

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И
ИНФОРМАТИКИ**

Кафедра методов оптимального управления

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ
СТАЦИОНАРНЫМИ СИСТЕМАМИ БЕЗ
ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ
ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМЫ**

Курсовая работа

Манжулиной Елизаветы Александровны
студента 3 курса,
специальность «прикладная
математика»

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

	С.
ВВЕДЕНИЕ	4
ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	5
ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ БИХЕВИОРИСТСКОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	6
1.1 Бихевиористская теория линейных стационарных систем.	6
ГЛАВА 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРИ НАЛИЧИИ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ	11
2.1 Постановка задачи.	11
2.2 Возможный метод решения	12
ГЛАВА 3 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ОТСУТСТВИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ	15
3.1 Постановка и решение задачи по сгенерированным данным	15
3.2 Недетерминированный случай: апериорные измерения неточны. . .	21
ГЛАВА 4 ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР	23
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	26
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	27

РЕФЕРАТ

Курсовая работа, 27 с., 3 рис., 11 источников

ЛИНЕЙНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ СИСТЕМА, УПРАВЛЕНИЕ ПО
ДАННЫМ, ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ВЫХОДНЫЕ СИГНАЛЫ,
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ, НЕТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Целью работы является решение задачи оптимального управления по неточным выходным сигналам при условии гарантированного удовлетворения геометрических ограничений на выходные сигналы в случае отсутствия параметрической модели системы.

Объектом исследования является линейная стационарная система в дискретном времени.

В процессе работы был получен метод решения поставленной задачи, опирающийся на наблюдаемые траектории входного и выходного сигналов системы.

Новизна предложенного метода состоит в отсутствии шага параметрической идентификации системы, который обычно предшествует решению задачи управления в случае неизвестной системы.

Структура курсовой работы представлена четырьмя главами, где сначала приведены теоретические результаты, послужившие основой для данной работы, далее формулируется задача управления при наличии модели системы в пространстве состояний и рассматривается схожая задача в условиях отсутствия модели. Завершает работу численный пример, иллюстрирующий предложенный метод.

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире неумолимо возрастает размерность и общая сложность используемых систем. Моделирование многих процессов представляется чрезмерно трудоемким, а построенная модель зачастую слишком сложна и громоздка для практического использования. В последнее время все большую популярность набирают методы системного анализа и управления, базирующиеся не на достоверном знании внутренней организации системы, но лишь на ее наблюдаемом поведении. С этим связан возросший интерес к так называемой бихевиористской теории динамических систем.

В данной работе предлагается решение задачи оптимального управления линейной стационарной системой дискретного времени по неточным выходным сигналам при гарантированном соблюдении наложенных на выходные сигналы условий, не опирающееся на модель системы вовсе.

Работа структурирована следующим образом: глава 1 ознакомит читателя с основными релевантными результатами из бихевиористской теории динамических систем, в главе 2 формулируется конкретная задача оптимального управления, вокруг которой сосредоточена данная работа, а также приводится метод ее решения, опирающийся на известную минимальную реализацию системы в пространстве состояний. В главе 3 продолжается исследование поставленной задачи в случае отсутствия какого-либо явного параметрического представления системы, предлагается метод решения, базирующийся на одной лишь траектории системы. Эффективность предложенного метода иллюстрируется численным примером в разделе 4. Наконец, в заключении приводятся краткие выводы по результатам проведенной работы и предлагаются возможные направления дальнейших исследований.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$[x, y] = \begin{pmatrix} x(0) & y(0) \\ x(1) & y(1) \\ \vdots & \vdots \\ x(n-1) & y(n-1) \end{pmatrix}$ матрица, составленная из "горизонтально склеенных" векторов x, y одинаковой размерности n

$(x, y) = [x^T, y^T]^T$ вектор, составленный из "вертикально склеенных" векторов x, y

$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ множество целых неотрицательных чисел

$\mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} = \{f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{W}\}$ пространство \mathbb{W} в декартовой степени $\mathbb{Z}_{\geq 0}$

$u_t = (u(0), u(1), \dots, u(t))$ вектор, составленный из сигналов в моменты времени $0, 1, \dots, t$

$\{u(t), y(t)\}_{t=0}^T = \{u_T, y_T\}$ пара из входного сигнала u_T и соответствующего ему выходного сигнала y_T

$\text{colspan}(A)$ линейная оболочка столбцов матрицы A

$\|x\|$ Евклидова норма вектора x

$\|x\|_{\infty}$ l_{∞} -норма вектора x

$\mathbb{1}$ единичный вектор, размерность которого понятна из контекста

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ БИХЕВИОРИСТСКОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В этой главе будут изложены основные понятия бихевиористской теории динамических систем (behavioral systems theory в западной литературе), а также последние результаты, полученные с помощью инструментов этой теории.

1.1 Бихевиористская теория линейных стационарных систем

Вместо того, чтобы, в традициях физики, отталкиваться от понимания внутренней организации системы, от детальных взаимосвязей ее компонентов, можно концентрироваться на *поведении* системы, на ее взаимодействии с окружением. Эта идея находит отражение в бихевиористской теории систем. В рамках этой теории система описывается не через набор дифференциальных или разностных уравнений для входных и выходных сигналов, но через ее поведение — пространство всех возможных траекторий. Такой подход великолепно соотносится с нуждами растущего раздела системного анализа и управления, методы которого основаны прежде всего на собранных данных (data-based approaches в западной литературе).

В такой манере, следуя работам Я.Виллемса [10, 11] в области бихевиористской теории, определим динамическую систему, а затем высветим связи этого определения с одним из основных методов описания динамической системы — через пространство состояний.

