МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра методов оптимального управления

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ СИСТЕМАМИ БЕЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМЫ

Курсовая работа

Манжулиной Елизаветы Александровны
студента 3 курса,
специальность «прикладная математика»

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Курсовая работа, 24 с., 2 рис., 0 табл., XX источников

ЛИНЕЙНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ СИСТЕМА, УПРАВЛЕНИЕ ПО ДАННЫМ, ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ВЫХОДНЫЕ СИГНАЛЫ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ, НЕТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Целью работы является решение задачи оптимального управления по неточным выходным сигналам при условии гарантированного удовлетворения геометрических ограничений на выходные сигналы в случае отсутствия параметрической модели системы.

Объектом исследования является линейная стационарная система в дискретном времени.

В процессе работы был получен метод решения поставленной задачи, опирающийся на наблюдаемые траектории входного и выходного сигналов системы.

Новизна предложенного метода состоит в отсутствии шага параметрической идентификации системы, который обычно предшествует решению задачи управления в случае неизвестной системы.

Структура курсовой работы представлена четырьмя главами, где сначала приведены теоретические результаты, послужившие основой для данной работы, далее формулируется задача управления при наличии модели системы в пространстве состояний и рассматривается схожая задача в условиях отсутствия модели. Завершает работу численный пример, иллюстрирующий предложенный метод.

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире неумолимо возрастает размерность и общая сложность используемых систем. Моделирование многих процессов представляется чрезмерно трудоёмким, а построенаая модель зачастую слишком сложна и громоздка для практического использования В последнее время всё большую популярность набирают методы системного анализа и управления, базирующиеся не на достоверном знании внутренней организации системы, но лишь на её наблюдаемом поведении. С этим связан возросший интерес к так называемой поведенческой теории динамических систем.

В данной работе предлагается решение задачи оптимального управления линейной стационарной системой дискретного времени по неточным выходным сигналам при гарантированном соблюдении наложенных на выходные сигналы условий, не опирающееся на модель системы вовсе.

Работа структурирована следующим образом: глава 1 ознакомит читателя с основными релевантными результатами из поведенческой теории динамических систем, в главе 2 формулируется конкретная задача оптимального управления, вокруг которой сосредоточена данная работа, а также приводится метод её решения, опирающийся на известную минимальную реализацию системы в пространстве состояний. В главе 3 продолжается исследование поставленной задачи в случае отсутствия какого-либо явного параметрического представления системы, предлагается метод решения, базирующийся на одной лишь траектории системы. Эффективность предложенного метода иллюстрируется численным примером в разделе 4. Наконец, в заключении приводятся краткие выводы по результатам проведенной работы и предлагаются возможные направления дальнейших исследований.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПОВЕДЕНЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В этой главе мы приведём основные понятия поведенческой теории динамических систем, а также осветим последние результаты, полученные с помощью инструментов этой теории.

Прежде чем приступить к основной задаче данной главы, условимся о нетороых обозначениях, которые мы будем использовать на протяжении работы.

1.1 Основные обозначения

Через $[x, y]$ условимся обозначать матрицу, состоящую из векторов-столбцов x, y, тогда как (x, y) являет собой укороченную форму записи $[x^T, y^T]^T$, т.е. два столбца, склеенных в один.Будем использовать краткое обозначение u_t для вектора сигналов $u_t = (u(0), u(1), \ldots, u(t-1))$. Линейную оболочку столбцов матрицы A будем обозначать $colspan(A)$. Евклидову норму и $l_\infty-$норму x обозначаем через $\|x\|$ и $\|x\|_\infty$ соответственно.

1.2 Поведенческая теория линейных стационарных систем

Вместо того, чтобы, в традициях физики, отталкиваться от понимания внутренней организации системы, от детальных взаимосвязей её компонентов, можно концентрироваться на *поведении* системы, на её взаимодействии с окружением. Эта идея находит отражение в поведенческой теории систем (behavioral systems theory в западной литературе). В рамках этой теории система описывается не через набор дифференциальных или разностных уравнений для входных и выходных сигналов, но через её поведение — пространство всех возможных траекторий. Такой подход великолепно соотносится с нуждами растущего раздела системного анализа и управления, методы которого основаны прежде всего на собранных данных (data-based approaches в западной литературе).

В такой манере, следуя работам Willems в области поведенческой теории, определим динамическую систему, а затем высветим связи этого определения с одним из основных методов описания динамической системы — через пространство состояний.

Начнём с приведения основных положений поведенческой теории линейных стационарных систем, релевантных для нас в последующем, следуя работам Willems.

Определение 1.1 *Динамическую систему* определим как тройку $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$, где $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ - дискретная временная ось, $\mathbb{W}$ - пространство сигналов, $\mathcal{B} \subset \mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ - поведение.

В сущности, поведение представляет собой не что иное как множество всех возможных траекторий системы. На протяжении данной работы мы имеем дело именно с дискретными во времени системами. Более того, мы сконцентрируемся на линейных стационарных системах.

