БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра методов оптимального управления

Отчет
о прохождении преддипломной практики

студентки 4 курса
Манжулиной Елизаветы
Александровны,
специальность
«прикладная математика»

Руководитель практики:
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Минск 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире неумолимо возрастает размерность и общая сложность систем управления. Моделирование многих процессов представляется чрезмерно трудоемким, а построенная модель зачастую слишком сложна и громоздка для практического использования. В последние годы все большую популярность набирают методы системного анализа и управления, базирующиеся не на достоверном знании внутренней организации системы (ее модели), но лишь на ее наблюдаемом поведении (измеренных выходных сигналах). В литературе (см., например, [7]) новые методы получили название data-driven control methods, т.е. методы управления на основе данных. Настоящая работа примыкает к направлению в рамках теории управления на основе данных, истоки которого находятся в поведенческой (бихевиористской) теории динамических систем. В рамках этой теории будем опираться в основном на результаты работы [11]и на развитие этих результатов в [2] для описания систем в пространстве состояний. В качестве примеров успешного использования результатов [2] отметим работы по стабилизации линейных стационарных систем [3, 4, 8], а также одношаговый метод проверки системы на диссипативность [9]. Некоторые результаты получены и для нелинейных систем [6, 8], хотя в этом направлении продвижение не столь велико.

В данной работе предлагается решение задачи оптимального гарантированного управления линейной стационарной дискретной системой по неточным измерениям выходных сигналов и при наличии ограничений, в формулировке которой собственно модель в явном виде отсутствует, а динамика системы неявно задается данными априорного наблюдения.

Работа структурирована следующим образом: в главе 1 формулируется конкретная задача оптимального управления линейной системой, вокруг которой сосредоточена данная работа, а также приводится метод ее решения, опирающийся на известную минимальную реализацию системы в пространстве состояний. В главе 2 кратко приводятся результаты исследования поставленной задачи в случае отсутствия какого-либо явного параметрического представления системы, предлагается метод решения, базирующийся на измерениях в одном единственном процессе управления. Эффективность предложенного метода иллюстрируется численными примерами в главе 3. Наконец, в заключении приводятся краткие выводы по результатам проведенной работы.

ГЛАВА 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРИ НАЛИЧИИ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

В данной главе будет сформулирована рассматриваемая задача оптимального управления по выходу линейной системой с известной минимальной реализацией в пространстве состояний и приведен один из возможных методов ее решения.

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему G, минимальная реализация (A, B, C, D) которой известна:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

$$t = 0, \dots, T-1.$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$ — состояние системы, управление и выходной сигнал в момент времени t, соответственно.

На управляющие и выходные сигналы наложены следующие ограничения:

$$u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \tag{1.2}$$

где множество доступных значений управления и множество допустимых выходных сигналов имеют вид $U = \{u \in \mathbb{R}^m \ : u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}$, $Y(t) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \leq g(t)\}$, $G(t) \in \mathbb{R}^{q\times p}, \quad g(t) \in \mathbb{R}^q$.

В последующем будем считать, что в момент времени τ доступны лишь неточные измерения выходных сигналов $\tilde{y}^p(t) = y^p(t) + \xi(t)$, $t = 0, \dots, \tau-1$, где $y^p(t)$ — точное значение выходного сигнала в соответствии с (1.1), а $\xi(t)$ — ограниченная ошибка измерения в момент времени $t = 0, \dots, \tau - 1$. Верхний индекс p подчеркивает, что измеренные сигналы относятся к конкретной "прошлой" (past) траектории.

Начальное состояние x_0 и величина погрешности $\xi(t)$ достоверно неизвестны, однако полагаем их в дальнейшем принадлежащими известным множествам: $x_0 \in \mathcal{X}_0$, $\xi(t) \in \varXi$, где $\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$, $\varXi = \{\xi \in \mathbb{R}^p : \|\xi\|_\infty \leq \varepsilon\}$.

Поставим задачу о минимизации следующего квадратичного критерия качества

$$J(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$$

на множестве доступных управляющих воздействий $u(t) \in U$, гарантирующих выполнение ограничений на выходные сигналы $y(t) \in Y(t)$ при *всех* возможных реализациях ошибок $\xi(t) \in \Xi$ и начального состояния $x_0 \in X$.

Определение 1.1 Назовем состояние $x(\tau)$ *согласующимся* с траекторией $\{u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau\}$, если найдутся такие допустимые начальное состояние $x_0 \in X_0$ и ошибки измерения $\xi(t) \in \Xi, \quad t = 0, \ldots, \tau - 1$, что

$$x(\tau) = x(\tau | x_0, u^p_\tau),$$

$$\tilde{y}^p(t) = Cx(t|x_0, u^p_t) + Du^p(t) + \xi(t),$$
$$t = 0, \ldots, \tau - 1,$$

где $x(t|x_0, u^p_t)$ — состояние, в которое система (1.1) приходит в момент t, двигаясь из начальной точки $x(0) = x_0$ под воздействием управления u^p_t.

Обозначим через $X(\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau)$ множество всех состояний $x(\tau)$, согласующихся с $\{u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau\}$.

1.2 Метод решения

Изложим стратегию оптимального управления в поставленной задаче, предложенную в [1].

