



UNIVERSITÉ  
TOULOUSE III  
PAUL SABATIER



---

# Détermination d'orbite Méthode de Gauss

---

Lise Deniaud

M1 Science de l'univers et Technique Spatiale

17 May 2024

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Ascension droite et déclinaison de l'astéroïde</b>	<b>3</b>
<b>2 Méthode de Gauss</b>	<b>6</b>
<b>3 Analyse des résultats</b>	<b>8</b>
<b>Conclusion</b>	<b>10</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>10</b>

# Introduction

La détermination d'orbite de corps célestes à partir d'images est un réel enjeu qui a permis une meilleure compréhension des mouvements prenant place dans notre univers. Au début des années 1800, alors qu'il existe déjà des méthodes déterminant les orbites en les supposant paraboliques, Gauss décide de se pencher sur le problème de la détermination d'orbite elliptique jusque-là peu étudié [2].

Dans le cadre du Master 1 Science de l'univers et Techniques Spatiales, il nous est demandé de retrouver l'orbite d'un astéroïde à l'aide de trois fichiers FITS fournis. Le choix de la méthode de détermination d'orbite étant laissé au choix entre Olberts, Gauss ou Laplace, nous détaillerons ici la méthode de Gauss qui semble être la méthode la plus commune aux déterminations d'orbites d'objets célestes et aux déterminations d'orbites de satellites dans l'ingénierie du spatial.

Nous détaillerons dans un premier temps les coordonnées de l'astéroïde d'après les images du ciel mises à notre disposition dans la partie 1 ce qui nous permettra d'appliquer la méthode de Gauss en partie 2. Nous pourrons ensuite extraire de ces résultats les éléments orbitaux et avant de conclure nous analyserons ces résultats.

## 1 Ascension droite et déclinaison de l'astéroïde

Afin d'appliquer la méthode de gauss pour déterminer l'orbite de l'astéroïde il est nécessaire de pouvoir le situer dans le ciel grâce à son ascension droite et sa déclinaison. Pour cela, par soucis de simplicité, il était nécessaire de visualiser les images des FITS afin de développer une régression linéaire permettant de remonter à ces angles comme nous le verrons en partie 1.

