МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра методов оптимального управления

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ СИСТЕМАМИ БЕЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМЫ

Курсовая работа

Манжулиной Елизаветы Александровны
студента 3 курса,
специальность «прикладная математика»

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

РЕФЕРАТ

Курсовая работа, 30 с., 3 рис., 11 источников

ЛИНЕЙНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ СИСТЕМА, УПРАВЛЕНИЕ ПО ДАННЫМ, ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ВЫХОДНЫЕ СИГНАЛЫ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ, НЕТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Целью работы является решение задачи оптимального управления по неточным выходным сигналам при условии гарантированного удовлетворения геометрических ограничений на выходные сигналы в случае отсутствия параметрической модели системы.

Объектом исследования является линейная стационарная система в дискретном времени.

В процессе работы был получен метод решения поставленной задачи, опирающийся на наблюдаемые траектории входного и выходного сигналов системы. Для метода были доказаны условия применимости.

Новизна предложенного метода состоит в отсутствии шага параметрической идентификации системы, который обычно предшествует решению задачи управления в случае неизвестной системы.

Структура курсовой работы представлена четырьмя главами, где сначала приведены теоретические результаты, послужившие основой для данной работы, далее формулируется задача управления при наличии модели системы в пространстве состояний и рассматривается схожая задача в условиях отсутствия модели. Завершает работу численный пример, иллюстрирующий предложенный метод.

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире неумолимо возрастает размерность и общая сложность используемых систем. Моделирование многих процессов представляется чрезмерно трудоёмким, а построенная модель зачастую слишком сложна и громоздка для практического использования В последнее время всё большую популярность набирают методы системного анализа и управления, базирующиеся не на достоверном знании внутренней организации системы, но лишь на ее наблюдаемом поведении. С этим связан возросший интерес к так называемой поведенческой (бихевиористской) теории динамических систем [**?**].

В данной работе предлагается решение задачи оптимального управления линейной стационарной дискретной системой по неточным выходным сигналам при гарантированном соблюдении наложенных на выходные сигналы ограничений, не опирающееся на модель системы вовсе.

Работа структурирована следующим образом: глава 1 посвящена основным результатами из поведенческой теории динамических систем, в главе 2 формулируется конкретная задача оптимального управления линейной системой, вокруг которой сосредоточена данная работа, а также приводится метод ее решения, опирающийся на известную минимальную реализацию системы в пространстве состояний. В главе 3 продолжается исследование поставленной задачи в случае отсутствия какого-либо явного параметрического представления системы, предлагается метод решения, базирующийся на измерениях в одном единственном процессе управления. Приведены теоретические гарантии применимости метода в каждый момент времени при условии разрешимости задач в начальный момент управления. Эффективность предложенного метода иллюстрируется численным примером в разделе 4. Наконец, в заключении приводятся краткие выводы по результатам проведенной работы и предлагаются возможные направления дальнейших исследований.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$[x, y] = \begin{pmatrix} x(0) & y(0) \\ x(1) & y(1) \\ \vdots & \vdots \\ x(n-1) & y(n-1) \end{pmatrix}$ матрица, составленная из "горизонтально склеенных" векторов x, y одинаковой размерности n

$(x, y) = [x^T, y^T]^T$ вектор, составленный из "вертикально склеенных" векторов x, y

$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ множество целых неотрицательных чисел

$\mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} = \{f \colon \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{W}\}$ пространство $\mathbb{W}$ в декартовой степени $\mathbb{Z}_{\geq 0}$

$u_t = (u(0), u(1) \ldots, u(t))$ вектор, составленный из сигналов в моменты времени $0, 1, \ldots, t$

$\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T} = \{u_T, y_T\}$ пара из входного сигнала u_T и соответствующего ему выходного сигнала y_T

$colspan(A)$ линейная оболочка столбцов матрицы A

$\|x\|$ Евклидова норма вектора x

$\|x\|_\infty$ l_∞–норма вектора x

$\mathbb{1}$ единичный вектор, размерность которого понятна из контекста

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ БИХЕВИОРИСТСКОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В этой главе будут изложены основные понятия бихевиористской теории динамических систем (в западной литературе — behavioral systems theory), а также последние результаты, полученные с помощью инструментов этой теории.

1.1 Бихевиористская теория линейных стационарных систем

Вместо того, чтобы, в традициях физики, отталкиваться от понимания внутренней организации системы, от детальных взаимосвязей её компонентов, можно концентрироваться на *поведении* системы, на её взаимодействии с окружением. Эта идея находит отражение в поведенческой теории систем (в западной литературе — behavioral systems theory), [?]. В рамках этой теории система описывается не через набор дифференциальных или разностных уравнений для входных и выходных сигналов, но через её поведение — пространство всех возможных траекторий. Такой подход великолепно соотносится с нуждами растущего раздела системного анализа и управления, методы которого основаны прежде всего на собранных данных (в западной литературе — data-based approaches).

Далее, следуя работам Я.Виллемса [10, 11] в области поведенческой теории, определим динамическую систему, а затем высветим связи этого определения с одним из основных методов описания динамической системы — в пространстве состояний.

Начнем с основных положений поведенческой теории линейных стационарных систем, которые потребуются в последующем.

Определение 1.1 *Динамическую систему* определим как тройку $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$, где $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ — дискретная временная ось, $\mathbb{W}$ — пространство сигналов, $\mathcal{B} \subset \mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ — поведение.

В сущности, поведение представляет собой не что иное как множество всех возможных траекторий системы.

На протяжении данной работы будем иметь дело именно с дискретными системами. Более того, мы сконцентрируемся на линейных стационарных системах.

Определение 1.2 Динамическая система $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$ является *линейной*, если $\mathbb{W}$ — векторное пространство, $\mathcal{B}$ — линейное подпространство пространства $\mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$. Система является *стационарной*, если $\mathcal{B} \subset \sigma\mathcal{B}$, где $\sigma : \mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \to \mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ — сдвиг вперед во времени, определенный как $(\sigma w)(t) = w(t+1)$, а $\sigma\mathcal{B} = \{\sigma w | w \in \mathcal{B}\}$.

Для всех рассматриваемых систем $\mathbb{W} = \mathbb{R}^{m+p}$, где представление $m + p$ именно в виде суммы будет объяснено ниже. Без ограничения общности, систему далее будем определять просто как ее поведение $\mathcal{B}$.

Введем в рассмотрение множество всех возможных сужений траекторий длины T, $\mathcal{B}_T = \{w \in (\mathbb{R}^{m+p})^T \quad | \exists v \in \mathcal{B}, w(t) = v(t), 1 \leq t \leq T\}$. Такие траектории будем называть *конечными длины* T. Последовательность вида $w(t), w(t+1), \ldots, w(t+T-1)$ будем называть *окном длины* T.

Возникает естественный вопрос: насколько информативной может быть одна единственная конечная траектория системы? Так, из линейности системы непосредственно следует, что линейная оболочка наблюдаемых нами окон длины t в траектории длины T является подмножеством всех возможных траекторий длины t. Существует ли условия, при которых верно обратное включение, т.е. *любая* траектория длины t является некоторой линейной комбинацией наблюдаемых нами окон длины t? В работе [10] доказано, что такие условия действительно существуют.

