Численное дифференцирование. Метод неопределенных коэффициентов.

Кафедра вычислительной физики

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов

- На $[x_{min}, x_{max}]$ задана равномерная сетка из $N = m + l + 1$ узлов.

Метод неопределенных коэффициентов

- На $[x_{min}, x_{max}]$ задана равномерная сетка из $N = m + l + 1$ узлов.
- На этой области определена бесконечно непрерывно дифференцируемая ф-я f. Известны значения этой ф-и во всех узлах рассматриваемой сетки $\{f_i\}_{i=-l}^{m}$.

Метод неопределенных коэффициентов

- На $[x_{min}, x_{max}]$ задана равномерная сетка из $N = m + l + 1$ узлов.
- На этой области определена бесконечно непрерывно дифференцируемая ф-я f. Известны значения этой ф-и во всех узлах рассматриваемой сетки $\{f_i\}_{i=-l}^{m}$.
- Построим метод

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h} \sum_{k=-l}^{m} \alpha_k f(x_0 + kh)$$

Необходимо подобрать веса так, чтобы по этим значениям порядок точности был максимальным.

Метод неопределенных коэффициентов

- $N+1$ уравнение относительно $N+1$ неизвестной: $A\alpha = b$, где $b^T = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T$, а матрица A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -l & -l+1 & \ldots & m \\ (-l)^2 & (-l+1)^2 & \ldots & m^2 \\ (-l)^3 & (-l+1)^3 & \ldots & m^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Задача.

Задана табличная функция

x	-1	1	2
f(x)	5	2	1

Функция $f(x)$ во всех узлах задана с абсолютной погрешностью 10^{-1}. Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу функций: $\max\left|f^{(3)}(x)\right| \leq M_3 = 0.3$. Найти формулу вычисления производной в точке $x = -1$ со вторым порядком аппроксимации, вычислить производную и оценить точность вычисленного значения производной.

Решение.

Решение.

- Аппроксимационная формула

$$f'(x_0) \approx \frac{\alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_0 + 2h) + \alpha_2 f(x_0 + 3h)}{h}$$

Решение.

- Аппроксимационная формула

$$f'(x_0) \approx \frac{\alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_0 + 2h) + \alpha_2 f(x_0 + 3h)}{h}$$

-

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + \frac{4h^2}{2} f''(x_0) + \frac{8h^3}{6} f'''(\xi_1),$$

$$f(x_0 + 3h) = f(x_0) + 3hf'(x_0) + \frac{9h^2}{2} f''(x_0) + \frac{27h^3}{6} f'''(\xi_2).$$

Решение. СЛАУ на коэффициенты

Решение. СЛАУ на коэффициенты

- $$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 1, \\ 2\alpha_1 + \frac{9}{2}\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решение. СЛАУ на коэффициенты

- $$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 1, \\ 2\alpha_1 + \frac{9}{2}\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$
- Решая СЛАУ на неопределенные коэффициенты, получим $\alpha_0 = -\frac{5}{6}, \alpha_1 = \frac{3}{2}, \alpha_2 = -\frac{2}{3}$. и расчетная формула:

$$f'(x_0) \approx \frac{-\frac{5}{6}f(x_0) + \frac{3}{2}f(x_0 + 2h) - \frac{2}{3}f(x_0 + 3h)}{h}$$

Решение. Ошибка метода

Решение. Ошибка метода

- Аппроксимационная формула

$$f'_{approx}(x_0) = f'(x_0) + \frac{\alpha_1 \frac{8h^3}{6} f'''(\xi_1) + \alpha_2 \frac{27h^3}{6} f'''(\xi_2)}{h}$$

Решение. Ошибка метода

- Аппроксимационная формула

$$f'_{approx}(x_0) = f'(x_0) + \frac{\alpha_1 \frac{8h^3}{6} f'''(\xi_1) + \alpha_2 \frac{27h^3}{6} f'''(\xi_2)}{h}$$

- Ошибка метода:

$$\Delta_{method} = \frac{|\alpha_1 f'''(\xi_1)| \frac{8h^3}{6} + |\alpha_2 f'''(\xi_2)| \frac{27h^3}{6}}{h} \leq M_3 5h^2$$

Решение. Ошибка входных данных

Решение. Ошибка входных данных

- $f(x_i) \approx f(x_i) + \delta_i$

Решение. Ошибка входных данных

- $f(x_i) \approx f(x_i) + \delta_i$
- Аппроксимационная формула

$$f'(x_0) = f'_{approx}(x_0) + \frac{\alpha_0\delta_0 + \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2}{h}$$

Решение. Ошибка входных данных

- $f(x_i) \approx f(x_i) + \delta_i$
- Аппроксимационная формула

$$f'(x_0) = f'_{approx}(x_0) + \frac{\alpha_0\delta_0 + \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2}{h}$$

- Ошибка входных данных

$$\Delta_{in} = \frac{|\alpha_0\delta_0| + |\alpha_1\delta_1| + |\alpha_2\delta_2|}{h} = 0.3$$

Решение. Ошибка входных данных

- $f(x_i) \approx f(x_i) + \delta_i$
- Аппроксимационная формула

$$f'(x_0) = f'_{approx}(x_0) + \frac{\alpha_0\delta_0 + \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2}{h}$$

- Ошибка входных данных

$$\Delta_{in} = \frac{|\alpha_0\delta_0| + |\alpha_1\delta_1| + |\alpha_2\delta_2|}{h} = 0.3$$

- Полная ошибка - сумма ошибки метода и входных данных.

Оценка порядка точности метода

Оценка порядка точности метода

- Ошибка метода с порядком точности p: $\epsilon_h = Ch^p$, где h - сеточный шаг

Оценка порядка точности метода

- Ошибка метода с порядком точности p: $\epsilon_h = Ch^p$, где h - сеточный шаг
- На сетке с вдвое меньшим шагом $\epsilon_{h/2} = C_1 \left(\frac{h}{2}\right)^p$

Оценка порядка точности метода

- Ошибка метода с порядком точности p: $\epsilon_h = Ch^p$, где h - сеточный шаг
- На сетке с вдвое меньшим шагом $\epsilon_{h/2} = C_1 \left(\frac{h}{2}\right)^p$
- $C \approx C_1$

Оценка порядка точности метода

- Ошибка метода с порядком точности p: $\epsilon_h = Ch^p$, где h - сеточный шаг
- На сетке с вдвое меньшим шагом $\epsilon_{h/2} = C_1 \left(\frac{h}{2}\right)^p$
- $C \approx C_1$
- $$p = \log_2 \frac{\epsilon_h}{\epsilon_{h/2}}$$