ОДИН МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ БЕЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМЫ

Е.А. Манжулина, Н.М. Дмитрук

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
{fpm.manzhuli,dmitrukn}@bsu.by

Рассмотрим линейную стационарную дискретную систему G вида

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ — состояние системы, управление и выходной сигнал в момент времени t, (A, B) — управляема, (A, C) — наблюдаема.

Траекторией системы G будем называть пару $\{u, y\} = \{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$, удовлетворяющую (1) при некотором начальном состоянии $x(0) \in \mathbb{R}^n$. В каждом конкретном процессе управления реализуется некоторая траектория $\{u^p, y^p\} = \{u^p(t), y^p(t)\}_{t=0}^{T-1}$ системы G, которая определяется реализовавшимся, наблюдателю неизвестным начальным состоянием $x_0^p \in X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$ и поданным на вход системы (1) управлением u^p. Будем считать, что в процессе управления доступны лишь неточные измерения выходных сигналов вида $\tilde{y}^p(t) = y^p(t) + \xi(t), \quad t = 0, \dots, T-1$, где $\xi(t) \in \Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^p : ||\xi||_\infty \leq \varepsilon\}$ — неизвестная ограниченная ошибка измерения в момент времени t.

Поставим задачу о минимизации функционала $J(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$ на траекториях системы (1) при ограничениях на управления $u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^m : u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}$ и выходные сигналы $y(t) \in Y(t) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \leq g(t)\}$, где $G(t) \in \mathbb{R}^{q \times p}$, $g(t) \in \mathbb{R}^q$, $t = 0, \dots, T-1$. Ограничения должны быть выполнены с гарантией, т.е при всех возможных реализациях начального состояния и ошибок измерения. Цель — построение оптимальной обратной связи в режиме реального времени по неполным и неточным измерениям выходного сигнала. В случае известной реализации (A, B, C, D) непрерывной системы G аналогичная задача исследована в работе [1].

В докладе исследуется случай, когда реализация (A, B, C, D) системы в пространстве состояний не известна. Вместо модели (A, B, C, D) будем использовать полученное в [2] представление любой траектории системы G на основе одной априорной траектории $\{u^d, y^d\} = \{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$. Будем считать, что априорная траектория $\{u^d, y^d\}$ измерена точно, для системы G дана верхняя оценка размерности ее состояния n (см. [2]), а управление u^d является постоянно возбуждающим порядка T, т.е. матрица Ганкеля

$$H_T(u^d) = \left(\begin{array}{ccc} u^d(0) & \cdots & u^d(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(\tau - 1) & \cdots & u^d(\tau - 1 + T^d - T) \\ \hline u^d(\tau) & \cdots & u^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(T-1) & \cdots & u^d(T^d - 1) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix}$$

имеет полный строчный ранг [3]. Здесь блоки U_τ^p и U_τ^f соответствуют "прошлому" и "будущему" для момента τ. Аналогичным образом на блоки Y_τ^p, Y_τ^f разбивается матрица Ганкеля $H_T(y^d)$.

В следующей лемме заключен один из основных результатов работы, коим является аналогичный случаю линейных систем с известной моделью в пространстве состояний (см.[1])

принцип разделимости процессов управления и наблюдения для рассматриваемых систем, заданных одной априорной траекторией. Доказательство основано на теореме 3 из [2], представляющей собой критерий принадлежности $\{u, y\}$ множеству траекторий системы G, сформулированный в терминах матриц Ганкеля априорных сигналов $H_T(u^d), H_T(y^d)$.