Определение 1.1 *Динамическую систему* определим как тройку $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$, где $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ — дискретная временная ось, \mathbb{W} — пространство сигналов, $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ — поведение.

В сущности, поведение представляет собой не что иное как множество всех возможных траекторий системы. На протяжении данной работы мы имеем дело именно с дискретными во времени системами. Более того, мы сконцентрируемся на линейных стационарных системах.

Определение 1.2 Динамическая система $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$ является *линейной*, если \mathbb{W} — векторное пространство, \mathcal{B} — линейное подпространство пространства $\mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$. Система является *стационарной*, если $\mathcal{B} \subseteq \sigma\mathcal{B}$, где $\sigma: \mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \rightarrow \mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ — сдвиг вперед во времени, определенный как $(\sigma w)(t) = w(t+1)$, а $\sigma\mathcal{B} = \{\sigma w : w \in \mathcal{B}\}$.

Для всех систем, рассматриваемых нами, $\mathbb{W} = \mathbb{R}^{m+p}$, представление $m+p$ именно в виде суммы будет объяснено в последующем. Без ограничения общности, систему далее будем определять как ее поведение \mathcal{B} .

Введем в рассмотрение множество всех возможных "обрезанных" траекторий длины T , $\mathcal{B}_T = \{w \in \mathbb{R}^{(m+p)T} : \exists v \in \mathcal{B}, w(t) = v(t), 0 \leq t \leq T\}$. Такие траектории будем называть *конечными длины T* . Последовательность вида $w(t), w(t+1), \dots, w(t+T-1)$ будем называть *окном длины T* .

Возникает естественный вопрос: насколько информативной может быть одна-единственная конечная траектория системы? Так, из линейности системы непосредственно следует, что линейная оболочка наблюдаемых нами окон длины t в траектории длины T является подмножеством всех возможных траекторий длины t . Существует ли условия, при которых верно обратное включение, т.е. *любая* траектория длины t является некоторой линейной комбинацией наблюдаемых нами окон длины t ? В работе [10] доказано, что такие условия действительно существуют.

Первая составляющая — управляемость системы. Это привычное понятие определяется следующим образом.

Определение 1.3 Система \mathcal{B} является *управляемой*, если для любых $T \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $w^1 \in \mathcal{B}_T$, $w^2 \in \mathcal{B}$ существует $w \in \mathcal{B}$ и $T' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ такие, что $w(t) = w^1(t)$ для $0 \leq t \leq T$, $w(t) = w^2(t - T - T')$ для $t > T + T'$.

Другими словами, поведенческая система управляема, если любые две траектории могут быть склеены в некоторой конечной точке времени.

Вторая составляющая — наличие достаточно "богатой" компоненты $u \in \mathbb{R}^{mT}$ сигнала $w \in \mathbb{R}^{(m+p)T}$. Компоненту u будем именовать входной, а оставшуюся компоненту $y \in \mathbb{R}^{pT}$ сигнала $w = (u, y)$ — выходной.

Определение 1.4 Пусть $t, T \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $T \geq t$. Входной сигнал $u = (u(0), \dots, u(T-1)) \in \mathbb{R}^{mT}$ является *постоянно возбуждающим порядка t* ,

если соответствующая матрица Ганкеля

$$H_t(u) = \begin{pmatrix} u(0) & u(1) & \cdots & u(T-t) \\ u(1) & u(2) & \cdots & u(T-t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(t-1) & u(t) & \cdots & u(T-1) \end{pmatrix}$$

имеет полный строчный ранг.

Замечание 1.1 Если входной сигнал $u = (u(0), \dots, u(T-1)) \in \mathbb{R}^{mT}$ является постоянно возбуждающим порядка t , то он является и достаточно длинным. Поскольку матрица имеет полный строчный ранг, число строк не превышает число столбцов: $T - t + 1 \geq mt$. Отсюда следует необходимое условие на длину T постоянно возбуждающего сигнала порядка t : $T \geq t(m+1) - 1$, где m — размерность сигнала.

Постоянно возбуждающие входные сигналы достаточно высокого порядка возбуждают систему таким образом, что выходные сигналы репрезентативны для поведения системы. Центральный результат работы [10] указывает, какого порядка достаточно.

Теорема 1.1 Рассмотрим управляемую систему \mathcal{B} порядка $n(\mathcal{B})$. Пусть $T, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $w = (u, y) \in \mathcal{B}_T$. Тогда для любого постоянно возбуждающего входного сигнала u порядка $t + n(\mathcal{B})$, $\text{colspan}(H_t(w)) = \mathcal{B}_t$.

Последние результаты показывают, что для некоторых задач достаточную информацию о системе можно получить и по такой траектории, у которой входной сигнал не является постоянно возбуждающим [9], однако это направление пока лишь зарождается, тогда как вокруг Теоремы 1.1 уже накопилось достаточно солидных результатов.

Соотнесем бихевиористскую теорию с классическим подходом пространства состояний, следуя работам [2], [6].

Определение 1.5 *Траекторией* линейной системы G , минимальная реализация которой — четверка (A, B, C, D) , будем называть такие $\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$, что существует некоторое исходное состояние x_0 , для которого

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

$$t = 0, \dots, T-1.$$

Понятие траектории системы на протяжении данной работы будет употребляться только в вышеобозначенном смысле — как траектория входных-выходных сигналов, вместо

$$\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1} = \{(u(0), u(1), \dots, u(T-1)), (y(0), y(1), \dots, y(T-1))\},$$

будем зачастую пользоваться более лаконичной записью $\{u_T, y_T\}$.

