

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И  
ИНФОРМАТИКИ**

**Кафедра методов оптимального управления**

**МАНЖУЛИНА**

Елизавета Александровна

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ  
СИСТЕМАМИ БЕЗ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ О  
ПАРАМЕТРАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

Дипломная работа

Научный руководитель  
канд. физ.-мат. наук  
доцент Н.М. Дмитрук

Допущена к защите

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Зав. кафедрой методов оптимального управления  
канд. физ.-мат. наук, доцент Н.М. Дмитрук

Минск 2021

# ОГЛАВЛЕНИЕ

	С.
ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ . . . . .	3
ВВЕДЕНИЕ. . . . .	6
ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ . . . . .	8
ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ БИХЕВИОРИСТ- СКОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ . . . . .	9
1.1 Бихевиористская теория линейных стационарных систем. . . . .	9
1.2 Бихевиористский подход к системам, заданным моделью в про- странстве состояний. . . . .	11
ГЛАВА 2 ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО НЕТОЧ- НЫМ ВЫХОДНЫМ СИГНАЛАМ ПРИ НАЛИЧИИ МОДЕ- ЛИ СИСТЕМЫ . . . . .	14
2.1 Постановка задачи. . . . .	14
2.2 Метод решения . . . . .	16
ГЛАВА 3 ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ В ОТСУТСТВИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ. . . . .	19
3.1 Постановка задачи по сгенерированным данным . . . . .	19
3.2 Принцип разделимости . . . . .	22
3.3 Рекуррентная разрешимость задачи оптимального управления и задач оптимального наблюдения . . . . .	26
ГЛАВА 4 ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ . . . . .	31
4.1 Элементы программной реализации. . . . .	31
4.2 Пример 1: система второго порядка . . . . .	35
4.3 Пример 2: система четвертого порядка . . . . .	36
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	39
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .	40

## РЕФЕРАТ

Дипломная работа, 41 с., 3 рис., 11 источников.

ЛИНЕЙНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ СИСТЕМА, УПРАВЛЕНИЕ ПО ДАННЫМ, ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ВЫХОДНЫЕ СИГНАЛЫ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ, НЕТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Целью работы является решение задачи оптимального управления по неточным выходным сигналам при условии гарантированного удовлетворения геометрических ограничений на выходные сигналы в случае отсутствия параметрической модели системы.

Объектом исследования является линейная стационарная система в дискретном времени.

В процессе работы был получен метод решения поставленной задачи, опирающийся на наблюдаемые траектории входного и выходного сигналов системы. Для метода были доказаны условия применимости. Практическая эффективность была проиллюстрирована численными примерами.

Новизна предложенного метода состоит в отсутствии шага параметрической идентификации системы, который обычно предшествует решению задачи управления в случае неизвестной системы.

Структура дипломной работы представлена четырьмя главами, где сначала приведены теоретические результаты, послужившие основой для данной работы, далее формулируется задача управления при наличии модели системы в пространстве состояний и рассматривается схожая задача в условиях отсутствия модели. Завершают работу численные примеры, иллюстрирующие предложенный метод.

# РЭФЕРАТ

Дыпломная работа, 41 с., 3 мал., 11 крыніц

## ЛІНЕЙНАЯ СТАЦЫЯНАРНАЯ СІСТЭМА, КІРАВАННЕ ПА ДАДЗЕННЫМ, АПТЫМАЛЬНАЕ КІРАВАННЕ, ВЫХАДНЫЯ СІГНАЛЫ, ГЕАМЕТРЫЧНЫЯ АБМЕЖАВАННІ, НЕДАКЛАДНЫЯ ВЫМЯРЭННІ

Мэтай работы з'яўляецца рашэнне задачы аптымальнага кіравання па недакладным выхадным сігналам пры ўмове гарантаванага задавальнення геаметрычных абмежаванняў на выходныя сігналы ў выпадку адсутнасці параметрычнай мадэлі сістэмы.

Аб'ектам даследавання з'яўляецца лінейная стацыянарная сістэма ў дыскрэтным часу.

У працэсе працы быў атрыманы метада рашэння пастаўленай задачы, які абапіраецца на назіраныя траекторыі ўваходнага і выходнага сігналаў сістэмы. Для метаду былі даказаны ўмовы прымянімасці. Практычная эфектыўнасць была праілюстравана лікавымі прыкладамі.

Навізна прапанаванага метаду складаецца ў адсутнасці кроку параметрычнай ідэнтыфікацыі сістэмы, які звычайна папярэднічае вырашэнню задачы кіравання ў выпадку невядомай сістэмы.

Структура дыпломнай працы прадстаўлена чатырма главамі, дзе спачатку прыведзены тэарэтычныя вынікі, якія паслужылі асновай для дадзенай працы, далей фармулюецца задача кіравання пры наяўнасці мадэлі сістэмы ў прасторы станаў і разглядаецца падобная задача ва ўмовах адсутнасці мадэлі. Завяршаюць працу лікавыя прыклады, якія ілюструюць прапанаваны метада.

# ABSTRACT

Graduation work, 41 p., 3 fig., 11 sources

LINEAR STATIONARY SYSTEM, DATA-DRIVEN CONTROL, OPTIMAL CONTROL, OUTPUT SIGNALS, GEOMETRIC CONSTRAINTS, NOISY MEASUREMENTS

The work aims at solving an optimal control problem with guaranteed satisfaction of geometric constraints on the output signals in the absence of a parametric model of the system and in presence of noise in output signals measurements.

The object of research is a discrete-time linear stationary system.

In the process of work, a method for solving the problem was obtained. It is based on the observed trajectories of the input and output signals of the system. The conditions of applicability were proven for the method. Practical efficiency has been illustrated with numerical examples.

The novelty of the proposed method lies in the absence of a step for parametric identification of the system, which usually precedes the solution of the control problem in the case of an unknown system.

The thesis is structured in four chapters. First, the theoretical results that served as the basis for this work are presented, then the control problem is formulated in the presence of a system model in the state space and a similar problem is considered in the absence of a model. The work is concluded by numerical examples illustrating the proposed method.

## ВВЕДЕНИЕ

В современном мире неумолимо возрастает размерность и общая сложность систем управления. Моделирование многих процессов представляется чрезмерно трудоемким, а построенная модель зачастую слишком сложна и громоздка для практического использования. В последние годы все большую популярность набирают методы системного анализа и управления, базирующиеся не на достоверном знании внутренней организации системы (ее модели), но лишь на ее наблюдаемом поведении (измеренных выходных сигналах). В литературе (см., например, [8]) новые методы получили название *data-driven control methods*, т.е. методы управления на основе данных. Настоящая работа примыкает к направлению в рамках теории управления на основе данных, истоки которого находятся в поведенческой (бихевиористской) теории динамических систем. В рамках этой теории будем опираться в основном на результаты работы [12], согласно которой пространство всех траекторий линейной стационарной дискретной системы порождается сдвигами по времени априорных измерений выходных сигналов системы (и, таким образом, образующих матрицу Ганкеля), записанных в одном единственном процессе наблюдения при условии постоянно возбуждающего входного сигнала (управления), и на развитие этих результатов в [3] для описания систем в пространстве состояний. В качестве примеров успешного использования результатов [3] отметим работы по стабилизации линейных стационарных систем [4, 5, 9], а также одношаговый метод проверки системы на диссипативность [10]. Некоторые результаты получены и для нелинейных систем [7, 9], хотя в этом направлении продвижение не столь велико.

Цель настоящей работы — исследование задачи оптимального гарантированного управления линейной стационарной дискретной системой по неточным измерениям выходных сигналов и при наличии ограничений, в формулировке которой собственно модель в явном виде отсутствует, а динамика системы неявно задается данными априорного наблюдения. При наличии параметрической модели аналогичная задача для непрерывных систем и с терминальными ограничениями на состояния исследовалась в работе [1], где в режиме реального времени строятся реализации оптимальной обратной связи по измерениям на основе решения ряда задач оптимального наблюдения и управления. Принцип разделимости процесса на наблюдение и управление, а также формулировки соответствующих задач в рамках подхода на основе данных составляют центральные результаты настоящей работы.

Работа структурирована следующим образом: глава 1 посвящена основным результатами из поведенческой теории динамических систем, в главе 2 формулируется конкретная задача оптимального управления линейной системой, вокруг которой сосредоточена данная работа, а также приводится метод ее решения, опирающийся на известную минимальную реализацию системы в пространстве состояний. В главе 3 продолжается исследование поставленной задачи в случае отсутствия какого-либо явного параметрического представления системы, предлагается метод решения, базирующийся на измерениях в одном единственном процессе управления. Приведены теоретические гарантии применимости метода в каждый момент времени при условии разрешимости задач в начальный момент управления. Эффективность предложенного метода иллюстрируется численными примерами в разделе 4. Наконец, в заключении приводятся краткие выводы по результатам проведенной работы.

## ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$[x, y] = \begin{pmatrix} x(0) & y(0) \\ x(1) & y(1) \\ \vdots & \vdots \\ x(n-1) & y(n-1) \end{pmatrix}$  — матрица, составленная из "горизонтально склеенных" векторов  $x, y$  одинаковой размерности  $n$

$(x, y) = [x^T, y^T]^T$  — вектор, составленный из "вертикально склеенных" векторов  $x, y$

$\mathbb{Z}_{\geq 0}$  — множество целых неотрицательных чисел

$\mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} = \{f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{W}\}$  — пространство  $\mathbb{W}$  в декартовой степени  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$

$u_t = (u(0), u(1), \dots, u(t))$  — вектор, составленный из сигналов в моменты времени  $0, 1, \dots, t$

$\{u(t), y(t)\}_{t=0}^T = \{u_T, y_T\}$  — пара из входного сигнала  $u_T$  и соответствующего ему выходного сигнала  $y_T$

$\text{colspan}(A)$  — линейная оболочка столбцов матрицы  $A$

$\|x\|$  — Евклидова норма вектора  $x$

$\|x\|_{\infty}$  —  $l_{\infty}$ -норма вектора  $x$

$\mathbb{1}$  — единичный вектор, размерность которого понятна из контекста



# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ БИХЕВИОРИСТСКОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В настоящей главе будут изложены основные понятия бихевиористской теории динамических систем (в западной литературе — behavioral systems theory), а также последние результаты, полученные с помощью инструментов этой теории.