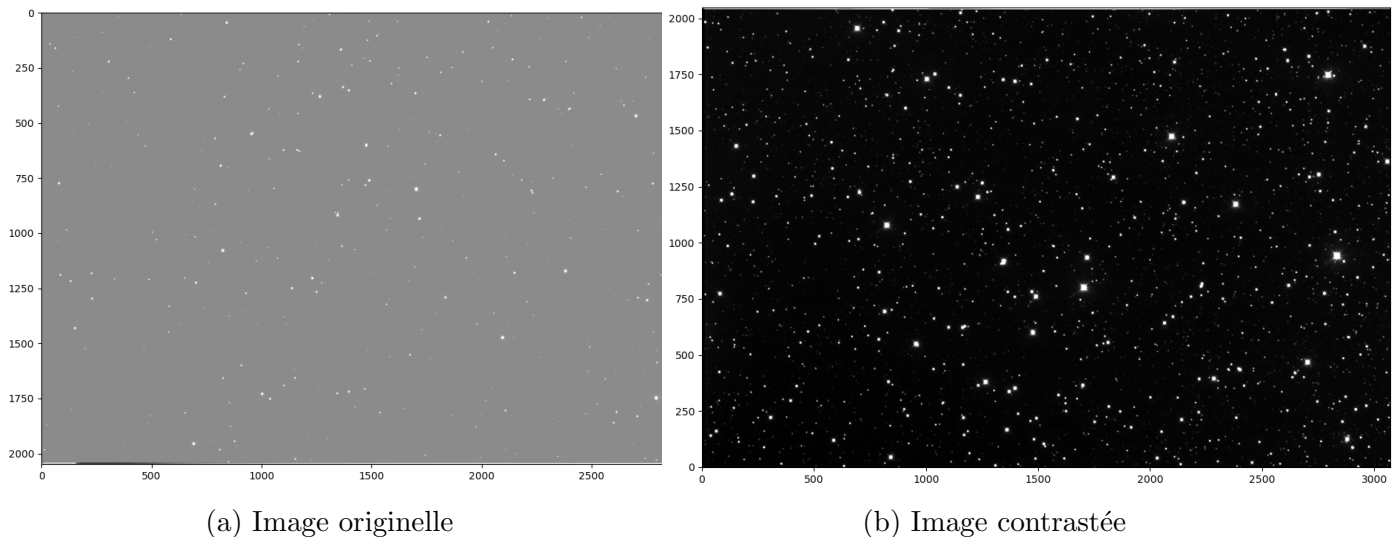


FIGURE 1 – Image du premier FITS

La lecture de fichier FITS peut se faire de différentes manières. A l'aide d'applications comme le logiciel *fv* ou via un code dans le langage de notre choix. Dans une optique de créer un code en C j'ai tout d'abord essayé de visualiser les images dans ce langage à l'aide de la librairie `fitsio.h` [4] et de python pour l'affichage. Ce premier essai n'étant pas convaincant, j'ai alors choisi d'utiliser la librairie `astropy.io` et de faire cette partie du projet en python.

J'ai pu alors afficher les images comme le logiciel *fv* nous les montre avec les paramètres par défaut et qui seront les images utilisées pour bien calibrer notre régression linéaire. J'ai aussi affiché les images plus contrastées en utilisant les valeurs `DATAMAX` et `DATAMIN` fournis par le header des fichiers FITS.

Afin de connaître l'ascension droite et la déclinaison de notre astéroïde, il est nécessaire de le repérer dans le ciel et de déterminer les coordonnées des étoiles l'entourant. Le header des fichiers FITS nous donne les coordonnées du centre de l'image ainsi que celles du premier pixel associé à l'échelle à appliquer. Cependant, appliquer cette échelle sur nos images reviendrait à approximer la portion du ciel étudiée à un plan. Dans un soucis de précision, j'ai donc voulu calculer les coordonnées des étoiles les plus proches de l'astéroïde et non saturées de manière plus exacte que ce que peut nous permettre les données du header.

J'ai donc pour cela utilisé les images obtenues précédemment. Après avoir repéré l'emplacement de l'astéroïde grâce aux indications fournies avec les fichiers FITS, j'ai sélectionné 10 étoiles proches de lui sur les images non contrastées en faisant bien attention qu'elles ne soient pas saturées pour ne pas perdre en précision.

Sur la figure 2, nous pouvons voir les étoiles sélectionnées sur l'image contrastée afin de mieux se rendre compte de leur emplacement. Une fois les étoiles repérées, j'ai pu noter pour chaque FITS leur numéro de pixel en abscisse et en ordonnée.