В каждый момент времени $\tau = 0, \ldots, T - 1$, обладая знанием неточной траектории $\{u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau\}$, решаем следующую задачу оптимального программного управления:

$$\min_u \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2, \tag{1.3}$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

$$u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t) \quad \forall x(\tau) \in X(\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau),$$

$$t = \tau, \ldots, T-1.$$

Пусть $u^*(t|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau), t = \tau, \ldots, T-1,$ — оптимальное управление в задаче (1.3). Тогда в момент τ подаем на вход лишь первое значение

$$u^p(\tau) = u^*(\tau|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau),$$

после чего переходим к следующей задаче оптимального программного управления (1.3), сформулированной уже в момент $\tau+1$, на единицу уменьшившимся горизонтом планирования и обогатившимся знанием о поведении системы в лице более длинной траектории $\{u^p_{\tau+1}, \tilde{y}^p_{\tau+1}\}$.

Далее, воспользовавшись принципом разделимости процессов управления и наблюдения для линейных систем, разделяем решение задачи (1.3) на решение ряда задач оптимального наблюдения и одной задачи детерминированного оптимального управления.

Так, представив состояние $x(t)$ и выходной сигнал $y(t)$ в виде $x(t) = x_0(t) + \hat{x}(t)$, $y(t) = y_0(t) + \hat{y}(t)$, где $x_0(t), y_0(t)$ соответствуют состоянию и выходу номинальной системы с тривиальным начальным состоянием

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(\tau) = 0,$$

$$y_0(t) = Cx_0(t) + Du(t), \quad t = \tau, \ldots, T-1,$$

а $\hat{x}(t), \hat{y}(t)$ соответствуют состоянию и выходу неуправляемой системы с неопределенным начальным состоянием

$$\hat{x}(t) = A\hat{x}(t), \quad \hat{x}(\tau) \in X(\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau),$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \quad t = \tau, \ldots, T-1,$$

можем рассмотреть ограничение на выходные сигналы (1.2) в виде

$$G(t)(y_0(t) + \hat{y}(t)) \leq g(t), \quad \forall x(\tau) \in X(\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau),$$

что влечет естественное суженное условие на $y_0(t)$, удовлетворение которого будет гарантировать допустимость выходного сигнала $y(t)$:

$$y_0(t) \in Y_0(t|\tau) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \leq g(t) - \chi(t|\tau)\}, \tag{1.4}$$

где каждая компонента вектора $\chi(t|\tau)$ соответствет наихудшей реализации состояния $x(\tau)$:

$$\chi_i(t|\tau) = \max_z G_i(t)\hat{y}(t), \tag{1.5}$$

$$\hat{x}(s+1) = A\hat{x}(s), \quad \hat{x}(\tau) = z,$$
$$y(s) = C\hat{x}(s), \quad s = \tau, \ldots, t,$$
$$z \in X(\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau),$$

где $G_i(t)$ обозначает i–ю строку матрицы $G(t)$.

После вычисления всех оценок $\chi(t|\tau), \quad t = \tau, \ldots, T-1$, оптимальное управление $u^*(t|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau)$ получаем как решение следующей детерминированной задачи оптимального управления:

$$\min_u \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2, \tag{1.6}$$

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(\tau) = 0,$$
$$y_0(t) = Cx_0(t) + Du(t),$$
$$u(t) \in U, \quad y_0(t) \in Y_0(t|\tau),$$
$$t = \tau, \ldots, T-1.$$

Подведем итоги. В настоящей главе была поставлена задача оптимального гарантирующего управления линейной дискретной стационарной системы по неточным выходным сигналам. Рассмотрена стратегия построения оптимальных обратных связей по выходу в реальном времени. Продемонстрировано, как данная задача естественным образом разделяется на несколько задач оптимального наблюдения и одну детерминированную задачу оптимального управления.

ГЛАВА 2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ОТСУТСТВИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

В данной главе сосредоточимся на задаче управления системой G, однако условимся, что реализация (A, B, C, D) системы в пространстве состояний не известна. Классический подход в подобных ситуациях состоит в предварительной идентификации системы и последующей формулировке и решении задачи из главы 1.

В настоящей работе будет предложен альтернативный подход, не нуждающийся в явном параметрическом представлении системы. Вместо модели (A, B, C, D) будем использовать полученное в [2] представление любой траектории системы G на основе одной предварительно сгенерированной траектории из управления и выходного сигнала

$$\{u^d, y^d\} = \{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1},$$

которую далее будем называть априорной траекторией.

Будем считать, что априорная траектория $\{u^d, y^d\}$ измерена точно и для системы G дана верхняя оценка размерности ее состояния n (см. [2]).

2.1 Информативность априорной траектории

Предварительно приведем результаты работ [2, 11], в которых показано, как априорная траектория $\{u^d, y^d\}$ при определенных условиях может иметь ту же информационную ценность, что и модель системы (A, B, C, D).

Определение 2.1 Пусть $L, L^d \in \mathbb{N}$, $L \leq L^d$. Управление $u = \{u(t)\}_{t=0}^{L^d-1}$ называется постоянно возбуждающим порядка L, если матрица Ганкеля

$$H_L(u) = \begin{pmatrix} u(0) & u(1) & \cdots & u(L^d-L) \\ u(1) & u(2) & \cdots & u(L^d-L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(L-1) & u(L) & \cdots & u(L^d-1) \end{pmatrix}$$

имеет полный строчный ранг, т.е. $\operatorname{rank} H_L(u) = mL$.

Замечание 2.1 Если управление u является постоянно возбуждающим порядка L, то оно должно быть достаточно длинным. Поскольку матрица $H_L(u) \in \mathbb{R}^{mL\times(L^d-L+1)}$ имеет полный строчный ранг, число строк не превышает число столбцов: $L^d - L + 1 \geq mL$. Отсюда следует необходимое условие на длину L^d постоянно возбуждающего управления порядка L: $L^d \geq L(m+1) - 1$.

