденная постоянно возбуждающим управлением достаточно высокого порядка, содержат информацию, достаточную для представления любой траектории системы  $G$ . Далее будем использовать следующий результат работы [2], сформулированный в [3] в терминах классических моделей в пространстве состояний:

*Теорема 1.* Пусть  $\{u^d, y^d\} = \{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$  — априорная траектория линейной системы  $G$  размерности  $n$ , причем  $u^d$  — постоянно возбуждающее управление порядка  $T + n$ . Тогда  $\{u, y\} = \{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$  является траекторией  $G$  в том и только в том случае, когда для

$$\begin{pmatrix} H_T(u^d) \\ H_T(y^d) \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

существует решение  $\alpha \in \mathbb{R}^{T^d - T + 1}$ .

Теорема 1 позволяет проверять любую пару  $\{u, y\}$  на принадлежность множеству траекторий системы  $G$ . В дальнейшем будем использовать условия теоремы для построения множества возможных траекторий  $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$  длины  $T$  с некоторой фиксированной "прошлой" частью  $\{u_\tau^p, y_\tau^p\} = \{u^p(t), y^p(t)\}_{t=0}^{\tau-1}$  длины  $\tau$  и нефиксированной "будущей" частью  $\{u, y\} = \{u(t), y(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$ . Для этого будем делить на "прошлое" и "будущее" для момента  $\tau$  строки матриц Ганкеля для априорной траектории:

$$H_T(u^d) = \frac{\begin{pmatrix} u^d(0) & \dots & u^d(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(\tau - 1) & \dots & u^d(\tau - 1 + T^d - T) \\ u^d(\tau) & \dots & u^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(T - 1) & \dots & u^d(T^d - 1) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} u^d(\tau) & \dots & u^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(T - 1) & \dots & u^d(T^d - 1) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix},$$

$$H_T(y^d) = \frac{\begin{pmatrix} y^d(0) & \dots & y^d(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(\tau - 1) & \dots & y^d(\tau - 1 + T^d - T) \\ y^d(\tau) & \dots & y^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(T - 1) & \dots & y^d(T^d - 1) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} y^d(\tau) & \dots & y^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(T - 1) & \dots & y^d(T^d - 1) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} Y_\tau^p \\ Y_\tau^f \end{pmatrix}.$$

Если управление  $u^d$  является постоянно возбуждающим порядка  $T + n$ , то, согласно теореме 1,  $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$  является траекторией системы  $G$  тогда и только тогда, когда уравнение

$$(6) \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \alpha(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u \\ y \end{pmatrix}$$

имеет решение  $\alpha(\tau) \in \mathbb{R}^{T^d-T+1}$ .

В силу теоремы 1, для любых  $u_\tau^p, y_\tau^p, u$  можно найти хотя бы один возможный выходной сигнал  $y$ , но для единственности  $y$ , которая представляет особый практический интерес, необходимо наложить дополнительные условия. При условии наблюдаемости пары  $(A, C)$ , траектория  $\{u^p, y^p\}$  длины  $n$  однозначно определяет начальное состояние, поэтому для обеспечения единственности достаточно потребовать  $\tau \geq n$ .

### 3.2. Принцип разделимости

Найдем аналог принципа разделимости управления и наблюдения для линейных систем с известной моделью в пространстве состояний для случая, когда траектория системы  $G$  представлена в виде (6). Будем следовать идее декомпозиции будущего выходного сигнала  $y$  (см. Приложение)

$$(7) \quad y = y_0 + \hat{y},$$

где  $y_0 = \{y_0(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$  — выходной сигнал системы  $G$ , соответствующий управлению  $u$  и тривиальному начальному условию  $x(\tau) = 0$ ;  $\hat{y} = \{\hat{y}(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$  — выходной сигнал неуправляемой системы  $G$  для некоторого начального условия  $x(\tau)$ , согласующегося с текущей позицией процесса  $\{u_\tau^p, y_\tau^p\}$ .

Рассмотрим подробно слагаемые в (7). При определении  $y_0$  тривиальное начальное состояние  $x(\tau) = 0$  можно зафиксировать неявно посредством тривиальной прошлой траектории  $\{0, 0\}$  длины не менее  $n$ . С тривиальной траекторией, очевидно, согласуется начальное условие  $x(0) = 0$ , а поскольку  $\tau \geq n$ , это единственно возможное начальное состояние. Тогда система остается в начале координат вплоть до момента  $\tau$ :  $x(t) = 0, t = 0, \dots, \tau$ . Из рассуждений следует, что  $\{0, u, 0, y_0\}$  является траекторией длины  $T$  системы  $G$ .

Далее  $\{0, \hat{y}\}$  — траектория системы  $G$  с начальным условием  $x(\tau)$  из множества состояний, в которые система могла прийти, точно следуя траектории  $\{u_\tau^p, y_\tau^p\}$ , где о выходном сигнале  $y_\tau^p$  известно только, что он отклоняется от измеренного  $\tilde{y}_\tau^p$  в равномерной норме не более чем на  $\varepsilon$ . Тогда  $\{u_\tau^p, 0, y_\tau^p, \hat{y}\}$  — траектория длины  $T$  системы  $G$ .

