1. Численное дифференцирование

1.1. Метод неопределенных коэффициентов

Пусть в одномерной области $[x_{min}, x_{max}]$ задана равномерная сетка из $N+1 = m+l+1$ узлов. *Равномерная сетка* - сетка, расстояние между двумя любыми соседними узлами которой равно h, где h - сеточный шаг. На этой области определена бесконечно непрерывно дифференцируемая функция f. Известны значения этой функции во всех узлах рассматриваемой сетки $\{f_i\}_{i=-l}^{m}$. В этом случае говорят, что определена *сеточная функция* - проекция функции на сетку. Пусть необходимо вычислить значение производной в некотором узле j, слева от которого l узлов, справа m. Построим метод максимального порядка точности по значениям функции в сеточных узлах. Под порядком точности метода понимаем степень при h старшего члена ошибки.

Для этого представим производную в узле j как сумму значений функции во всех узлах, взятых с некоторыми весами:

$$f'(x_j) \approx \frac{1}{h}\sum_{k=-l}^{m} \alpha_k f(x_j + kh) \tag{1}$$

Подберем веса так, чтобы по этим значениям функции порядок точности метода был максимальным. Оказывается, что по $N+1$ точке можно построить метод N-го порядка точности. Для этого разложим в ряд Тейлора все члены, входящие в суммирование в (1), относительно точки x_j, сгруппируем члены при одинаковых степенях и приравняем к нулю коэффициенты при степенях ниже $N+1$ (кроме первой, для нее приравняем к 1). В итоге получим $N+1$ уравнение относительно $N+1$ неизвестной. В матричном виде получившуюся систему можно представить как $A\alpha = b$, где $b^T = (0, 1, 0, ..., 0)^T$, а матрица A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ -l & -l+1 & ... & m \\ (-l)^2 & (-l+1)^2 & ... & m^2 \\ (-l)^3 & (-l+1)^3 & ... & m^3 \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} \tag{2}$$

является матрицей Вандермонда, поэтому система всегда имеет единственное решение.

Задача 1 (МНК для численного дифференцирования).
Задана табличная функция

x	-1	1	2
$f(x)$	5	2	1

Функция $f(x)$ во всех узлах задана с абсолютной погрешностью 10^{-1}. Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу функций: $\max\left|f^{(3)}(x)\right| \leq M_3 = 0.3$. *Найти формулу вычисления производной в точке $x = -1$ со вторым порядком аппроксимации, вычислить производную и оценить точность вычисленного значения производной.*

Решение: аппроксимационная формула для вычисления первой производной с помощью метода неопределенных коэффициентов будет иметь вид

$$f'(x) \approx \frac{\alpha_0 f(x) + \alpha_1 f(x+2h) + \alpha_2 f(x+3h)}{h}. \tag{3}$$

Здесь $h = 1$. Подставим в эту формулу разложение в ряд Тейлора функций $f(x+2h)$ и $f(x+3h)$ до членов третьего порядка по h (сколько узлов, до такого порядка и надо разложить). Сгруппировав члены по степеням h, получим систему уравнений на неопределенные коэффициенты. Решая систему, получим

$$\alpha_0 = -\frac{5}{6}, \alpha_1 = \frac{3}{2}, \alpha_2 = -\frac{2}{3}.$$

Ошибку входных данных оценим по аналогии с тем, как это делалось в формуле (**??**):

$$\Delta_{in} = \frac{|\alpha_0\delta_0| + |\alpha_1\delta_1| + |\alpha_2\delta_2|}{h} = 0.3.$$

Ошибка метода - те члены, которые не обнулились после подстановки разложений в ряд Тейлора $f(x+2h)$ и $f(x+3h)$ в формуле (3) за счет выбора неопределенных коэффициентов:

$$\Delta_{method} = \frac{|\alpha_1 f'''(\xi_1)|\,\frac{8h^3}{6} + |\alpha_2 f'''(\xi_2)|\,\frac{27h^3}{6}}{h} \leq M_3 5h^2 = 1.5.$$

Полная ошибка - сумма ошибки метода и входных данных ($\leq$ 1.8).■

1.2. Оценка порядка точности метода

Рассмотрим метод с порядком точности p. Тогда ошибка метода $\epsilon_h = Ch^p$, где h - сеточный шаг. На сетке с вдвое меньшим шагом ошибка метода будет $\epsilon_{h/2} = C_1 \left(\frac{h}{2}\right)^p$. Если шаг h достаточно мелкий (функция меняется не очень сильно), то можно считать, что $C \approx C_1$. Тогда, исключив C из первого равенства за счет второго, можно получить, что

$$p = \log_2 \frac{\epsilon_h}{\epsilon_{h/2}} \tag{4}$$