Фундаментальная теорема 1.1 получила непосредственный перевод на язык классических моделей в пространстве состояний [2].

Теорема 1.2 Пусть $\{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$ траектория линейной системы G размерности n , причем u^d — постоянно возбуждающий входной сигнал порядка $T + n$. Тогда $\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$ является траекторией G в том и только в том случае, когда для

$$\begin{pmatrix} H_T(u^d) \\ H_T(y^d) \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

существует решение $\alpha \in \mathbb{R}^{T^d-T+1}$.

Замечание 1.2 Важнейшие результаты данной главы налагают на рассматриваемую систему требование быть управляемой. Ограничением это, впрочем, для нас не является: в последующей работе будем пользоваться тем, что каждая линейная стационарная система допускает некоторую минимальную реализацию, являющуюся управляемой. Именно такой минимальной реализацией и будем пользоваться во всех разделах по умолчанию, что даст возможность использования вышеперечисленных результатов.

Теорема 1.1 привлекла интерес научного сообщества и породила множество замечательных результатов как в системном анализе, так и в оптимальном управлении. Были получены модификации метода MPC (Model Predictive Control), в которых собственно модель в явном виде отсутствует, динамика системы неявно задается ее траекториями [4]. В ряде работ представлены data-driven методики стабилизации систем [7], [3]. Что до системного анализа, то, к примеру, в [8] представлен одношаговый метод проверки системы на диссипативность. Некоторые результаты уже получены и для нелинейных систем [5], хотя в этом направлении продвижение не столь велико. Помимо нелинейных систем, мало изучен в разрезе бихевиористской методологии случай, когда априорные траектории известны неточно.

В данной работе будет представлена еще одна задача управления, для которой применение Теоремы 1.1 позволяет получить неклассический метод решения, не требующий явного параметрического описания системы.

ГЛАВА 2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРИ НАЛИЧИИ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

В данной главе будет сформулирована рассматриваемая задача управления линейной системой с известной минимальной реализацией в пространстве состояний. Также будет приведен возможный метод ее решения.

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную систему G дискретного времени, минимальная реализация которой (A, B, C, D) .

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

$$t = 0, \dots, T-1.$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$ – состояние системы, управление и выходной сигнал в момент времени t соответственно.

На сигналы наложены следующие ограничения:

$$u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (2.2)$$

где $U = \{u \in \mathbb{R}^m : u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}$, $Y(t) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \leq g(t)\}$, $G(t) \in \mathbb{R}^{q \times p}$, $g(t) \in \mathbb{R}^q$.

В последующем будем считать, что в момент времени τ доступны лишь неточно измеренные выходные сигналы $\tilde{y}^p(t) = y^p(t) + \xi(t)$, $t = 0, \dots, \tau-1$, где $y^p(t)$ – точное значение выходного сигнала в соответствии с (2.1), а $\xi(t)$ – ограниченная ошибка измерения в момент времени $t = 0, \dots, \tau-1$. Верхний индекс p подчеркивает, что измеренные сигналы относятся к конкретной "прошлой" (past) траектории.

Начальное состояние x_0 и величина погрешности $\xi(t)$ достоверно неизвестны, однако полагаем их в дальнейшем принадлежащими известным множествам: $x_0 \in \mathcal{X}_0$, $\xi(t) \in \Xi$, где $\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$,

$$\Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^p : \|\xi\|_\infty \leq \varepsilon\}.$$

Задачей управления является минимизация следующего квадратичного критерия качества

$$\sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2,$$

на множестве допустимых управляющих воздействий $u(t) \in U$, гарантирующих соблюдение ограничений на выходные сигналы $y(t) \in Y(t)$ при *всех* возможных реализациях измерительных ошибок $\xi(t) \in \Xi$ и начального условия $x_0 \in X$.

Определение 2.1 Назовем состояние $x(\tau)$ *согласующимся* с траекторией $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$, если существуют такие допустимые начальное состояние $x_0 \in X_0$ и ошибки измерения $\xi(t) \in \Xi$, $t = 0, \dots, \tau - 1$, что

$$x(\tau) = x(\tau|x_0, u_\tau^p),$$

$$\tilde{y}^p(t) = Cx(t|x_0, u_t^p) + Du^p(t) + \xi(t), \quad t = 0, \dots, \tau - 1,$$

где $x(t|x_0, u_t^p)$ обозначает состояние, в которое система (2.1) приходит в момент t , двигаясь из начальной точки $x(0) = x_0$ под воздействием управления u_t^p . Обозначим как $X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ множество всех состояний $x(\tau)$, согласующихся с $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$.

2.2 Возможный метод решения

Изложим стратегию оптимального управления, предложенную в [1] ?? на что тут сослаться.

В каждый момент времени $\tau = 0, \dots, T - 1$, обладая знанием неточной траектории $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$, решаем следующую задачу оптимального программного управления:

$$\min_u \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2, \tag{2.3}$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

$$u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t) \quad \forall x(\tau) \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$$

$$t = \tau, \dots, T - 1.$$

Пусть $u^*(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p), t = \tau, \dots, T-1$ — оптимальное управление по выходному сигналу для задачи (2.3), тогда в момент τ подаем на вход лишь первое значение $u^p(\tau) = u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$, после чего переходим к следующей задаче оптимального программного управления, уже в момент $\tau+1$, на единицу уменьшившимся горизонтом планирования и обогатившимся знанием о поведении системы в лице более длинной траектории $\{u_{\tau+1}^p, \tilde{y}_{\tau+1}^p\}$.

Далее, воспользовавшись принципом разделимости для линейных систем, разделяем задачу (2.3) на несколько задач оптимального наблюдения и одну задачу детерминированного оптимального управления.