Из необходимого условия теоремы 1 следует, что для траекторий  $\{0, u, 0, y_0\}$  и  $\{u_\tau^p, 0, y_\tau^p, \hat{y}\}$  существуют  $\alpha_0(\tau), \hat{\alpha}(\tau)$ , соответственно, удовлетворяющие

$$(8) \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ 0 \\ \hat{y} \end{pmatrix}.$$

Суммируя равенства (8), получаем

$$(9) \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} (\hat{\alpha}(\tau) + \alpha_0(\tau)) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u \\ \hat{y} + y_0 \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 1, условие (9) является достаточным для того, чтобы  $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, \hat{y} + y_0\}$  являлась траекторией системы. Поскольку начальное состояние  $x_0$

неявно зафиксировано достаточно длинным участком  $\{u_\tau^p, y_\tau^p\}$ , эта траектория совпадает с искомой  $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$ , т.е.  $y = \hat{y} + y_0$ . Суммируя рассуждения выше, любую траекторию можно строить согласно лемме:

*Лемма 1.* Пусть  $\{u_\tau^p, y_\tau^p\}$  — некоторая фиксированная прошлая траектория системы  $G$  длины  $\tau \geq n$ . Тогда любая траектория  $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$  длины  $T$  системы  $G$  однозначно представима в виде суммы траекторий  $\{0, u, 0, y_0\}$  и  $\{u_\tau^p, 0, y_\tau^p, \hat{y}\}$  длины  $T$ , причем для фиксированного управления  $u$  определить неизвестные будущие участки  $y_0, \hat{y}$  можно следующим образом:

1. Найти некоторые решения  $\hat{\alpha}(\tau), \alpha_0(\tau)$  алгебраических уравнений

$$(10) \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить  $\hat{y} = Y_\tau^f \hat{\alpha}(\tau)$ ,  $y_0 = Y_\tau^f \alpha_0(\tau)$ .

*Замечание 2.* Для получения  $\hat{y}(t), y_0(t)$  в конкретный момент времени  $t$ , на шаге 2 необходимо использовать блок  $Y^d(t)$  матрицы  $Y_\tau^f$  (или  $H_T(y^d)$ ):

$$Y^d(t) = (y^d(t), y^d(t+1), \dots, y^d(t+T^d-T)).$$

Получим  $\hat{y}(t) = Y^d(t) \hat{\alpha}(\tau)$ ,  $y_0(t) = Y^d(t) \alpha_0(\tau)$ .

По аналогии с определением 1 дадим

*Определение 3.* Назовем параметр  $\hat{\alpha}(\tau)$  согласующимся с позицией  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$  если

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|y^p(t) - \tilde{y}^p(t)\|_\infty \leq \varepsilon, \quad t = 0, \dots, \tau-1.$$

Пусть  $\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$  — множество всех  $\hat{\alpha}(\tau)$ , согласующихся с  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ :

$$\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = \left\{ \hat{\alpha}(\tau) \in \mathbb{R}^{T^d-T+1} : U_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) = u_\tau^p, \quad U_\tau^f \hat{\alpha}(\tau) = 0, \right. \\ \left. -\varepsilon \mathbb{1} \leq Y_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) - \tilde{y}_\tau^p \leq \varepsilon \mathbb{1} \right\},$$

где  $\mathbb{1}$  —  $m(T-\tau)$ -вектор из единиц. Множество  $\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$  — аналог множества  $X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$  состояний  $x(\tau)$ , согласующихся с текущей позицией  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ .

Далее определим  $\mathcal{Y}(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$  как множество всех  $\hat{y}(t)$ , согласующихся с позицией  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ . В соответствии с замечанием 2, это множество порождается множеством  $\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ :

$$\mathcal{Y}(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = \left\{ \hat{y}(t) = Y^d(t) \hat{\alpha}(\tau) : \hat{\alpha}(\tau) \in \mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) \right\}.$$

В связи с декомпозицией (7) выходного сигнала, ограничение (2) в момент  $t$  принимает вид  $G(t)(y_0(t) + \hat{y}(t)) \leq g(t)$ . Тогда на  $y_0(t)$  наложим "суженное" условие:

$$(11) \quad G(t)y_0(t) \leq g(t) - \chi(t|\tau),$$

где  $\chi(t|\tau) = (\chi_i(t|\tau), i = 1, \dots, q)$  соответствует наихудшей реализации выходного сигнала  $\hat{y}(t)$  в позиции  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ , а именно, каждый его элемент  $\chi_i(t|\tau)$  является решением задачи

$$(12) \quad \chi_i(t|\tau) = \max_{\hat{y}(t)} G_i(t)\hat{y}(t), \quad \hat{y}(t) \in \mathcal{Y}(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

где  $G_i(t)$  —  $i$ -ая строка матрицы  $G(t)$ .