Первое из этих условий — управляемость системы. Это привычное понятие для теории систем в пространстве состояний в бихевиористской теории определяется следующим образом.

Определение 1.3 Система $\mathcal{B}$ называется *управляемой*, если для любых $T \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad w^1 \in \mathcal{B}_T, \quad w^2 \in \mathcal{B}$ существует $w \in \mathcal{B}$ и $T' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ такие, что $w(t) = w^2(t)$ для $0 \leq t \leq T$, $w(t) = w^2(t - T - T')$ для $t > T + T'$.

Другими словами, система $\mathcal{B}$ управляема, если любые две траектории могут быть склеены в некоторой конечной точке времени.

Второе условие — наличие достаточно "богатой" компоненты $u \in \mathbb{R}^{mT}$ сигнала $w \in \mathbb{R}^{(m+p)T}$. Компоненту u будем будем именовать входной, а оставшуюся компоненту $y \in \mathbb{R}^{pT}$ сигнала $w = (u, y)$ — выходной.

Определение 1.4 Пусть $t, T \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad T \geq t$. Входной сигнал $u = (u(0), \cdots, u(T-1)) \in \mathbb{R}^{mT}$ является *постоянно возбуждающим порядка* t, если соответствующая матрица Ганкеля

$$H_t(u) = \begin{pmatrix} u(0) & u(1) & \cdots & u(T-t) \\ u(1) & u(2) & \cdots & u(T-t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(t-1) & u(t) & \cdots & u(T-1) \end{pmatrix}$$

имеет полный строчный ранг.

Замечание 1.1 Если входной сигнал $u = (u(0), \cdots, u(T-1)) \in \mathbb{R}^{mT}$ является постоянно возбуждающим порядка t, то он является и достаточно длинным. Поскольку матрица имеет полный строчный ранг, число строк не превышает число столбцов: $T - t + 1 \geq mt$. Отсюда следует необходимое условие на длину T постоянно возбуждающего сигнала порядка t: $T \geq t(m+1) - 1$, где m — размерность сигнала.

Постоянно возбуждающие входные сигналы достаточно высокого порядка возбуждают систему таким образом, что выходные сигналы репрезентативны для поведения системы. Центральный результат работы [10] указывает, какого порядка достаточно.

Теорема 1.1 Рассмотрим управляемую систему $\mathcal{B}$ порядка $n(\mathcal{B})$. Пусть $T, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $w = (u, y) \in \mathcal{B}_T$. Тогда для любого постоянно возбуждающего входного сигнала u порядка $t + n(\mathcal{B})$, $colspan(H_t(w)) = \mathcal{B}_t$.

Последние результаты [9] показывают, что для некоторых задач достаточную информацию о системе можно получить и по такой траектории, у которой входной сигнал не является постоянно возбуждающим, однако это направление пока лишь зарождается, тогда как вокруг теоремы 1.1 уже накопилось достаточно новых фундаментальных результатов.

В работах [2], [6] бихевиористская теория соотнесена с классическим подходом пространства состояний.

Определение 1.5 *Траекторией* линейной системы G, минимальная реализация которой — четверка (A, B, C, D), будем называть такие $\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$, что существует некоторое начальное состояние x_0, для которого

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$
$$t = 0, \dots, T-1.$$

Понятие траектории системы на протяжении данной работы будет употребляться только в вышеобозначенном смысле — как траектория входных-выходных сигналов. Вместо

$$\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1} = \{(u(0), u(1), \dots, u(T-1)), (y(0), y(1), \dots, y(T-1))\},$$

будем зачастую пользоваться более лаконичной записью $\{u_T, y_T\}$.

Фундаментальная теорема 1.1 получила непосредственный перевод на язык классических моделей в пространстве состояний в работе [2].

Теорема 1.2 Пусть $\{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$ — траектория линейной системы G размерности n, причем u^d — постоянно возбуждающий входной сигнал порядка $T+n$. Тогда $\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$ является траекторией G в том и только в том случае, когда для

$$\begin{pmatrix} H_T(u^d) \\ H_T(y^d) \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

существует решение $\alpha \in \mathbb{R}^{T^d - T + 1}$.

Замечание 1.2 Важнейшие результаты данной главы налагают на рассматриваемую систему требование управляемости. Это неограничительное требование: в последующей работе будем пользоваться тем, что каждая линейная стационарная система допускает некоторую минимальную реализацию, являющуюся управляемой. Именно такой минимальной реализацией и будем пользоваться во всех разделах по умолчанию, что даст возможность использования вышеперечисленных результатов.

Теорема 1.1 привлекла интерес научного сообщества и породила множество замечательных результатов как в системном анализе, так и в оптимальном управлении. Были получены модификации метода MPC (Model Predictive Control), в которых собственно модель в явном виде отсутствует, динамика системы неявно задается ее траекториями [4]. В ряде работ представлены data-driven методики стабилизации систем [7], [3]. Что до системного анализа, то, к примеру, в [8] представлен одношаговый метод проверки системы на диссипативность. Некоторые результаты уже получены и для нелинейных систем [5], хотя в этом направлении продвижение не столь велико. Помимо нелинейных систем, мало изучен в разрезе бихевиористской методологии случай, когда априорные траектории $\{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$ известны неточно.

В данной работе будет представлена еще одна задача управления, для которой применение теоремы 1.1 позволяет получить неклассический метод решения, не требующий явного параметрического описания системы.

ГЛАВА 2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРИ НАЛИЧИИ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

В данной главе будет сформулирована рассматриваемая задача оптимального управления по выходу линейной системой с известной минимальной реализацией в пространстве состояний и приведен один из возможных методов ее решения.

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему G, минимальная реализация (A, B, C, D) которой известна:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

$$t = 0, \dots, T-1.$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$ — состояние системы, управление и выходной сигнал в момент времени t, соответственно.

На управляющие и выходные сигналы наложены следующие ограничения:

$$u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \tag{2.2}$$

где множество доступных значений управления и множество допустимых выходных сигналов имеют вид $U = \{u \in \mathbb{R}^m \ : u_{\min} \le u \le u_{\max}\}$, $Y(t) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \le g(t)\}$, $G(t) \in \mathbb{R}^{q \times p}, \quad g(t) \in \mathbb{R}^q$.

В последующем будем считать, что в момент времени τ доступны лишь неточные измерения выходных сигналов $\tilde{y}^p(t) = y^p(t) + \xi(t)$, $t = 0, \dots, \tau - 1$, где $y^p(t)$ — точное значение выходного сигнала в соответствии с (2.1), а $\xi(t)$ — ограниченная ошибка измерения в момент времени $t = 0, \dots, \tau - 1$. Верхний индекс p подчеркивает, что измеренные сигналы относятся к конкретной "прошлой" (past) траектории.

Начальное состояние x_0 и величина погрешности $\xi(t)$ достоверно неизвестны, однако полагаем их в дальнейшем принадлежащими известным множествам: $x_0 \in \mathcal{X}_0$, $\xi(t) \in \varXi$, где $\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{\min} \le x \le x_{\max}\}$, $\varXi = \{\xi \in \mathbb{R}^p : \|\xi\|_\infty \le \varepsilon\}$.