Так, представив состояние $x(t)$ и выходной сигнал $y(t)$ в виде $x(t) = x_0(t) + \hat{x}(t)$, $y(t) = y_0(t) + \hat{y}(t)$, где $x_0(t), y_0(t)$ соответствуют состоянию и выходу номинальной системы с нулевым начальным состоянием

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(\tau) = 0,$$

$$y_0(t) = Cx_0(t) + Du(t), \quad t = \tau, \dots, T-1,$$

а $\hat{x}(t), \hat{y}(t)$ соответствуют состоянию и выходу неуправляемой системы с неопределенным начальным состоянием

$$\hat{x}(t) = A\hat{x}(t), \quad \hat{x}(\tau) \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \quad t = \tau, \dots, T-1,$$

позволяет рассмотреть ограничение на выходные сигналы (2.2) в виде

$$G(t)(y_0(t) + \hat{y}(t)) \leq g(t), \quad \forall x(\tau) \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

и влечет естественное суженное условие на $y_0(t)$, удовлетворение которого будет гарантировать допустимость выходного сигнала $y(t)$:

$$y_0(t) \in Y_0(t|\tau) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \leq g(t) - \chi(t|\tau)\}, \quad (2.4)$$

где каждая компонента вектора $\chi(t|\tau)$ соответствует наихудшей реализации состояния $x(\tau)$:

$$\chi_i(t|\tau) = \max_z G_i(t)\hat{y}(t), \quad (2.5)$$

$$\hat{x}(s+1) = A\hat{x}(s), \quad \hat{x}(\tau) = z,$$

$$y(s) = C\hat{x}(s), \quad s = \tau, \dots, t,$$

$$z \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

где $G_i(t)$ обозначает i -ю строку матрицы $G(t)$.

После вычисления всех оценок $\chi(t|\tau)$, $t = \tau, \dots, T - 1$, оптимальное управление $u^*(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ получаем как решение следующей детерминированной задачи оптимального управления:

$$\min_u \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2, \quad (2.6)$$

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(\tau) = 0,$$

$$y_0(t) = Cx_0(t) + Du(t),$$

$$u(t) \in U, \quad y_0(t) \in Y_0(t|\tau),$$

$$t = \tau, \dots, T - 1.$$

В настоящей главе была поставлена изучаемая задача оптимального гарантирующего управления линейной стационарной системой дискретного времени по неточным выходным сигналам. Рассмотрена стратегия построения оптимальных обратных связей по выходу в реальном времени. Было продемонстрировано, как данная задача естественным образом разделяется на несколько задач оптимального наблюдения и одну детерминированную задачу оптимального управления.

ГЛАВА 3

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ОТСУТСТВИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

Ниже будет рассмотрена задача из предыдущей главы в условии отсутствия заранее известной реализации системы в пространстве состояний. Классический подход в подобных ситуациях состоит в предварительной идентификации системы и последующем решении задачи уже имеющимся способом, основанным на знании модели. Однако, такой подход не всегда целесообразен.

В этой главе будет предложен альтернативный способ, не нуждающийся в явном параметрическом представлении системы вовсе. Основой ему послужит бихевиористский подход к динамическим системам, изложенный в главе 1, а также принцип разделимости управления и наблюдения, уже использовавшийся в главе 2.

3.1 Постановка и решение задачи по сгенерированным данным

Будем считать, что наши сведения о линейной системе G сводятся к верхней оценке ее размерности n и одной предварительно сгенерированной траектории $\{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$, причем эта траектория измерена точно. Что до траекторий "прошлого" $\{(u^p(0), u^p(1), \dots, u^p(\tau-1)), (y^p(0), y^p(1), \dots, y^p(\tau-1))\} = \{u_\tau^p, y_\tau^p\}$, известных к текущему моменту τ в процессе управления системой, их будем считать измеренными с точностью до ограниченной ошибки: нам доступны лишь $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$, где $\tilde{y}_\tau^p = y_\tau^p + \xi_\tau$.

Задачей в текущий момент времени τ , подобно предыдущей главе, ставится минимизация квадратичного критерия качества

$$\sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2,$$

при гарантированном соблюдении линейных условий

$$G(t)y(t) \leq g(t), \quad u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad \tau \leq t \leq T - 1,$$

на входные и выходные сигналы.

Продemonстрируем, как априорная траектория $\{u^d, y^d\}$ при определенных условиях может иметь ту же информационную ценность, что и модель системы, в случае ее наличия.

Теорема 1.2 в непосредственно приведенной формулировке позволяет проверять любую траекторию фиксированной длины на принадлежность системе. В нашем случае стоит обратная задача: дабы определить, допустимо ли конкретное управление в конкретный момент времени, хотелось бы уметь в некотором смысле симулировать систему.