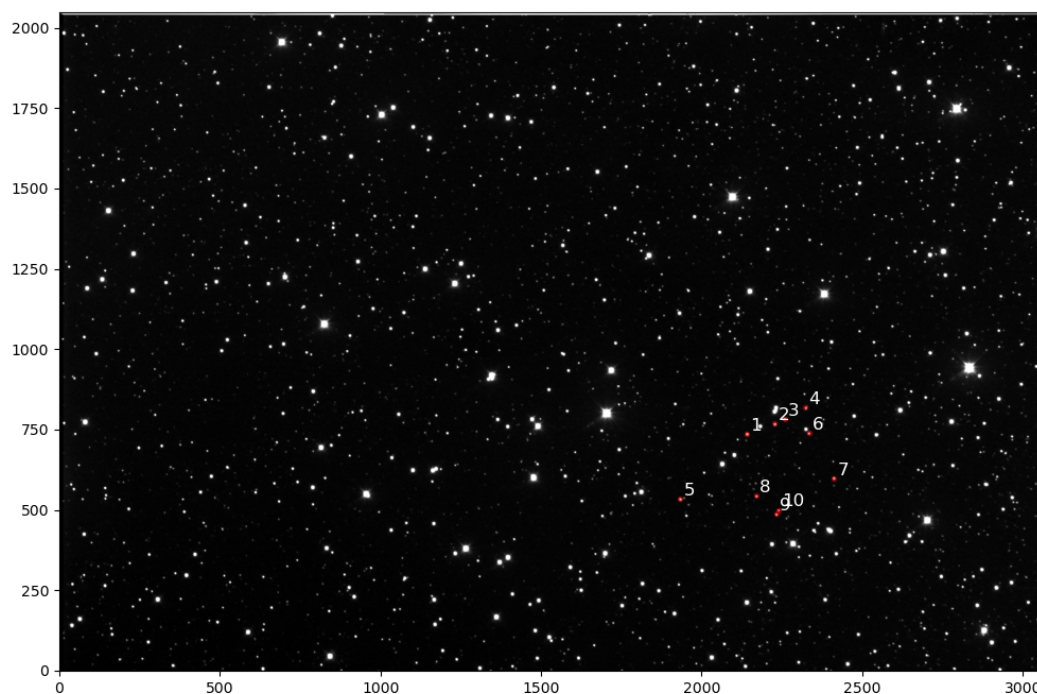


FIGURE 2 – Repérage des étoiles sur les images des fichiers FITS

La deuxième étape afin d'obtenir l'ascension droite et déclinaison de notre objet est de déterminer les coordonnées des étoiles sélectionnées. Pour cela j'ai utilisé les données du catalogue Gaia DR3 en m'aidant de la carte interactive VizieR [7] pour repérer les 10 étoiles précédemment sélectionnées.

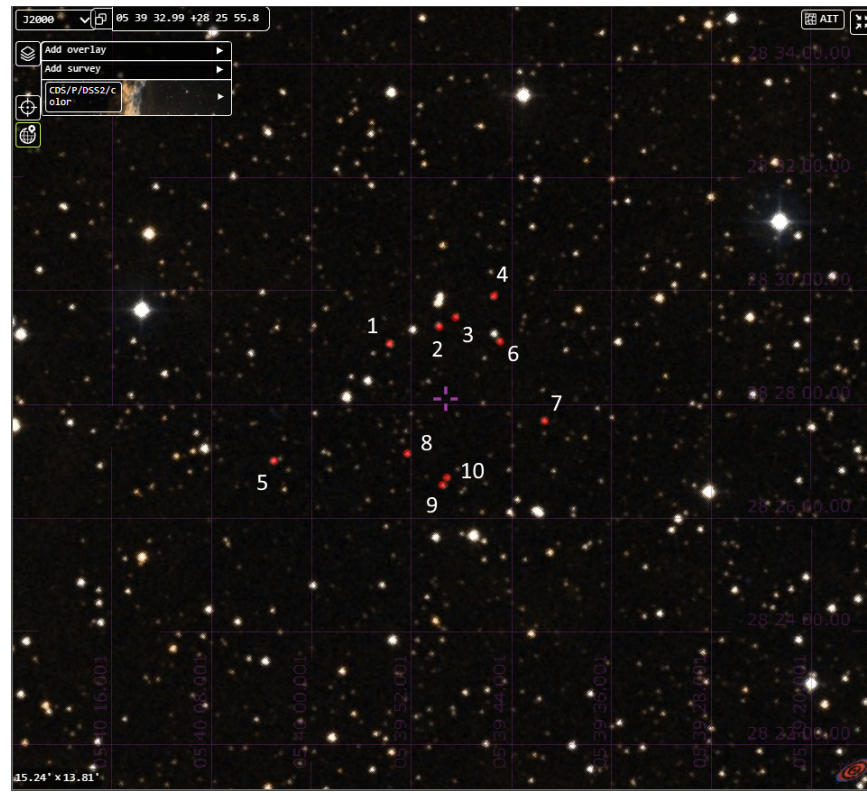
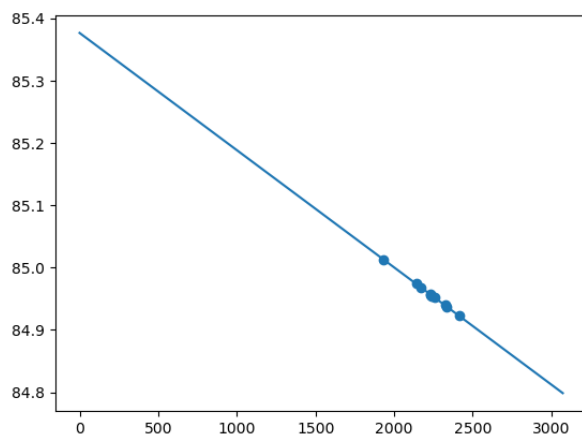
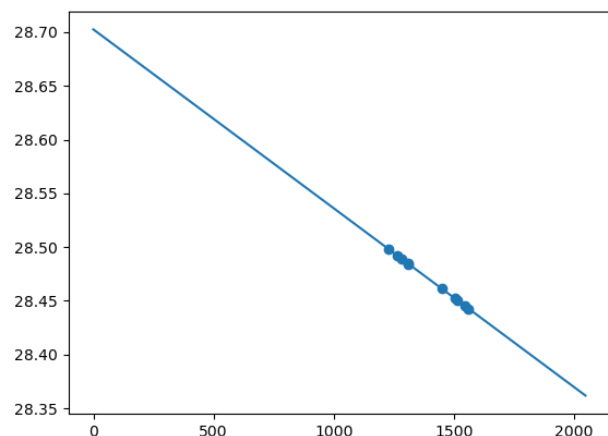


FIGURE 3 – Repérage des étoiles sur le catalogue de Gaia DR3 à l'aide de la carte interactive VizieR.

