Глава 5 Матрицы и системы линейных уравнений

§5.1 Определители
§5.2 Системы линейных уравнений. Правило Крамера
— самостоятельно

§5.3 Матрицы

Def Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел (вещественных или комплексных):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad m \text{ строк} \qquad (38)$$

n столбцов

$$A = \{a_{ik}\}_{i=1,\,k=1}^{i=m,\,k=n} \qquad (39)$$

Def ...
того же поряд...
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ...
Def Для ...
каждый её ...
$\alpha A = \{$ ...
Def Про...
перем...
число ...

Def Суммой матриц A и B размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$ того же порядка $(m \times n)$, для каждого элемента которой выполнено:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad / \; A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\} \; / \qquad (40)$$

Def Для того, чтобы умножить матрицу A на число α, каждый её элемент нужно умножить на число α.

$$\alpha A = \{\alpha \cdot a_{ij}\} \qquad \alpha \in \mathbb{R} (\mathbb{C}) \qquad (41)$$

Def Произведение матриц можно определить, если размеры перемножаемых матриц связаны между собой следующим образом: число столбцов в первой матрице должно совпадать с числом строк во второй матрице. Тогда можно определить произведение по следующему правилу:

$$\underset{m \times p}{C} = \underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B}, \qquad (42)$$

где для каждого элемента матрицы C выполнено:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad (43)$$

Матрицы умножаются по правилу: строка на столбец. Элемент c_{ij} мы получим, если умножим i-ю строку матрицы A на j-ый столбец матрицы B.

Замечания

1) Матрицу A можно умножать на матрицу B, только если число строк матрицы B равно числу столбцов матрицы A.

2) Квадратные матрицы можно умножать только если они имеют одинаковый порядок.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) В общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Если выполняется равенство $AB = B \cdot A$, то матрицы A и B называются коммутативными.

$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

$AB \neq B \cdot A$

Def $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ [44] — коммутатор матриц A и B.

Def $A^T = \{a_{ji}\}$ — транспонированная матрица. У неё строки и столбцы переставлены местами.

Def O — нулевая матрица. Все её элементы равны 0.

Def I — единичная матрица. Определяется только для квадратных матриц.

/E, 1/

$$I = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Big\updownarrow n$$

Если матрицу умножить на единичную, она не изменится.

того же поря...

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Def Для того, ...

каждый её э...

$\alpha A = \{\alpha$ ...

Def Произвед...

перемножаема...

число столбцо...

строк во вт...

по следующему...

$$\underset{m \times p}{C} = \underset{m \times n}{A} \dots$$

где для кажд...

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a \dots$$

Матрицы умно...

если умножи...

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Def Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные не на главной диагонали, равны 0.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = [a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}] \qquad (45)$$

Свойства действий с матрицами

Сложение матриц:

1) $A+B=B+A$ – коммутативность (перестановочность) относительно сложения матриц

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ – ассоциативность (сочетательный закон)

3) $A+O=A$

Умножение матрицы на число:

4) $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$ – коммутативность относительно умножения на число

5) $\lambda(\mu \cdot A) = (\lambda\mu)A$ – ассоциативность относительно умножения на число

6) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ – дистрибутивность (распределительный закон) умножения матрицы на число относительно сложения чисел.

7) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ – дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения матриц.

Умножение матриц:

8) $O A = A O = O$

9) $I_{m\times m} \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n} I_{n\times n} = A_{m\times n}$

10) $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$ - ассоциативность умножения матриц.

11) $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ - дистрибутивность умножения на матрицу справа относительно сложения матриц.

12) $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ - дистрибутивность умножения на матрицу слева относительно сложения матриц.

Транспонирование матриц:

13) $(\alpha\cdot A+\beta\cdot B)^T = \alpha\cdot A^T + \beta\cdot B^T$ - транспонирование линейной комбинации матриц

14) $\det(A\cdot B) = \det A\cdot \det B$ - теорема об умножении определителей (ф-ла (25))

15) $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

Док-во:

Операция $(A\cdot B)^T$. Элемент c_{ij} матрицы $A\cdot B$ мы получим, если умножим i-ую строку матрицы A на j-ый столбец матрицы B. После операции $(A\cdot B)^T$ мы получим элемент c_{ji}.

Операция $B^T\cdot A^T$. После транспонирования матрицы B её j-ый столбец станет j-ой строкой. После транспонирования матрицы A её i-ая строка станет i-ым столбцом. После операции $B^T\cdot A^T$ j-ая строка матрицы B^T умножается на i-ый столбец матрицы A^T и мы получим тот же элемент c_{ji}.

Def Если $A^T = A$, то матрица называется симметрической.

Степени матриц, многочлены от матриц

Def Целой положительной степенью A^m $(m > 0)$ квадратной матрицы называется произведение m матриц, каждая из которых равна A.

Def Нулевой степенью квадратной матрицы A называется единичная матрица I того же порядка, что и A.

Иначе, по определению:

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A, \quad \ldots\ldots, \quad A^m = A^{m-1} \cdot A \qquad (46)$$

Для любой квадратной матрицы и любых положительных целых чисел m и n справедливы равенства:

$$A^{m+n} = A^m \cdot A^n \qquad (47)$$

$$\left(A^m\right)^n = A^{m \cdot n} \qquad (48)$$

Def $\exists$ задан многочлен $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n$ (49)

и квадратная матрица A. Выражение

$$P(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_{n-1} A + a_n \cdot I \qquad (50)$$

называется многочленом от матрицы A. Если $P(A)$ нулевая матрица, то A называется корнем многочлена.

Пример.

Найдём значение многочлена $P(x) = 3x^2 - 2x + 3$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$P(A) = 3A^2 - 2A + 3I = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -4 & 11 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -20 \\ -10 & 30 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$