Поставим задачу о минимизации следующего квадратичного критерия качества

$$J(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$$

на множестве доступных управляющих воздействий $u(t) \in U$, гарантирующих выполнение ограничений на выходные сигналы $y(t) \in Y(t)$ при *всех* возможных реализациях ошибок $\xi(t) \in \Xi$ и начального состояния $x_0 \in X$.

Определение 2.1 Назовем состояние $x(\tau)$ *согласующимся* с траекторией $\{u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau\}$, если найдутся такие допустимые начальное состояние $x_0 \in X_0$ и ошибки измерения $\xi(t) \in \Xi, \quad t = 0, \ldots, \tau - 1$, что

$$x(\tau) = x(\tau | x_0, u^p_\tau),$$

$$\tilde{y}^p(t) = Cx(t|x_0, u^p_t) + Du^p(t) + \xi(t),$$

$$t = 0, \ldots, \tau - 1,$$

где $x(t|x_0, u^p_t)$ — состояние, в которое система (2.1) приходит в момент t, двигаясь из начальной точки $x(0) = x_0$ под воздействием управления u^p_t.

Обозначим через $X(\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau)$ множество всех состояний $x(\tau)$, согласующихся с $\{u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau\}$.

2.2 Метод решения

Изложим стратегию оптимального управления в поставленной задаче, предложенную в [?].

В каждый момент времени $\tau = 0, \ldots, T-1$, обладая знанием неточной траектории $\{u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau\}$, решаем следующую задачу оптимального программного управления:

$$\min_u \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2, \tag{2.3}$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

$$u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t) \quad \forall x(\tau) \in X(\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau),$$

$$t = \tau, \dots, T-1.$$

Пусть $u^*(t|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau), t = \tau, \dots, T-1,$ — оптимальное управление в задаче (2.3). Тогда в момент τ подаем на вход лишь первое значение

$$u^p(\tau) = u^*(\tau|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau),$$

после чего переходим к следующей задаче оптимального программного управления (2.3), сформулированной уже в момент $\tau + 1$, на единицу уменьшившимся горизонтом планирования и обогатившимся знанием о поведении системы в лице более длинной траектории $\{u^p_{\tau+1}, \tilde{y}^p_{\tau+1}\}$.

Далее, воспользовавшись принципом разделимости процессов управления и наблюдения для линейных систем, разделяем решение задачи (2.3) на решение ряда задач оптимального наблюдения и одной задачи детерминированного оптимального управления.

Так, представив состояние $x(t)$ и выходной сигнал $y(t)$ в виде $x(t) = x_0(t) + \hat{x}(t)$, $y(t) = y_0(t) + \hat{y}(t)$, где $x_0(t), y_0(t)$ соответствуют состоянию и выходу номинальной системы с тривиальным начальным состоянием

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(\tau) = 0,$$

$$y_0(t) = Cx_0(t) + Du(t), \quad t = \tau, \dots, T-1,$$

а $\hat{x}(t), \hat{y}(t)$ соответствуют состоянию и выходу неуправляемой системы с неопределенным начальным состоянием

$$\hat{x}(t) = A\hat{x}(t), \quad \hat{x}(\tau) \in X(\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau),$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \quad t = \tau, \dots, T-1,$$

можем рассмотреть ограничение на выходные сигналы (2.2) в виде

$$G(t)(y_0(t) + \hat{y}(t)) \leq g(t), \quad \forall x(\tau) \in X(\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau),$$

что влечет естественное суженное условие на $y_0(t)$, удовлетворение которого будет гарантировать допустимость выходного сигнала $y(t)$:

$$y_0(t) \in Y_0(t|\tau) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \leq g(t) - \chi(t|\tau)\}, \tag{2.4}$$

где каждая компонента вектора $\chi(t|\tau)$ соответствет наихудшей реализации состояния $x(\tau)$:

$$\chi_i(t|\tau) = \max_z G_i(t)\hat{y}(t), \tag{2.5}$$

$$\hat{x}(s+1) = A\hat{x}(s), \quad \hat{x}(\tau) = z,$$
$$y(s) = C\hat{x}(s), \quad s = \tau, \ldots, t,$$
$$z \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

где $G_i(t)$ обозначает i–ю строку матрицы $G(t)$.

После вычисления всех оценок $\chi(t|\tau)$, $t = \tau, \ldots, T-1$, оптимальное управление $u^*(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ получаем как решение следующей детерминированной задачи оптимального управления:

$$\min_u \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2, \tag{2.6}$$

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(\tau) = 0,$$
$$y_0(t) = Cx_0(t) + Du(t),$$
$$u(t) \in U, \quad y_0(t) \in Y_0(t|\tau),$$
$$t = \tau, \ldots, T-1.$$

Подведем итоги. В настоящей главе была поставлена задача оптимального гарантирующего управления линейной дискретной стационарной системы по неточным выходным сигналам. Рассмотрена стратегия построения оптимальных обратных связей по выходу в реальном времени. Продемонстрировано, как данная задача естественным образом разделяется на несколько задач оптимального наблюдения и одну детерминированную задачу оптимального управления.

ГЛАВА 3

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ОТСУТСТВИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

Ниже будет рассмотрена задача из предыдущей главы при условии отсутствия заранее известной реализации системы в пространстве состояний. Классический подход в подобных ситуациях состоит в предварительной идентификации системы и последующем решении задачи уже имеющимся способом, основанным на знании модели, как в главе 2. Однако, такой подход не всегда целесообразен.

В этой главе будет предложен альтернативный подход, не нуждающийся в явном параметрическом представлении системы вовсе. Основой ему послужит бихевиористский подход к динамическим системам, изложенный в главе 1, а также принцип разделимости управления и наблюдения, уже использовавшийся в главе 2.

3.1 Постановка и решение задачи по сгенерированным данным

Будем считать, что сведения о линейной системе G сводятся к верхней оценке ее размерности n и одной предварительно сгенерированной траектории $\{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$, причем эта траектория измерена точно.

Как и ранее, траектории "прошлого" $\{(u^p(0), u^p(1), \ldots, u^p(\tau-1)), (y^p(0), y^p(1), \ldots, y^p(\tau-1))\} = \{u^p_\tau, y^p_\tau\}$, известные к текущему моменту τ в процессе управления системой, будем считать измеренными с точностью до ограниченной ошибки: т.е. доступны лишь $\{u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau\}$, где $\tilde{y}^p_\tau = y^p_\tau + \xi_\tau$.

В текущий момент времени τ, подобно предыдущей главе, ставится задача минимизация квадратичного критерия качества

$$\sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2,$$

при гарантированном соблюдении линейных условий

$$G(t)y(t) \le g(t), \quad u_{\min} \le u(t) \le u_{\max}, \quad \tau \le t \le T-1,$$

на входные и выходные сигналы.

Покажем, как априорная траектория $\{u^d, y^d\}$ при определенных условиях может иметь ту же информационную ценность, что и модель системы (A, B, C, D), в случае ее наличия.

Теорема 1.2 в непосредственно приведенной формулировке позволяет проверять любую траекторию фиксированной длины на принадлежность множеству траекторий системы. В рассматриваемом случае стоит обратная задача: чтобы определить, допустимо ли конкретное управление в конкретный момент времени, хотелось бы уметь в некотором смысле симулировать систему.