Grâce à toutes ces données, j'ai pu alors appliquer une régression linéaire dans la zone où se trouve l'astéroïde et en extraire ses coordonnées.



(a) Ascension droite



(b) Déclinaison

FIGURE 4 – Régression linéaire pour le FITS 1. En abscisse les numéros de pixels et en ordonnée l'ascension droite pour le graphique de gauche et la déclinaison pour le graphique de droite.

La figure 4 montre la régression linéaire effectuée où la droite correspond à la courbe calculée et les points sont les 10 étoiles utilisées.

On obtient donc en degrés :

FITS	Ascension Droite	Déclinaison
1	84.945756002	28.468372512
2	84.959328145	28.469689309
3	84.972010131	28.471048984

TABLE 1 – Ascension droite et déclinaison de l'astéroïde sur chaque FITS.

## 2 Méthode de Gauss

Dans l'optique d'appliquer la méthode de gauss, je n'ai pas pu garder les coordonnées de l'astéroïde telles quelles et j'ai dû calculer ses coordonnées cartésiennes tel que l'axe  $X$  pointe vers la périhélie. On a donc le vecteur unitaire observateur/astéroïde  $\vec{L}$ , avec  $\alpha$  son ascension droite et  $\delta$  sa déclinaison :

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (1)$$

En plus de ce vecteur qui doit être calculé pour les 3 images, il est nécessaire d'en définir d'autres afin de pouvoir appliquer la méthode de Gauss convenablement.

Pour un objet tournant autour de la terre, nous pouvons introduire le vecteur  $\vec{R}$ , centre de la Terre/Observateur, dépendant de la latitude  $\phi$  et longitude  $\lambda$  du lieu d'observation. On a :

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R_{\oplus} \cos \phi \cos \theta \\ R_{\oplus} \cos \phi \sin \theta \\ R_{\oplus} \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2)$$

Avec  $\theta(t) = \theta_{\text{Greenwich}} + \lambda + \dot{\theta}(t - t_{\text{ref}})$ . Où  $\theta_{\text{Greenwich}}$  est l'heure sidérale de Greenwich au temps  $t_{\text{ref}}$  et  $\dot{\theta}$  est le mouvement moyen de la Terre valant  $7.292115e - 5 \text{ rad.s}^{-1}$ . [1]

Dans le cadre de notre étude, il est plus raisonnable de faire comme première hypothèse que notre astéroïde tourne autour du Soleil. Ainsi, en plus de ces deux vecteurs, j'ai également défini le vecteur Terre/Soleil  $\vec{S}$  comme il suit avec  $\alpha_{\odot}$  et  $\delta_{\odot}$  l'ascension droite et déclinaison du soleil calculées grâce à la méthode décrite par Paul Schlyter [5] et  $D_{\oplus}$  la distance Terre/Soleil :

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} D_{\oplus} \cos \delta_{\odot} \cos \alpha_{\odot} \\ D_{\oplus} \cos \delta_{\odot} \sin \alpha_{\odot} \\ D_{\oplus} \sin \delta_{\odot} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Le but de ce projet étant de reconstituer l'orbite préliminaire de l'astéroïde observé, il faut tout d'abord, grâce à la méthode de Gauss, déterminer les vecteurs  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  et  $\vec{r}_3$  qui correspondent à sa position par rapport au soleil au moment où les images ont été prises. La méthode de Gauss nous donne pour un cas géocentrique :

$$\vec{r}_i = d_i \vec{L}_i + \vec{R}_i \quad (4)$$

Ici,  $\vec{L}_i$  et  $\vec{R}_i$  viennent d'être calculés et il ne reste donc plus qu'à déterminer  $d_i$ . Pour cela, il est nécessaire de résoudre un polynôme de degrés 8 de la forme suivante où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont déterminés

grâce aux vecteurs  $\vec{L}_i$  et  $\vec{R}_i$  par des opérations successives décrites dans le livre **Orbital Mechanics for Engineering Students** [1] :

$$r_2^8 + \alpha r_2^6 + \beta r_2^3 + \gamma = 0 \quad (5)$$

La racine de ce polynôme se trouve en appliquant la méthode de Newton en prenant arbitrairement comme initialisation 3U.A. Cette valeur sert ensuite à calculer les  $d_i$  et en déduire les  $\vec{r}_i$  avec la formule 4.