Определение 1.2 Динамическая система $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$ является *линейной*, если $\mathbb{W}$ - векторное пространство, $\mathcal{B}$ - линейное подпространство пространства $\mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$. Система является *стационарной*, если $\mathcal{B} \subset \sigma\mathcal{B}$, где $\sigma : \mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \to \mathbb{W}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ – сдвиг вперёд во времени, определённый как $(\sigma w)(t) = w(t+1)$, а $\sigma\mathcal{B} = \{\sigma w | w \in \mathcal{B}\}$.

Для всех систем, рассматриваемых нами, $\mathbb{W} = \mathbb{R}^{m+p}$, представление $m+p$ именно в виде суммы будет объяснено в последующем. Без ограничения общности, систему далее будем определять как её поведение $\mathcal{B}$.

Введём в рассмотрение множество всех возможных "обрезанных"траекторий длины T, $\mathcal{B}_T = \{w \in (\mathbb{R}^{m+p})^T \quad | \exists v \in \mathcal{B}, w(t) = v(t), 1 \leq t \leq T\}$. Такие траектории будем называть *конечными длины* T. Последовательность вида $w(t), w(t+1), \ldots, w(t+T-1)$ будем называть *окном длины* T.

Возникает естественный вопрос: насколько информативной может быть одна-единственная конечная траектория системы? Так, из линейности системы непосредственно следует, что линейная оболочка наблюдаемых нами окон длины t в траектории длины T является подмножеством всех возможных траекторий длины t. Существует ли условия, при которых верно обратное включение? В работе [5] доказано, что такие условия действительно существуют.

Первая составляющая – управляемость системы. Это привычное понятие определяется следующим образом.

Определение 1.3 Система $\mathcal{B}$ является *управляемой*, если для каждого $\mathbb{Z}_{\geq 0}, w^1 \in \mathcal{B}_T, w^2 \in \mathcal{B}$ существует $w \in \mathcal{B}$ и $T' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ такие, что $w(t) = w(t)^1$ для $0 \leq t \leq T$ $w(t) = w^2(t - T - T')$ для $t > T + T'$.

Другими словами, поведенческая система управляема, если любые две траектории могут быть склеены в некоторой конечной точке времени.

Вторая составляющая – наличие достаточно "богатой"компоненты $u \in \mathbb{R}^{m \times T}$ сигнала $w \in \mathbb{R}^{(m+p)\times T}$. Компоненту u будем будем именовать входной, а оставшуюся компоненту $y \in \mathbb{R}^{p \times T}$ сигнала $w = (u, y)$ — выходной.

Определение 1.4 Пусть $t, T \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $T \geq t$. Сигнал $u = (u(0), \cdots, u(T-1)) \in \mathbb{R}^{mT}$ является *устойчиво возбуждённым порядка* t, если соответствующая матрица Ганкеля

$$H_t(u) = \begin{pmatrix} u(0) & \cdots & u(T-t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(t-1) & \cdots & u(T-1) \end{pmatrix}$$

имеет полный строчный ранг.

Как мы убедимся далее, устойчиво возбуждённые сигналы достаточно высокого порядка возмущают систему таким образом, что выходные сигналы репрезентативны для поведения системы. Центральный результат работы [5] указывает, какого порядка возбуждённости достаточно.

Теорема 1.1 Рассмотрим управляемую систему $\mathcal{B}$ порядка $n(\mathcal{B})$. Пусть $T, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $w = (u, y) \in \mathcal{B}_T$. Тогдая для любого устойчиво возбуждённого порядка $t + n(\mathcal{B})$ сигнала u $colspan(H_t(w)) = \mathcal{B}_t$.

Последние результаты показывают, что для некоторых задач условие устойчивой возбуждённости можно ослабить [4], однако это направление пока лишь зарождается, тогда вокруг теоремы 1.1 уже накопилось достаточно солидных результатов.

Соотнесём поведенческую теорию с классическим подходом пространства состояний, следуя работам [2], [3].

Определение 1.5 *Траекторией* линейной системы G, минимальная реализация которой – четвёрка (A, B, C, D), будем называть такие $\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$, что существует некоторое исходное состояние x_0, для которого

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$
$$t = 0, \dots, T-1.$$

Понятие траектории системы на протяжении данной работы будет употребляться только в вышеобозначенном смысле – как траектория входных-выходных сигналов, вместо $\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$ будем зачастую пользоваться более лаконичной записью $\{u_T, y_T\}$.

Фундаментальная теорема 1.1 получила непосредственный перевод на язык классических моделей в пространстве состояний [2].

Теорема 1.2 Пусть $\{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$ траектория линейной системы G, причем u^d – устойчиво возбуждённый сигнал порядка $T+n$. Тогда $\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$ является траекторией G в том и только в том случае, когда для

$$\begin{pmatrix} H_T(u^d) \\ H_T(y^d) \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

существует решение $\alpha \in \mathbb{R}^{T^d-T+1}$.