Модификацию теоремы 1.2 можно использовать для генерации множества возможных траекторий $\{u^p_\tau, u, y^p_\tau, y\}$ длины T с некоторой фиксированной "прошлой" начальной частью $\{u^p_\tau, y^p_\tau\}$ длины τ. Нефиксированную часть $\{u, y\} = \{u(\tau), \ldots, u(T-1), y(\tau), \ldots, y(T-1)\}$ будем называть "будущей" частью траектории. Соответственно, будем делить на "прошлое" и "будущее" для момента τ и строки матриц Ганкеля для априорной траектории:

$$H_T(u^d) = \left(\begin{array}{ccc} u^d(0) & \cdots & u^d(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(\tau-1) & \cdots & u^d(\tau - 1 + T^d - T) \\ \hline u^d(\tau) & \cdots & u^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(T-1) & \cdots & u^d(T^d - 1) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} U^p_\tau \\ U^f_\tau \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$H_T(y^d) = \left(\begin{array}{ccc} y^d(0) & \cdots & y^d(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(\tau-1) & \cdots & y^d(\tau - 1 + T^d - T) \\ \hline y^d(\tau) & \cdots & y^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(T-1) & \cdots & y^d(T^d - 1) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} Y^p_\tau \\ Y^f_\tau \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

Если входной сигнал u^d является постоянно возбуждающим порядка $n + T$, то, согласно теореме 1.2, $\{u^p_\tau, u, y^p_\tau, y\}$ является траекторией системы

G тогда и только тогда, когда уравнение

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u \\ y \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

имеет решение $\alpha \in \mathbb{R}^{T^d - T + 1}$. Поэтому для построения возможных траекторий можно воспользоваться следующим алгоритмом:

1. Зафиксировать интересующее значение "будущего" входного сигнала u.
2. Для выбранного u найти некоторое решение $\alpha \in \mathbb{R}^{T^d - T + 1}$ системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

3. Вычислить $y = Y_\tau^f \alpha$. Получили одну из возможных траекторий для фиксированных u_τ^p, y_τ^p, u.

Замечание 3.1 В силу теоремы 1.2, для любых u_τ^p, y_τ^p, u хотя бы одну возможную выходную траекторию y мы найти сможем, а вот для единственности y, которая представляет особый практический интерес, нужно наложить некоторые условия. Поскольку для линейной системы размерности n траектория длины n однозначно определяет начальное состояние, то для обеспечения единственности достаточно потребовать $\tau \geq n$. Потому в дальнейшем полагаем, что управление начинается в момент n, — это своего рода неявный аналог явного ограничения $x_0 \in X_0$ в постановке задачи при известной модели.

Замечание 3.2 Чем больше горизонт планирования T, тем больше и длина априорной траектории T^d. Поскольку нам необходим постоянно возбуждающий порядка $n+T$ сигнал u^d, то, как уже отмечалось в Замечании 1.1, для длины T^d этого сигнала справедлива оценка $T^d \geq (n+T)(m+1)-1$, где m — размерность входа.

Вместо явного задания динамики системы моделью (A, B, C, D) в пространстве состояний, будем пользоваться неявным описанием поведения системы в виде (3.3). Начальное состояние системы также фиксируем неявно, начиная управление в момент n.

Таким образом, в каждый момент времени $n \le \tau \le T$ решаем следующую задачу оптимального программного управления, обладая неточной траекторией $\{u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau\}$:

$$\min_{u(\tau)} u(\tau)^T u(\tau), \tag{3.5}$$

$$\begin{pmatrix} U^p_\tau \\ Y^p_\tau \\ U^f_\tau \end{pmatrix} \alpha(\tau) = \begin{pmatrix} u^p_\tau \\ y^p_\tau \\ u(\tau) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}^p_\tau = y^p_\tau + \xi_\tau, \quad -\varepsilon\mathbb{1} \le \xi_\tau \le \varepsilon\mathbb{1},$$

$$u_{\min}(\tau) \le u(\tau) \le u_{\max}(\tau),$$

$$G_\tau Y^f_\tau \alpha(\tau) \le g_\tau \quad \forall \alpha(\tau), \xi_\tau,$$

где матрица

$$G_\tau = \left(\begin{array}{c|c|c|c} G(\tau) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & G(\tau+1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & G(T-1) \end{array}\right),$$

вектор $g_\tau = (g(\tau), g(\tau+1), \cdots, g(T-1))$,
$u_{\min}(\tau) = (\underbrace{u_{\min}, \ldots, u_{\min}}_{T-\tau \text{ раз}}), \quad u_{\max}(\tau) = (\underbrace{u_{\max}, \ldots, u_{\max}}_{T-\tau \text{ раз}})$.

Из полученного в момент τ оптимального управляющего воздействия $u^*(\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau) = (u^*(\tau|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau), u^*(\tau+1|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau), \ldots, u^*(T-1|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau))$ применяем к системе $u^p(\tau) := u^*(\tau|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau)$. Переходим к решению задачи (3.5) в момент $\tau+1$, зная траекторию $\{u^p_{\tau+1}, \tilde{y}^p_{\tau+1}\}$. Таким образом, если существовало допустимое воздействие в момент τ, то гарантированно существует допустимое воздействие в момент $\tau+1$, причем значение критерия качества на каждом шагу не увеличивается.

3.1.1 Принцип разделимости

Многообещающим выглядит разделение задач наблюдения и управления, использованное в предыдущей главе. Продемонстрируем, как элегантно реализуется принцип разделимости в бихевиористском подходе.

Лемма 3.1 Пусть $\{u^p_\tau, y^p_\tau\}$ — некоторая фиксированная траектория системы (3.3) длины $\tau \ge n$. Тогда любая траектория $\{u^p_\tau, u, y^p_\tau, y\}$ длины T системы (3.3) однозначно представима в виде суммы траекторий $\{0, u, 0, y_0\}$ и

$\{u_\tau^p, 0, y_\tau^p, \hat{y}\}$ длины T, причем для фиксированного u определить неизвестные участки $y_0, \hat{y}$ можно следующим образом:
1. Найти некоторые решения $\hat{\alpha}, \alpha_0$ алгебраичеких уравнений

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

2. Вычислить $\hat{y} = Y_\tau^f \hat{\alpha}, \quad y_0 = Y_\tau^f \alpha_0$.