Pour appliquer cette méthode à notre cas héliocentrique, j'ai tout d'abord essayé de chercher la valeur des  $\vec{r}_i$  en les posant égal à  $d_i \vec{L}_i + \vec{R}_i - \vec{S}_i$  et en remplaçant  $\vec{R}_i$  par  $\vec{R}_i - \vec{S}_i$  et  $\mu_\oplus$  par  $\mu_\odot$  ( $\mu_i = GM_i$ ) dans le calcul des  $d_i$ . Cependant, il s'est avéré que cette méthode ne devait pas être la bonne au vu des résultats qu'elle donnait. Avec cette définition des  $\vec{r}_i$ , l'astéroïde avait une vitesse aberrante de l'ordre de la centaine de  $\text{km.s}^{-1}$  et une orbite parabolique de telle sorte qu'il sortait du système solaire.

Finalement, j'ai posé, en approximant la Terre à un point :

$$\vec{r}_i = d_i \vec{L}_i - \vec{S}_i \quad (6)$$

Cette approximation a réglé les problèmes de vitesse rencontrés jusqu'à présent et a permis d'obtenir une orbite elliptique autour du soleil. La Terre ayant un rayon très faible ( $10^4$  km) devant la distance Terre/Soleil d'une unité astronomique ( $10^8$  km), la considérer dans nos calculs comme étant un point n'est pas abusif.

Maintenant que nous avons vu comment déterminer les vecteurs position de l'astéroïde pour chaque FITS, nous pouvons déterminer les éléments orbitaux de son orbite :  $(a, e, I, \Omega, \omega, M)$ .

Pour cela, il faut tout d'abord calculer  $(\vec{r}_2, \vec{v}_2)$  où  $\vec{v}_2$  est la vitesse de l'objet au moment où la deuxième image a été prise. Pour cela, on calcule simplement la vitesse telle que :

$$\vec{v}_2 = \frac{f_1 \vec{r}_3 - f_3 \vec{r}_1}{f_1 g_3 + f_3 g_1} \quad (7)$$

Les coefficients  $f_1, f_3, g_1$  et  $g_3$  sont calculés grâce à  $\vec{r}_2$  et à l'heure à laquelle les images ont été prises [1].

Pour passer des coordonnées cartésiennes  $(\vec{r}_2, \vec{v}_2)$  aux éléments orbitaux  $(a, e, I, \Omega, \omega, M)$ , il est tout d'abord nécessaire de modifier notre vecteur position et notre vecteur vitesse afin de les définir par rapport au plan de l'écliptique. En effet, ayant défini nos vecteurs par rapport à la Terre jusqu'à présent, le plan de référence est le plan équatorial. Pour redéfinir notre plan de référence comme étant le plan de l'écliptique, il faut appliquer la matrice de rotation suivante à  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  conformément à la définition de nos axes :

$$M_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (8)$$

Il est également nécessaire de définir le vecteur  $\vec{h} = \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2$ , grâce auquel nous pouvons ainsi appliquer les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{\frac{2}{r_2} - \frac{v_2^2}{\mu}}, & e &= \left\| \frac{\vec{v}_2 \wedge \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}_2}{r_2} \right\|, \\
I &= \arccos \frac{h_z}{h}, & \Omega &= \arccos \frac{n_x}{n}, \\
\omega &= \arccos \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{ne}, & M &= E - e \sin E.
\end{aligned} \tag{9}$$

Avec  $\vec{n} = (0, 0, 1)^T \wedge \vec{h}$  et  $E = 2 \arctan \left( \tan \frac{\nu}{2} / \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \right)$  sachant que  $\nu = \arccos \frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{er}$  [6].