Замечание 1.1 Важнейшие результаты данной главы налагают на рассматривуемую систему требование быть управляемой. Ограничением это, впрочем, для нас не является: в последующей работе будем пользоваться тем, что каждая линейая стационарная система допускает некоторую минимальную реализацию, являющуюся управляемой. Именно такой минимальной реализацией и будем пользоваться во всех разделах по умолчанию, что даст возможность использования вышеперечисленных результатов.

Теорема 1.1 привлекла интерес научного сообщества и породила множество замечательных результатов как в системном анализе, так и в оптимальном управлении. Были получены модификации метода MPC (Model Predictive Control), в которых собственно модель в явном виде отсутствует, динамика системы неявно задаётся её траекториями. В ряде работ представлены data-driven методики стабилизации систем. Что до системного анализа, то, к примеру, в представлен одношаговый метод проверки системы на диссипативность. Помимо того, некоторые результаты уже получены и для нелинейных систем, хотя в этом направлении продвижение в целом не столь велико. Помимо нелинейных систем, мало изучен в разрезе поведенческой методологии случай, когда траектории известны неточно.

В нашей работе мы представим ещё одну задачу управления, для которой применение теоремы 1.1 позволяет получить неклассический метод решения, не требующий явного параметрического описания системы.

ГЛАВА 2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРИ НАЛИЧИИ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

В данной главе мы сформулируем рассматриваемую задачу управления линейной системой с известной минимальной реализацией в пространстве состояний. Также будет приведён возможный метод её решения.

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную систему G дискретного времени, минимальная реализация которой (A, B, C, D).

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \tag{2.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$t = 0, \cdots, T.$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$ – состояние системы, управляющее воздействие и выходной сигнал в момент времени t соответственно.

На сигналы наложены следующие ограничения:

$$u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t), \quad t = 0, \cdots, T-1, \tag{2.2}$$

где $U = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \quad u_{min} \leq u \leq u_{max}\}$, $Y(t) = \{y \in \mathbb{R}^p | \quad G(t)y \leq g(t)\}$, $G(t) \in \mathbb{R}^{q \times p}, g(t) \in \mathbb{R}^q$.

В последующем мы считаем, нам доступны лишь неточно измеренные выходные сигналы $\tilde{y}(t)$, т.е. $\tilde{y}(t) = y(t) + \xi(t)$, где $y(t)$ – точное значение выходного сигнала в соответствии с 2.1, а $\xi(t)$ – ограниченная ошибка измерения в момент времени t.

Начальное состояние x_0 и величина погрешности $\xi(t)$ достоверно неизвестны, однако полагаем их в дальнейшем принадлежащими известным множествам: $x_0 \in \mathcal{X}_0, \xi(t) \in \varXi$, где $\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{min} \leq x \leq x_{max}\}$, $\varXi = \{\xi \in \mathbb{R}^p, \|\xi\|_\infty \leq \varepsilon\}$.

Задачей управления является минимизация следующего квадратичного критерия качества

$$\sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2 ,$$

на множестве допустимых управляющих воздействий $u(t) \in U$, гарантирующих соблюдение ограничений на выходные сигналы $y(t) \in Y(t)$ при *всех* возможных реализациях измерительных ошибок $\xi(t) \in \Xi$ и начального условия $x_0 \in X$.

Определение 2.1 Назовём состояние $x(\tau)$ *согласующимся* с траекторией $\{u_\tau, \tilde{y}_\tau\}$, если существуют такие допустимые начальное состояние $x_0 \in X_0$ и измерительные ошибки $\xi(t) \in \Xi, t = 0, \ldots, \tau - 1$, что

$$x(\tau) = x(\tau | x_0, u_\tau),$$

$$\tilde{y}(t) = Cx(t|x_0, u_t) + Du(t) + \xi(t), \quad t = 0, \ldots, \tau - 1,$$

где $x(t|x_0, u_t)$ обозначает состояние, в которое система 2.1 приходит в момент t, двигаясь из начальной точки $x(0) = 0$ под действием управляющих воздействий u_t. Обозначим как $X(\tau, u_\tau, y_\tau)$ множество всех состояний $x(\tau)$, согласующихся с $\{u_\tau, y_\tau\}$.

2.2 Возможный метод решения

Изложим стратегию оптимального управления, предложенную в [?? на что тут сослаться].

В каждый момент времени $\tau = 0, \ldots, T-$, обладая знанием траектории $\{u_\tau, y_\tau\}$, мы решаем следующую задачу оптимального управления по разомкнутому контуру:

$$\min_u \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2 , \tag{2.3}$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

$$u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t) \quad \forall x(\tau) \in X(\tau, u_\tau, \tilde{y}_\tau)$$

$$t = \tau, \cdots , T - 1.$$

Дабы подчеркнуть, что $\{u_\tau, y_\tau\}$ в этом случае обозначает апостериорную на момент τ, *прошлую* траекторию, тогда как $u(t), y(t), \tau \leq t \leq T$ означают возможные входные и выходные сигналы в будущем, в дальнейшем будем обозначать $\{u_\tau, y_\tau\}$ как $\{u^p_\tau, y^p_\tau\}$.