Доказательство. Поскольку длина τ исходной траектории не меньше размерности системы n, то, в силу модификации теоремы 1.2, однозначно определены и могут быть найдены в результате 1-2 выходные сигналы системы $\hat{y}, y_0$ для входных сигналов $0, u$ соответственно. Более того, $\hat{y}$ соответствует выходной траектории неуправляемой с момента τ системы, а y_0 — выходному сигналу номинальной системы из нулевого состояния в момент τ. Здесь нулевое состояние в момент τ неявно задают $\{u_\tau^p, y_\tau^p\} = \{0, 0\}$ — именно такую траекторию имеет система с нулевым начальным состоянием, а значит, и с нулевым состоянием в момент τ; с другой стороны, $\tau \geq n$ обеспечивает единственность этой траектории. $\square$

В связи с вышеизложенным, ограничение на выходные сигналы принимает вид $G_\tau(y_0(\tau) + \hat{y}(\tau)) \leq g_\tau$. Наложим на $y_0(\tau)$ суженное условие:

$$G_\tau y_0(\tau) \leq g_\tau - \chi(\tau), \tag{3.7}$$

где каждая компонента $\chi_i(\tau)$ соответствует наихудшей реализации состояния системы в момент τ, а именно является решением задачи линейного программирования

$$\chi_i(\tau) = \max_{\hat{\alpha}(\tau), \xi_\tau, \hat{y}(\tau)} G_{\tau i} \hat{y}(\tau), \tag{3.8}$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ \tilde{y}_\tau^p + \xi_\tau \\ 0 \\ \hat{y}(\tau) \end{pmatrix},$$

$$-\varepsilon \mathbb{1} \leq \xi_\tau \leq \varepsilon \mathbb{1}.$$

Задача (3.8) в компактной формулировке (исключается ξ_τ) имеет вид

$$\chi_i(\tau) = \max_{\hat{\alpha}(\tau)} G_{\tau i} Y_\tau^f \hat{\alpha}(\tau), \tag{3.9}$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}_\tau^p - \varepsilon \mathbb{1} \le Y_\tau^p \hat{\alpha} \le \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon \mathbb{1}.$$

Выполнение для y_0 суженного ограничения (3.7) очевидно влечет удовлетворение исходного ограничения на y для любой возможной реализации $\hat{y}$.

Детерминированная задача оптимального программного управления с суженными условиями на y_0 принимает следующий вид:

$$\min_{\alpha_0(\tau), u(\tau), y_0(\tau)} u(\tau)^T u(\tau), \tag{3.10}$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ y_0(\tau) \end{pmatrix},$$

$$G_\tau y_0(\tau) \le g_\tau - \chi(\tau),$$

$$u_{\min}(\tau) \le u(\tau) \le u_{\max}(\tau).$$

Снова переходим к эквивалентному, но более компактному виду, получаем

$$\min_{\alpha_0(\tau)} \alpha_0(\tau)^T {U_\tau^f}^T U_\tau^f \alpha_0(\tau), \tag{3.11}$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G_\tau Y_\tau^f \alpha_0(\tau) \le g_\tau - \chi(\tau),$$

$$u_{\min}(\tau) \le U_\tau^f \alpha_0(\tau) \le u_{\max}(\tau).$$

Получив решение $\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ задачи (3.11), вычисляем оптимальное управление $u^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = U_\tau^f \alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$. Из вычисленного $u^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = (u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p), \ldots, u^*(T-1|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p))$ подаем на вход системе $u^p(\tau) = u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$.

Таким образом, задача оптимального управления, решаемая в каждой временной точке $n \le \tau \le T-1$, свелась к нескольким задачам линейного программирования и одной выпуклой задаче квадратичного программирования.

3.2 Рекуррентная разрешимость

В данном разделе будут предоставлено теоретическое обоснование реализуемости предложенной схемы. В частности, следующая теорема доказывает рекуррентную разрешимость задач (3.8) и (3.10), решаемых в каждый момент времени $\tau = n, \ldots, T-1$.

В данном разделе используем обозначения предыдущего, лишь будем опускать для краткости траекторию $\{u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau\}$ — одну и ту же во всех обозначениях для момента τ, — как то $\alpha_0(\tau) = \alpha_0(\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau)$, $u^*(t|\tau) = u^*(t|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau)$ и все прочие. То же касаемо момента $\tau+1$ и траектории $\{u^p_\tau, u^*(\tau|\tau), \tilde{y}^p_\tau, \tilde{y}^p(\tau)\}$, которая реализуется при подаче управления $u^*(\tau|\tau)$ в момент τ. Как и ранее, символом * помечены оптимальные решения.

Теорема 3.1 Пусть в момент τ для неточной траектории $\{u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau\}$ разрешима каждая из задач (3.8). Далее, пусть разрешима соответствующая задача (3.10) с параметром $\chi(\tau)$, поставленным решениями задач (3.8). Тогда в момент $\tau+1$ для траектории $\{u^p_\tau, u^*(\tau|\tau), \tilde{y}^p_\tau, \tilde{y}^p(\tau)\}$ эти задачи также разрешимы. Более того,

$$\sum_{t=\tau+1}^{T-1} \left\| u^*(t|\tau+1, u^p_{\tau+1}, \tilde{y}^p_{\tau+1}) \right\|^2 \leq \sum_{t=\tau+1}^{T-1} \left\| u^*(t|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau) \right\|^2$$

Доказательство. На протяжении всего доказательства будут фигурировать четыре задачи: оптимального наблюдения (3.13) и управления (3.15) в момент τ, оптимального наблюдения (3.12) и управления (3.14) в момент $\tau+1$. Докажем, что из разрешимости (3.13),(3.15) следует разрешимость (3.12),(3.14).

$$\chi_i(\tau+1) = \max_{\hat{\alpha}(\tau+1)} G_{(\tau+1)i} Y^f_{\tau+1} \hat{\alpha}(\tau+1), \tag{3.12}$$

$$\begin{pmatrix} U^p_\tau \\ u(\tau) \\ U^f_{\tau+1} \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau+1) = \begin{pmatrix} u^p_\tau \\ u^*(\tau|\tau) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}^p_\tau - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y^p_\tau \hat{\alpha}(\tau+1) \leq \tilde{y}^p_\tau + \varepsilon \mathbb{1},$$

$$\tilde{y}^p(\tau) - \varepsilon \mathbb{1} \leq y(\tau) \hat{\alpha}(\tau+1) \leq \tilde{y}^p(\tau) + \varepsilon \mathbb{1}.$$

$$\chi_i(\tau) = \max_{\hat{\alpha}(\tau)} G_{\tau i} Y^f_\tau \hat{\alpha}(\tau), \tag{3.13}$$

$$\begin{pmatrix} U^p_\tau \\ u(\tau) \\ U^f_{\tau+1} \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u^p_\tau \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}^p_\tau - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y^p_\tau \hat{\alpha}(\tau) \leq \tilde{y}^p_\tau + \varepsilon \mathbb{1}.$$

$$\min_{\alpha_0(\tau+1)} \alpha_0(\tau+1)^T {U^f_{\tau+1}}^T U^f_{\tau+1}\alpha_0(\tau+1), \qquad (3.14)$$

$$\begin{pmatrix} U^p_\tau \\ u(\tau) \\ Y^p_\tau \\ y(\tau) \end{pmatrix} \alpha_0(\tau+1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G_{\tau+1} Y^f_{\tau+1}\alpha_0(\tau+1) \le g_{\tau+1} - \chi(\tau+1),$$

$$u_{\min}(\tau+1) \le U^f_{\tau+1}\alpha_0(\tau+1) \le u_{\max}(\tau+1).$$

$$\min_{\alpha_0(\tau)} \alpha_0(\tau)^T {U^f_\tau}^T U^f_\tau \alpha_0(\tau), \qquad (3.15)$$

$$\begin{pmatrix} U^p_\tau \\ Y^p_\tau \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G_\tau Y^f_\tau \alpha_0(\tau) \le g_\tau - \chi(\tau),$$

$$u_{\min}(\tau) \le U^f_\tau \alpha_0(\tau) \le u_{\max}(\tau).$$

Здесь и далее $u(\tau) = (u^d(\tau), u^d(\tau+1), \ldots, u^d(\tau+T^d-T))$, $y(\tau) = (y^d(\tau), y^d(\tau+1), \ldots, y^d(\tau+T^d-T))$.