Модификацию Теоремы 1.2 можно использовать для генерации множества возможных траекторий $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$ длины T с некоторой фиксированной "прошлой" начальной частью $\{u_\tau^p, y_\tau^p\}$ длины τ . К нефиксированной части $\{u, y\} = \{u(\tau), \dots, u(T-1), y(\tau), \dots, y(T-1)\}$ будем обращаться как к "будущей" части траектории. Соответствующим образом будем делить на "прошлое" и "будущее" для момента τ и строки матриц Ганкеля для априорной траектории:

$$H_T(u^d) = \frac{\begin{pmatrix} u^d(0) & \dots & u^d(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(\tau - 1) & \dots & u^d(\tau - 1 + T^d - T) \\ u^d(\tau) & \dots & u^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(T - 1) & \dots & u^d(T^d - 1) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} u^d(\tau) & \dots & u^d(\tau + T^d - T) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$H_T(y^d) = \frac{\begin{pmatrix} y^d(0) & \dots & y^d(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(\tau - 1) & \dots & y^d(\tau - 1 + T^d - T) \\ y^d(\tau) & \dots & y^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(T - 1) & \dots & y^d(T^d - 1) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} y^d(\tau) & \dots & y^d(\tau + T^d - T) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} Y_\tau^p \\ Y_\tau^f \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

Если входной сигнал u^d является постоянно возбуждающим порядка $n + T$, то, согласно Теореме 1.2, $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$ является траекторией системы

G тогда и только тогда, когда у уравнения

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u \\ y \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

есть решение $\alpha \in \mathbb{R}^{T^d-T+1}$. Потому для построения возможных траекторий можно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. Зафиксировать интересующее значение "будущего" входного сигнала u .
2. Для выбранного u найти некоторое решение $\alpha \in \mathbb{R}^{T^d-T+1}$ системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

3. Вычислить $y = Y_\tau^f \alpha$. Получили одну из возможных траекторий для фиксированных u_τ^p, y_τ^p, u .

Замечание 3.1 В силу Теоремы 1.2, для любых u_τ^p, y_τ^p, u хотя бы одну возможную выходную траекторию y мы найти сможем, а вот для единственности y , которая представляет особый практический интерес, нужно наложить некоторые условия. Поскольку для линейной системы размерности n траектория длины n однозначно определяет начальное состояние, то для обеспечения единственности достаточно потребовать $\tau \geq n$. Потому в дальнейшем полагаем, что управление начинается в момент n , — это своего рода неявный аналог явного ограничения $x_0 \in X_0$ в постановке задачи при известной модели.

Замечание 3.2 Чем больше горизонт планирования T , тем больше и длина априорной траектории T^d . Поскольку нам необходим постоянно возбуждающий порядка $n+T$ сигнал u^d , то, как уже отмечалось в Замечании 1.1, для длины T^d этого сигнала справедлива оценка $T^d \geq (n+T)(m+1) - 1$, где m — размерность входа.

Вместо явного задания динамики системы моделью в пространстве состояний, будем пользоваться неявным описанием вида (3.3) поведения системы. Начальное состояние системы также фиксируем неявно, начиная управление в момент n .

Таким образом, в каждый момент времени $n \leq \tau \leq T$ решаем следующую задачу оптимального программного управления, обладая неточной траекторией $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$:

$$\min_u u^T u, \quad (3.5)$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}_\tau^p = y_\tau^p + \xi_\tau, \quad -\varepsilon \mathbb{1} \leq \xi_\tau \leq \varepsilon \mathbb{1},$$

$$u_{\min}(\tau) \leq u \leq u_{\max}(\tau),$$

$$G_\tau Y_\tau^f \alpha \leq g_\tau \quad \forall \alpha, \xi_\tau,$$

где матрица

$$G_\tau = \left(\begin{array}{c|c|c|c} G(\tau) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & G(\tau+1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & G(T-1) \end{array} \right),$$

вектор $g_\tau = (g(\tau), g(\tau+1), \dots, g(T-1))$,

$$u_{\min}(\tau) = \underbrace{(u_{\min}, \dots, u_{\min})}_{T-\tau \text{ раз}}, \quad u_{\max}(\tau) = \underbrace{(u_{\max}, \dots, u_{\max})}_{T-\tau \text{ раз}}.$$

Из полученного в момент τ оптимального управляющего воздействия $u^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = (u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p), u^*(\tau+1|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p), \dots, u^*(T-1|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p))$ мы применяем к системе $u^p(\tau) = u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$. Переходим к решению задачи (3.5) в момент $\tau+1$, зная траекторию $\{u_{\tau+1}^p, \tilde{y}_{\tau+1}^p\}$. Таким образом, если существовало допустимое воздействие в момент τ , то гарантировано существует допустимое воздействие в момент $\tau+1$, причем значение критерия качества на каждом шагу не увеличивается.

Многообещающим выглядит разделение наблюдения и управления, использованное в предыдущем разделе. Продемонстрируем, как элегантно реализуется принцип разделимости в бихевиористской манере.

Лемма 3.1 Пусть $\{u_\tau^p, y_\tau^p\}$ — некоторая фиксированная траектория системы (3.3) длины $\tau \geq n$. Тогда любая траектория $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$ длины T системы (3.3) однозначно представима в виде суммы траекторий $\{0, u, 0, y_0\}$ и $\{u_\tau^p, 0, y_\tau^p, \hat{y}\}$ длины T , причем для фиксированного u определить неизвестные участки y_0, \hat{y} можно следующим образом:

1. Найти некоторые решения $\hat{\alpha}, \alpha_0$ алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

2. Вычислить $\hat{y} = Y_\tau^f \hat{\alpha}$, $y_0 = Y_\tau^f \alpha_0$.