### 3 Analyse des résultats

Afin de m'assurer que j'ai bien codé la méthode de Gauss, j'ai d'abord voulu la tester en géocentrique grâce à un exemple fourni. J'ai donc entré les informations suivantes et nécessaires pour le bon fonctionnement de mon code :

Observation	Temps (s)	Ascension droite	Déclinaison	Temps sidéral local
1	0	43.537	-8.7833	44.506
2	118.105	54.420	-12.074	45.000
3	237.58	64.318	-15.105	45.499

J'ai obtenu :

Éléments	Résultats attendus [1]	Résultats obtenus
$r_2$ (km)	9241.8	9262.7
Vitesse (km.s <sup>-1</sup> )	6.7666	7.0453
$a$ (km)	10000	10941
$e$	0.1000	0.1635
$I$	30	31
$\Omega$	270	271
$\omega$	90	109
$\theta$	45.01	23.81

Dans cette référence, les éléments orbitaux fournis sont  $(a, e, I, \Omega, \omega, \theta)$ , d'où la comparaison sur  $\theta$  et non sur  $M$ .

Nous pouvons voir dans le tableau précédent que les résultats sont relativement satisfaisants concernant les six premiers paramètres. Nous pouvons expliquer les différences obtenues par le choix dans les précisions de constantes ainsi que par les différences entre les méthodes utilisées quant à la résolution des différentes étapes décrites précédemment. De plus, le  $\omega$  et  $\theta$  obtenus sont très éloignés des valeurs attendues. Ces paramètres sont très sensibles aux variations du demi-grand axe  $a$  et de l'excentricité  $e$  et n'ayant pas exactement les mêmes valeurs que le document, cela explique ces grands écarts. Nous pouvons cependant considérer que la méthode de Gauss en géocentrique marche dans l'ensemble, notamment par rapport aux calculs de distance. La vitesse pourrait être améliorée ce qui nous ferait gagner beaucoup de précision pour les éléments orbitaux. Concernant notre astéroïde, avec la méthode de Gauss en héliocentrique décrite dans ce rapport, j'ai obtenu :



Éléments	Résultats obtenus
$r_2$ (UA)	0.999890
Vitesse (km.s <sup>-1</sup> )	27.528
a (UA)	0.8736
e	0.146
I	2.310
$\Omega$	176.75
$\omega$	173.69
$\theta$	172.22
M	169.68

Tout d'abord, il est important de noter que les éléments orbitaux obtenus ne sont pas physiquement aberrants. Nous avons une vitesse réaliste ainsi qu'une excentricité comprise entre 0 et 1 sans donner une orbite trop elliptique. Maintenant, nous pouvons remettre en doute la distance de notre astéroïde au soleil. Il se situerait à une distance d'une unité astronomique alors qu'il est sur une orbite de 0.87 U.A. Il est donc théoriquement en dehors de son orbite ce qui est impossible. Les données obtenues ici sont sûrement erronées et cela doit venir du passage de la méthode de Gauss géocentrique à héliocentrique. Nous pouvons cependant tout de même afficher son orbite comme nous pouvons le voir à sur la figure 5.