Прежде всего, необходимо доказать разрешимость каждой из задач оптимального наблюдения (3.12) в момент $\tau+1$. Однако, уже на этом этапе придется задействовать задачу (3.15) оптимального управления в момент τ. Во-первых, будем использовать само решение $\alpha_0^*(\tau)$ этой задачи, которое удовлетворяет

$$\begin{pmatrix} U^p_\tau \\ u(\tau) \\ Y^p_\tau \\ y(\tau) \end{pmatrix} \alpha_0^*(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ u^*(\tau|\tau) \\ 0 \\ y_0^*(\tau|\tau) \end{pmatrix}, \qquad (3.16)$$

$$G_{\tau+1} Y^f_{\tau+1} \alpha_0^*(\tau) \le g_{\tau+1} - \chi(\tau+1). \qquad (3.17)$$

Во-вторых, понадобится оптимальное управление $U^f_\tau \alpha_0^*(\tau) = u^*(\tau)$, а точее, его хвост $u_0^c(\tau+1) = (u^*(\tau+1|\tau)^T, \ldots, u^*(T-1|\tau)^T)^T$. Для $u_0^c(\tau+1)$ сконструируем некоторое $\alpha_0^c(\tau+1)$, удовлетворяющее следующему равенству:

$$\begin{pmatrix} U^p_\tau \\ u(\tau) \\ Y^p_\tau \\ y(\tau) \\ U^f_{\tau+1} \end{pmatrix} \alpha_0^c(\tau+1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_0^c(\tau+1) \end{pmatrix}. \qquad (3.18)$$

Согласно Лемме 3.1, решение $\alpha_0^c(\tau+1)$ для (3.18) существует для всех возможных $u_0^c(\tau+1)$.

Теперь, располагая $\alpha_0^c(\tau+1)$ и $\alpha_0^*(\tau)$, докажем разрешимость задач оптимального наблюдения. Сдвинем переменную $\hat{\alpha}(\tau+1)$, относительно которой поставлены задачи оптимального наблюдения, на константу, перейдем к новой переменной $\Delta\alpha(\tau+1)$:

$$\hat{\alpha}(\tau+1) = \alpha_0^*(\tau) - \alpha_0^c(\tau+1) + \Delta\alpha(\tau+1).$$

С учетом того, что для $\alpha_0^*(\tau)$ выполняется (3.16), а $\alpha_0^c(\tau+1)$ удовлетворяет (3.18), из задач для определения $\chi(\tau+1)$, поставленных для $\hat{\alpha}(\tau+1)$, получаем следующие эквивалентные задачи относительно переменной $\Delta\alpha(\tau+1)$:

$$\chi_i(\tau+1) = G_{(\tau+1)i}Y^f_{\tau+1}(\alpha_0^*(\tau)-\alpha_0^c(\tau+1)) + \max_{\Delta\alpha(\tau+1)} G_{(\tau+1)i}Y^f_{\tau+1}\Delta\alpha(\tau+1), \quad (3.19)$$

$$\begin{pmatrix} U^p_\tau \\ u(\tau) \\ U^f_\tau \end{pmatrix} \Delta\alpha(t+1) = \begin{pmatrix} u^p_\tau \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\tilde{y}^p_\tau - \varepsilon\mathbb{1} \le Y^p_\tau \Delta\alpha(t+1) \le \tilde{y}^p_\tau + \varepsilon\mathbb{1}, \quad (3.21)$$

$$\tilde{y}^p(\tau) - y_0^*(\tau|\tau) - \varepsilon\mathbb{1} \le y(\tau)\Delta\alpha(t+1) \le \tilde{y}^p(\tau) - y_0^*(\tau|\tau) + \varepsilon\mathbb{1}. \quad (3.22)$$

Сравним задачи (3.19) для $\Delta\alpha(\tau+1)$ и (3.13) для $\hat{\alpha}(\tau)$: на $\Delta\alpha(\tau+1)$ наложено дополнительное ограничение (3.22), а целевые функции разнятся на константу.

Множество допустимых решений $\Delta\alpha(\tau+1)$ непустое. Его элементом является $\hat{\alpha}^p(\tau+1)$, соответствующий истинной траектории $\{u^p_\tau, 0, y^p_\tau, \hat{y}^p(\tau|\tau)\}$ согласно Лемме 3.1:

$$\begin{pmatrix} U^p_\tau \\ u(\tau) \\ Y^p_\tau \\ y(\tau) \\ U^f_{\tau+1} \end{pmatrix} \hat{\alpha}^p(\tau+1) = \begin{pmatrix} u^p_\tau \\ 0 \\ y^p_\tau \\ \hat{y}^p(\tau|\tau) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Действительно, для $\hat{\alpha}^p(\tau+1)$ ограничения (3.20), (3.21) очевидно удовлетворены, а (3.22) выполняется ввиду того, что по принципу разделимости $\hat{y}^p(\tau|\tau) = y^p(\tau) - y_0^*(\tau|\tau)$.

Поскольку множество допустимых решений $\hat{\alpha}(\tau)$ включает в себя множество допустимых решений $\Delta\alpha(\tau+1)$, и последнее не пусто, из существования оптимального решения $\hat{\alpha}^*(\tau)$ следует существование оптимального решения $\Delta\alpha^*(\tau+1)$, причем с учетом сдвига на константу целевой функции справедлива следующая оценка:

$$\chi(\tau+1) \le G_{\tau+1} Y^f_{\tau+1}(\alpha^*_0(\tau) - \alpha^c_0(\tau+1)) + \chi_{\tau+1}(\tau) \tag{3.24}$$

Итак, разрешимость задач оптимального оценивания доказана. Остается продемонстрировать, что множество допустимых решений $\alpha_0(\tau+1)$ в задаче оптимального управления (3.14) непусто — тогда эта выпуклая задача квадратичного программирования имеет решение. Покажем, что $\alpha^c_0(\tau+1)$ — допустимое решение. Уже по построению $\alpha^c_0(\tau+1)$ выполнены все условия, кроме условий на выходной сигнал:

$$G_{\tau+1} Y^f_{\tau+1} \alpha^c_0(\tau+1) \le g_{\tau+1} - \chi(\tau+1). \tag{3.25}$$

Воспользовавшись сначала (3.24), а затем (3.17), получаем

$$\begin{aligned} G_{\tau+1} Y^f_{\tau+1} \alpha^c_0(\tau+1) + \chi(\tau+1) \le{} & G_{\tau+1} Y^f_{\tau+1} \alpha^c_0(\tau+1) + \\ & + G_{\tau+1} Y^f_{\tau+1}(\alpha^*_0(\tau) - \alpha^c_0(\tau+1)) + \chi_{\tau+1}(\tau) = \\ & = G_{\tau+1} Y^f_{\tau+1} \alpha^*_0(\tau) + \chi_{\tau+1}(\tau) \le g_{\tau+1}, \end{aligned}$$