### 1.1 Бихевиористская теория линейных стационарных систем

Вместо того, чтобы, в традициях физики, отталкиваться от понимания внутренней организации системы, от детальных взаимосвязей её компонентов, можно концентрироваться на *поведении* системы, на её взаимодействии с окружением. Эта идея находит отражение в поведенческой теории систем (в западной литературе — behavioral systems theory), [12]. В рамках этой теории система описывается не через набор дифференциальных или разностных уравнений для входных и выходных сигналов, но через её поведение — пространство всех возможных траекторий. Такой подход великолепно соотносится с нуждами растущего раздела системного анализа и управления, методы которого основаны прежде всего на собранных данных (в западной литературе — data-based approaches).

Далее, следуя работе Я.Виллемса [12] в области поведенческой теории, определим динамическую систему, а затем высветим связи этого определения с одним из основных методов описания динамической системы — в пространстве состояний.

Начнем с основных положений поведенческой теории линейных стационарных систем, которые потребуются в последующем.

**Определение 1.1** *Динамическую систему* определим как тройку  $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$ , где  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  — дискретная временная ось,  $\mathbb{W}$  — пространство сигналов,  $\mathcal{B} \subset \mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$  — поведение.

В сущности, поведение представляет собой не что иное как множество всех возможных траекторий системы.

На протяжении данной работы будем иметь дело именно с дискретными системами. Более того, мы сконцентрируемся на линейных стационарных системах.

**Определение 1.2** Динамическая система  $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$  является *линейной*, если  $\mathbb{W}$  — векторное пространство,  $\mathcal{B}$  — линейное подпространство пространства  $\mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ . Система является *стационарной*, если  $\mathcal{B} \subset \sigma\mathcal{B}$ , где  $\sigma : \mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \rightarrow \mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$  — сдвиг вперед во времени, определенный как  $(\sigma w)(t) = w(t+1)$ , а  $\sigma\mathcal{B} = \{\sigma w | w \in \mathcal{B}\}$ .

Для всех рассматриваемых систем  $\mathbb{W} = \mathbb{R}^{m+p}$ , где представление  $m+p$  именно в виде суммы будет объяснено ниже. Без ограничения общности, систему далее будем определять просто как ее поведение  $\mathcal{B}$ .

Введем в рассмотрение множество всех возможных сужений траекторий длины  $T$ ,  $\mathcal{B}_T = \{w \in (\mathbb{R}^{m+p})^T \mid \exists v \in \mathcal{B}, w(t) = v(t), 1 \leq t \leq T\}$ . Такие траектории будем называть *конечными длинны  $T$* . Последовательность вида  $w(t), w(t+1), \dots, w(t+T-1)$  будем называть *окном длинны  $T$* .

Возникает естественный вопрос: насколько информативной может быть одна единственная конечная траектория системы? Так, из линейности системы непосредственно следует, что линейная оболочка наблюдаемых нами окон длинны  $t$  в траектории длинны  $T$  является подмножеством всех возможных траекторий длинны  $t$ . Существует ли условия, при которых верно обратное включение, т.е. *любая* траектория длинны  $t$  является некоторой линейной комбинацией наблюдаемых нами окон длинны  $t$ ? В работе [12] доказано, что такие условия действительно существуют.

Первое из этих условий — управляемость системы. Это привычное понятие для теории систем в пространстве состояний в бихевиористской теории определяется следующим образом.

**Определение 1.3** Система  $\mathcal{B}$  называется *управляемой*, если для любых  $T \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $w^1 \in \mathcal{B}_T$ ,  $w^2 \in \mathcal{B}$  существует  $w \in \mathcal{B}$  и  $T' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  такие, что  $w(t) = w^1(t)$  для  $0 \leq t \leq T$ ,  $w(t) = w^2(t - T - T')$  для  $t > T + T'$ .

Другими словами, система  $\mathcal{B}$  управляема, если любые две траектории могут быть склеены в некоторой конечной точке времени.

Второе условие — наличие достаточно "богатой" компоненты  $u \in \mathbb{R}^{mT}$  сигнала  $w \in \mathbb{R}^{(m+p)T}$ . Компоненту  $u$  будем именовать входной, а оставшуюся компоненту  $y \in \mathbb{R}^{pT}$  сигнала  $w = (u, y)$  — выходной.

**Определение 1.4** Пусть  $t, T \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $T \geq t$ . Входной сигнал  $u = (u(0), \dots, u(T-1)) \in \mathbb{R}^{mT}$  является *постоянно возбуждающим порядка  $t$* , если соответствующая матрица Ганкеля

$$H_t(u) = \begin{pmatrix} u(0) & u(1) & \cdots & u(T-t) \\ u(1) & u(2) & \cdots & u(T-t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(t-1) & u(t) & \cdots & u(T-1) \end{pmatrix}$$

имеет полный строчный ранг.

**Замечание 1.1** Если входной сигнал  $u = (u(0), \dots, u(T-1)) \in \mathbb{R}^{mT}$  является постоянно возбуждающим порядка  $t$ , то он является и достаточно длинным. Поскольку матрица имеет полный строчный ранг, число строк не превышает число столбцов:  $T - t + 1 \geq mt$ . Отсюда следует необходимое условие на длину  $T$  постоянно возбуждающего сигнала порядка  $t$ :  $T \geq t(m+1) - 1$ , где  $m$  — размерность сигнала.

Постоянно возбуждающие входные сигналы достаточно высокого порядка возбуждают систему таким образом, что выходные сигналы репрезентативны для поведения системы. Центральный результат работы [12] указывает, какого порядка достаточно.

**Теорема 1.1** Рассмотрим управляемую систему  $\mathcal{B}$  порядка  $n(\mathcal{B})$ . Пусть  $T, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  и  $w = (u, y) \in \mathcal{B}_T$ . Тогда для любого постоянно возбуждающего входного сигнала  $u$  порядка  $t + n(\mathcal{B})$ ,  $\text{colspan}(H_t(w)) = \mathcal{B}_t$ .

Последние результаты [11] показывают, что для некоторых задач достаточную информацию о системе можно получить и по такой траектории, у которой входной сигнал не является постоянно возбуждающим, однако это направление пока лишь зарождается, тогда как вокруг теоремы 1.1 уже накопилось достаточно новых фундаментальных результатов.

## 1.2 Бихевиористский подход к системам, заданным моделью в пространстве состояний

В работах [3], [7] бихевиористская теория соотнесена с классическим подходом пространства состояний.

**Определение 1.5** *Траекторией* линейной стационарной системы  $G$ , минимальная реализация которой — четверка  $(A, B, C, D)$ , будем называть такие  $\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$ , что существует некоторое начальное состояние  $x_0$ , для которого

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0, \\y(t) &= Cx(t) + Du(t), \\t &= 0, \dots, T-1.\end{aligned}$$

Понятие траектории системы на протяжении данной работы будет употребляться только в вышеобозначенном смысле — как траектория входных-выходных сигналов. Вместо

$$\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1} = \{(u(0), u(1), \dots, u(T-1)), (y(0), y(1), \dots, y(T-1))\},$$

будем зачастую пользоваться более лаконичной записью  $\{u_T, y_T\}$ .

Фундаментальная теорема 1.1 получила непосредственный перевод на язык классических моделей в пространстве состояний в работе [3].

**Теорема 1.2** Пусть  $\{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$  — траектория линейной системы  $G$  размерности  $n$ , причем  $u^d$  — постоянно возбуждающий входной сигнал порядка  $T+n$ . Тогда  $\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$  является траекторией  $G$  в том и только в том случае, когда для

$$\begin{pmatrix} H_T(u^d) \\ H_T(y^d) \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

существует решение  $\alpha \in \mathbb{R}^{T^d-T+1}$ .

**Замечание 1.2** Важнейшие результаты данной главы налагают на рассматриваемую систему требование управляемости. Это неограничительное требование: в последующей работе будем пользоваться тем, что каждая линейная стационарная система допускает некоторую минимальную реализацию, являющуюся управляемой. Именно такой минимальной реализацией и будем пользоваться во всех разделах по умолчанию, что даст возможность использования вышеперечисленных результатов.

Теорема 1.1, а впоследствии и теорема 1.2, привлекла интерес научного сообщества и породила множество замечательных результатов как в системном анализе, так и в оптимальном управлении. Были получены модификации метода MPC (Model Predictive Control), в которых собственно модель в явном виде отсутствует, динамика системы неявно задается ее траекториями [5]. В

ряде работ представлены data-driven методики стабилизации систем [9], [4]. Что до системного анализа, то, к примеру, в [10] представлен одношаговый метод проверки системы на диссипативность. Некоторые результаты уже получены и для нелинейных систем [6], хотя в этом направлении продвижение не столь велико. Помимо нелинейных систем, мало изучен в разрезе бихевиористской методологии случай, когда априорные траектории  $\{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$  известны неточно.

В данной работе будет представлена еще одна задача управления, для которой применение теоремы 1.1 позволяет получить неклассический метод решения, не требующий явного параметрического описания системы.