Согласно [2,11], априорная траектория $\{u^d, y^d\}$, порожденная постоянно возбуждающим управлением достаточно высокого порядка, содержат информацию, достаточную для представления любой траектории системы G. Далее будем использовать следующий результат работы [11], сформулированный в [2] в терминах классических моделей в пространстве состояний:

Теорема 2.1 Пусть $\{u^d, y^d\} = \{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$ — априорная траектория линейной системы G размерности n, причем u^d — постоянно возбуждающее управление порядка $T+n$. Тогда $\{u, y\} = \{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$ является траекторией G в том и только в том случае, когда для

$$\begin{pmatrix} H_T(u^d) \\ H_T(y^d) \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

существует решение $\alpha \in \mathbb{R}^{T^d-T+1}$.

Теорема 2.1 позволяет проверять любую пару $\{u, y\}$ на принадлежность множеству траекторий системы G. В дальнейшем будем использовать условия теоремы для построения множества возможных траекторий $\{u^p_\tau, u, y^p_\tau, y\}$ длины T с некоторой фиксированной "прошлой" частью $\{u^p_\tau, y^p_\tau\} = \{u^p(t), y^p(t)\}_{t=0}^{\tau-1}$ длины τ и нефиксированной "будущей" частью $\{u, y\} = \{u(t), y(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$. Для этого будем делить на "прошлое" и "будущее" для момента τ и строки матриц Ганкеля для априорной траектории:

$$H_T(u^d) = \left(\begin{array}{ccc} u^d(0) & \cdots & u^d(T^d-T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(\tau-1) & \cdots & u^d(\tau-1+T^d-T) \\ \hline u^d(\tau) & \cdots & u^d(\tau+T^d-T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(T-1) & \cdots & u^d(T^d-1) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} U^p_\tau \\ U^f_\tau \end{pmatrix},$$

$$H_T(y^d) = \left(\begin{array}{ccc} y^d(0) & \cdots & y^d(T^d-T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(\tau-1) & \cdots & y^d(\tau-1+T^d-T) \\ \hline y^d(\tau) & \cdots & y^d(\tau+T^d-T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(T-1) & \cdots & y^d(T^d-1) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} Y_\tau^p \\ Y_\tau^f \end{pmatrix}.$$

Если управление u^d является постоянно возбуждающим порядка $T+n$, то, согласно теореме 2.1, $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$ является траекторией системы G тогда и только тогда, когда уравнение

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \alpha(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u \\ y \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

имеет решение $\alpha(\tau) \in \mathbb{R}^{T^d-T+1}$.

В силу теоремы 2.1, для любых u_τ^p, y_τ^p, u можно найти хотя бы один возможный выходной сигнал y, но для единственности y, которая представляет особый практический интерес, необходимо наложить дополнительные условия. При условии наблюдаемости пары (A, C), траектория $\{u^p, y^p\}$ длины n однозначно определяет начальное состояние, поэтому для обеспечения единственности достаточно потребовать $\tau \geq n$.

2.2 Принцип разделимости

Найдем аналог принципа разделимости управления и наблюдения для линейных систем с известной моделью в пространстве состояний для случая, когда траектория системы G представлена в виде (2.1). Будем следовать идее декомпозиции будущего выходного сигнала y из главы 1

$$y = y_0 + \hat{y}, \tag{2.2}$$

где $y_0 = \{y_0(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$ — выходной сигнал системы G, соответствующий управлению u и тривиальному начальному условию $x(\tau) = 0$; $\hat{y} = \{\hat{y}(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$ — выходной сигнал неуправляемой системы G для некоторого начального условия $x(\tau)$, согласующегося с текущей позицией процесса $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$.

Эта идея, а также теорема 2.1, используются при доказательстве следующего результата:

Лемма 2.1 Пусть $\{u^p_\tau, y^p_\tau\}$ — некоторая фиксированная прошлая траектория системы G длины $\tau \ge n$. Тогда любая траектория $\{u^p_\tau, u, y^p_\tau, y\}$ длины T системы G однозначно представима в виде суммы траекторий $\{0, u, 0, y_0\}$ и $\{u^p_\tau, 0, y^p_\tau, \hat{y}\}$ длины T, причем для фиксированного управления u определить неизвестные будущие участки $y_0, \hat{y}$ можно следующим образом:
1. Найти некоторые решения $\hat{\alpha}(\tau)$, $\alpha_0(\tau)$ алгебраичеких уравнений

$$\begin{pmatrix} U^p_\tau \\ Y^p_\tau \\ U^f_\tau \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u^p_\tau \\ y^p_\tau \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U^p_\tau \\ Y^p_\tau \\ U^f_\tau \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

2. Вычислить $\hat{y} = Y^f_\tau \hat{\alpha}(\tau)$, $y_0 = Y^f_\tau \alpha_0(\tau)$.

В связи с декомпозицией (2.2) выходного сигнала, ограничение (1.2) в момент t принимает вид $G(t)(y_0(t) + \hat{y}(t)) \le g(t)$. Тогда на $y_0(t)$ наложим "суженное" условие:

$$G(t)y_0(t) \le g(t) - \chi(t|\tau), \tag{2.4}$$

где $\chi(t|\tau) = (\chi_i(t|\tau), i = 1, \dots, q)$ соответствует наихудшей реализации выходного сигнала $\hat{y}(t)$ в позиции $\{u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau\}$, а именно, каждый его элемент $\chi_i(t|\tau)$ является решением задачи

$$\chi_i(t|\tau) = \max_{\hat{y}(t)} \; G_i(t)\hat{y}(t), \quad \hat{y}(t) \in \mathcal{Y}(t|\tau, u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau), \tag{2.5}$$

где $G_i(t)$ — i-ая строка матрицы $G(t)$.