Пусть $u^0(t|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau), t = \tau, \ldots, T-1$ – оптимальное управляющее воздействие по выходному сигналу для задачи 2.3, тогда в момент τ мы применяем к системе лишь первое значение $u^p(\tau) = u^0(\tau|\tau, u^p_\tau, y^p_\tau)$, после чего переходим к следующей задаче управления, уже в момент $\tau+1$, на единицу уменьшившимся горизонтом планирования и обогатившимся знанием о поведении системы в лице более длинной траектории $\{u^p_{\tau+1}, \tilde{y}^p_{\tau+1}\}$.

Далее, воспользовавшись принципом разделения для линейных систем, мы разделяем задачу 2.3 на несколько задач оптимального наблюдения и одну задачу детерминированного оптимального управления.

Так, представив состояние $x(t)$ и выходной сигнал $y(t)$ в виде $x(t) = x_0(t) + \hat{x}(t)$, $y(t) = y_0(t) + \hat{y}(t)$, где $x_0(t), y_0(t)$ соотвенствуют состоянию и выходу номинальной системы с нулевым начальным состоянием

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(\tau) = 0$$

$$y_0(t) = Cx_0(t) + Du(t), \quad t = \tau, \ldots, T-1,$$

а $\hat{x}(t), \hat{y}(t)$ соответствуют состоянию и выходу неуправляемой системы с неопределённым начальным состоянием

$$\hat{x}(t) = A\hat{x}(t), \hat{x}(\tau) \in X(\tau, u_\tau, y_\tau)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t), t = \tau, \ldots, T-1,$$

позволяет рассмотреть ограничение на выходные сигналы 2.2 в виде

$$G(t)(y_0(t) + \hat{y}(t)) \leq g(t), \quad \forall x(\tau) \in X(\tau, u_\tau, y_\tau)$$

и влечёт естественное ужесточённое условие на $y_0(t)$, удовлетворение которого будет гарантировать допустимость соответствующего управляющего воздействия:

$$y_0(t) \in Y_0(t|\tau) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \leq g(t) - \xi(t|\tau)\}, \tag{2.4}$$

где каждая компонента вектора $\xi(t|\tau)$ соответствет наихудшей реализации состояния $x(\tau)$:

$$\xi_i(t|\tau) = \max_z G_i(t)\hat{y}(t), \tag{2.5}$$

$$\hat{x}(s+1) = A\hat{x}(s), \hat{x}(\tau) = z,$$

$$y(s) = C\hat{x}(s), s = \tau, \ldots, t,$$

$$z \in X(\tau, u_\tau, y_\tau),$$

где $G_i(t)$ обозначает $i-$ю строку матрицы $G(t)$.

После вычисления всех оценок $\chi(t), t = \tau, \ldots, T-1$, оптимальное управляющее воздействие получаем как решение следующей детерминированной задачи оптимального управления:

$$\min_u \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2, \tag{2.6}$$

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu(t), x_0(\tau) = 0,$$

$$y_0(t) = Cx_0(t) + Du(t),$$

$$u(t) \in U, y_0(t) \in Y_0(t|\tau),$$

$$t = \tau, \ldots, T-1.$$

В настоящей главе мы сформулировали изучаемую задачу оптимального гарантирующего управления линейной стационарной системой дискретного времени по неточным выходным сигналам. Рассмотрена стратегия построения оптимальных обратных связей по выходу в реальном времени. Было продемонстрировано, как данная задача естественным образом разделяется на несколько задач оптимального наблюдения и одну детерминированную задачу оптимального управления.

ГЛАВА 3

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ОТСУТСТВИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

В данной главе мы рассматриваем задачу из предыдущей главы в условии отсутствия заранее известной реализации системы в пространстве состояний. Классический подход в подобных ситуациях состоит в предварительной идентификации системы и последующем решении задачи уже имеющимся способом, основанным на знании модели. Однако, такой подход не всегда целесообразен. Нами будет предложен альтернативный способ, не нуждающийся в явном параметрическом представлении системы вовсе. Основой нам послужит поведенческий подход к динамическим системам, изложенный в главе 1.

3.1 Постановка задачи по сгенерированным данным

Будем считать, что наши сведения о линейной системе G сводятся к верхней оценке её размерности n и одной предварительно сгенерированной траектории $\{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$, причём эта траектория измерена точно. Что до траекторий $\{u(0), u(1), \ldots, u(\tau-1), y(0), y(1), \ldots, y(\tau-1)\} = \{u_\tau, y_\tau\}$ в момент τ в процессе управления системой, их будем считать известными с точностью до ограниченной ошибки: нам доступны лишь $\{u_\tau, \tilde{y}_\tau\}$, где $\tilde{y}(t) = y(t) + \xi(t), t = 0, \ldots, \tau - 1$.