Лемма 1. *Пусть $\{u^p_\tau, y^p_\tau\}$ — некоторая фиксированная прошлая траектория системы G длины $\tau \geq n$. Тогда любая траектория $\{u^p_\tau, u, y^p_\tau, y\}$ длины T системы G однозначно представима в виде суммы траекторий $\{0, u, 0, y_0\}$ и $\{u^p_\tau, 0, y^p_\tau, \hat{y}\}$ длины T, причем для фиксированного управления и определить неизвестные будущие участки $y_0, \hat{y}$ можно следующим образом:*
1. Найти некоторые решения $\hat{\alpha}(\tau)$, $\alpha_0(\tau)$ алгебраичеких уравнений

$$\begin{pmatrix} U^p_\tau \\ Y^p_\tau \\ U^f_\tau \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u^p_\tau \\ y^p_\tau \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U^p_\tau \\ Y^p_\tau \\ U^f_\tau \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить $\hat{y} = Y^f_\tau \hat{\alpha}(\tau)$, $y_0 = Y^f_\tau \alpha_0(\tau)$.

Лемма 1 позволяет обосновать схему управления системой G на основе априорных данных $\{u^d, y^d\}$: при всех $\tau = n, \ldots, T-1$ выполнить

1) найти оценки $\chi_i(t|\tau)$, $i = 1, \ldots, q$, $t = \tau, \ldots, T-1$, решив задачи

$$\chi_i(t|\tau) = \max_{\hat{\alpha}(\tau)} G_i(t) Y^d(t) \hat{\alpha}(\tau), \quad U^p_\tau \hat{\alpha}(\tau) = u^p_\tau, \quad U^f_\tau \hat{\alpha}(\tau) = 0, \quad \tilde{y}^p_\tau - \varepsilon 1 \leq Y^p_\tau \hat{\alpha}(\tau) \leq \tilde{y}^p_\tau + \varepsilon 1; \quad (2)$$

2) найти решение $\alpha^*_0(\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau)$ задачи

$$\min_{\alpha_0(\tau)} \alpha_0(\tau)^T (U^f_\tau)^T U^f_\tau \alpha_0(\tau), \quad U^p_\tau \alpha_0(\tau) = 0, \quad Y^p_\tau \alpha_0(\tau) = 0, \qquad (3)$$

$$G(t) Y^d(t) \alpha_0(\tau) \leq g(t) - \chi(t|\tau), \quad u_{\min} \leq U^d(t) \alpha_0(\tau) \leq u_{\max}, \quad t = \tau, \ldots, T-1,$$

где $U^d(t) = (u^d(t), u^d(t+1), \ldots, u^d(t + T^d - T))$, аналогично $Y^d(t)$, 1 — единичный вектор.

3) подать на вход системы управление $u^p(\tau) = U^d(\tau) \alpha^*_0(\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau)$.

Задачи (2) являются аналогами задач оптимального наблюдения, задача (3) — аналогом задачи оптимального управления из работы [1] для случая, когда реализация системы G неизвестна и управление осуществляется только на основе априорных данных $\{u^d, y^d\}$.

Практическая эффективность предложенного алгоритма управления иллюстрируется примерами, а теоретическое обоснование его реализуемости дает следующий результат.

Теорема 1. *Если задачи оптимального наблюдения (2) и управления (3) имеют решение в момент времени $\tau = n$, то они разрешимы и при всех $\tau = n+1, \ldots, T-1$. При этом критерий качества, значение которого определяется в момент τ как $J(\tau) = \sum_{t=0}^{\tau-1} ||u^p(t)||^2 + \sum_{t=\tau}^{T-1} ||u^*(t|\tau)||^2$, является невозрастающей функцией от τ.*

Литература

1. Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. *Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2004 Т. 10. № 2. С. 33–57.

2.Berberich J., Allgöwer F. *A trajectory-based framework for data-driven system analysis and control* // European Control Conference, Saint Petersburg, Russia, 2020. P. 1365–1370.

3. Willems J. C., Markovsky I., Rapisarda P., De Moor B. L. M. *A note on persistency of excitation* // Systems & Control Letters. 2005. V. 54. P. 325–329.

Информация для содержания сборника

Манжулина Е.А., Дмитрук Н.М. Один метод оптимального управления линейными системами без предварительной параметрической идентификации системы

Манжулина Е.А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь fpm.manzhuli@bsu.by
Дмитрук Н.М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь dmitrukn@bsu.by