что доказывает (3.25). Наконец, поскольку решение $\alpha^c_0(\tau+1)$ допустимо,

$$\begin{aligned} \sum_{t=\tau+1}^{T-1} \left\| u^*(t|\tau+1, u^p_{\tau+1}, \tilde{y}^p_{\tau+1}) \right\|^2 \le{} & \alpha^c_0(\tau+1)^T (U^f_{\tau+1})^T U^f_{\tau+1} \alpha^c_0(\tau+1) = \\ & = \sum_{t=\tau+1}^{T-1} \left\| u^*(t|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau) \right\|^2, \end{aligned}$$

что завершает доказательство всех пунктов теоремы. □

Следствие 3.1 Если задачи оптимального оценивания (3.8) и управления (3.10) разрешимы в начальный момент времени $\tau = n$, то они разрешимы и в каждый из последующих моментов $\tau = n+1, \ldots, T-1$. При этом значение критерия качества τ

$$J(\tau) = \sum_{t=0}^{\tau-1} \left\| u^p(t) \right\|^2 + \sum_{t=\tau}^{T-1} \left\| u^*(t|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau) \right\|^2$$

является невозрастающей функцией.

Доказательство теоремы экстенсивно использует хвост $(u^*(\tau+1|\tau)^T, \ldots, u^*(T-1|\tau)^T)^T$ оптимального управления, полученного в предыдущей временной точке: не только стандартно, для текущей задачи оптимального управления, но и для предшествующего доказательства разрешимости задач оптимального оценивания. Это позволяет учесть взаимосвязь не только между соответствующими задачами предыдущего и текущего момента, но и между самими задачами текущего момента. В частности, помимо обоснования разрешимости, для задач оптимального оценивания приводится такая верхняя оценка решения $\chi(\tau+1)$, которая позже позмолит продемонстрировать допустимость управления $(u^*(\tau+1|\tau)^T, \ldots, u^*(T-1|\tau)^T)^T$.

В данной главе был предложен новый способ решения задачи, поставленной в предыдущей главе. Этот способ не требует знания реализации системы в пространстве состояний. Предложенный метод сводится к решению задач линейного и квадратичного программирования, базирующихся лишь на двух траекториях системы: априорной и наблюдаемой в процессе управления.

Доказано, что если в начальный момент управления эти задачи линейного и квадратичного программирования разрешимы, то соответсвующие задачи разрешимы и в каждый последующий момент, при этом значение критерия качества гарантированно не возрастает.

Задача решена в предположении, что траектория, измеряемая в процессе управления, неточна, но априорная траектория известна точно.

ГЛАВА 4

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Применим изложенный метод для управления следующей системой размерности $n = 3$ с одним входом и одним выходом:

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.8639 & 0.3075 & -0.2086 \\ -0.146 & 0.9265 & 0.245 \\ -0.1715 & -0.2195 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.1239 \\ -0.0847 \\ 0.1602 \end{pmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0.3 & 1.5 & -0.7 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1.4 \end{pmatrix} u(t), \quad t = 0, \ldots, T-1,$$

минимизируя критерий качества $\sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$ при гарантированном соблюдении ограничений $-1 \le u(t) \le 1, \quad -1 \le y(t) \le 1, \quad t = n, \ldots, T-1$. Момент начала управления такой же, как и размерность системы $n = 3$ — этого достаточно для неявного задания начального условия x_0. Горизонт планирования $T = 120$.

Как было отмечено в Замечании 3.2, длина априорной траектории T^d должна быть не меньше $(n+T)(m+1) - 1$, что в нашем случае, при $n = 3, m = 1$, означает $T^d \ge 2(3+T) - 1 = 245$. Именно такой, наименьшей подходящей длины, была предварительно сгенерирована зашумленная траектория $\{u^d, \tilde{y}^d\}$. Входные сигналы были сгенерированы как случайные числа, равномерно распределенные в $[-1, 1]$, а ошибки, добавляемые к "чистой" выходной траектории y^d, — как случайные числа, равномерно распределенные в $[-\varepsilon, \varepsilon], \quad \varepsilon = 0.002$.

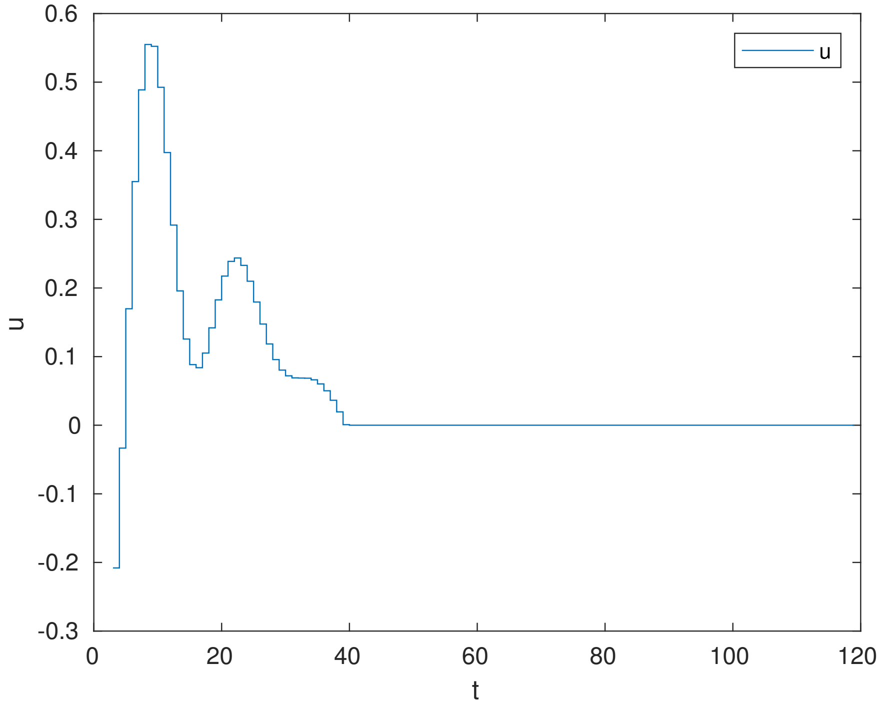
После таким же образом была сгенерирована траектория $\{u_3^p, \tilde{y}_3^p\}$, соответствующая движению системы до начала управления:

$$u_3^p = \begin{pmatrix} 0.11004849 \\ 0.59704522 \\ 0.43059520 \end{pmatrix}, y_3^p = \begin{pmatrix} 0.70244403 \\ -0.07057178 \\ 0.07171414 \end{pmatrix}.$$

Ниже приведены управление, выход и фазовая траектория, полученные в результате применения метода, предложенного в главе 3.