Задачей, подобно предыдущему пункту, ставится минимизация квадратичного критерия качества

$$\sum_{\tau=t}^{T-1} \|u(t)\|^2$$

при гарантированном соблюдении линейных условий

$$G(t)y(t) \leq g(t), \quad u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}, t \leq \tau \leq T-1$$

на входные и выходные сигналы, где

$$t$$

— момент начала контроля системы.

Продемонстрируем, как априорная траектория $\{u^d, y^d\}$ при определённых условиях может иметь ту же информационную ценность, что и модель системы, в случае её наличия.

Теорема 1.1 в непосредственно приведённой формулировке позволяет проверять любую траекторию фиксированной длины на принадлежность системе. В нашем случае стоит обратная задача: дабы определить, допустимо ли конкретное управляющее воздействие в конкретный момент времени, хотелось бы уметь в некотором смысле симулировать систему.

Модификацию 1.1 можно использовать для генерации множества возможных траекторий $\{u_T, y_T\}$ длины T с некоторой фиксированной начальной частью $\{u^p_\tau, y^p_\tau\}$, которую мы будем именовать "прошлой"частью длины τ. Нефиксированную часть траектории $\{u(\tau), \ldots, u(T-1), y(\tau), \ldots, y(T-1)\}$ будем обозначать $\{u^f_\tau, y^f_\tau\}$, и обращаться к ней как к "будущей"части траектории. Соответствующим образом будем делить на "прошлое"и "будущее"для момента τ и компоненты векторов u, y

$$u = \begin{pmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(\tau-1) \\ \hline u(\tau) \\ \vdots \\ u(T-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^p_\tau \\ \hline u^f_\tau \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(\tau-1) \\ \hline y(\tau) \\ \vdots \\ y(T-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^p_\tau \\ \hline y^f_\tau \end{pmatrix},$$

и строки матриц Ганкеля для априорной траектории

$$H_T(u^d) = \left(\begin{array}{ccc} u^d(0) & \cdots & u^d(T^d-T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(\tau-1) & \cdots & u(\tau-1+T^d-T) \\ \hline u^d(\tau) & \cdots & u(\tau+T^d-T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(T-1) & \cdots & u^d(T^d-1) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} U^p_\tau \\ U^f_\tau \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$H_T(y^d) = \left(\begin{array}{ccc} y^d(0) & \cdots & y^d(T^d-T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(\tau-1) & \cdots & y(\tau-1+T^d-T) \\ \hline y^d(\tau) & \cdots & y(\tau+T^d-T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(T-1) & \cdots & y^d(T^d-1) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} Y^p_\tau \\ Y^f_\tau \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

Согласно теореме 1.2, $\{u_\tau^p, u_\tau^f, y_\tau^p, y_\tau^f\}$ является траекторией системы G тогда и только тогда, когда у уравнения

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u_\tau^f \\ y_\tau^f \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

есть решение $\alpha \in \mathbb{R}^{T^d - T + 1}$. Посему для построения возможных траекторий можно воспользоваться следующим алгоритмом.
Шаг 1. Найти некоторое решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u_\tau^f \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Шаг 2. Вычислить $y_\tau^f = Y_\tau^f \alpha$. Получили одну из возможных траекторий.

Замечание 3.1 Очевидно, множество решений α всегда не пусто, а вот для единственности решения, которая представляет особый практический интерес, нужно наложить некоторые условия. Поскольку для линейной системы размерности n траектория длины n однозначно определяет начальное состояние, то для обеспечения единственности достаточно потребовать $\tau \geq n$. Потому в дальнейшем полагаем, что начало управления $t \geq n$ — это своего рода неявный аналог явного граничения $x_0 \in X_0$ в постановке задачи при известной модели.

Таким образом, вместо явного задания динамики системы моделью в пространстве состояний, мы пользуемся неявным описанием вида 3.3 поведения системы, начальное состояние системы также в нашем случае фиксируется неявно.

Используем ту же стратегию управления, что и в предыдущем пункте, а именно, в каждый момент времени $t \leq \tau \leq T$ мы решаем следующую задачу оптимального управления по разомкнутому контуру:

$$\min_u u^T u \tag{3.5}$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

$$\tilde{y}^p_\tau = y^p_\tau + \xi_\tau, \tag{3.7}$$

$$G_\tau Y^f_\tau \alpha \le g_\tau \quad \forall\alpha, \quad -\varepsilon\mathbb{1} \le \xi_\tau \le \varepsilon\mathbb{1}, \tag{3.8}$$

где матрица

$$G_\tau = \left(\begin{array}{c|c|c|c} G(\tau) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & G(\tau+1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & G(T-1) \end{array}\right),$$

вектор $g_\tau = (g(\tau), g(\tau+1), \cdots, g(T-1))$.

Из полученного в момент τ оптимального управляющего воздействия $u^0 = (u^0(\tau), u^0(\tau+1), \dots, u^0(T-1))$ мы применяем к системе $u^p(\tau) = u^0(\tau)$. Переходим к решению задачи 3.5 в момент $\tau+1$, зная траекторию $\{u^p_{\tau+1}, \tilde{y}^p_{\tau+1}\}$. Таким образом, если существовало допустимое воздействие в момент τ, то гарантировано существует допустимое воздействие в момент $\tau+1$, причём значение критерия качества на каждом шагу не увеличивается.