## ГЛАВА 2

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО НЕТОЧНЫМ ВЫХОДНЫМ СИГНАЛАМ ПРИ НАЛИЧИИ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

В данной главе будет сформулирована рассматриваемая задача оптимального управления по выходу линейной системой с известной минимальной реализацией в пространстве состояний и приведен один из возможных методов ее решения.

### 2.1 Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему  $G$ , минимальная реализация  $(A, B, C, D)$  которой известна:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

$$t = 0, \dots, T-1.$$

Здесь  $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$  — состояние системы, управление и выходной сигнал в момент времени  $t$ , соответственно.

На управляющие и выходные сигналы наложены следующие ограничения:

$$u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (2.2)$$

где множество доступных значений управления и множество допустимых выходных сигналов имеют вид  $U = \{u \in \mathbb{R}^m : u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}$ ,  $Y(t) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \leq g(t)\}$ ,  $G(t) \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $g(t) \in \mathbb{R}^q$ .

В последующем будем считать, что в момент времени  $\tau$  доступны лишь неточные измерения выходных сигналов

$$\tilde{y}^p(t) = y^p(t) + \xi(t), \quad t = 0, \dots, \tau-1,$$

где  $y^p(t)$  — точное значение выходного сигнала в соответствии с (2.1), а  $\xi(t)$  — ограниченная ошибка измерения в момент времени  $t = 0, \dots, \tau-1$ . Верх-

ний индекс  $p$  подчеркивает, что измеренные сигналы относятся к конкретной "прошлой" (past) траектории.

Начальное состояние  $x_0$  и величина погрешности  $\xi(t)$  достоверно неизвестны, однако полагаем их в дальнейшем принадлежащими известным множествам:

$$x_0 \in \mathcal{X}_0, \quad \xi(t) \in \Xi,$$

где  $\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$ ,  $\Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^p : \|\xi\|_{\infty} \leq \varepsilon\}$ .

Поставим задачу о минимизации энергетических затрат на управление системой

$$J(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$$

на множестве доступных управляющих воздействий  $u(t) \in U$ , гарантирующих выполнение ограничений на выходные сигналы  $y(t) \in Y(t)$  при всех возможных реализациях начального состояния  $x(0) \in X_0$ :

$$\begin{aligned} \min_u \quad & \sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2, \\ & x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \\ & y(t) = Cx(t) + Du(t), \\ & u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t) \quad \forall x(0) \in X_0, \\ & t = 0, 1, \dots, T-1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Задача (2.3) решается до начала процесса управления и позволяет дать априорную оценку качества этого процесса.

К некоторому моменту времени  $\tau$  пара  $\{u_{\tau}^p, \tilde{y}_{\tau}^p\} = \{u^p(t), \tilde{y}^p(t)\}_{t=0}^{\tau-1}$  из реализовавшихся в рассматриваемом процессе управления  $u_{\tau}^p$  и неточных измерений  $\tilde{y}_{\tau}^p$  составляет текущую позицию процесса. Она позволяет оценить реализовавшееся начальное состояние, скорректировать будущее управление и улучшить априорную оценку качества процесса управления, которую дает задача (2.3).

**Определение 2.1** Назовем состояние  $x(\tau)$  *согласующимся* с траекторией  $\{u_{\tau}^p, \tilde{y}_{\tau}^p\}$ , если найдутся такие допустимые начальное состояние  $x_0 \in X_0$  и ошибки измерения  $\xi(t) \in \Xi$ ,  $t = 0, \dots, \tau-1$ , что

$$x(\tau) = x(\tau|x_0, u_{\tau}^p),$$

$$\tilde{y}^p(t) = Cx(t|x_0, u_t^p) + Du^p(t) + \xi(t),$$

$$t = 0, \dots, \tau - 1,$$

где  $x(t|x_0, u_t^p)$  — состояние, в которое система (2.1) приходит в момент  $t$ , двигаясь из начальной точки  $x(0) = x_0$  под воздействием управления  $u_t^p$ .

Обозначим через  $X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$  множество всех состояний  $x(\tau)$ , согласующихся с  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ .

## 2.2 Метод решения

Изложим стратегию оптимального управления в поставленной задаче, предложенную в [1].

В каждый момент времени  $\tau = 0, \dots, T - 1$ , обладая знанием неточной траектории  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ , решаем следующую задачу оптимального программного управления:

$$\min_u \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2, \quad (2.4)$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

$$u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t) \quad \forall x(\tau) \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

$$t = \tau, \dots, T - 1.$$

Пусть  $u^*(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ ,  $t = \tau, \dots, T - 1$ , — оптимальное управление в задаче (2.4). Тогда в момент  $\tau$  подаем на вход лишь первое значение

$$u^p(\tau) = u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

после чего переходим к следующей задаче оптимального программного управления (2.4), сформулированной уже в момент  $\tau + 1$ , на единицу уменьшившимся горизонтом планирования и обогатившимся знанием о поведении системы в лице более длинной траектории  $\{u_{\tau+1}^p, \tilde{y}_{\tau+1}^p\}$ .

Далее, воспользовавшись принципом разделимости процессов управления и наблюдения для линейных систем, разделяем решение задачи (2.4) на решение ряда задач оптимального наблюдения и одной задачи детерминированного оптимального управления.

Так, представив состояние  $x(t)$  и выходной сигнал  $y(t)$  в виде  $x(t) = x_0(t) + \hat{x}(t)$ ,  $y(t) = y_0(t) + \hat{y}(t)$ , где  $x_0(t)$ ,  $y_0(t)$  соответствуют состоянию и



выходу номинальной системы с тривиальным начальным состоянием

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(\tau) = 0,$$

$$y_0(t) = Cx_0(t) + Du(t), \quad t = \tau, \dots, T-1,$$

а  $\hat{x}(t), \hat{y}(t)$  соответствуют состоянию и выходу неуправляемой системы с неопределенным начальным состоянием

$$\hat{x}(t) = A\hat{x}(t), \quad \hat{x}(\tau) \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \quad t = \tau, \dots, T-1,$$

можем рассмотреть ограничение на выходные сигналы (2.2) в виде

$$G(t)(y_0(t) + \hat{y}(t)) \leq g(t), \quad \forall x(\tau) \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

что влечет естественное суженное условие на  $y_0(t)$ , удовлетворение которого будет гарантировать допустимость выходного сигнала  $y(t)$ :

$$y_0(t) \in Y_0(t|\tau) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \leq g(t) - \chi(t|\tau)\}, \quad (2.5)$$

где каждая компонента вектора  $\chi(t|\tau)$  соответствует наихудшей реализации состояния  $x(\tau)$ :

$$\chi_i(t|\tau) = \max_z G_i(t)\hat{y}(t), \quad (2.6)$$

$$\hat{x}(s+1) = A\hat{x}(s), \quad \hat{x}(\tau) = z,$$

$$y(s) = C\hat{x}(s), \quad s = \tau, \dots, t,$$

$$z \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

где  $G_i(t)$  обозначает  $i$ -ю строку матрицы  $G(t)$ .

После вычисления всех оценок  $\chi(t|\tau)$ ,  $t = \tau, \dots, T-1$ , оптимальное управление  $u^*(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$  получаем как решение следующей детерминированной задачи оптимального управления:

$$\min_u \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2, \quad (2.7)$$

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(\tau) = 0,$$

$$y_0(t) = Cx_0(t) + Du(t),$$

$$u(t) \in U, \quad y_0(t) \in Y_0(t|\tau),$$

$$t = \tau, \dots, T - 1.$$

Подведем итоги. В настоящей главе была поставлена задача оптимального гарантирующего управления линейной дискретной стационарной системы по неточным выходным сигналам. Рассмотрена стратегия построения оптимальных обратных связей по выходу в реальном времени. Продемонстрировано, как данная задача естественным образом разделяется на несколько задач оптимального наблюдения и одну детерминированную задачу оптимального управления.

## ГЛАВА 3

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ В ОТСУТСТВИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

Ниже будет рассмотрена задача из предыдущей главы при условии отсутствия заранее известной реализации системы в пространстве состояний. Классический подход в подобных ситуациях состоит в предварительной идентификации системы и последующем решении задачи уже имеющимся способом, основанным на знании модели, как в главе 2. Однако, такой подход не всегда целесообразен.

В этой главе будет предложен альтернативный подход, не нуждающийся в явном параметрическом представлении системы вовсе. Основой ему послужит бихевиористский подход к динамическим системам, изложенный в главе 1, а также принцип разделимости управления и наблюдения, уже использовавшийся в главе 2.

### 3.1 Постановка задачи по сгенерированным данным

Будем считать, что сведения о линейной системе  $G$  сводятся к верхней оценке ее размерности  $n$  и одной предварительно сгенерированной траектории  $\{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$ , причем эта траектория измерена точно.

Как и ранее, траектории "прошлого"

$$\{(u^p(0), u^p(1), \dots, u^p(\tau - 1)), (y^p(0), y^p(1), \dots, y^p(\tau - 1))\} = \{u_\tau^p, y_\tau^p\},$$

известные к текущему моменту  $\tau$  в процессе управления системой, будем считать измеренными с точностью до ограниченной ошибки: т.е. доступны лишь  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ , где  $\tilde{y}_\tau^p = y_\tau^p + \xi_\tau$ .

В текущий момент времени  $\tau$ , подобно предыдущей главе, ставится задача минимизации квадратичного критерия качества

$$\sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2,$$

при гарантированном соблюдении линейных условий

$$G(t)y(t) \leq g(t), \quad u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad \tau \leq t \leq T - 1,$$

на входные и выходные сигналы.

Покажем, как априорная траектория  $\{u^d, y^d\}$  при определенных условиях может иметь ту же информационную ценность, что и модель системы  $(A, B, C, D)$ , в случае ее наличия.