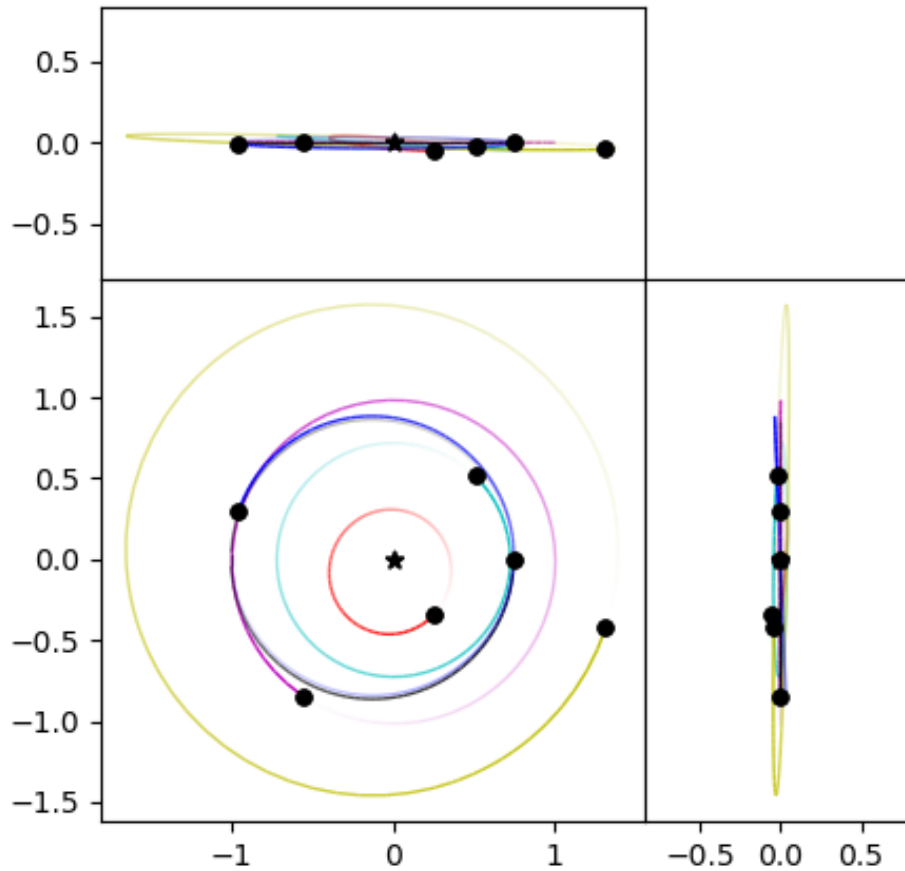


FIGURE 5 – Visualisation de l'orbite de l'astéroïde en bleu avec Mercure, Vénus, la Terre et Mars avec visualisation dans le plan de l'écliptique.

## Conclusion

Finalement, les fichiers FITS sont des fichiers permettant de transmettre un grand nombre d'informations pouvant être utiles pour des problématiques comme celles rencontrées dans ce projet.

Différentes méthodes existent aujourd'hui afin de déterminer l'orbite d'un objet à partir d'une série d'images. Elles sont plus ou moins précises et demandent plus ou moins d'informations ou d'images. Ce travail avait pour but de nous faire découvrir et comprendre de manière précise l'une d'elles en essayant de l'appliquer dans un cas concret. Malgré des résultats dans le cas de la méthode de Gauss héliocentrique qui ne semblent pas réalistes, il était important pour moi de bien comprendre les étapes de la méthode et de la coder proprement. Les résultats de la méthode classique appliquée en géocentrique semblent être convenables et sont une bonne première étape si je devais un jour obtenir des résultats précis d'orbites préliminaires.

Le choix du langage de programmation ayant été laissé au choix entre python et C et ayant déjà eu l'occasion de mener des projets en python lors de stages, j'ai voulu profiter de cette opportunité pour développer mes compétences dans ce nouveau langage. Mis à part la lecture des fichiers FITS qui a été faite avec python à l'aide d'`astropy.io`, j'ai pu réaliser l'entièreté du projet en C et sans librairie, ce qui m'a permis de me familiariser encore plus avec le langage C.

## Bibliographie

- [1] Curtis H. D., 2005, Orbital Mechanics for Engineering Students, <http://www.nssc.ac.cn/wxzygx/weixin/201607/P020160718380095698873.pdf>
- [2] GAUSS C. F., , Théorie du mouvement des corps célestes. [https://www.hist-math.fr/textes/Gauss1864\\_TheorieMouvement.pdf](https://www.hist-math.fr/textes/Gauss1864_TheorieMouvement.pdf)
- [3] Morando B., , Détermination d'une orbite parabolique à partir de 3 observations, <https://adsabs.harvard.edu/full/19890%26T....20....3M>
- [4] NASA 2024, CFITSIO User's Reference Guide, <https://heasarc.gsfc.nasa.gov/FTP/software/fitsio/c/docs/cfitsio.pdf>
- [5] Schlyter P., , Computing planetary positions - a tutorial with worked examples, <https://stjarnhimlen.se/comp/tutorial.html#5>
- [6] Schwarz R., 2017, Cartesian State Vectors to Keplerian Orbit Elements, [https://downloads.rene-schwarz.com/download/M002-Cartesian\\_State\\_Vectors\\_to\\_Keplerian\\_Orbit\\_Elements.pdf](https://downloads.rene-schwarz.com/download/M002-Cartesian_State_Vectors_to_Keplerian_Orbit_Elements.pdf)
- [7] Université de Strasbourg, <https://vizier.cds.unistra.fr/vizier/VizieR/vizmine/vizMine.gml>