Задачи (2.5) представляют собой задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \chi_i(t|\tau) = &\max_{\hat{\alpha}(\tau)} \; G_i(t)Y^d(t)\hat{\alpha}(\tau), \\ &\begin{pmatrix} U^p_\tau \\ U^f_\tau \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u^p_\tau \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &\tilde{y}^p_\tau - \varepsilon \mathbb{1} \le Y^p_\tau \hat{\alpha}(\tau) \le \tilde{y}^p_\tau + \varepsilon \mathbb{1}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Задачи (2.6) — *задачи оптимального наблюдения*, см. [1] и главу 1.

Выполнение для $y_0(t)$ ограничения (2.4) очевидно влечет удовлетворение исходного ограничения (1.2) на $y(t)$ для любой возможной реализации $\hat{y}(t)$, согласующейся с позицией $\{u^p_\tau, \tilde{y}^p_\tau\}$.

Параметр $\alpha_0(\tau)$, удовлетворяющий второму из условий (2.3) и такой, что для $y_0(t) = Y^d(t)\alpha_0(\tau)$ при всех $t = \tau, \dots, T-1$ выполняется неравенство (2.4), определяет допустимое управление $u = U^f_\tau \alpha_0(\tau)$. Тогда *задача оптимального управления* в момент времени τ имеет вид:

$$\min_{\alpha_0(\tau)} \alpha_0(\tau)^T (U_\tau^f)^T U_\tau^f \alpha_0(\tau), \tag{2.7}$$
$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$G(t) Y^d(t) \alpha_0(\tau) \le g(t) - \chi(t|\tau),$$
$$u_{\min} \le U^d(t)\alpha_0(\tau) \le u_{\max}, \quad t = \tau, \ldots, T-1,$$

где, по аналогии с $Y^d(t)$, $U^d(t) = (u^d(t), u^d(t+1), \ldots, u^d(t + T^d - T))$.

Пусть $\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ — решение задачи оптимального управления (2.7). На вход системы G подаем первое значение соответствующего управления, которое вычисляется согласно формуле $u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = U^d(\tau)\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$.

Таким образом, алгоритм управления системой на основе априорных данных $\{u^d, y^d\}$ состоит в следующем
при всех $\tau = n, \ldots, T-1$:

1) решить задачи (2.6), найти оценки $\chi_i(t|\tau)$, $i = 1, \ldots, q$, $t = \tau, \ldots, T-1$;

2) решить задачу (2.7), найти $\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$;

3) подать на вход системы управление $u^p(\tau) = U^d(\tau)\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$.

Как и в главе 1, полученное в результате применения алгоритма управление $u^p(\tau)$, $\tau = n, \ldots, T-1$, является *реализацией в конкретном процессе управления оптимальной обратной связи по неточным измерениям.*

Для того, чтобы результаты представленного алгоритма совпадали с результатом главы 1 необходимо потребовать $X_0 = \mathbb{R}^n$, совпадения управлений $u^p(t)$ при $t = 0, 1, \ldots, n-1$, и также начинать процесс управления в момент $\tau = n$.

Теоретическое обоснование реализуемости предложенного алгоритма управления дает следующий результат.

Теорема 2.2 Пусть в момент τ для позиции $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ каждая из задач (2.6) имеет решение. Далее, пусть имеет решение задача (2.7) с параметрами $\chi(t|\tau)$, поставленными решениями задач (2.6). Тогда в момент $\tau + 1$ для позиции $\{u_\tau^p, u^*(\tau|\tau), \tilde{y}_\tau^p, \tilde{y}^p(\tau)\}$ задачи (2.6), (2.7) также имеют решение. Более того,

$$\sum_{t=\tau+1}^{T-1} \|u^*(t|\tau+1)\|^2 \le \sum_{t=\tau+1}^{T-1} \|u^*(t|\tau)\|^2 .$$

Следствие 2.1 Если задачи оптимального наблюдения (2.6) и управления (2.7) имеют решение в момент времени $\tau = n$, то они разрешимы и в каждый из последующих моментов $\tau = n+1, \ldots, T-1$. При этом критерий качества, значение которого определяется в момент τ как

$$J(\tau) = \sum_{t=0}^{\tau-1} \|u^p(t)\|^2 + \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u^*(t|\tau)\|^2 ,$$

является невозрастающей функцией от τ.

Доказательство теоремы 2.2 использует "хвост" $u^c = \{u^*(t|\tau)\}_{t=\tau+1}^{T-1}$ оптимального управления, полученного в момент τ не только для доказательства допустимости задачи оптимального управления (как и в случае наличия модели системы), но и для доказательства существования решения задач оптимального наблюдения. Это позволяет учесть взаимосвязь не только между соответствующими задачами для τ и $\tau+1$, но и между самими задачами для момента $\tau+1$. В частности, для задач оптимального наблюдения на основе u^c приводится такая верхняя оценка решения $\chi(t|\tau+1)$, которая позволяет продемонстрировать и допустимость управления $\{u^*(t|\tau)\}_{t=\tau+1}^{T-1}$ в задаче оптимального управления для момента $\tau+1$.