Теорема 1.2 в непосредственно приведенной формулировке позволяет проверять любую траекторию фиксированной длины на принадлежность множеству траекторий системы. В рассматриваемом случае стоит обратная задача: чтобы определить, допустимо ли конкретное управление в конкретный момент времени, хотелось бы уметь в некотором смысле симулировать систему.

Теорему 1.2 можно использовать для генерации множества возможных траекторий  $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$  длины  $T$  с некоторой фиксированной "прошлой" начальной частью  $\{u_\tau^p, y_\tau^p\}$  длины  $\tau$ . Нефиксированную часть  $\{u, y\} = \{u(\tau), \dots, u(T-1), y(\tau), \dots, y(T-1)\}$  будем называть "будущей" частью траектории. Соответственно, будем делить на "прошлое" и "будущее" для момента  $\tau$  и строки матриц Ганкеля для априорной траектории:

$$H_T(u^d) = \begin{pmatrix} u^d(0) & \dots & u^d(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(\tau - 1) & \dots & u^d(\tau - 1 + T^d - T) \\ u^d(\tau) & \dots & u^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(T - 1) & \dots & u^d(T^d - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$H_T(y^d) = \begin{pmatrix} y^d(0) & \dots & y^d(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(\tau - 1) & \dots & y^d(\tau - 1 + T^d - T) \\ y^d(\tau) & \dots & y^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(T - 1) & \dots & y^d(T^d - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_\tau^p \\ Y_\tau^f \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

Если входной сигнал  $u^d$  является постоянно возбуждающим порядка  $n + T$ , то, согласно теореме 1.2,  $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$  является траекторией системы

$G$  тогда и только тогда, когда уравнение

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u \\ y \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

имеет решение  $\alpha \in \mathbb{R}^{T^d-T+1}$ . Поэтому для построения возможных траекторий можно воспользоваться следующим алгоритмом:

1. Зафиксировать интересующее значение "будущего" входного сигнала  $u$ .
2. Для выбранного  $u$  найти некоторое решение  $\alpha \in \mathbb{R}^{T^d-T+1}$  системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

3. Вычислить  $y = Y_\tau^f \alpha$ . Получили одну из возможных траекторий для фиксированных  $u_\tau^p, y_\tau^p, u$ .

**Замечание 3.1** В силу теоремы 1.2, для любых  $u_\tau^p, y_\tau^p, u$  хотя бы одну возможную выходную траекторию  $y$  мы найти сможем, а вот для единственности  $y$ , которая представляет особый практический интерес, нужно наложить некоторые условия. Поскольку для линейной системы размерности  $n$  траектория длины  $n$  однозначно определяет начальное состояние, то для обеспечения единственности достаточно потребовать  $\tau \geq n$ . Потому в дальнейшем полагаем, что управление начинается в момент  $n$ , — это своего рода неявный аналог явного ограничения  $x_0 \in X_0$  в постановке задачи при известной модели.

**Замечание 3.2** Чем больше горизонт планирования  $T$ , тем больше и длина априорной траектории  $T^d$ . Поскольку нам необходим постоянно возбуждающий порядка  $n + T$  сигнал  $u^d$ , то, как уже отмечалось в Замечании 1.1, для длины  $T^d$  этого сигнала справедлива оценка  $T^d \geq (n + T)(m + 1) - 1$ , где  $m$  — размерность входа.

Вместо явного задания динамики системы моделью  $(A, B, C, D)$  в пространстве состояний, будем пользоваться неявным описанием поведения системы в виде (3.3). Начальное состояние системы также фиксируем неявно, начиная управление в момент  $n$ .

Таким образом, в каждый момент времени  $n \leq \tau \leq T$  решаем следующую задачу оптимального программного управления, обладая неточной траекторией  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ :

$$\min_{u(\tau)} \|u(\tau)\|^2, \quad (3.5)$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u(\tau) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}_\tau^p = y_\tau^p + \xi_\tau, \quad -\varepsilon \mathbb{1} \leq \xi_\tau \leq \varepsilon \mathbb{1},$$

$$G(t)Y^d(t)\alpha(\tau) \leq g(t), \quad \forall \alpha(\tau), \xi_\tau,$$

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad \tau \leq t \leq T-1,$$

где  $Y^d(t)$  — блок матрицы  $Y_\tau^f$  (или  $H_T(y^d)$ ):

$$Y^d(t) = (y^d(t), y^d(t+1), \dots, y^d(t+T^d-T)).$$

Из полученного в момент  $\tau$  оптимального управляющего воздействия  $u^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = (u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p), u^*(\tau+1|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p), \dots, u^*(T-1|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p))$  подаем на вход системы  $u^p(\tau) := u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ . Переходим к решению задачи (3.5) в момент  $\tau+1$ , зная траекторию  $\{u_{\tau+1}^p, \tilde{y}_{\tau+1}^p\}$ .

## 3.2 Принцип разделимости

Для задачи (3.5) многообещающим выглядит разделение задач наблюдения и управления, использованное в предыдущей главе. Продемонстрируем, как элегантно реализуется принцип разделимости в бихевиористском подходе.

**Лемма 3.1** Пусть  $\{u_\tau^p, y_\tau^p\}$  — некоторая фиксированная траектория системы (3.3) длины  $\tau \geq n$ . Тогда любая траектория  $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$  длины  $T$  системы (3.3) однозначно представима в виде суммы траекторий  $\{0, u, 0, y_0\}$  и  $\{u_\tau^p, 0, y_\tau^p, \hat{y}\}$  длины  $T$ , причем для фиксированного  $u$  определить неизвестные участки  $y_0, \hat{y}$  можно следующим образом:

1. Найти некоторые решения  $\hat{\alpha}, \alpha_0$  алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

2. Вычислить  $\hat{y} = Y_\tau^f \hat{\alpha}$ ,  $y_0 = Y_\tau^f \alpha_0$ .

Доказательство. Будем следовать идее декомпозиции будущего выходного сигнала  $y$  (см. главу 2)

$$y = y_0 + \hat{y}, \quad (3.7)$$

где  $y_0 = \{y_0(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$  — выходной сигнал системы  $G$ , соответствующий управлению  $u$  и тривиальному начальному условию  $x(\tau) = 0$ ;  $\hat{y} = \{\hat{y}(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$  — выходной сигнал неуправляемой системы  $G$  для некоторого начального условия  $x(\tau)$ , согласующегося с текущей позицией процесса  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ .

Рассмотрим подробно слагаемые в (3.7). При определении  $y_0$  тривиальное начальное состояние  $x(\tau) = 0$  можно зафиксировать неявно посредством тривиальной прошлой траектории  $\{0, 0\}$  длины не менее  $n$ . С тривиальной траекторией, очевидно, согласуется начальное условие  $x(0) = 0$ , а поскольку  $\tau \geq n$ , это единственно возможное начальное состояние. Тогда система остается в начале координат вплоть до момента  $\tau$ :  $x(t) = 0$ ,  $t = 0, \dots, \tau$ . Из рассуждений следует, что  $\{0, u, 0, y_0\}$  является траекторией длины  $T$  системы  $G$ .

Далее  $\{0, \hat{y}\}$  — траектория системы  $G$  с начальным условием  $x(\tau)$  из множества состояний, в которые система могла прийти, точно следуя траектории  $\{u_\tau^p, y_\tau^p\}$ , где о выходном сигнале  $y_\tau^p$  известно только, что он отклоняется от измеренного  $\tilde{y}_\tau^p$  в равномерной норме не более чем на  $\varepsilon$ . Тогда  $\{u_\tau^p, 0, y_\tau^p, \hat{y}\}$  — траектория длины  $T$  системы  $G$ .

Из необходимого условия теоремы 1.2 следует, что для траекторий  $\{0, u, 0, y_0\}$  и  $\{u_\tau^p, 0, y_\tau^p, \hat{y}\}$  существуют  $\alpha_0(\tau)$ ,  $\hat{\alpha}(\tau)$ , соответственно, удовлетворяющие

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ 0 \\ \hat{y} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Суммируя равенства (3.8), получаем

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} (\hat{\alpha}(\tau) + \alpha_0(\tau)) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u \\ \hat{y} + y_0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

В силу теоремы 1.2, условие (3.9) является достаточным для того, чтобы  $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, \hat{y} + y_0\}$  являлась траекторией системы. Поскольку начальное состояние  $x_0$  неявно зафиксировано достаточно длинным участком  $\{u_\tau^p, y_\tau^p\}$ , эта

траектория совпадает с искомой  $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$ , т.е.  $y = \hat{y} + y_0$ , что завершает доказательство леммы.  $\square$

**Замечание 3.3** Для получения  $\hat{y}(t), y_0(t)$  в конкретный момент времени  $t$ , на шаге 2 необходимо использовать блок  $Y^d(t)$  матрицы  $Y_\tau^f$ :

$$Y^d(t) = (y^d(t), y^d(t+1), \dots, y^d(t+T^d-T)).$$

Получим  $\hat{y}(t) = Y^d(t)\hat{\alpha}(\tau)$ ,  $y_0(t) = Y^d(t)\alpha_0(\tau)$ .

По аналогии с определением 2.1 дадим

**Определение 3.1** Назовем параметр  $\hat{\alpha}(\tau)$  согласующимся с позицией  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$  если

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|y^p(t) - \tilde{y}^p(t)\|_\infty \leq \varepsilon, \quad t = 0, \dots, \tau - 1.$$

Пусть  $\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$  — множество всех  $\hat{\alpha}(\tau)$ , согласующихся с  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ :

$$\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = \left\{ \hat{\alpha}(\tau) \in \mathbb{R}^{T^d-T+1} : \begin{aligned} &U_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) = u_\tau^p, \quad U_\tau^f \hat{\alpha}(\tau) = 0, \\ &-\varepsilon \mathbb{1} \leq Y_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) - \tilde{y}_\tau^p \leq \varepsilon \mathbb{1} \end{aligned} \right\},$$

где  $\mathbb{1}$  —  $m(T - \tau)$ -вектор из единиц. Множество  $\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$  — аналог множества  $X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$  состояний  $x(\tau)$ , согласующихся с текущей позицией  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ .

Далее определим  $\mathcal{Y}(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$  как множество всех  $\hat{y}(t)$ , согласующихся с позицией  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ . В соответствии с замечанием 3.3, это множество порождается множеством  $\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ :

$$\mathcal{Y}(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = \left\{ \hat{y}(t) = Y^d(t)\hat{\alpha}(\tau) : \hat{\alpha}(\tau) \in \mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) \right\}.$$

В связи с декомпозицией (3.7) выходного сигнала, ограничение  $G(t)y(t) \leq g(t)$  в момент  $t$  принимает вид  $G(t)(y_0(t) + \hat{y}(t)) \leq g(t)$ . Тогда на  $y_0(t)$  наложим "суженное" условие:

$$G(t)y_0(t) \leq g(t) - \chi(t|\tau), \quad (3.10)$$

где  $\chi(t|\tau) = (\chi_i(t|\tau), i = 1, \dots, q)$  соответствует наихудшей реализации выходного сигнала  $\hat{y}(t)$  в позиции  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ , а именно, каждый его элемент  $\chi_i(t|\tau)$



является решением задачи

$$\chi_i(t|\tau) = \max_{\hat{y}(t)} G_i(t)\hat{y}(t), \quad (3.11)$$

$$\hat{y}(t) \in \mathcal{Y}(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

где  $G_i(t)$  —  $i$ -ая строка матрицы  $G(t)$ .

С учетом определений множеств  $\mathcal{Y}(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ ,  $\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ , задачи (3.11) представляют собой задачи линейного программирования:

$$\chi_i(t|\tau) = \max_{\hat{\alpha}(\tau)} G_i(t)Y^d(t)\hat{\alpha}(\tau), \quad (3.12)$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}_\tau^p - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon \mathbb{1}.$$

Задачи (3.12) — задачи оптимального наблюдения, см. [1] и главу 2.

Выполнение для  $y_0(t)$  ограничения (3.10) очевидно влечет удовлетворение исходного ограничения  $G(t)y(t) \leq g(t)$  на  $y(t)$  для любой возможной реализации  $\hat{y}(t)$ , согласующейся с позицией  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ .

Параметр  $\alpha_0(\tau)$ , удовлетворяющий второму из условий (3.8) и такой, что для  $y_0(t) = Y^d(t)\alpha_0(\tau)$  при всех  $t = \tau, \dots, T-1$  выполняется неравенство (3.10), определяет допустимое управление  $u = U_\tau^f \alpha_0(\tau)$ . Тогда задача оптимального управления в момент времени  $\tau$  имеет вид:

$$\min_{\alpha_0(\tau), u} \|u\|^2, \quad (3.13)$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix},$$

$$G(t)Y^d(t)\alpha_0(\tau) \leq g(t) - \chi(t|\tau),$$

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad t = \tau, \dots, T-1.$$

Исключая в (3.13) управление  $u$ , получаем задачу квадратичного программирования относительно  $\alpha_0(\tau)$ :

$$\min_{\alpha_0(\tau)} \alpha_0(\tau)^T (U_\tau^f)^T U_\tau^f \alpha_0(\tau), \quad (3.14)$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G(t)Y^d(t)\alpha_0(\tau) \leq g(t) - \chi(t|\tau),$$

$$u_{\min} \leq U^d(t)\alpha_0(\tau) \leq u_{\max}, \quad t = \tau, \dots, T-1,$$

где, по аналогии с  $Y^d(t)$ ,  $U^d(t) = (u^d(t), u^d(t+1), \dots, u^d(t+T^d-T))$ .

Пусть  $\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$  — решение задачи оптимального управления (3.14). На вход системы  $G$  подаем первое значение соответствующего управления, которое вычисляется согласно формуле  $u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = U^d(\tau)\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ .

Таким образом, алгоритм управления системой на основе априорных данных  $\{u^d, y^d\}$  состоит в следующем

при всех  $\tau = n, \dots, T-1$ :

- 1) решить задачи (3.12), найти оценки  $\chi_i(t|\tau)$ ,  $i = 1, \dots, q$ ,  
 $t = \tau, \dots, T-1$ ;
- 2) решить задачу (3.14), найти  $\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ ;
- 3) подать на вход системы управление  $u^p(\tau) = U^d(\tau)\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ .

Как и в главе 2, полученное в результате применения алгоритма управление  $u^p(\tau)$ ,  $\tau = n, \dots, T-1$ , является *реализацией в конкретном процессе управления оптимальной обратной связи по неточным измерениям*.

Для того, чтобы результаты представленного алгоритма совпадали с результатом главы 2 необходимо потребовать  $X_0 = \mathbb{R}^n$ , совпадения управлений  $u^p(t)$  при  $t = 0, 1, \dots, n-1$ , и также начинать процесс управления в момент  $\tau = n$ .

### 3.3 Рекуррентная разрешимость задачи оптимального управления и задач оптимального наблюдения

Дадим теоретическое обоснование реализуемости предложенного алгоритма управления. В частности, покажем, что при условии существования решений задач (3.12) и (3.13) в момент времени  $\tau = n$ , решения этих задач существуют и для всех  $\tau = n+1, \dots, T-1$ . С целью сокращения записи далее опустим явное упоминание пары  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$  в решениях задачи (3.14) для момента  $\tau$ , т.е.  $\alpha_0^*(\tau) = \alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ ,  $u^*(\tau|\tau) = u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ , а также для момента  $\tau+1$  и позиции  $\{u_\tau^p, u^*(\tau|\tau), \tilde{y}_\tau^p, \tilde{y}^p(\tau)\}$ , которая реализуется при подаче управления  $u^*(\tau|\tau) = u^p(\tau)$  в момент  $\tau$ .

**Теорема 3.1** Пусть в момент  $\tau$  для позиции  $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$  каждая из задач (3.12) имеет решение. Далее, пусть имеет решение задача (3.14) с параметрами  $\chi(t|\tau)$ , поставленными решениями задач (3.12). Тогда в момент  $\tau + 1$  для позиции  $\{u_\tau^p, u^*(\tau|\tau), \tilde{y}_\tau^p, \tilde{y}^p(\tau)\}$  задачи (3.12), (3.14) также имеют решение. Более того,

$$\sum_{t=\tau+1}^{T-1} \|u^*(t|\tau+1)\|^2 \leq \sum_{t=\tau+1}^{T-1} \|u^*(t|\tau)\|^2.$$

Доказательство. Сначала докажем разрешимость каждой из задач оптимального наблюдения в момент  $\tau + 1$ . Эти задачи можно записать в виде

$$\chi_i(t|\tau+1) = \max_{\hat{\alpha}(\tau+1)} G_i(t) Y^d(t) \hat{\alpha}(\tau+1), \quad (3.15)$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U^d(\tau) \\ U_{\tau+1}^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau+1) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ u^*(\tau|\tau) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}_\tau^p - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y_\tau^p \hat{\alpha}(\tau+1) \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon \mathbb{1},$$

$$\tilde{y}^p(\tau) - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y^d(\tau) \hat{\alpha}(\tau+1) \leq \tilde{y}^p(\tau) + \varepsilon \mathbb{1},$$

а задачи наблюдения для момента  $\tau$  представимы в виде

$$\chi_i(t|\tau) = \max_{\hat{\alpha}(\tau)} G_i(t) Y^d(t) \hat{\alpha}(\tau), \quad (3.16)$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U^d(\tau) \\ U_{\tau+1}^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}_\tau^p - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon \mathbb{1}.$$

Каждая задача (3.15) допустима, поскольку для истинной реализовавшейся траектории  $\{u_\tau^p, u^*(\tau|\tau), y_\tau^p, y^p(\tau)\}$  и будущего тривиального управления  $\{u(t)\}_{t=\tau+1}^T = 0$  существует  $\hat{\alpha}^p(\tau+1)$ , для которого выполняется второе из условий (3.8) Леммы 3.1, а значит, для этого  $\hat{\alpha}^p(\tau+1)$  удовлетворены все ограничения (3.15).

Для доказательства разрешимости задачи (3.15) используем решение  $\alpha_0^*(\tau)$  задачи оптимального управления (3.14) в момент  $\tau$ . Обозначим

$$u^c = U_{\tau+1}^f \alpha_0^*(\tau), \quad (3.17)$$

$$y_0^*(\tau|\tau) = Y^d(\tau) \alpha_0^*(\tau).$$

Заметим, что  $u^c = \{u^*(t|\tau)\}_{t=\tau+1}^{T-1}$ , т.е. это "хвост" оптимального управления задачи (3.14). Согласно Лемме 3.1 существует  $\alpha^c$ , такое что выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U^d(\tau) \\ Y_\tau^p \\ Y^d(\tau) \\ U_{\tau+1}^f \end{pmatrix} \alpha^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u^c \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Сдвинем переменную  $\hat{\alpha}(\tau + 1)$ , относительно которой поставлены задачи оптимального наблюдения (3.15), на константу, перейдем к новой переменной  $\Delta\alpha(\tau + 1)$ :

$$\hat{\alpha}(\tau + 1) = \alpha_0^*(\tau) - \alpha^c + \Delta\alpha(\tau + 1).$$

Тогда

$$\chi_i(t|\tau + 1) = G_i(t)Y^d(t)(\alpha_0^*(\tau) - \alpha^c) + \Delta\chi_i(t|\tau + 1),$$

где, с учетом (3.17), (3.18),

$$\Delta\chi_i(t|\tau + 1) = \max_{\Delta\alpha(\tau+1)} G_i(t)Y^d(t)\Delta\alpha(\tau + 1), \quad (3.19)$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U^d(\tau) \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \Delta\alpha(\tau + 1) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}_\tau^p - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y_\tau^p \Delta\alpha(\tau + 1) \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon \mathbb{1},$$

$$\tilde{y}^p(\tau) - y_0^*(\tau|\tau) - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y^d(\tau)\Delta\alpha(\tau + 1) \leq \tilde{y}^p(\tau) - y_0^*(\tau|\tau) + \varepsilon \mathbb{1}, \quad (3.20)$$

и множество допустимых решений  $\Delta\alpha(\tau + 1)$  непустое.