С учетом определений множеств  $\mathcal{Y}(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ ,  $\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ , задачи (12) представляют собой задачи линейного программирования:

$$(13) \quad \begin{aligned} \chi_i(t|\tau) &= \max_{\hat{\alpha}(\tau)} G_i(t)Y^d(t)\hat{\alpha}(\tau), \\ \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) &= \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{y}_\tau^p - \varepsilon \mathbb{1} &\leq Y_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Задачи (13) — задачи оптимального наблюдения, см. [9] и Приложение.

Выполнение для  $y_0(t)$  ограничения (11) очевидно влечет удовлетворение исходного ограничения (2) на  $y(t)$  для любой возможной реализации  $\hat{y}(t)$ , согласующейся с позицией  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ .

Параметр  $\alpha_0(\tau)$ , удовлетворяющий второму из условий (10) и такой, что для  $y_0(t) = Y^d(t)\alpha_0(\tau)$  при всех  $t = \tau, \dots, T-1$  выполняется неравенство (11), определяет допустимое управление  $u = U_\tau^f \alpha_0(\tau)$ . Тогда задача оптимального управления в момент времени  $\tau$  имеет вид:

$$(14) \quad \begin{aligned} \min_{\alpha_0(\tau), u} \quad & \|u\|^2, \\ \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \\ G(t)Y^d(t)\alpha_0(\tau) &\leq g(t) - \chi(t|\tau), \\ u_{\min} &\leq u(t) \leq u_{\max}, \quad t = \tau, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Исключая в (14) управление  $u$ , получаем задачу квадратичного программирования относительно  $\alpha_0(\tau)$ :

$$(15) \quad \begin{aligned} \min_{\alpha_0(\tau)} \quad & \alpha_0(\tau)^T (U_\tau^f)^T U_\tau^f \alpha_0(\tau), \\ \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ G(t)Y^d(t)\alpha_0(\tau) &\leq g(t) - \chi(t|\tau), \\ u_{\min} &\leq U^d(t)\alpha_0(\tau) \leq u_{\max}, \quad t = \tau, \dots, T-1, \end{aligned}$$

где, по аналогии с  $Y^d(t)$ ,  $U^d(t) = (u^d(t), u^d(t+1), \dots, u^d(t+T^d-T))$ .

Пусть  $\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$  — решение задачи оптимального управления (15). На вход системы  $G$  подаем первое значение соответствующего управления (см. (5)), которое вычисляется согласно формуле  $u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = U^d(\tau)\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ .



Таким образом, алгоритм управления системой на основе априорных данных  $\{u^d, y^d\}$  состоит в следующем при всех  $\tau = n, \dots, T-1$ :

- 1) решить задачи (13), найти оценки  $\chi_i(t|\tau)$ ,  $i = 1, \dots, q$ ,  $t = \tau, \dots, T-1$ ;
- 2) решить задачу (15), найти  $\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ ;
- 3) подать на вход системы управление  $u^p(\tau) = U^d(\tau)\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ .

Как и в разд. 2, полученное в результате применения алгоритма управление  $u^p(\tau)$ ,  $\tau = n, \dots, T-1$ , является *реализацией в конкретном процессе управления оптимальной обратной связи по неточным измерениям*.

Для того, чтобы результаты представленного алгоритма совпадали с результатом разд. 2 необходимо потребовать  $X_0 = \mathbb{R}^n$ , совпадения управлений  $u^p(t)$  при  $t = 0, 1, \dots, n-1$ , и также начинать процесс управления в момент  $\tau = n$ .

### 3.3. Основная теорема

Дадим теоретическое обоснование реализуемости предложенного алгоритма управления. В частности, покажем, что при условии существования решений задач (13) и (14) в момент времени  $\tau = n$ , решения этих задач существуют и для всех  $\tau = n+1, \dots, T-1$ . С целью сокращения записи далее опустим явное упоминание пары  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$  в решениях задачи (15) для момента  $\tau$ , т.е.  $\alpha_0^*(\tau) = \alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ ,  $u^*(\tau|\tau) = u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ , а также для момента  $\tau+1$  и позиции  $\{u_\tau^p, u^*(\tau|\tau), \tilde{y}_\tau^p, \tilde{y}^p(\tau)\}$ , которая реализуется при подаче управления  $u^*(\tau|\tau) = u^p(\tau)$  в момент  $\tau$ .

**Теорема 2.** Пусть в момент  $\tau$  для позиции  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$  каждая из задач (13) имеет решение. Далее, пусть имеет решение задача (15) с параметрами  $\chi(t|\tau)$ , поставленными решениями задач (13). Тогда в момент  $\tau+1$  для позиции  $\{u_\tau^p, u^*(\tau|\tau), \tilde{y}_\tau^p, \tilde{y}^p(\tau)\}$  задачи (13), (15) также имеют решение. Более того,

$$\sum_{t=\tau+1}^{T-1} \|u^*(t|\tau+1)\|^2 \leq \sum_{t=\tau+1}^{T-1} \|u^*(t|\tau)\|^2.$$