Многообещающим выглядит разделение наблюдения и управления, использованное в предыдущем разделе. Продемонстрируем, как элегантно реализуется принцип разделения в поведенческой манере.

Лемма 3.1 Пусть $\{u^p_\tau, y^p_\tau\}$–некоторая траектория системы 2.1 длины $\tau \ge n$. Тогда любая траектория $\{u^p_\tau, u, y^p_\tau, y\}$ длины T системы 2.1 однозначно представима в виде суммы траекторий $\{0, u, 0, y_0\}$ и $\{u^p_\tau, 0, y^p_\tau, \hat{y}\}$ длины T, причём определить неизвестные участки $y_0, \hat{y}$ можно следующим образом: Шаг 1. Найти некоторое решение алгебраичеких уравнений

$$\begin{pmatrix} U^p_\tau \\ Y^p_\tau \\ U^f_\tau \end{pmatrix} \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} u^p_\tau \\ y^p_\tau \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U^p_\tau \\ Y^p_\tau \\ U^f_\tau \end{pmatrix} \alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Шаг 2. Вычислить $\hat{y} = Y^f_\tau \hat{\alpha}$, $y_0 = Y^f_\tau \alpha_0$

Доказательство. Поскольку длина τ исходной траектории не меньше размерности системы n, то, как уже было показано выше, однозначно определены выходы системы $\hat{y}, y_0$ для входных сигналов $0, u$ соответственно, причём $\hat{y}$ соответствует выходной траектории неуправляемой с момента τ системы, а y_0 – номинальной выходной траектории из нулевого состояния в момент τ (нулевое состояние в момент τ неявно задают $\{u^p_\tau, y^p_\tau\} = \{0, 0\}$ – именно такую траекторию имеет система с нулевым начальным состоянием, а значит, и с нулевым состоянием в момент τ; с другой стороны, $\tau \ge n$ обеспечивает единственность этой траектории).

В связи с вышеизложенным, ограничение на выходные сигналы принимает вид $G_\tau(y_0 + \hat{y}) \leq g_\tau$. Наложим на y_0 более жёсткое условие: $G_\tau y_0 \leq g_\tau - \chi(\tau)$, где $\chi_i(\tau)$ соответствует наихудшей реализации состояния системы в момент τ, а именно является решением задачи 3.10 линейного программирования.

$$\chi_i(\tau) = \max_{\hat{\alpha},\xi_\tau} G_{\tau i}\hat{y} \tag{3.10}$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ \tilde{y}_\tau^p + \xi_\tau \\ 0 \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

$$-\varepsilon\mathbb{1} \leq \xi_\tau \leq \varepsilon\mathbb{1}$$

Что, в более компактной формулировке, являет собой задачу

$$\chi_i(\tau) = \max_{\hat{\alpha}} G_{\tau i} Y_\tau^f \hat{\alpha} \tag{3.11}$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{y}_\tau - \varepsilon\mathbb{1} \leq Y_\tau^p \hat{\alpha} \leq \tilde{y}_\tau + \varepsilon\mathbb{1}$$

Удовлетворение y_0 ужесточённого ограничения автоматически влечёт удовлетворение исходного ограничения для любой возможной реализации $\hat{y}$.

Определение 3.1 *Уровнем ошибки* в задаче 3.11 будем называть ε, а *номинальной задачей наблюдения при уровне ошибки* ε будем называть задачу 3.11 для истинной траектории, т.е. для случая $\tilde{y}_\tau = y_\tau$.

Очевидно, если задача 3.11 разрешима при любой покомпонентно ограниченной ε ошибке, то должна быть разрешима номинальная задача. Ещё один результат, касающийся вопроса гарантированной разрешимости приведём ниже.

Лемма 3.2 Если номинальная задача наблюдения при уровне ошибки ε разрешима, то для любого неточного выходного сигнала $\tilde{y}_\tau = y_\tau + \xi_\tau$, где ошибка ограничена поэлементно $\|\xi_\tau\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ соответствующая задача3.11 также имеет решение.

Доказательство. Для любого $\tilde{y}_\tau = y_\tau + \xi_\tau$ с ограниченной ошибкой $\|\xi_\tau\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ задача 3.11 имеет те же самые целевую функцию и ограничения в виде равенств, а также не менее сильные ограничивающие неравенства:

$$y_\tau - \varepsilon\mathbb{1} \le \tilde{y}_\tau - \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{1} \le Y_\tau^p\hat{\alpha} \le \tilde{y}_\tau + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{1} \le y_\tau + \varepsilon\mathbb{1}.$$

Задача с ужесточёнными условиями на y_0 принимает следующий вид

$$\min_{\alpha_0} u^T u \tag{3.12}$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$G_\tau y_0 \le g_\tau - \chi(\tau)$$

Снова переходим к эквивалентному, но более компактному виду, получаем

$$\min_{\alpha_0} \alpha_0^T {U_\tau^f}^T U_\tau^f \alpha_0 \tag{3.13}$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \end{pmatrix} \alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G_\tau Y_\tau^f \alpha_0 \le g_\tau - \chi(\tau)$$

Таким образом, задача оптимального управления, решаемая в каждой врменной точке $t \le \tau \le T-1$, свелась к нескольким задачам линейного программирования и одной выпуклой задаче квадратичного программирования.