Сравним задачи (3.19) – (3.3) для  $\Delta\alpha(\tau + 1)$  и (3.16) для  $\hat{\alpha}(\tau)$ . Очевидно, что дополнительное ограничение (3.3) влечет  $\Delta\chi_i(t|\tau + 1) \leq \chi_i(t|\tau)$  и справедлива оценка

$$\chi_i(t|\tau + 1) \leq G_i(t)Y^d(t)(\alpha_0^*(\tau) - \alpha^c) + \chi_i(t|\tau), \quad (3.21)$$

для всех  $i = 1, \dots, q$ ,  $t = \tau + 1, \dots, T - 1$ .

Таким образом, доказано, что в момент  $\tau + 1$  все задачи оптимального наблюдения имеют решение.

Остается продемонстрировать, что множество допустимых решений  $\alpha_0(\tau + 1)$  в задаче оптимального управления для момента  $\tau + 1$ , которая имеет вид

$$\min_{\alpha_0(\tau+1)} \alpha_0(\tau + 1)^T (U_{\tau+1}^f)^T U_{\tau+1}^f \alpha_0(\tau + 1),$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U^d(\tau) \\ Y_\tau^p \\ Y^d(\tau) \end{pmatrix} \alpha_0(\tau + 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

$$(t)Y^d(t)\alpha_0(\tau + 1) \leq g(t) - \chi(t|\tau + 1), \quad (3.23)$$

$$\min \leq U^d(t)\alpha_0(\tau + 1) \leq u_{\max}, \quad t = \tau + 1, \dots, T - 1, \quad (3.24)$$

непусто — тогда эта выпуклая задача квадратичного программирования имеет решение.

Покажем, что  $\alpha^c$  — допустимое решение. По построению  $\alpha^c$  выполнены ограничения-равенства (3.22) и группа ограничений на управления (3.24). Покажем, что выполнены также условия (3.23). Воспользовавшись сначала (3.21), а затем тем фактом, что  $\alpha_0^*(\tau)$  удовлетворяет ограничениям задачи (3.14), получаем

$$\begin{aligned} G(t)Y^d(t)\alpha^c + \chi(t|\tau + 1) &\leq G(t)Y^d(t)\alpha^c + G(t)Y^d(t)(\alpha_0^*(\tau) - \alpha^c) + \chi(t|\tau) = \\ &= G(t)Y^d(t)\alpha_0^*(\tau) + \chi(t|\tau) \leq g(t), \quad t = \tau + 1, \dots, T - 1, \end{aligned}$$

что доказывает (3.23).

Наконец, поскольку решение  $\alpha^c$  допустимо, оптимальное решение удовлетворяет

$$\sum_{t=\tau+1}^{T-1} \|u^*(t|\tau + 1)\|^2 \leq (\alpha^c)^T (U_{\tau+1}^f)^T U_{\tau+1}^f \alpha^c = \sum_{t=\tau+1}^{T-1} \|u^*(t|\tau)\|^2,$$

что завершает доказательство всех утверждений теоремы.  $\square$

**Следствие 3.1** Если задачи оптимального наблюдения (3.12) и управления (3.14) имеют решение в момент времени  $\tau = n$ , то они разрешимы и в каждый из последующих моментов  $\tau = n + 1, \dots, T - 1$ . При этом критерий качества, значение которого определяется в момент  $\tau$  как

$$J(\tau) = \sum_{t=0}^{\tau-1} \|u^p(t)\|^2 + \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u^*(t|\tau)\|^2,$$

является невозрастающей функцией от  $\tau$ .

Доказательство теоремы 3.1 использует "хвост"  $u^c = \{u^*(t|\tau)\}_{t=\tau+1}^{T-1}$  оптимального управления, полученного в момент  $\tau$  не только для доказательства допустимости задачи оптимального управления (как и в случае наличия

модели системы), но и для доказательства существования решения задач оптимального наблюдения. Это позволяет учесть взаимосвязь не только между соответствующими задачами для  $\tau$  и  $\tau + 1$ , но и между самими задачами для момента  $\tau + 1$ . В частности, для задач оптимального наблюдения на основе  $u^c$  приводится такая верхняя оценка решения  $\chi(t|\tau + 1)$ , которая позволяет продемонстрировать и допустимость управления  $\{u^*(t|\tau)\}_{t=\tau+1}^{T-1}$  в задаче оптимального управления для момента  $\tau + 1$ .

В данной главе был предложен новый способ решения задачи, поставленной в предыдущей главе. Этот способ не требует знания реализации системы в пространстве состояний. Предложенный метод сводится к решению задач линейного и квадратичного программирования, базирующихся лишь на двух траекториях системы: априорной и наблюдаемой в процессе управления.

Доказано, что если в начальный момент управления эти задачи линейного и квадратичного программирования разрешимы, то соответствующие задачи разрешимы и в каждый последующий момент, при этом значение критерия качества гарантированно не возрастает.

Задача решена в предположении, что траектория, измеряемая в процессе управления, неточна, но априорная траектория известна точно.

## ГЛАВА 4

### ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

В настоящей главе предложенная схема управления из главы 3 применяется для решения ряда примеров. Приводятся основные элементы программной реализации в пакете Matlab и результаты численных экспериментов.

#### 4.1 Элементы программной реализации

Решение задачи оптимального программного управления в момент времени  $\tau$  происходит в функции `control_at_tau`. В качестве входных параметров передаются матрицы Ганкеля, разделенные на "прошрое" ( $U_p$ ,  $Y_p$ ) и "будущее" ( $U_f$ ,  $Y_f$ ) для момента  $\tau$ ; прошлая траектория  $u_p$ ,  $y_p$ ; число EPS, определяющее точность измерений выходных сигналов; матрицы GG, gg и скаляры  $u_{\max}$ ,  $u_{\min}$ , задающие ограничения на выходные сигналы и управления соответственно.

```
function [isFeasible, uf] = control_at_tau ( Up, Yp, Uf, Yf, ...
    up, yp, EPS, GG, gg, umax, umin)
    [chiDet, solutionExistsDet] = ...
        estimation_Det (Up, Yp, Uf, Yf, up, yp, EPS, GG);
    %optimal input
    [uf, exitflagDet] = ...
        control_Det (Up, Yp, Uf, Yf, GG, gg, umax, umin, chiDet);

    if exitflagDet == 1 && solutionExistsDet == 1 %both estimation ...
        and control problems feasible
        isFeasible = true;
    else
        isFeasible = false;
    end
end
```

Сперва `control_at_tau` вызывает функцию `estimation_Det`, которая анализирует решение задач оптимального наблюдения. В теле `estimation_Det` на основе данных (матриц Ганкеля  $U_p$ ,  $Y_p$ ,  $U_f$ ,  $Y_f$  и траектории наблюдаемого

процесса  $u\_init, y\_init$ ) и ограничения ошибки измерения EPS формируются матрицы  $A, b, Aeq, beq$ , задающие ограничения-неравенства и ограничения-равенства соответственно. Далее с этими ограничениями решается ряд задач линейного программирования с помощью встроенной функции `linprog`.

Решения данных задач формируют вектор `chiDet`, который функция `estimation_Det` возвращает. Наряду с `chiDet` возвращается булева переменная `allexitflagsEqualOne`. Эта переменная принимает значение `True` тогда и только тогда, когда `linprog` успешно решил все задачи. Здесь и далее переменные такого характера используются для эмпирического подтверждения теоремы 3.1 о рекуррентной разрешимости.

```
function [chiDet, allexitflagsEqualOne] = estimation_Det(Up,...
Yp, Uf, Yf, u_init, y_init, EPS, GG)
allexitflagsEqualOne = true;
chiDet = zeros(length(GG(:,1)),1); %for each row of GG

%precalculate MATRICES for linprog
A = vertcat(Yp, -Yp);
b = vertcat(y_init + EPS.*ones(length(y_init),1), ...
    -y_init+EPS.*ones(length(y_init),1) );
Aeq = vertcat(Up, Uf);
beq = vertcat(u_init, zeros(length(Uf(:,1)), 1));

options = optimoptions('linprog','Display','iter');
for i = 1:length(GG(:,1))
    [x, fval, exitflag, ~] = ...
        linprog(-GG(i,:)*Yf, ...
        %-GG(i,:) instead of GG(i, :) for a max instead of min
        A, b, Aeq, beq, ...
        [], [], options);

    if exitflag == 1
        chiDet(i) = fval;
    else
        allexitflagsEqualOne = false;
        diary on
        'broken linprog'
        exitflag
        diary off
    end
end
```



```
end
```

```
chiDet = -chiDet; % minus before chi to contain a max instead of min  
end
```