**Доказательство.** Сначала докажем разрешимость каждой из задач оптимального наблюдения в момент  $\tau+1$ . Эти задачи можно записать в виде

$$(16) \quad \begin{aligned} \chi_i(t|\tau+1) &= \max_{\hat{\alpha}(\tau+1)} G_i(t)Y^d(t)\hat{\alpha}(\tau+1), \\ \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U^d(\tau) \\ U_{\tau+1}^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau+1) &= \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ u^*(\tau|\tau) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{y}_\tau^p - \varepsilon \mathbb{1} &\leq Y_\tau^p \hat{\alpha}(\tau+1) \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon \mathbb{1}, \\ \tilde{y}^p(\tau) - \varepsilon \mathbb{1} &\leq Y^d(\tau)\hat{\alpha}(\tau+1) \leq \tilde{y}^p(\tau) + \varepsilon \mathbb{1}, \end{aligned}$$

а задачи наблюдения для момента  $\tau$  представимы в виде

$$(17) \quad \begin{aligned} \chi_i(t|\tau) &= \max_{\hat{\alpha}(\tau)} G_i(t) Y^d(t) \hat{\alpha}(\tau), \\ \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U^d(\tau) \\ U_{\tau+1}^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) &= \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{y}_\tau^p - \varepsilon \mathbb{1} &\leq Y_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Каждая задача (16) допустима, поскольку для истинной реализовавшейся траектории  $\{u_\tau^p, u^*(\tau|\tau), y_\tau^p, y^p(\tau)\}$  и будущего тривиального управления  $\{u(t)\}_{t=\tau+1}^T = 0$  существует  $\hat{\alpha}^p(\tau+1)$ , для которого выполняется второе из условий (10) Леммы 1, а значит, для этого  $\hat{\alpha}^p(\tau+1)$  удовлетворены все ограничения (16).

Для доказательства разрешимости задачи (16) используем решение  $\alpha_0^*(\tau)$  задачи оптимального управления (15) в момент  $\tau$ . Обозначим

$$(18) \quad u^c = U_{\tau+1}^f \alpha_0^*(\tau), \quad y_0^*(\tau|\tau) = Y^d(\tau) \alpha_0^*(\tau).$$

Заметим, что  $u^c = \{u^*(t|\tau)\}_{t=\tau+1}^{T-1}$ , т.е. это "хвост" оптимального управления задачи (15). Согласно Лемме 1 существует  $\alpha^c$ , такое что выполняется равенство

$$(19) \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U^d(\tau) \\ Y_\tau^p \\ Y^d(\tau) \\ U_{\tau+1}^f \end{pmatrix} \alpha^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u^c \end{pmatrix}.$$

Сдвинем переменную  $\hat{\alpha}(\tau+1)$ , относительно которой поставлены задачи оптимального наблюдения (16), на константу, перейдем к новой переменной  $\Delta\alpha(\tau+1)$ :

$$\hat{\alpha}(\tau+1) = \alpha_0^*(\tau) - \alpha^c + \Delta\alpha(\tau+1).$$

Тогда

$$\chi_i(t|\tau+1) = G_i(t) Y^d(t) (\alpha_0^*(\tau) - \alpha^c) + \Delta\chi_i(t|\tau+1),$$

где, с учетом (18), (19),

$$(20) \quad \Delta\chi_i(t|\tau+1) = \max_{\Delta\alpha(\tau+1)} G_i(t) Y^d(t) \Delta\alpha(\tau+1),$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U^d(\tau) \\ U_{\tau+1}^f \end{pmatrix} \Delta\alpha(\tau+1) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}_\tau^p - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y_\tau^p \Delta\alpha(\tau+1) \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon \mathbb{1},$$

$$(21) \quad \tilde{y}^p(\tau) - y_0^*(\tau|\tau) - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y^d(\tau) \Delta\alpha(\tau+1) \leq \tilde{y}^p(\tau) - y_0^*(\tau|\tau) + \varepsilon \mathbb{1},$$

и множество допустимых решений  $\Delta\alpha(\tau+1)$  непустое.

Сравним задачи (20) – (21) для  $\Delta\alpha(\tau+1)$  и (17) для  $\hat{\alpha}(\tau)$ . Очевидно, что дополнительное ограничение (21) влечет  $\Delta\chi_i(t|\tau+1) \leq \chi_i(t|\tau)$  и справедлива оценка

$$(22) \quad \chi_i(t|\tau+1) \leq G_i(t) Y^d(t) (\alpha_0^*(\tau) - \alpha^c) + \chi_i(t|\tau),$$

для всех  $i = 1, \dots, q$ ,  $t = \tau + 1, \dots, T - 1$ .

Таким образом, доказано, что в момент  $\tau + 1$  все задачи оптимального наблюдения имеют решение.

Остается продемонстрировать, что множество допустимых решений  $\alpha_0(\tau + 1)$  в задаче оптимального управления для момента  $\tau + 1$ , которая имеет вид

$$(23) \quad \min_{\alpha_0(\tau+1)} \alpha_0(\tau + 1)^T (U_{\tau+1}^f)^T U_{\tau+1}^f \alpha_0(\tau + 1),$$

$$\begin{pmatrix} U_{\tau}^p \\ U^d(\tau) \\ Y_{\tau}^p \\ Y^d(\tau) \end{pmatrix} \alpha_0(\tau + 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(24) \quad G(t)Y^d(t)\alpha_0(\tau + 1) \leq g(t) - \chi(t|\tau + 1),$$

$$(25) \quad u_{\min} \leq U^d(t)\alpha_0(\tau + 1) \leq u_{\max}, \quad t = \tau + 1, \dots, T - 1,$$

непусто — тогда эта выпуклая задача квадратичного программирования имеет решение.

