Численные методы решения СЛАУ. Прямые методы.

Кафедра вычислительной физики

Нормы и обусловленность

Векторные нормы:

$$\|u\|_\infty = \max_i |u_i|,$$
$$\|u\|_1 = \sum_i |u_i|,$$
$$\|u\|_2 = \left(\sum_i |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нормы и обусловленность

Матричные нормы:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2 = \left(\max_i \lambda_i (A^* A) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Задача.

Показать, что для вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ выражение $\|x\|_* = \max(|x_1 - x_2|, |x_2|)$ является нормой. Найти норму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix},$$

подчиненную этой векторной норме.

Решение.

Решение.

- заметим, что $\|x\|_* = \|Sx\|_\infty$, где
$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

- заметим, что $\|x\|_* = \|Sx\|_\infty$, где
$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- $$\|A\|_* = \sup_x \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} = \sup_x \frac{\|SAx\|_\infty}{\|Sx\|_\infty}.$$

Решение.

- заметим, что $\|x\|_* = \|Sx\|_\infty$, где
$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- $$\|A\|_* = \sup_x \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} = \sup_x \frac{\|SAx\|_\infty}{\|Sx\|_\infty}.$$
- $Sx = y$

Решение.

- заметим, что $\|x\|_* = \|Sx\|_\infty$, где
$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- $$\|A\|_* = \sup_x \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} = \sup_x \frac{\|SAx\|_\infty}{\|Sx\|_\infty}.$$
- $Sx = y$
- $$\|A\|_* = \sup_y \frac{\|SAS^{-1}y\|_\infty}{\|y\|_\infty} = \|SAS^{-1}\|_\infty = 11.$$

Нормы и обусловленность

$$(A + \delta A)u = f + \delta f,$$
$$\frac{||\delta u||}{||u||} \leq \frac{\mu}{1 - \mu\frac{||\delta A||}{||A||}} \left(\frac{||\delta f||}{||f||} + \frac{||\delta A||}{||A||} \right).$$

μ - *число обусловленности матрицы* A, $\mu(A) = ||A^{-1}|| \cdot ||A||$, $\mu \geq 1$.

Задача.

Для СЛАУ $Ax = f$, где $f = (1, f_2)^T$ и

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

матрица A задана точно, а правая часть f может иметь погрешность δf. Найти такое f_2, при котором выполняется неравенство $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$.

Решение.

Решение.

- $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \nu(f)\frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$

Решение.

- $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \nu(f)\frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$
- Найдем верхнюю грань $\nu(f)$ по всем возмущения правой части.

$$\nu(f) = \sup_{\delta f} \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\frac{\|f\|}{\|\delta f\|} = \frac{\|f\|}{\|x\|}\sup_{\delta f}\frac{\|A^{-1}\delta f\|}{\|\delta f\|} = \frac{\|f\|}{\|x\|}\|A^{-1}\|.$$

Прямые методы решения СЛАУ $Ax = f$.

Прямые методы решения СЛАУ $Ax = f$.

- Метода Гаусса – $Ux = c$ (обратный ход)

Прямые методы решения СЛАУ $Ax = f$.

- Метода Гаусса – $Ux = c$ (обратный ход)
- LU-разложения – $LUx = f$. $Ly = f$ (прямой ход) и $Ux = y$ (обратный ход)

Прямые методы решения СЛАУ $Ax = f$.

- Метода Гаусса – $Ux = c$ (обратный ход)
- LU-разложения – $LUx = f$. $Ly = f$ (прямой ход) и $Ux = y$ (обратный ход)
- Метод квадратного корня (разложение Холецкого) $LL^T x = f$, если матрица A симметричная и положительно определенная

Условие диагонального преобладания

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|.$$

Задача.

Представить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

в виде $A = LL^T$, используя разложение Холецкого.

Решение.

Решение.

- матрица L имеет общий вид

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}.$$

Решение.

- матрица L имеет общий вид

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}.$$

- Тогда справедливо

$$A = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{11}L_{31} & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Решение.

- матрица L имеет общий вид
$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}.$$
- Тогда справедливо
$$A = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{11}L_{31} & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$
- Используя такое представление матрицы A будем последовательно вычислять элементы матрицы L, двигаясь по матрице A от первой строки к последней, начиная каждый раз с диагонального элемента вправо: $L_{11} = \sqrt{4} = 2$, $L_{21} = -2/L_{11} = -1$, $L_{31} = 2/L_{11} = 1$, $L_{22} = \sqrt{2 - L_{21}^2} = 1$, $L_{32} = \dfrac{-4 - L_{21}L_{31}}{L_{22}} = -3$, $L_{33} = \sqrt{11 - L_{31}^2 - L_{32}^2} = 1$.