В данной главе был предложен новый способ решения задачи, поставленной в предыдущей главе. Этот способ не требует знания реализации системы в пространстве состояний. Предложенный метод сводится к решению задач линейного и квадратичного программирования, базирующихся лишь на двух траекториях системы: априорной и наблюдаемой в процессе управления.

ГЛАВА 3

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

В настоящей главе предложенная схема управления из главы 2 применяется для решения ряда примеров. Приводятся основные элементы программной реализации в пакете Matlab и результаты численных экспериментов.

3.1 Элементы программной реализации

Решение задачи оптимального программного управления в момент времени τ происходит в функции control_at_tau. В качестве входных параметров передаются матрицы Ганкеля, разделенные на "прошлое" (Up, Yp) и "будущее" (Uf, Yf) для момента τ; прошлая траектория up, yp; число EPS, определяющее точность измерений выходных сигналов; матрицы GG, gg и скаляры umax, umin, задающие ограничения на выходные сигналы и управления соответственно.

```
function [isFeasible, uf] = control_at_tau ( Up, Yp, Uf, Yf, ...
 up, yp, EPS, GG, gg, umax, umin)
   [chiDet, solutionExistsDet] = ...
       estimation_Det (Up, Yp, Uf, Yf, up, yp, EPS, GG);
   %optimal input
   [uf, exitflagDet] = ...
       control_Det (Up, Yp, Uf, Yf, GG, gg, umax, umin, chiDet);

    if exitflagDet == 1 && solutionExistsDet == 1 %both estimation ...
    and control problems feasible
        isFeasible = true;
    else
        isFeasible = false;
    end
end
```

Сперва control_at_tau вызывает функцию estimation_Det, которая реализует решение задач оптимального наблюдения. В теле estimation_Det на основе данных (матриц Ганкеля Up, Yp, Uf, Yf и траектории наблюдаемого процесса u_init, y_init) и ограничения ошибки измерения EPS формируются матрицы A, b, Aeq, beq, задающие ограничения-неравенства и ограничения-равенства соответственно. Далее с этими ограничениями решается ряд задач линейного программирования с помощью встроенной функции linprog.

Решения данных задач формируют вектор chiDet, который функция estimation_Det возвращает. Наряду с chiDet возвращается булевая переменная allexitflagsEqualOne. Эта переменная принимает значение True тогда и только тогда, когда linprog успешно решил все задачи. Здесь и далее переменные такого характера используются для эмпирического подтверждения теоремы 2.2 о рекуррентной разрешимости.

```
function [chiDet, allexitflagsEqualOne] = estimation_Det(Up,...
Yp, Uf, Yf, u_init, y_init, EPS, GG)
allexitflagsEqualOne = true;
chiDet = zeros(length(GG(:,1)),1); %for each row of GG

%precalculate MATRICES for linprog
A = vertcat(Yp, -Yp);
b = vertcat(y_init + EPS.*ones(length(y_init),1), ...
    -y_init+EPS.*ones(length(y_init),1) );
Aeq = vertcat(Up, Uf);
beq = vertcat(u_init, zeros(length(Uf(:,1)), 1));

options = optimoptions('linprog','Display','iter');
for i = 1:length(GG(:,1))
    [x, fval, exitflag, ~] = ...
        linprog(-GG(i,:)*Yf, ...
        %-GG(i,:) instead of GG(i, :) for a max instead of min
            A, b, Aeq, beq, ...
                [], [], options);

    if exitflag == 1
        chiDet(i) = fval;
    else
        allexitflagsEqualOne = false;
        diary on
        'broken linprog'
        exitflag
        diary off
    end
```

```
end

chiDet = -chiDet; % minus before chi to contain a max instead of min
end
```

Затем в теле control_at_tau вычисленное значение chiDet передается в функцию control_Det. Здесь сперва для нахождения $\alpha_0^*(\tau)$ с помощью встроенной функции quadprog решается задача квадратичного программирования, ограничения для которой задаются уже не только через Up, Yp, Uf, Yf, GG, gg, umax, umin, а с привлечением chiDet. После посредством умножения полученного решения alphaCdet Uf формируется оптимальное управление uOptDet, которое является главным выходным параметром.

```
function [uOptDet, exitflag] = control_Det (Up, Yp, Uf, Yf,...
GG, gg, umax, umin, chiDet)
%Quadratic Problem for CONTROL
[alphaCdet,~, exitflag, ~] = quadprog(transpose(Uf)*Uf, [],...
vertcat(GG*Yf, Uf, -Uf), ...
    vertcat(gg-chiDet, umax * ones(length(Uf(:,1)), 1),...
    -umin * ones(length(Uf(:, 1)), 1)),...
    vertcat(Up, Yp), zeros(size(Up,1)+size(Yp,1),1));

%optimal input
uOptDet = Uf*alphaCdet;
end
```