Покажем, что  $\alpha^c$  — допустимое решение. По построению  $\alpha^c$  выполнены ограничения-равенства (23) и группа ограничений на управления (25). Покажем, что выполнены также условия (24). Воспользовавшись сначала (22), а затем тем фактом, что  $\alpha_0^*(\tau)$  удовлетворяет ограничениям задачи (15), получаем

$$\begin{aligned} G(t)Y^d(t)\alpha^c + \chi(t|\tau + 1) &\leq G(t)Y^d(t)\alpha^c + G(t)Y^d(t)(\alpha_0^*(\tau) - \alpha^c) + \chi(t|\tau) = \\ &= G(t)Y^d(t)\alpha_0^*(\tau) + \chi(t|\tau) \leq g(t), \quad t = \tau + 1, \dots, T - 1, \end{aligned}$$

что доказывает (24).

Наконец, поскольку решение  $\alpha^c$  допустимо, оптимальное решение удовлетворяет

$$\sum_{t=\tau+1}^{T-1} \|u^*(t|\tau + 1)\|^2 \leq (\alpha^c)^T (U_{\tau+1}^f)^T U_{\tau+1}^f \alpha^c = \sum_{t=\tau+1}^{T-1} \|u^*(t|\tau)\|^2,$$

что завершает доказательство всех утверждений теоремы.  $\square$

*Следствие 1. Если задачи оптимального наблюдения (13) и управления (15) имеют решение в момент времени  $\tau = n$ , то они разрешимы и в каждый из последующих моментов  $\tau = n + 1, \dots, T - 1$ . При этом критерий качества, значение которого определяется в момент  $\tau$  как*

$$J(\tau) = \sum_{t=0}^{\tau-1} \|u^p(t)\|^2 + \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u^*(t|\tau)\|^2,$$

*является невозрастающей функцией от  $\tau$ .*

Доказательство теоремы 2 использует "хвост"  $u^c = \{u^*(t|\tau)\}_{t=\tau+1}^{T-1}$  оптимального управления, полученного в момент  $\tau$  не только для доказательства допустимости задачи оптимального управления (как и в случае наличия модели системы), но и для доказательства существования решения задач оптимального наблюдения. Это позволяет учесть взаимосвязь не только между соответствующими задачами для  $\tau$  и  $\tau + 1$ ,

но и между самими задачами для момента  $\tau + 1$ . В частности, для задач оптимального наблюдения на основе  $u^c$  приводится такая верхняя оценка решения  $\chi(t|\tau + 1)$ , которая позволяет продемонстрировать и допустимость управления  $\{u^*(t|\tau)\}_{t=\tau+1}^{T-1}$  в задаче оптимального управления для момента  $\tau + 1$ .

#### 4. Примеры

Пример 1. Применим предложенный алгоритм для управления следующей системой:

$$(26) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= \begin{pmatrix} 0.9950 & 0.0998 \\ -0.0998 & 0.9950 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.0050 \\ 0.0998 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t), \quad t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Требуется минимизировать величину  $\sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$  при гарантированном соблюдении ограничений на значения выходных сигналов в последних 15 временных точках:  $|y(t)| \leq 0.3$ ,  $t = T-15, \dots, T-1$ . Доступны управления, для которых  $|u(t)| \leq 0.7$ ,  $t = 0, \dots, T-1$ . Горизонт планирования  $T = 135$ , абсолютное значение ошибки ограничено величиной  $\varepsilon = 0.02$ .

Управление системой (26) начинается в момент  $\tau = n = 2$ .

Согласно замечанию 1, длина  $T^d$  априорной траектории должна быть не меньше  $(n+T)(m+1) - 1 = 273$ . Именно такой, наименьшей подходящей длины, была сгенерирована незашумленная априорная траектория  $\{u^d, y^d\}$ , в которой управления  $u^d(t)$ ,  $t = 0, \dots, T^d - 1$ , — случайные векторы, равномерно распределенные в  $[0, 0.8]$ .

Пусть в конкретном процессе реализовалось начальное состояние  $x_0^p = (5, -2)$ . Траектория  $\{u_2^p, \tilde{y}_2^p\}$ , соответствующая движению системы до начала управления, получена при  $u^p(0) = u^p(1) = 0$  и  $\xi(t)$ ,  $t = 0, 1$ , выбранных случайным образом из отрезка  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ .

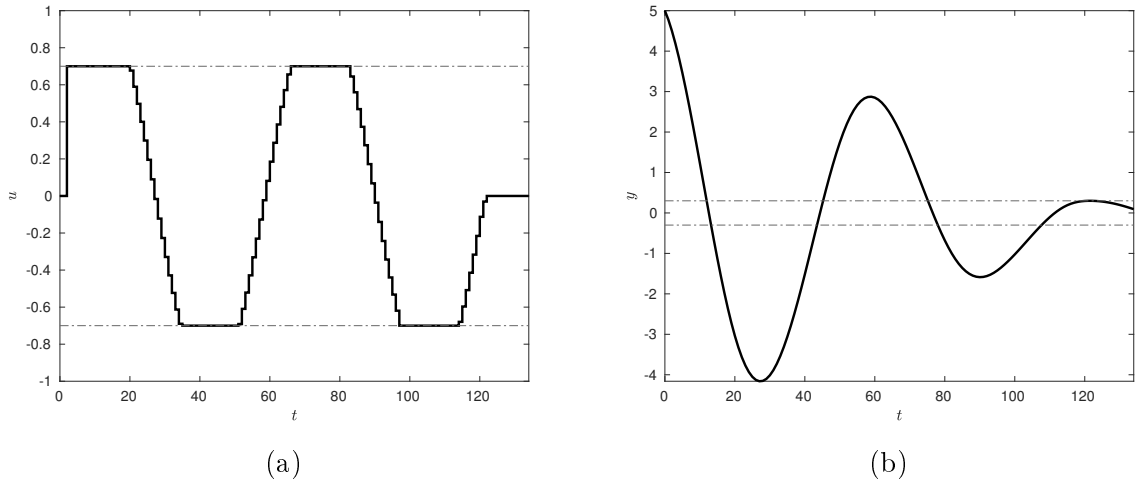


Рис. 1: Реализованная оптимальная обратная связь (а), соответствующий выходной сигнал (b)

На рис. 1а изображена реализация  $u^p(\tau)$ ,  $\tau = 0, \dots, T-1$ , оптимальной обратной связи в рассматриваемом процессе. Выходной сигнал (см. рис. 1b) удовлетворяет

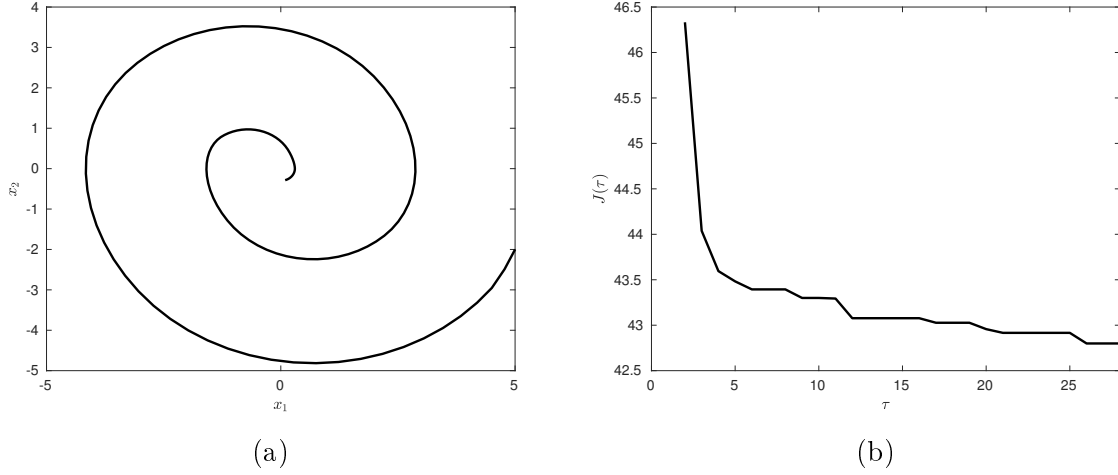


Рис. 2: Фазовая траектория (a), изменение критерия качества (b)

ограничениям на промежутке от  $\tau = 120$  до  $\tau = 134$ . На рис. 2a изображена реализованная траектория системы (26). Априорная оценка значения критерия качества, полученная в  $\tau = 2$  составила 46.3322. В процессе управления значение критерия качества улучшилось до 42.5599. Наиболее значительное изменение происходит при  $\tau = 2, \dots, 28$ . Этот фрагмент приведен на рис. 2b.

Пример 2. Рассмотрим задачу оптимального управления для системы, которая была рассмотрена в [4]:

$$(27) \quad x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.921 & 0 & 0.041 & 0 \\ 0 & 0.918 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & 0.924 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.937 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.017 & 0.001 \\ 0.001 & 0.023 \\ 0 & 0.061 \\ 0.072 & 0 \end{pmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t), \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Снова требуется минимизировать величину  $\sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$  при следующих ограничениях:  $|y_i(t)| \leq 0.1, t = T-20, \dots, T-1, i = 1, 2$ , и  $|u_i(t)| \leq 0.8, t = 0, \dots, T-1, i = 1, 2$ . Положим  $T = 55, \varepsilon = 0.02$ .

Отметим, что для данной системы управление можно было бы начать в момент  $\tau = 2$ , поскольку наблюдений при  $t = 0, 1$  достаточно для неявного задания начального условия  $x_0$ . Однако, поскольку математическая модель неизвестна, известна лишь точная размерность системы,  $n = 4$ , управление системой (27) начинается в момент  $\tau = n = 4$ .