Доказательство. Поскольку длина τ исходной траектории не меньше размерности системы n , то, в силу модификации Теоремы 1.2, однозначно определены и могут быть найдены в результате 1-2 выходы системы \hat{y}, y_0 для входных сигналов $0, u$ соответственно. Более того, \hat{y} соответствует выходной траектории неуправляемой с момента τ системы, а y_0 — номинальной выходной траектории из нулевого состояния в момент τ (нулевое состояние в момент τ неявно задают $\{u_\tau^p, y_\tau^p\} = \{0, 0\}$ — именно такую траекторию имеет система с нулевым начальным состоянием, а значит, и с нулевым состоянием в момент τ ; с другой стороны, $\tau \geq n$ обеспечивает единственность этой траектории). \square

В связи с вышеизложенным, ограничение на выходные сигналы принимает вид $G_\tau(y_0 + \hat{y}) \leq g_\tau$. Наложим на y_0 суженное условие:

$$G_\tau y_0 \leq g_\tau - \chi(\tau), \quad (3.7)$$

где каждая компонента $\chi_i(\tau)$ соответствует наихудшей реализации состояния системы в момент τ , а именно является решением задачи (3.8) линейного программирования.

$$\chi_i(\tau) = \max_{\hat{\alpha}, \xi_\tau, \hat{y}} G_{\tau i} \hat{y}, \quad (3.8)$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ \tilde{y}_\tau^p + \xi_\tau \\ 0 \\ \hat{y} \end{pmatrix},$$

$$-\varepsilon \mathbb{1} \leq \xi_\tau \leq \varepsilon \mathbb{1}.$$

Что, в более компактной формулировке, представляет собой задачу

$$\chi_i(\tau) = \max_{\hat{\alpha}} G_{\tau i} Y_\tau^f \hat{\alpha}, \quad (3.9)$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}_\tau^p - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y_\tau^p \hat{\alpha} \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon \mathbb{1}.$$

Удовлетворение y_0 суженного ограничения (3.7) автоматически влечет удовлетворение исходного ограничения на y для любой возможной реализации \hat{y} .

Детерминированная задача оптимального программного управления с суженными условиями на y_0 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_0, u, y_0} u^T u, \tag{3.10} \\ \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ y_0 \end{pmatrix}, \\ G_\tau y_0 \leq g_\tau - \chi(\tau), \\ u_{\min}(\tau) \leq u \leq u_{\max}(\tau). \end{aligned}$$

Снова переходим к эквивалентному, но более компактному виду, получаем

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_0} \alpha_0^T U_\tau^{fT} U_\tau^f \alpha_0, \tag{3.11} \\ \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \end{pmatrix} \alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ G_\tau Y_\tau^f \alpha_0 \leq g_\tau - \chi(\tau), \\ u_{\min}(\tau) \leq U_\tau^f \alpha_0 \leq u_{\max}(\tau). \end{aligned}$$

Получив решение $\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ задачи (3.11), вычисляем оптимальное управление $u^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = U_\tau^f \alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$. Из вычисленного $u^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = (u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p), \dots, u^*(T-1|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p))$ подаем на вход системе $u^p(\tau) = u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$.

Таким образом, задача оптимального управления, решаемая в каждой временной точке $n \leq \tau \leq T-1$, свелась к нескольким задачам линейного программирования и одной выпуклой задаче квадратичного программирования.

3.2 Недетерминированный случай: априорные измерения неточны

В этом разделе будет кратко приведена идея развития результатов. Интерес представляет случай, когда и априорные измерения содержат некоторую ошибку, т.е. $\tilde{y}^d = y^d + \xi^d$.

Тогда $\tilde{Y}_\tau^p = Y_\tau^p + \Xi_\tau^p$, $\tilde{Y}_\tau^f = Y_\tau^f + \Xi_\tau^f$, где

$$\begin{pmatrix} \Xi_\tau^p \\ \Xi_\tau^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(0) & \cdots & \xi(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi(\tau - 1) & \cdots & \xi(\tau - 1 + T^d - T) \\ \xi(\tau) & \cdots & \xi(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi(T - 1) & \cdots & \xi(T^d - 1) \end{pmatrix} = H_T(\xi^d).$$

В соответствии с этим задача оптимального оценивания (3.8) переписывается следующим образом:

$$\chi_i(\tau) = \max_{\hat{\alpha}, \xi_\tau, \xi^d} G_{\tau i} \hat{y}, \quad (3.12)$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p + \Xi_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f + \Xi_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ \tilde{y}_\tau^p + \xi_\tau \\ 0 \\ \hat{y} \end{pmatrix},$$

$$-\varepsilon \mathbb{1} \leq \xi_\tau \leq \varepsilon \mathbb{1},$$

$$-\varepsilon \mathbb{1} \leq \xi^d \leq \varepsilon \mathbb{1}.$$

Задача (3.12) представляет собой задачу с квадратичной целевой функцией и квадратичными ограничениями относительно переменной $(\hat{\alpha}, \xi^d)$. Сложность заключается в том, данная задача является невыпуклой. В дальнейшем было бы интересно исследовать эффективные способы решения этой невыпуклой задачи оптимального оценивания. Впоследствии можно использовать этот результат для решения соответствующей задачи оптимального управления в условиях неточной априорной траектории.

В данной главе был предложен новый способ решения задачи, поставленной в предыдущей главе. Этот способ не требует знания реализации системы в пространстве состояний. Предложенный метод сводится к решению задач линейного и квадратичного программирования, базирующихся лишь на двух траекториях системы: априорной и наблюдаемой в процессе управления.

Задача решена в предположении, что траектория, измеряемая в процессе управления, неточна, но априорная траектория известна точно. Было предложено дальнейшее направление исследования: случай, когда априорная траектория также зашумлена.

ГЛАВА 4

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Применим изложенный метод для управления следующей системой размерности $n = 3$ с одним входом и одним выходом:

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.8639 & 0.3075 & -0.2086 \\ -0.146 & 0.9265 & 0.245 \\ -0.1715 & -0.2195 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.1239 \\ -0.0847 \\ 0.1602 \end{pmatrix} u(t),$$

$$y(t) = (0.3 \quad 1.5 \quad -0.7) x(t) + (-1.4) u(t), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

минимизируя критерий качества $\sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$ при гарантированном соблюдении ограничений $-1 \leq u(t) \leq 1$, $-1 \leq y(t) \leq 1$, $t = n, \dots, T-1$. Момент начала управления такой же, как и размерность системы $n = 3$ — этого достаточно для неявного задания начального условия x_0 . Горизонт планирования $T = 120$.