3.2 Недетерминированный случай: априорные измерения неточны

Рассмотрим случай, когда и априорные измерения содержат некоторую ошибку, т.е. $\tilde{y}^d = y^d + \xi^d$.

Тогда $\tilde{Y}^p_\tau = Y^p_\tau + \varXi^p_\tau$, $\tilde{Y}^f_\tau = Y^f_\tau + \varXi^f_\tau$, где

$$\begin{pmatrix} \varXi^p_\tau \\ \varXi^f_\tau \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} \xi(0) & \cdots & \xi(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi(\tau - 1) & \cdots & \xi(\tau - 1 + T^d - T) \\ \hline \xi(\tau) & \cdots & y(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi(T-1) & \cdots & y(T^d - 1) \end{array}\right) = H_T(\xi^d)$$

В соответствии с этим наша задача оптимальной оценки 3.10 перепишется как

$$\chi_i(\tau) = \max_{\hat{\alpha}, \xi_\tau, \xi^d} G_{\tau i} \hat{y} \tag{3.14}$$

$$\begin{pmatrix} U^p_\tau \\ Y^p_\tau + \varXi^p_\tau \\ U^f_\tau \\ Y^f_\tau + \varXi^f_\tau \end{pmatrix} \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} u^p_\tau \\ y_\tau + \xi_\tau \\ 0 \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

$$-\varepsilon \mathbb{1} \leq \xi_\tau \leq \varepsilon \mathbb{1}$$

$$-\varepsilon \mathbb{1} \leq \xi^d \leq \varepsilon \mathbb{1}$$

Эта задача являет собой следующую относительно переменной $\kappa = (\hat{\alpha}, \xi^d)$ задачу с квадратичной целевой функцией и квадратичными ограничениями.

.... Если будем в принципе включать в работу этот раздел, распишу подробно все матрицы для этой задачи. Она невыпуклая, но иногда правдоподобно метод внутренней точки у меня срабатывал.

ГЛАВА 4

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Применим изложенный метод для управления системой

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), t = 0, \ldots, T$$

размерности $n = 3$ с одним входом и одним выходом, ограничениями $-1 \leq u(t) \leq 1, \quad -1 \leq y(t) \leq 1, \quad t = \tau, \ldots, T$. Момент начала управления $\tau = n = 3$, горизонт планирования $T = 11$. Длина априорной траектории T^d должна быть не меньше $2(n+T) = 28$, дабы удовлетворить требование устойчивой возбуждённости порядка 28.

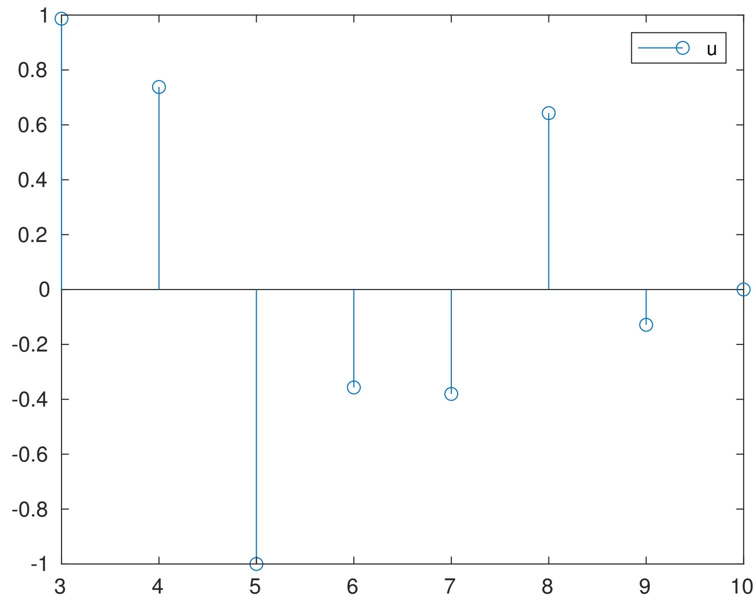
Сначала были сгенерированы матрицы A, B, C, D, априорная траектория $\{u^d, y^d\}$ минимальной достаточной длины $T^d = 2(n+T) = 28$ и начало управляемой траектории $\{u_2^p, y_2^p\}$ таким образом, что при $\varepsilon = 0.002$ номинальная задача оптимального наблюдения 3.11 решаема. Это даёт нам гарантию того, что для любых векторов ошибок измерения, ограниченных покомпонентно числом $\frac{\varepsilon}{2} = 0.001$ задача наблюдения 3.11 также будет иметь решение, согласно Лемме 3.2. И действительно, во всех 100 случайным образом сгенерированных векторов ошибок, компоненты которых равномерно распределены в $[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$, как задача оптимального наблюдения так и задача оптимального управления имели решение. А вот уже при ошибках, равномерно распределённых в $[-\varepsilon, \varepsilon]$, из 100 экспериментов 96 были успешны – что, впрочем, также хороший показатель для случаев,где приведённая в Лемме 3.2 оценка не даёт никаких гарантий.