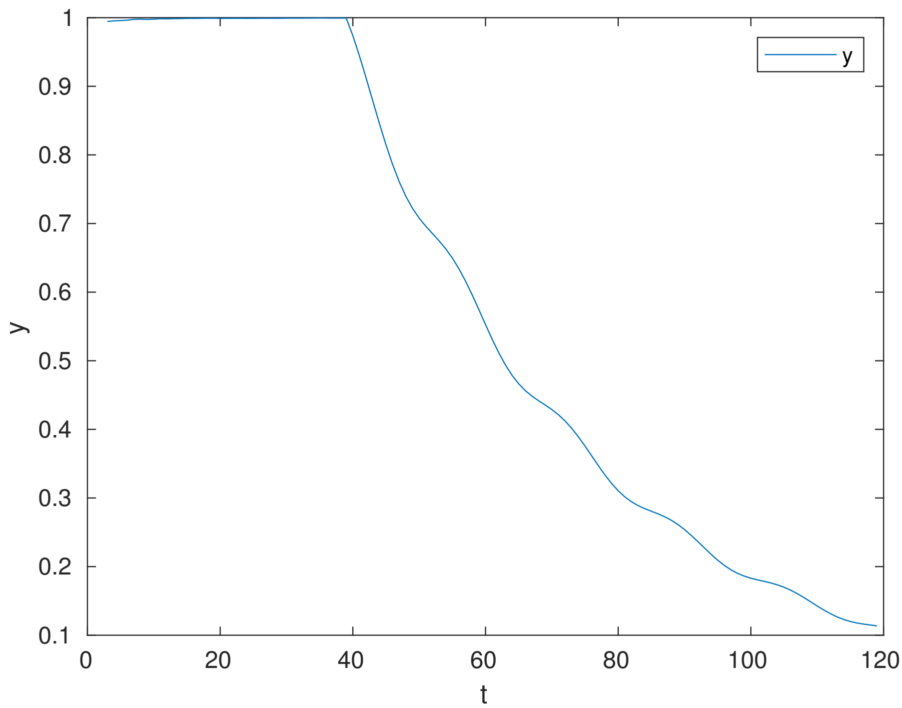
Значение критерия качества составляет 2.84904042 на первой итерации, 2.60124510 — на последней.

На рис. 4.3 точкой $\circ$ отмечено начальное положение, а звездочкой $*$ — конечное положение траектории.



u
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
0
20
40
60
80
100
120
t
u

Рис. 4.1.



y
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
20
40
60
80
100
120
t
y

Рис. 4.2.

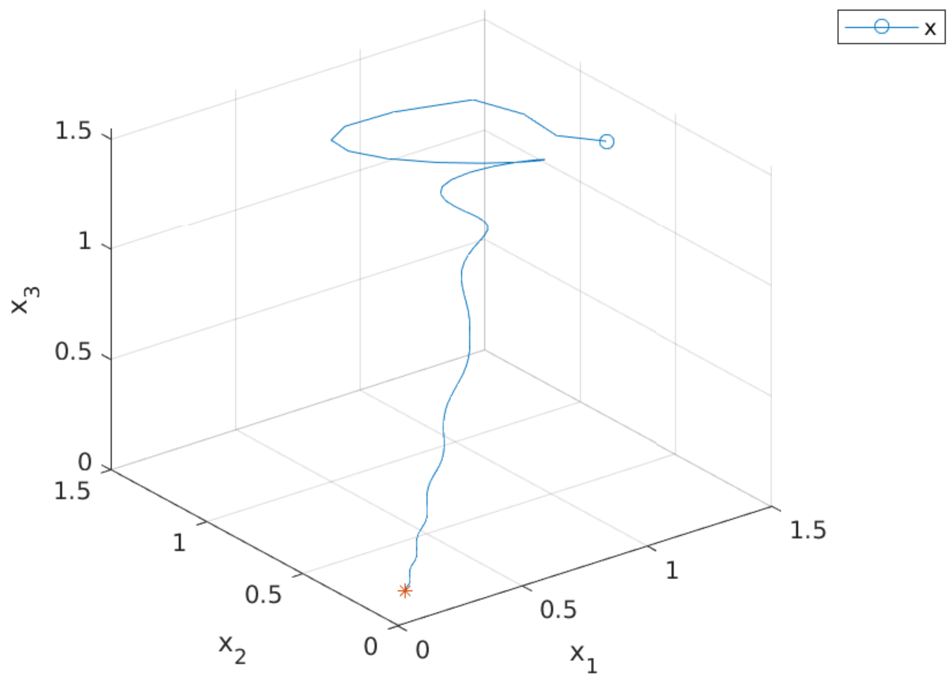


Рис. 4.3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной курсовой работе рассмотрена задача гарантирующего оптимального управления линейной стационарной системой в дискретном времени по неточным выходным сигналам. Для исследуемой задачи предложен метод решения, не использующий явной модели системы. Вместо модели полученный подход использует одну априорно известную конечную траекторию входных–выходных сигналов как неявную характеристику поведения системы. Ключевая идея, позволяющая добиться необходимых гарантий в условиях неточных измерений выходных сигналов в процессе управления, заключается в разделении задач оптимального оценивания и управления. В каждом моменте времени сперва решаются несколько задач оптимального оценивания, а затем — одна детерминированная задача оптимального программного управления.

Доказана рекуррентная разрешимость как задач оптимального оценивания, так и задач оптимального управления.

Эффективность предложенного метода проиллюстрирована численным примером для трехмерной системы с одним входном и одним выходом.

В настоящей работе предполагается, что априорная траектория системы точна. Однако, большой практический интерес представляет случай, когда выходные сигналы в априорной траектории также содержат ограниченную ошибку. В этом направлении планируется дальнейшее развитие результатов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института математики и механики УрО РАН, Т.10, №2, 2004. С. 33-57.

2 Berberich, J. A trajectory-based framework for data-driven system analysis and control / J. Berberich, F. Allgöwer // arXiv: 1903.10723. – 2019.

3 Berberich, J. Robust data-driven state-feedback design / J. Berberich, A. Romer, C. W. Scherer, F. Allgöwer // arXiv: 1909.04314. – 2019.

4 Berberich, J. Data-Driven Model Predictive Control with Stability and Robustness Guarantees / J. Berberich, J. Köhler, M. A. Müller, F. Allgöwer // arXiv: 1906.04679. – 2019.

5 Copp, D. Simultaneous nonlinear model predictive control and state estimation / D. Copp, J. Hespanha // Automatica. – 2016. – Vol. 77. – P. 143-154.

6 Coulson, J. Data-Enabled Predictive Control: In the Shallows of the DeePC / J. Coulson, J. Lygeros, F. Dörfler // 18th European Control Conference (ECC), Naples, Italy. – 2019. – P. 307-312.

7 De Persis, C. Formulas for data–driven control: Stabilization, optimality and robustness / C. De Persis, P. Tesi // arXiv: 1903.06842. – 2019.

8 Romer, A. One–shot verification of dissipativity properties from input–output data / A. Romer, J. Berberich, J. Köhler, F. Allgöwer // IEEE Control Systems Letters. – 2019. – Vol. 3, no.3. – P. 709-714.

9 Waarde, H.J. Data informativity: a new perspective on data-driven analysis and control / H. J. van Waarde, J. Eising, H. L. Trentelman, M. K. Camlibel // arXiv: 1908.00468. – 2019.

10 Willems, J. C. A note on persistency of excitation / J. C. Willems, I. Markovsky, P. Rapisarda, B. L. M. De Moor // Systems & Control Letters. – 2005. – Vol. 54. – P. 325-329.

11 Willems, J. C. Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems / IEEE Transactions on Automatic Control. – 1991. – Vol. 36, no 3. – P.259-294.