Затем в теле `control_at_tau` вычисленное значение `chiDet` передается в функцию `control_Det`. Здесь сперва для нахождения  $\alpha_0^*(\tau)$  с помощью встроенной функции `quadprog` решается задача квадратичного программирования, ограничения для которой задаются уже не только через `Up`, `Yp`, `Uf`, `Yf`, `GG`, `gg`, `umax`, `umin`, а с привлечением `chiDet`. После посредством умножения полученного решения `alphaCdet` `Uf` формируется оптимальное управление `uOptDet`, которое является главным выходным параметром.

```
function [uOptDet, exitflag] = control_Det (Up, Yp, Uf, Yf,...  
GG, gg, umax, umin, chiDet)  
%Quadratic Problem for CONTROL  
[alphaCdet,~, exitflag, ~] = quadprog(transpose(Uf)*Uf, [],...  
vertcat(GG*Yf, Uf, -Uf), ...  
    vertcat(gg-chiDet, umax * ones(length(Uf(:,1))), 1),...  
    -umin * ones(length(Uf(:, 1)), 1)),...  
    vertcat(Up, Yp), zeros(size(Up,1)+size(Yp,1),1));  
  
%optimal input  
uOptDet = Uf*alphaCdet;  
end
```

Главный цикл итераций обернут в функцию `control_over_T`. В каждый момент времени  $\tau$  вызывается функция `control_at_tau`, которая поставляет оптимальное управление `uf` исходя из априорных данных и наблюдаемой в реализуемом процессе траектории `ur`, `yr`. Затем с помощью встроенной функции `lsim` моделируется подача на вход системы первого значения `uf(1:udim)` управления `uf`. К точному значению выходного сигнала, который возвращает `lsim`, прибавляется ограниченная ошибка, моделируемая как `EPS*rand([y_dim, 1])`. Удлиненная новыми неточными данными наблюдаемая траектория `ur`, `yr` вступает в следующую итерацию — для момента  $\tau + 1$ .

```
function [isFeasible, u_init, y_init, uopt, yopt, xopt, costs] = ...  
control_over_T (sys, x_init, u_init, y_init, Hu, Hy, GG, gg,...  
umax, umin, u_dim, y_dim, EPS, t_y)  
    isFeasible = true;
```

```

t_init = length(u_init)/u_dim + 1; %when we start control
T = length(Hu(:, 1))/u_dim; %prediction horizon
costs = zeros(T-t_init+1,1);
up = u_init;
yp = y_init;
GGtau = GG;
ggtau = gg;
for tau = t_init:T
    Up = Hu(1:(tau-1)*u_dim, :);
    Uf = Hu((tau-1)*u_dim+1:end, :);
    Yp = Hy(1:(tau-1)*y_dim, :);
    Yf = Hy((tau-1)*u_dim+1:end, :);

    %-y_dim*2 inequality constraints each time
    %if tau > t_init
    %constraints enforced for the last t_y only

    if tau > T-t_y
        GGtau = GGtau(1+y_dim*2:end, :);
        ggtau = ggtau(1+y_dim*2:end);
    end

    if tau > t_init
        GGtau = GGtau(:, 1+y_dim:end);
    end

    [isFeasibleatTau, uf] = control_at_tau (Up, Yp, Uf, Yf,...
        up, yp, EPS, GGtau, ggtau, umax, umin);
    costs(tau-t_init+1) = up' * up + uf' * uf;

    diary on
    tau
    isFeasibleatTau
    uf
    'cost at tau'
    up' * up + uf' * uf
    diary off

    up = vertcat(up, uf(1:u_dim));

```

```

[yf, ~, ~] = lsim(sys, transpose(reshape(up, u_dim, [])), ...
[], x_init);
yp = vertcat(yp, transpose(yf(end,:)) + ...
EPS * rand([y_dim,1]));
end
end

```

## 4.2 Пример 1: система второго порядка

Применим предложенный алгоритм для управления следующей системой:

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= \begin{pmatrix} 0.9950 & 0.0998 \\ -0.0998 & 0.9950 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.0050 \\ 0.0998 \end{pmatrix} u(t), \\
y(t) &= (1 \ 0) x(t), \quad t = 0, \dots, T-1.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Требуется минимизировать величину  $\sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$  при гарантированном соблюдении ограничений на значения выходных сигналов в последних 15 временных точках:

$$|y(t)| \leq 0.3, \quad t = T-15, \dots, T-1.$$

Доступны управления, для которых

$$|u(t)| \leq 0.7, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Горизонт планирования  $T = 135$ , абсолютное значение ошибки ограничено величиной  $\varepsilon = 0.02$ . Управление системой (4.1) начинается в момент  $\tau = n = 2$ .

Согласно замечанию 1.1, длина  $T^d$  априорной траектории должна быть не меньше  $(n+T)(m+1)-1 = 273$ . Именно такой, наименьшей подходящей длины, была сгенерирована незашумленная априорная траектория  $\{u^d, y^d\}$ , в которой управления  $u^d(t)$ ,  $t = 0, \dots, T^d-1$ , — случайные числа, равномерно распределенные в  $[0, 0.7]$ .

Пусть в конкретном процессе реализовалось начальное состояние  $x_0^p = (5, -2)$ . Траектория  $\{u_2^p, \tilde{y}_2^p\}$ , соответствующая движению системы до начала управления, получена при  $u^p(0) = u^p(1) = 0$  и  $\xi(t)$ ,  $t = 0, 1$ , выбранных случайным образом из отрезка  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ .

На рис. 4.1а изображена реализация  $u^p(\tau)$ ,  $\tau = 0, \dots, T-1$ , оптимальной обратной связи в рассматриваемом процессе. Выходной сигнал (см. рис. 4.1b)

удовлетворяет ограничениям на промежутке от  $\tau = 120$  до  $\tau = 134$ .

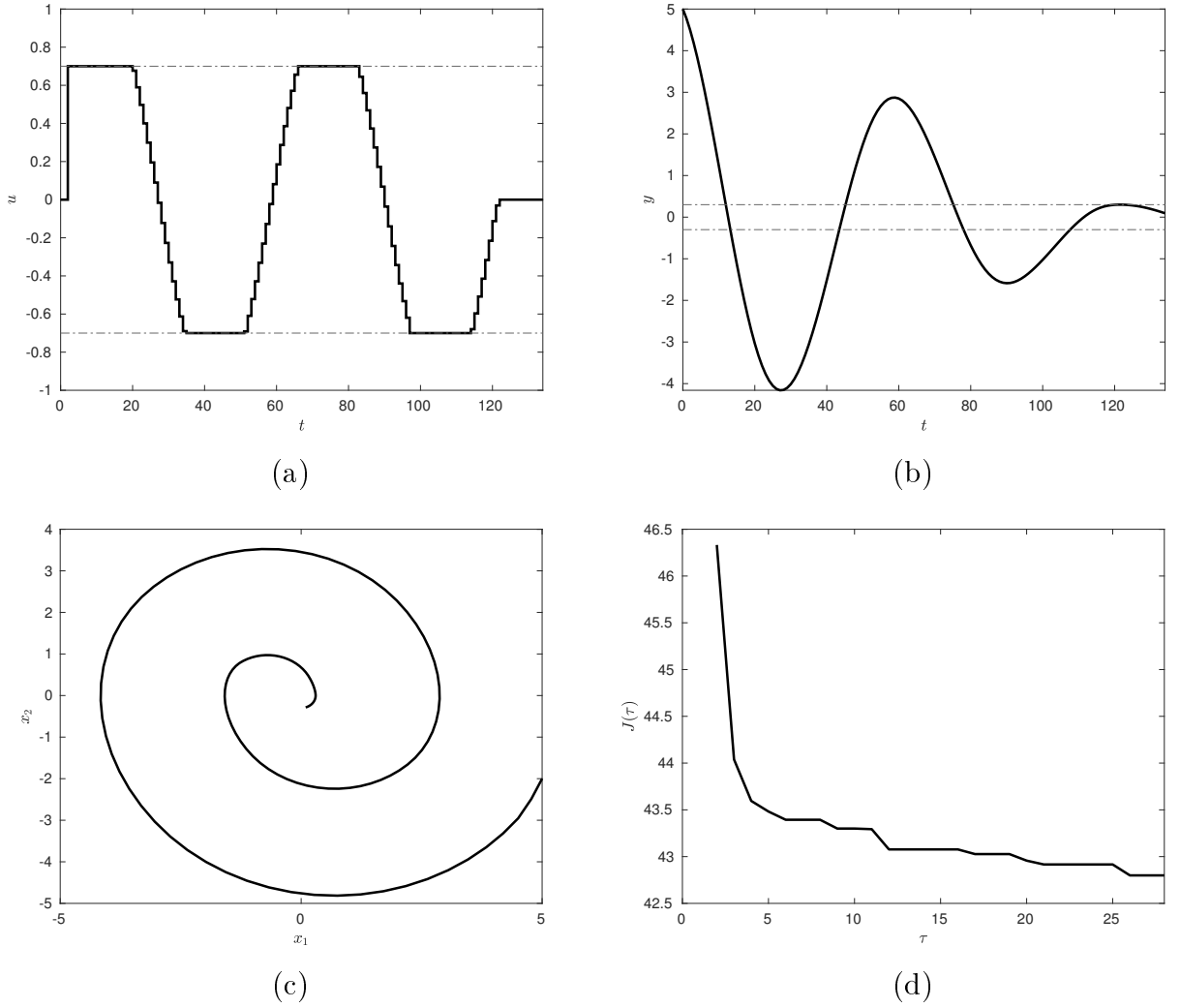


Рис. 4.1. Реализованная оптимальная обратная связь (а), соответствующий выходной сигнал (b), фазовая траектория (с), изменение критерия качества (d)

На рис. 4.1с изображена реализовавшаяся траектория системы (4.1). Априорная оценка значения критерия качества, полученная в  $\tau = 2$  составила 46.3322. В процессе управления значение критерия качества улучшилось до 42.5599. Наиболее значительное изменение происходит при  $\tau = 2, \dots, 28$ . Этот фрагмент приведен на рис. 4.1d.

