ОДИН МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ БЕЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМЫ

Н.М. Дмитрук, Е.А. Манжулина

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

{dmitrukn,fpm.manzhuli}@bsu.by

Рассмотрим линейную стационарную дискретную систему G, минимальная реализация (A, B, C, D) которой известна:

$$\begin{aligned} &x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \\ &y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad t = 0, \dots, T-1. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ — состояние системы, управление и выходной сигнал в момент времени t, (A, B) — управляема, (A, C) — наблюдаема.

Траекторией системы G будем называть пару $\{u, y\} = \{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$ из управления и выходного сигнала, удовлетворяющую (1) при некотором (наблюдателю неизвестном) начальном состоянии $x(0) \in \mathbb{R}^n$. В каждом конкретном процессе управления реализуется некоторая траектория $\{u^p, y^p\} = \{u^p(t), y^p(t)\}_{t=0}^{T-1}$ системы G, которая определяется реализовавшимся, но наблюдателю неизвестным начальным состоянием $x_0^p \in X_0$ и поданным на вход системы (1) управлением u^p. Далее будем считать, что в процессе управления доступны лишь неточные измерения выходных сигналов вида $\tilde{y}^p(t) = y^p(t) + \xi(t), \quad t = 0, \dots, T-1$, где $\xi(t) \in \Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^p : ||\xi||_\infty \leq \varepsilon$ — неизвестная ограниченная ошибка измерения в момент времени t.

Поставим задачу о минимизации энергетических затрат на управление системой $J(u) = \sum\limits_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$ на множестве доступных управляющих воздействий $u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^m : u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}$, гарантирующих выполнение ограничений на выходные сигналы $y(t) \in Y(t) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \leq g(t)\}$, $G(t) \in \mathbb{R}^{q \times p}$, $g(t) \in \mathbb{R}^q$, $t = 0, \dots, T-1$ при всех возможных реализациях начального состояния $x(0) \in X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$. В данной задаче для построения оптимальной обратной связи по неточным измерениям может быть использовна модификация результатов работы [1].

В докладе исследуется случай, когда реализация (A, B, C, D) системы в пространстве состояний не известна. Классический подход в подобных ситуациях состоит в предварительной идентификации системы и последующей формулировке и решении рассмотренной выше задачи. В настоящей работе будет предложен альтернативный подход, не нуждающийся в явном параметрическом представлении системы. Вместо модели (A, B, C, D) будем использовать полученное в [2] представление любой траектории системы G на основе одной предварительно сгенерированной траектории из управления и выходного сигнала $\{u^d, y^d\} = \{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$, которую далее будем называть априорной траекторией. Будем считать, что априорная траектория $\{u^d, y^d\}$ измерена точно, для системы G дана верхняя оценка размерности ее состояния n (см. [2]). Также будем полагать, что управление u^d является постоянно возбуждающим порядка T, т.е. матрица Ганкеля

$$H_T(u^d) = \left(\begin{array}{ccc} u^d(0) & \cdots & u^d(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(\tau - 1) & \cdots & u^d(\tau - 1 + T^d - T) \\ \hline u^d(\tau) & \cdots & u^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(T-1) & \cdots & u^d(T^d - 1) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix}$$

имеет полный строчный ранг [3]. Здесь блоки U_τ^p и U_τ^f соответствуют "прошлому" и "будущему" для момента τ. Это деление потребуется в последующем при построении множества возможных траекторий $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$ длины T с некоторой фиксированной "прошлой" частью $\{u_\tau^p, y_\tau^p\} = \{u^p(t), y^p(t)\}_{t=0}^{\tau-1}$ длины τ и нефиксированной "будущей" частью $\{u, y\} = \{u(t), y(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$. Аналогичным образом разбивается построчно матрица Ганкеля $H_T(y^d)$.