Главный цикл итераций обернут в функцию control_over_T. В каждый момент времени τ вызывается функция control_at_tau, которая поставляет оптимальное управление uf исходя из априорных данных и наблюдаемой в реализуемом процессе траектории up, yp. Затем с помощью встроенной функции lsim моделируется подача на вход системы первого значения uf(1:udim) управления uf. К точному значению выходного сигнала, который возвращает lsim, прибавляется ограниченная ошибка, моделируемая как EPS*rand([y_dim, 1]). Удлиненная новыми неточными данными наблюдаемая траектория up, yp вступает в следующую итерацию — для момента $\tau + 1$.

```
function [isFeasible, u_init, y_init, uopt, yopt, xopt, costs] = ...
control_over_T (sys, x_init, u_init, y_init, Hu, Hy, GG, gg,...
umax, umin, u_dim, y_dim, EPS, t_y)
    isFeasible = true;
```

```
t_init = length(u_init)/u_dim + 1; %when we start control
T = length(Hu(:, 1))/u_dim; %prediction horizon
costs = zeros(T-t_init+1,1);
up = u_init;
yp = y_init;
GGtau = GG;
ggtau = gg;
for tau = t_init:T
    Up = Hu(1:(tau-1)*u_dim, :);
    Uf = Hu((tau-1)*u_dim+1:end, :);
    Yp = Hy(1:(tau-1)*y_dim, :);
    Yf = Hy((tau-1)*u_dim+1:end, :);

    %-y_dim*2 inequality constraints each time
    %if tau > t_init
    %constraints enforced for the last t_y only

    if tau > T-t_y
        GGtau = GGtau(1+y_dim*2:end, :);
        ggtau = ggtau(1+y_dim*2:end);
    end

    if tau > t_init
        GGtau = GGtau(:, 1+y_dim:end);
    end

    [isFeasibleatTau, uf] = control_at_tau (Up, Yp, Uf, Yf,...
     up, yp, EPS, GGtau, ggtau, umax, umin);
    costs(tau-t_init+1) =  up' * up + uf' * uf;

    diary on
    tau
    isFeasibleatTau
    uf
    'cost at tau'
    up' * up + uf' * uf
    diary off

    up = vertcat(up, uf(1:u_dim));
```

```
        [yf, ~, ~] = lsim(sys, transpose(reshape(up, u_dim, [])), ...
        [], x_init);
        yp = vertcat(yp, transpose(yf(end,:)) + ...
        EPS * rand([y_dim,1]));
    end
end
```

3.2 Пример 1

Применим предложенный алгоритм для управления следующей системой:

$$
\begin{aligned}
&x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.9950 & 0.0998 \\ -0.0998 & 0.9950 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.0050 \\ 0.0998 \end{pmatrix} u(t), \\
&y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t), \quad t = 0, \ldots, T-1.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Требуется минимизировать величину $\sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$ при гарантированном соблюдении ограничений на значения выходных сигналов в последних 15 временных точках: $|y(t)| \le 0.3$, $t = T-15, \ldots, T-1$. Доступны управления, для которых $|u(t)| \le 0.7$, $t = 0, \ldots, T-1$. Горизонт планирования $T = 135$, абсолютное значение ошибки ограничено величиной $\varepsilon = 0.02$.

Управление системой (3.1) начинается в момент $\tau = n = 2$.

Согласно замечанию 2.1, длина T^d априорной траектории должна быть не меньше $(n+T)(m+1)-1 = 273$. Именно такой, наименьшей подходящей длины, была сгенерирована незашумленная априорная траектория $\{u^d, y^d\}$, в которой управления $u^d(t)$, $t = 0, \ldots, T^d - 1$, — случайные числа, равномерно распределенные в $[0, 0.7]$.

Пусть в конкретном процессе реализовалось начальное состояние $x_0^p = (5, -2)$. Траектория $\{u_2^p, \tilde{y}_2^p\}$, соответствующая движению системы до начала управления, получена при $u^p(0) = u^p(1) = 0$ и $\xi(t)$, $t = 0, 1$, выбранных случайным образом из отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

На рис. 3.1a изображена реализация $u^p(\tau)$, $\tau = 0, \ldots, T-1$, оптимальной обратной связи в рассматриваемом процессе. Выходной сигнал (см. рис. 3.1b) удовлетворяет ограничениям на промежутке от $\tau = 120$ до $\tau = 134$. На рис. 3.1c изображена реализовавшаяся траектория системы (3.1). Априорная оценка значения критерия качества, полученная в $\tau = 2$ составила 46.3322. В процессе управления значение критерия качества улучшилось до 42.5599. Наиболее значительное изменение происходит при $\tau = 2, \ldots, 28$. Этот фрагмент приведен на рис. 3.1d.