### 4.3 Пример 2: система четвертого порядка

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы, которая была рассмотрена в [5]:

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.921 & 0 & 0.041 & 0 \\ 0 & 0.918 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & 0.924 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.937 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.017 & 0.001 \\ 0.001 & 0.023 \\ 0 & 0.061 \\ 0.072 & 0 \end{pmatrix} u(t), \quad (4.2)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t), \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Снова требуется минимизировать величину  $\sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$  при следующих ограничениях:

$$|y_i(t)| \leq 0.1, \quad t = T-20, \dots, T-1, \quad i = 1, 2,$$

$$|u_i(t)| \leq 0.8, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad i = 1, 2.$$

Положим  $T = 55$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .

Отметим, что для данной системы управление можно было бы начать в момент  $\tau = 2$ , поскольку наблюдений при  $t = 0, 1$  достаточно для неявного задания начального условия  $x_0$ . Однако, поскольку математическая модель неизвестна, известна лишь точная размерность системы,  $n = 4$ , управление системой (4.2) начинается в момент  $\tau = n = 4$ .

Управления  $u^d(t)$ ,  $t = 0, \dots, T^d - 1$  для априорной траектории  $\{u^d, y^d\}$  длины  $T^d = 176$  (см. замечание 1.1) были сгенерированы как случайные векторы, равномерно распределенные в  $[-0.8, 0.8]^2$ .

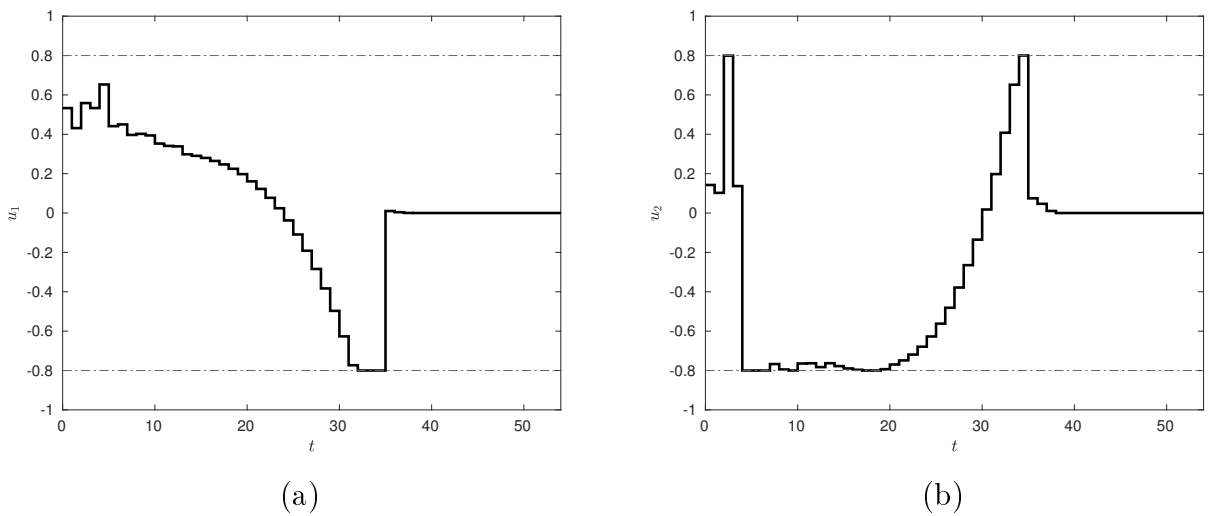


Рис. 4.2. Реализация оптимальной обратной связи (a)–(b)

Траектория  $\{u_4^p, \tilde{y}_4^p\}$  конкретного процесса была сгенерирована для начального состояния  $x_0^p = (4, 0, 1, -1)$  и  $u^p(t)$ ,  $\xi(t)$ ,  $t = 0, \dots, 3$ , выбранных

случайным образом из квадратов  $[0, 0.8]^2$ ,  $[-\varepsilon, \varepsilon]^2$ , соответственно.

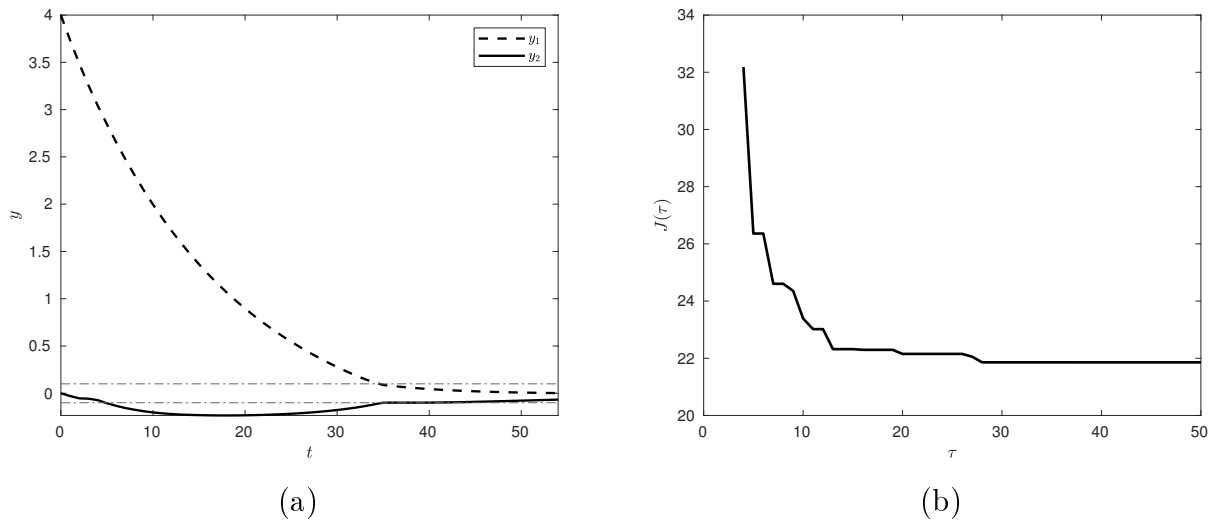


Рис. 4.3. Выходные сигналы (а), изменение критерия качества (б)

Рис. 4.2, 4.3 иллюстрируют результаты применения предложенной схемы управления. Априорная оценка значения критерия качества, составлявшая 32.183, была улучшена до 21.857. Начиная с момента  $\tau = 29$  изменения не существенны.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной дипломной работе рассмотрена задача оптимального управления линейной стационарной системой в дискретном времени по неточным измерениям ее выходных сигналов при условии гарантированного удовлетворения геометрических ограничений на выходные сигналы. Для исследуемой задачи предложен метод решения, не использующий параметрической модели системы. Вместо модели полученный подход использует одну априорно известную конечную траекторию входных–выходных сигналов, что позволяет опустить этап параметрической идентификации системы.

Ключевая идея, позволяющая добиться необходимых гарантий в условиях неточных измерений выходных сигналов в процессе управления, заключается в разделении задач оптимального оценивания и управления. В каждый момент времени сперва решаются несколько задач оптимального оценивания, а затем — одна детерминированная задача оптимального программного управления.

Доказана рекуррентная разрешимость как задач оптимального оценивания, так и задач оптимального управления.

Эффективность предложенного метода проиллюстрирована численными примерами для двумерной и четырехмерной систем.

Результаты работы вошли в статью [2].

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габасов, Р. Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2004. – Т.10, №2. – С. 33-57.
2. Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление линейными стационарными системами без предварительной параметрической идентификации системы / Н.М. Дмитрук, Е.А. Манжулина // Автоматика и Телемеханика (сдана в печать).
3. Berberich, J. A trajectory-based framework for data-driven system analysis and control / J. Berberich, F. Allgöwer // European Control Conference. – Saint Petersburg, Russia, 2020. – P. 1365-1370.
4. Berberich, J. Robust data-driven state-feedback design / J. Berberich, A. Romer, C. W. Scherer, F. Allgöwer // arXiv: 1909.04314. – 2019.
5. Berberich, J. Data-Driven Model Predictive Control with Stability and Robustness Guarantees / J. Berberich, J. Köhler, M. A. Müller, F. Allgöwer // IEEE Transactions on Automatic Control. DOI: 10.1109/TAC.2020.3000182.
6. Copp, D. Simultaneous nonlinear model predictive control and state estimation / D. Copp, J. Hespanha // Automatica. – 2016. – Vol. 77. – P. 143-154.
7. Coulson, J. Data-Enabled Predictive Control: In the Shallows of the DeePC / J. Coulson, J. Lygeros, F. Dörfler // 18th European Control Conference (ECC), Naples, Italy. – 2019. – P. 307-312.
8. Hou, Z.-S. From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective / Z.-S Hou, Z. Wang // Information Sciences. – 2013. – Vol.235. – P.3-35.
9. De Persis, C. Formulas for data-driven control: Stabilization, optimality and robustness / C. De Persis, P. Tesi // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2019. – Vol. 65, no.3. – P. 909-924.
10. Romer, A. One-shot verification of dissipativity properties from input-output data / A. Romer, J. Berberich, J. Köhler, F. Allgöwer // IEEE Control Systems Letters. – 2019. – Vol. 3, no.3. – P. 709-714.
11. Waarde, H.J. Data informativity: a new perspective on data-driven analysis and control / H. J. van Waarde, J. Eising, H. L. Trentelman, M. K. Camlibel // arXiv: 1908.00468. – 2019.



12. Willems, J. C. A note on persistency of excitation / J. C. Willems, I. Markovsky, P. Rapisarda, B. L. M. De Moor // Systems & Control Letters. – 2005. – Vol. 54. – P. 325-329.