Ставя целью нахождение аналога принципа разделимости управления и наблюдения для линейных систем с известной моделью в пространстве состояний (см. [4]) для рассматриваемого случая, следуем идее декомпозиции будущего выходного сигнала y: $y = y_0 + \hat{y}$, где $y_0 = \{y_0(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$ — выходной сигнал системы G, соответствующий управлению u и тривиальному начальному условию $x(\tau) = 0$; $\hat{y} = \{\hat{y}(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$ — выходной сигнал неуправляемой системы G для некоторого начального условия $x(\tau)$, согласующегося с текущей позицией процесса $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$. Эта идея нашла выражение в следующем результате, касающемся вопроса построения "будущей" части траектории с фиксированной "прошлой" частью. Доказательство основано на теореме 3 из [2], представляющей собой критерий принадлежности $\{u, y\}$ множеству траекторий системы G, сформулированный в терминах матриц Ганкеля априорных сигналов $H_T(u^d), H_T(y^d)$.

Лемма 1. *Пусть $\{u_\tau^p, y_\tau^p\}$ — некоторая фиксированная прошлая траектория системы G длины $\tau \geq n$. Тогда любая траектория $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$ длины T системы G однозначно представима в виде суммы траекторий $\{0, u, 0, y_0\}$ и $\{u_\tau^p, 0, y_\tau^p, \hat{y}\}$ длины T, причем для фиксированного управления и определить неизвестные будущие участки $y_0, \hat{y}$ можно следующим образом:*
1. Найти некоторые решения $\hat{\alpha}(\tau)$, $\alpha_0(\tau)$ алгебраичеких уравнений

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить $\hat{y} = Y_\tau^f \hat{\alpha}(\tau)$, $y_0 = Y_\tau^f \alpha_0(\tau)$.

Лемма 1 позволяет обосновать предложенную схему управления системой на основе априорных данных $\{u^d, y^d\}$:
при всех $\tau = n, \ldots, T-1$:

1) найти оценки $\chi_i(t|\tau)$, решив первую из задач (2) (задачу оптимального наблюдения, см. [1]) для $i = 1, \ldots, q$, $t = \tau, \ldots, T-1$;

2) найти решение $\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ второй из задач (2)(задачи оптимального управления, см. [1]);

3) подать на вход системы управление $u^p(\tau) = U^d(\tau)\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$.

$$\begin{aligned} &\chi_i(t|\tau) = \max_{\hat{\alpha}(\tau)} \; G_i(t) Y^d(t) \hat{\alpha}(\tau), && \min_{\alpha_0(\tau)} \; \alpha_0(\tau)^T (U_\tau^f)^T U_\tau^f \alpha_0(\tau), \\ &\qquad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix}, && \qquad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &\qquad \tilde{y}_\tau^p - \varepsilon 1 \leq Y_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon 1 && \qquad G(t) Y^d(t) \alpha_0(\tau) \leq g(t) - \chi(t|\tau), \\ & && \qquad u_{\min} \leq U^d(t) \alpha_0(\tau) \leq u_{\max}, \quad t = \tau, \ldots, T-1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $U^d(t) = (u^d(t), u^d(t+1), \ldots, u^d(t+T^d-T))$, аналогично $Y^d(t)$, 1 — единичный вектор.

Практическая эффективность предложенного алгоритма управления иллюстрируется примерами, а теоретическое обоснование его реализуемости дает следующий результат.

Теорема 1. *Если задачи оптимального наблюдения и управления () имеют решение в момент времени $\tau = n$, то они разрешимы и в каждый из последующих моментов $\tau = n+1, \ldots, T-1$. При этом критерий качества, значение которого определяется в момент τ как $J(\tau) = \sum_{t=0}^{\tau-1} ||u^p(t)||^2 + \sum_{t=\tau}^{T-1} ||u^*(t|\tau)||^2$, является невозрастающей функцией от τ.*

Литература

1. Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. *Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2004 Т. 10. № 2. С. 33–57.

2.Berberich J., Allgöwer F. *A trajectory-based framework for data-driven system analysis and control* // European Control Conference, Saint Petersburg, Russia, 2020. P. 1365–1370.

3. Willems J. C., Markovsky I., Rapisarda P., De Moor B. L. M. *A note on persistency of excitation* // Systems & Control Letters. 2005. V. 54. P. 325–329.

4. Kurzhanskii A. B., Vályi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control* Nelson Thornes, 1997.

Информация для содержания сборника

Дмитрук Н.М., Манжулина Е.А. Один метод оптимального управления линейными системами без предварительной параметрической идентификации системы

Дмитрук Н.М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь dmitrukn@bsu.by

Манжулина Е.А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь fpm.manzhuli@bsu.by