Как было отмечено в Замечании 3.2, длина априорной траектории T^d должна быть не меньше $(n+T)(m+1)-1$, что в нашем случае, при $n = 3, m = 1$, означает $T^d \geq 2(3+T)-1 = 245$. Именно такой, наименьшей подходящей длины, была предварительно сгенерирована зашумленная траектория $\{u^d, \tilde{y}^d\}$. Входные сигналы были сгенерированы как случайные числа, равномерно распределенные в $[-1, 1]$, а ошибки, добавляемые к "чистой" выходной траектории y^d , — как случайные числа, равномерно распределенные в $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon = 0.002$.

После таким же образом была сгенерирована траектория $\{u_3^p, \tilde{y}_3^p\}$, соответствующая движению системы до начала управления:

$$u_3^p = \begin{pmatrix} 0.11004849 \\ 0.59704522 \\ 0.43059520 \end{pmatrix}, y_3^p = \begin{pmatrix} 0.70244403 \\ -0.07057178 \\ 0.07171414 \end{pmatrix}.$$

Ниже приведены управление, выход и фазовая траектория, полученные в результате применения метода, предложенного в главе 3.

Значение критерия качества составляет 2.84904042 на первой итерации, 2.60124510 — на последней.

На рис. 4.3 точкой \circ отмечено начальное положение, а звездочкой $*$ — конечное положение траектории.

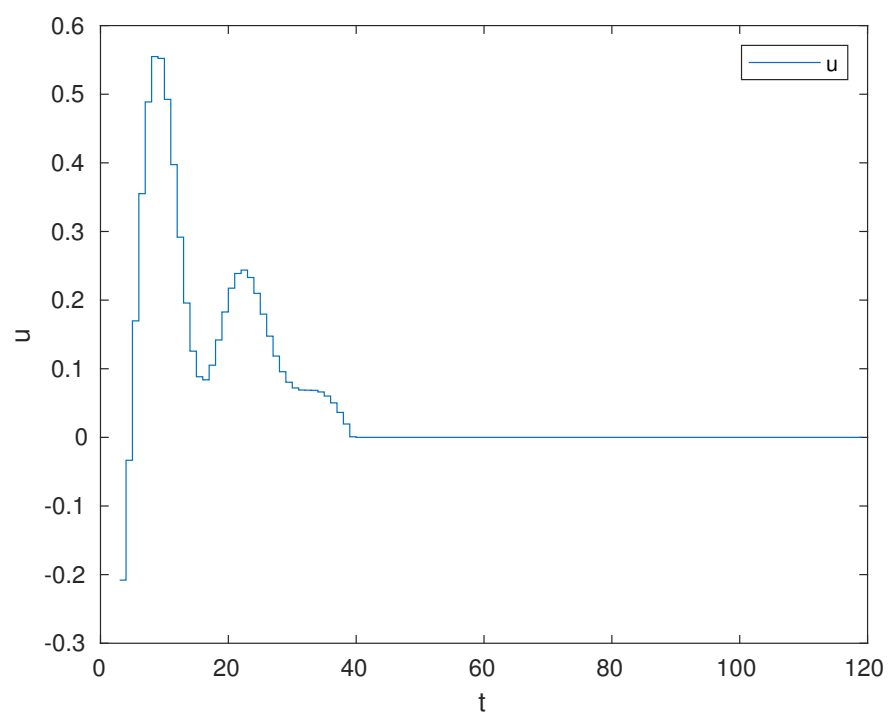


Рис. 4.1.

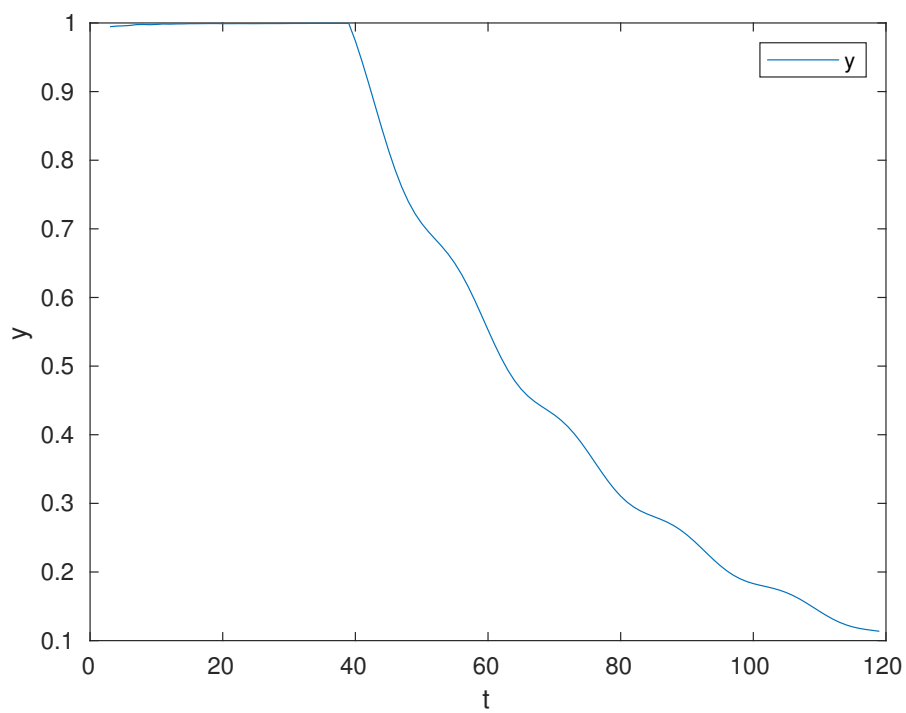


Рис. 4.2.