Управления  $u^d(t), t = 0, \dots, T^d - 1$  для априорной траектории  $\{u^d, y^d\}$  длины  $T^d = 176$  (см. замечание 1) были сгенерированы как случайные векторы, равномерно распределенные в  $[-0.8, 0.8]^2$ .

Траектория  $\{u_4^p, \tilde{y}_4^p\}$  конкретного процесса была сгенерирована для начального состояния  $x_0^p = (4, 0, 1, -1)$  и  $u^p(t), \xi(t), t = 0, \dots, 3$ , выбранных случайным образом из квадратов  $[0, 0.8]^2, [-\varepsilon, \varepsilon]^2$ , соответственно.

Рис. 3 иллюстрирует результаты применения предложенной схемы управления. Априорная оценка значения критерия качества, составлявшая 32.183, была улучшена

до 21.857. Начиная с момента  $\tau = 29$  изменения не существенны.

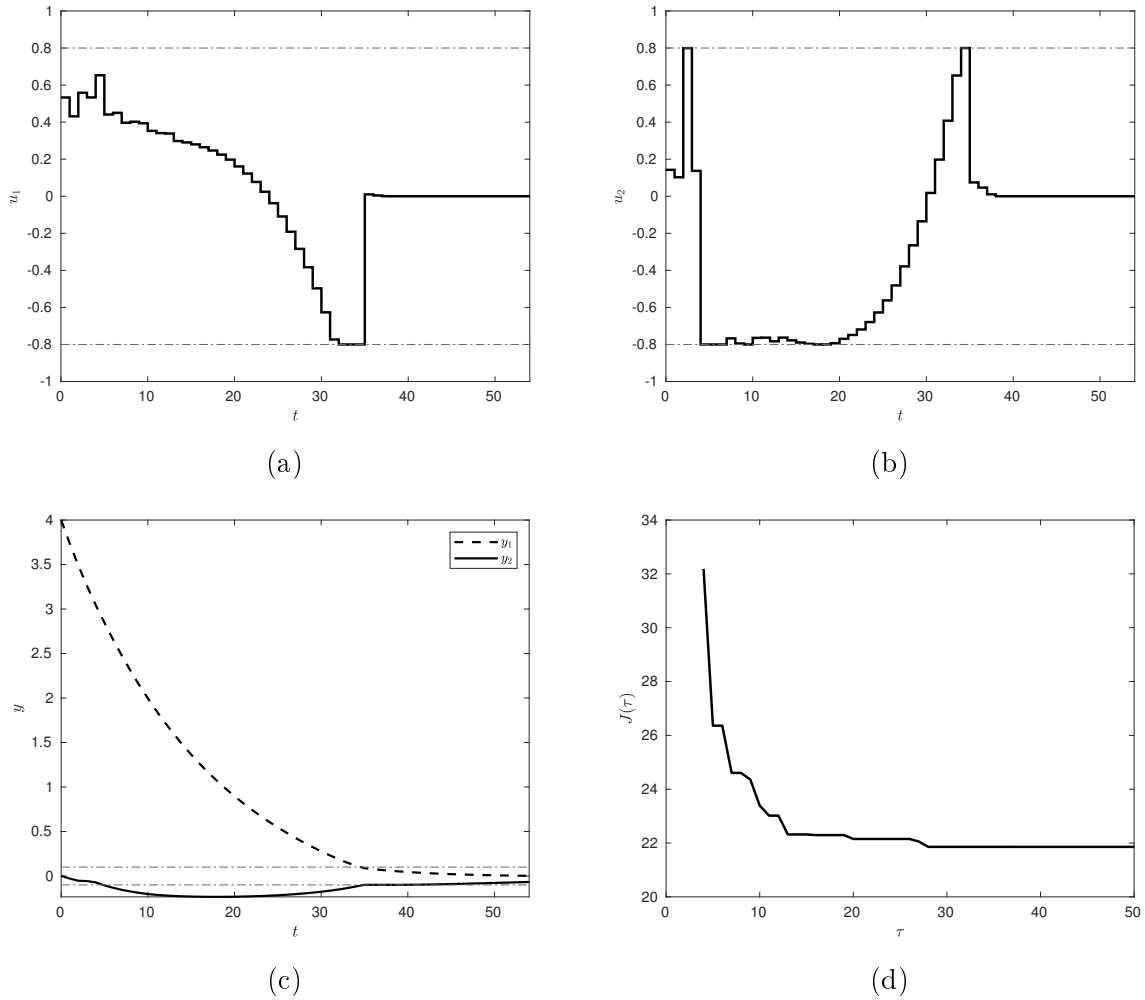


Рис. 3: Реализация оптимальной обратной связи (a)–(b), соответствующие выходные сигналы (c), изменение критерия качества (d)