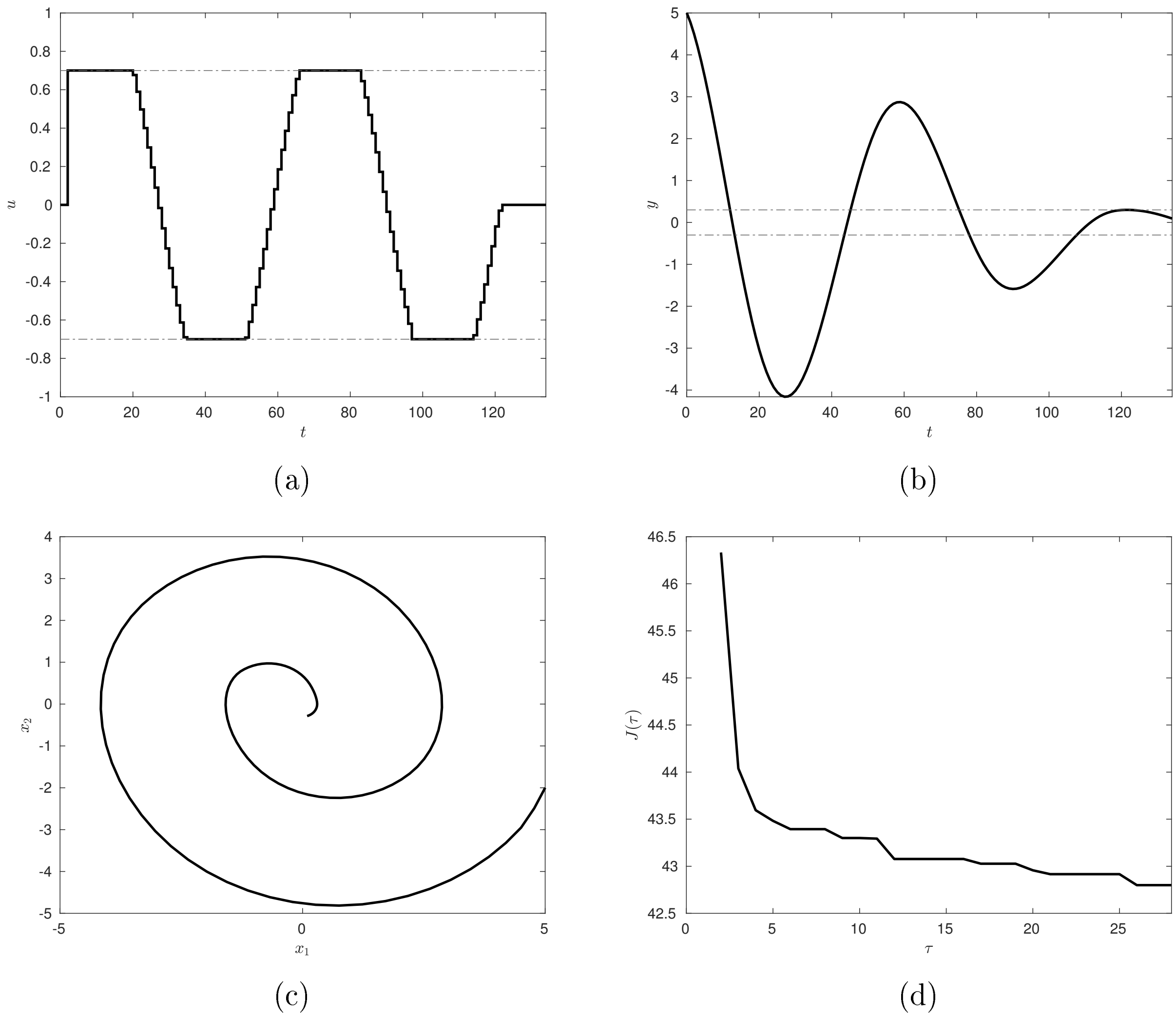


Рис. 3.1. Реализованная оптимальная обратная связь (a), соответствующий выходной сигнал (b), фазовая траектория (c), изменение критерия качества (d)

3.3 Пример 2

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы, которая была рассмотрена в [4]:

$$
x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.921 & 0 & 0.041 & 0 \\ 0 & 0.918 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & 0.924 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.937 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.017 & 0.001 \\ 0.001 & 0.023 \\ 0 & 0.061 \\ 0.072 & 0 \end{pmatrix} u(t), \quad (3.2)
$$
$$
y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t), \quad t = 0, \dots, T-1.
$$

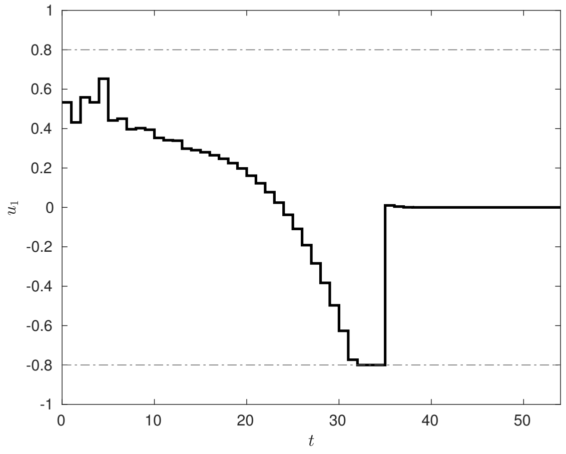
Снова требуется минимизировать величину $\sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$ при следующих ограничениях: $|y_i(t)| \le 0.1$, $t = T-20, \dots, T-1$, $i = 1, 2$, и $|u_i(t)| \le 0.8$, $t = 0, \dots, T-1$, $i = 1, 2$. Положим $T = 55$, $\varepsilon = 0.02$.

Отметим, что для данной системы управление можно было бы начать в момент $\tau = 2$, поскольку наблюдений при $t = 0, 1$ достаточно для неявного задания начального условия x_0. Однако, поскольку математическая модель неизвестна, известна лишь точная размерность системы, $n = 4$, управление системой (3.2) начинается в момент $\tau = n = 4$.

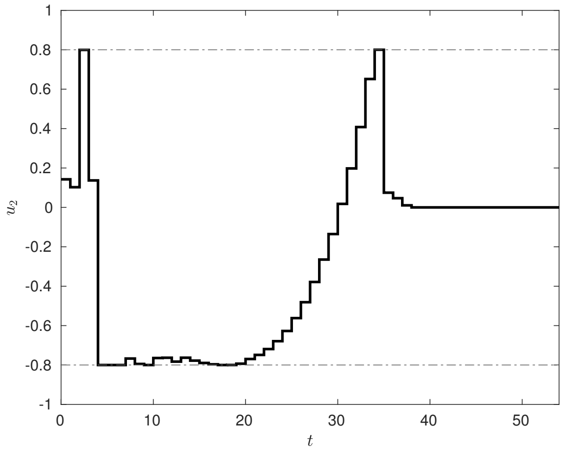
Управления $u^d(t)$, $t = 0, \dots, T^d - 1$ для априорной траектории $\{u^d, y^d\}$ длины $T^d = 176$ (см. замечание 2.1) были сгенерированы как случайные векторы, равномерно распределенные в $[-0.8, 0.8]^2$.