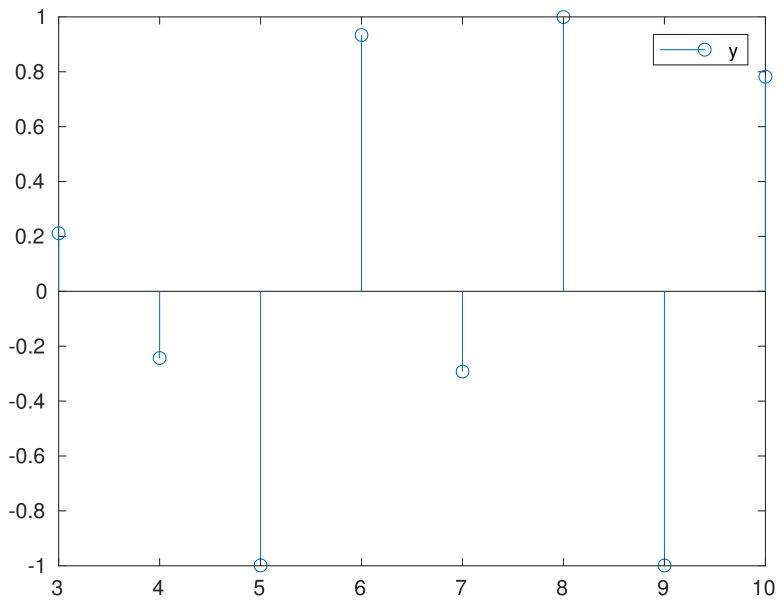
Ниже приведены графики входной и выходной частей траектории для одного из этих 100 экспериментов, в котором сгенерированы следующие данные:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.3 & -1.4 & -1.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1.5 & 1.1 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix},$$

$$u_3^p = \begin{pmatrix} 0.548790107621063 \\ 0.113517729294018 \\ 0.896876747586256 \end{pmatrix}, y_3^p = \begin{pmatrix} -1.766082539002111 \\ -0.170898268737663 \\ -1.445062715844881 \end{pmatrix}$$





Значение критерия качества составляет 4.341312541105730 на первой итерации, 4.338581216206245 – на последней.

.... Вопрос: надо ли включать в приложение листинг программы?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной курсовой работе рассмотрена задача гарантирующего оптимального управления линейной стационарной системой в дискретном времени по неточным выходным сигналам. Для исследуемой задачи предложен метод решения, не использующий явной модели системы. Вместо модели полученный подход использует одну априорно известную окнечную траекторию входных-выходных сигналов как неявную характеристику поведения системы. Ключевая идея, позволяющая добиться необходимых гарантий в условиях неточных измерений выходных сигналов в процессе управления, заключается в разделении задач оптимального наблюдения и управления. Предложенная стратегия двухстадийна: для каждого момента времени на первой стадии решаем несколько задач оптимального наблюдения, а на второй стадии – одну детерминированную задачу оптимального управления.

Если задача имеет решение при любых реализациях ошибок, ограниченных покомпонентно ε, то предложенный метод гарантированно найдёт решение на первой стадии. Эффективность предложенного метода проиллюстрирована численным примером для трехмерной системы с одним входном и одним выходом.

В настоящей работе предполагается, что априорная траектория системы точна. Однако, большой практический интерес представляет случай, когда выходные сигналы в априорной траектории также содержат ограниченную ошибку.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института матема-тики и механики УрО РАН, Т.10, №2, 2004. С. 33-57.

2 Berberich, J. A trajectory-based framework for data-driven system analysis and control / J. Berberich, F. Allgöwer // arXiv: 1903.10723 – 2019

3 Coulson, J. Data-Enabled Predictive Control: In the Shallows of the DeePC / J. Coulson, J. Lygeros and F. Dörfler // 18th European Control Conference (ECC), Naples, Italy – 2019. – P. 307-312

4 Waarde, H.J. Data informativity: a new perspective on data-driven analysis and control / Henk J. van Waarde and Jaap Eising and Harry L. Trentelman and M. Kanat Camlibel // arXiv: 1908.00468 – 2019

5 J. C. Willems, I. Markovsky, P. Rapisarda and B. L. M. De Moor A note on persistency of excitation / J. C. Willems, I. Markovsky, P. Rapisarda and B. L. M. De Moor // Systems & Control Letters – 2005. – Vol. 54. – P. 325-329