## 5. Заключение

Рассмотрена задача оптимального управления линейной стационарной системой при наличии ограничений и несовершенных измерений выходных сигналов. Математическая модель системы в пространстве состояний предполагается неизвестной, доступны только данные априорных наблюдений за ее поведением в одном процессе управления. В предположении об отсутствии в априорных данных ошибок обоснован принцип разделимости процессов наблюдения и управления в линейных системах только на основе доступных данных, сформулированы соответствующие задачи оптимального наблюдения и управления, предложен и обоснован алгоритм управления объектом в режиме реального времени на основе данных. Развитие полученных результатов на случай неточных априорных данных является предметом дальнейших исследований.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Для решения задачи (4) из раздела 2, аналогично результатам [9], используем принцип разделимости процессов управления и наблюдения для линейных систем. С этой целью представим состояние  $x(t)$  и выходной сигнал  $y(t)$  в виде  $x(t) = x_0(t) + \hat{x}(t)$ ,  $y(t) = y_0(t) + \hat{y}(t)$ , где  $x_0(t)$ ,  $y_0(t)$  соответствуют состоянию и выходу номинальной системы с тривиальным начальным состоянием

$$\begin{aligned} x_0(t+1) &= Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(\tau) = 0, \\ y_0(t) &= Cx_0(t) + Du(t), \quad t = \tau, \dots, T-1, \end{aligned}$$

а  $\hat{x}(t)$ ,  $\hat{y}(t)$  соответствуют состоянию и выходу неуправляемой системы с неопределенным начальным состоянием

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= A\hat{x}(t), \quad \hat{x}(\tau) \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t), \quad t = \tau, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Тогда ограничение на выходные сигналы (2) в виде

$$G(t)(y_0(t) + \hat{y}(t)) \leq g(t), \quad \forall x(\tau) \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

влечет естественное суженное условие на  $y_0(t)$ , удовлетворение которого будет гарантировать допустимость выходного сигнала  $y(t)$ :

$$y_0(t) \in Y_0(t|\tau) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \leq g(t) - \chi(t|\tau)\},$$

где каждая компонента  $\chi_i(t|\tau)$ ,  $i = 1, \dots, q$ , вектора  $\chi(t|\tau)$  соответствует наихудшей реализации состояния  $x(\tau)$ :

$$\begin{aligned} \chi_i(t|\tau) &= \max_z G_i(t)\hat{y}(t), \\ \hat{x}(s+1) &= A\hat{x}(s), \quad \hat{x}(\tau) = z, \\ y(s) &= C\hat{x}(s), \quad s = \tau, \dots, t, \\ z &\in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p), \end{aligned}$$

где  $G_i(t)$  обозначает  $i$ -ю строку матрицы  $G(t)$ .

После вычисления всех оценок  $\chi(t|\tau)$ ,  $t = \tau, \dots, T-1$ , оптимальное управление  $u^*(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$  получим как решение следующей детерминированной задачи оптимального управления:

$$\begin{aligned} \min_u \quad & \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2, \\ x_0(t+1) &= Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(\tau) = 0, \\ y_0(t) &= Cx_0(t) + Du(t), \\ u(t) &\in U, \quad y_0(t) \in Y_0(t|\tau), \\ t &= \tau, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (4) может быть получено в результате решения  $q(T-\tau)$  задач оптимального наблюдения и одной детерминированной задачи оптимального управления (см. [9]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hou Z.-S., Wang Z.* From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective // Information Sciences. 2013. V. 235. P. 3–35.
2. *Willems J. C., Markovsky I., Rapisarda P., De Moor B. L. M.* A note on persistency of excitation // Systems & Control Letters. 2005. V. 54. P. 325–329.
3. *Berberich J., Allgöwer F.* A trajectory-based framework for data-driven system analysis and control // European Control Conference, Saint Petersburg, Russia, 2020. P. 1365–1370.
4. *Berberich J., Köhler J., Müller M. A., Allgöwer F.* Data-Driven Model Predictive Control with Stability and Robustness Guarantees // IEEE Transactions on Automatic Control. DOI: 10.1109/TAC.2020.3000182.
5. *Berberich J., Romer A., Scherer C. W., Allgöwer F.* Robust data-driven state-feedback design // arXiv: 1909.04314. 2019.
6. *De Persis C., Tesi P.* Formulas for data-driven control: Stabilization, optimality and robustness // IEEE Transactions on Automatic Control. 2019. V. 65. No.3. P. 909–924.
7. *Romer A., Berberich J., Köhler J., Allgöwer F.* One-shot verification of dissipativity properties from input-output data // IEEE Control Systems Letters. 2019. V. 3. No.3. P. 709–714.
8. *Coulson J., Lygeros J., Dörfler F.* Data-Enabled Predictive Control: In the Shallows of the DeePC // European Control Conference, Naples, Italy, 2019. P. 307–312.
9. *Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М.* Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2004 Т. 10. № 2. С. 33–57.
10. *Kurzhanskii A. B., Vályi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Nelson Thornes, 1997.

Дмитрук Н.М., заведующий кафедрой методов оптимального управления, факультет прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет, Минск, [dmitrukn@bsu.by](mailto:dmitrukn@bsu.by)

Манжулина Е.А., студентка, факультет прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет, Минск, [fpm.manzhuli@bsu.by](mailto:fpm.manzhuli@bsu.by)