Траектория $\{u_4^p, \tilde{y}_4^p\}$ конкретного процесса была сгенерирована для начального состояния $x_0^p = (4, 0, 1, -1)$ и $u^p(t)$, $\xi(t)$, $t = 0, \dots, 3$, выбранных случайным образом из квадратов $[0, 0.8]^2$, $[-\varepsilon, \varepsilon]^2$, соответственно.

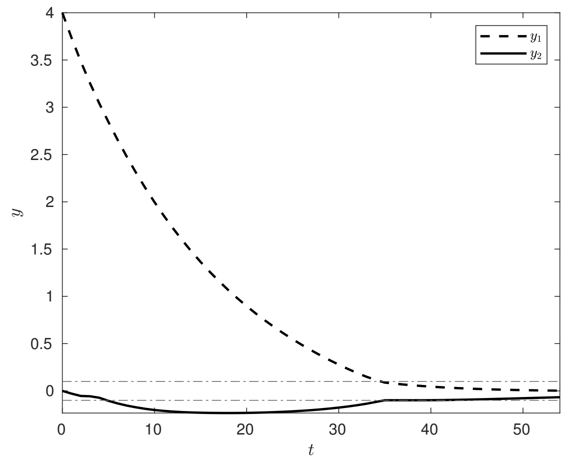
Рис. 3.2 иллюстрирует результаты применения предложенной схемы управления. Априорная оценка значения критерия качества, составлявшая 32.183, была улучшена до 21.857. Начиная с момента $\tau = 29$ изменения не существенны.



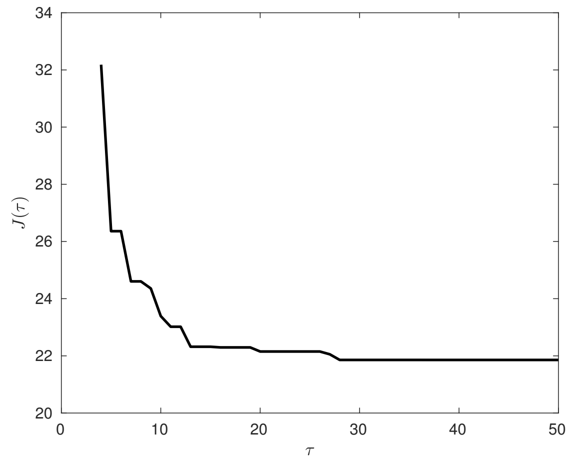
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис. 3.2. Реализация оптимальной обратной связи (a)–(b), соответствующие выходные сигналы (c), изменение критерия качества (d)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена задача оптимального управления линейной стационарной системой при наличии ограничений и неточных измерений выходных сигналов. Математическая модель системы в пространстве состояний предполагается неизвестной, доступны только данные априорных наблюдений за ее поведением в одном процессе управления.

В предположении об отсутствии в априорных данных ошибок обоснован принцип разделимости процессов наблюдения и управления в линейных системах только на основе доступных данных, сформулированы соответствующие задачи оптимального наблюдения и управления, предложен и обоснован алгоритм управления объектом в режиме реального времени на основе данных.

Эффективность предложенного метода проиллюстрирована численными примерами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института математики и механики УрО РАН, Т.10, №2, 2004. С. 33-57.

2 Berberich, J. A trajectory-based framework for data-driven system analysis and control / J. Berberich, F. Allgöwer // arXiv: 1903.10723. – 2019.

3 Berberich, J. Robust data-driven state-feedback design / J. Berberich, A. Romer, C. W. Scherer, F. Allgöwer // arXiv: 1909.04314. – 2019.

4 Berberich, J. Data-Driven Model Predictive Control with Stability and Robustness Guarantees / J. Berberich, J. Köhler, M. A. Müller, F. Allgöwer // arXiv: 1906.04679. – 2019.

5 Copp, D. Simultaneous nonlinear model predictive control and state estimation / D. Copp, J. Hespanha // Automatica. – 2016. – Vol. 77. – P. 143-154.

6 Coulson, J. Data-Enabled Predictive Control: In the Shallows of the DeePC / J. Coulson, J. Lygeros, F. Dörfler // 18th European Control Conference (ECC), Naples, Italy. – 2019. – P. 307-312.

7 Hou, Z.-S. From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective / Z.-S Hou, Z. Wang // Information Sciences. – 2013. – Vol.235. – P.3-35.

8 De Persis, C. Formulas for data–driven control: Stabilization, optimality and robustness / C. De Persis, P. Tesi // arXiv: 1903.06842. – 2019.

9 Romer, A. One–shot verification of dissipativity properties from input–output data / A. Romer, J. Berberich, J. Köhler, F. Allgöwer // IEEE Control Systems Letters. – 2019. – Vol. 3, no.3. – P. 709-714.

10 Waarde, H.J. Data informativity: a new perspective on data-driven analysis and control / H. J. van Waarde, J. Eising, H. L. Trentelman, M. K. Camlibel // arXiv: 1908.00468. – 2019.

11 Willems, J. C. A note on persistency of excitation / J. C. Willems, I. Markovsky, P. Rapisarda, B. L. M. De Moor // Systems & Control Letters. – 2005. – Vol. 54. – P. 325-329.