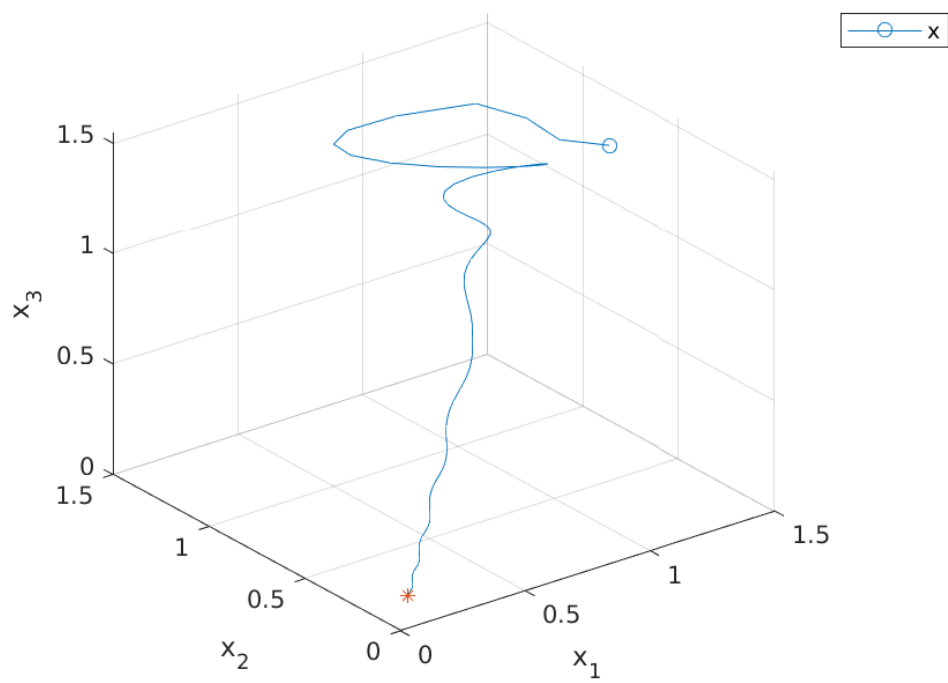


Рис. 4.3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной курсовой работе рассмотрена задача гарантирующего оптимального управления линейной стационарной системой в дискретном времени по неточным выходным сигналам. Для исследуемой задачи предложен метод решения, не использующий явной модели системы. Вместо модели полученный подход использует одну априорно известную конечную траекторию входных–выходных сигналов как неявную характеристику поведения системы. Ключевая идея, позволяющая добиться необходимых гарантий в условиях неточных измерений выходных сигналов в процессе управления, заключается в разделении задач оптимального оценивания и управления. В каждом моменте времени сперва решаются несколько задач оптимального оценивания, а затем — одна детерминированная задача оптимального программного управления.

Эффективность предложенного метода проиллюстрирована численным примером для трехмерной системы с одним входом и одним выходом.

В настоящей работе предполагается, что априорная траектория системы точна. Однако, большой практический интерес представляет случай, когда выходные сигналы в априорной траектории также содержат ограниченную ошибку. В этом направлении планируется дальнейшее развитие результатов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института математики и механики УрО РАН, Т.10, №2, 2004. С. 33-57.
- 2 Berberich, J. A trajectory-based framework for data-driven system analysis and control / J. Berberich, F. Allgöwer // arXiv: 1903.10723. – 2019.
- 3 Berberich, J. Robust data-driven state-feedback design / J. Berberich, A. Romer, C. W. Scherer, F. Allgöwer // arXiv: 1909.04314. – 2019.
- 4 Berberich, J. Data-Driven Model Predictive Control with Stability and Robustness Guarantees / J. Berberich, J. Köhler, M. A. Müller, F. Allgöwer // arXiv: 1906.04679. – 2019.
- 5 Copp, D. Simultaneous nonlinear model predictive control and state estimation / D. Copp, J. Hespanha // Automatica. – 2016. – Vol. 77. – P. 143-154.
- 6 Coulson, J. Data-Enabled Predictive Control: In the Shallows of the DeePC / J. Coulson, J. Lygeros, F. Dörfler // 18th European Control Conference (ECC), Naples, Italy. – 2019. – P. 307-312.
- 7 De Persis, C. Formulas for data-driven control: Stabilization, optimality and robustness / C. De Persis, P. Tesi // arXiv: 1903.06842. – 2019.
- 8 Romer, A. One-shot verification of dissipativity properties from input-output data / A. Romer, J. Berberich, J. Köhler, F. Allgöwer // IEEE Control Systems Letters. – 2019. – Vol. 3, no.3. – P. 709-714.
- 9 Waarde, H.J. Data informativity: a new perspective on data-driven analysis and control / H. J. van Waarde, J. Eising, H. L. Trentelman, M. K. Camlibel // arXiv: 1908.00468. – 2019.
- 10 Willems, J. C. A note on persistency of excitation / J. C. Willems, I. Markovsky, P. Rapisarda, B. L. M. De Moor // Systems & Control Letters. – 2005. – Vol. 54. – P. 325-329.
- 11 Willems, J. C. Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems / IEEE Transactions on Automatic Control. – 1991. – Vol. 36, no 3. – P.259-294.