4. Численные методы решения СЛАУ

Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) условно можно поделить на два класса: *прямые методы* и *итерационные методы*. Если вычисления не ограничены машинной точностью, то прямые методы позволяют находить решение точно после выполнения заданного количества элементарных операций, определяемых методом. Итерационные методы дают приближенное решения с любой заданной точностью после некоторого количества итераций, определяемого желаемой точностью. Классические примеры прямых методов: метод Гаусса, LU-разложение, разложение Холецкого (метод квадратного корня), метод трехдиагональной прогонки. Выбор метода зависит от постановки задачи. Какие-то методы применяются к системам с матрицами общего вида, другие - специального. Классические примеры итерационных методов: метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя.

4.1. Нормы и обусловленность

Векторные нормы:

$$\|u\|_\infty = \max_i |u_i|,$$
$$\|u\|_1 = \sum_i |u_i|,$$
$$\|u\|_2 = \left(\sum_i |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Матричные нормы:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$
$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|,$$
$$\|A\|_2 = \left(\max_i \lambda_i(A^*A)\right)^{\frac{1}{2}} = \max_i \sigma_i(A).$$

Здесь σ_i - сингулярное число матрицы.

В общем случае векторная и матричная норма связаны следующим соотношением (определение подчиненной нормы):

$$\|A\| = \sup_u \frac{\|Au\|}{\|u\|}.$$

Важно помнить, что матричные нормы удовлетворяют свойству:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

для всех матриц A и B допускающих умножение, в том числе и когда B – это вектор-столбец.

Задача 4 (Проверка на выполнение свойств нормы). *Показать, что для вектора* $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ *выражение* $\|x\|_* = \max(|x_1 - x_2|, |x_2|)$ *является нормой. Найти норму матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix},$$

подчиненную этой векторной норме.

Решение: заметим, что $\|x\|_* = \|Sx\|_\infty$, где

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя это свойство, несложно убедиться, что все аксиомы нормы выполняются. Вычислим

$$\|A\|_* = \sup_x \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} = \sup_x \frac{\|SAx\|_\infty}{\|Sx\|_\infty}.$$

Далее используем замену $Sx = y$, тогда

$$\|A\|_* = \sup_y \frac{\|SAS^{-1}y\|_\infty}{\|y\|_\infty} = \|SAS^{-1}\|_\infty = 11.\blacksquare$$

Обусловленность СЛАУ - то, как будет меняться решение системы при возмущении матрицы системы и ее правой части. Иными словами – чувствительность к ошибкам на входе (в частности, к ошибкам округления):

$$(A+\delta A)(u+\delta u) = f+\delta f,$$
$$\frac{||\delta u||}{||u||} \leq \frac{\mu}{1-\mu\frac{||\delta A||}{||A||}}\left(\frac{||\delta f||}{||f||}+\frac{||\delta A||}{||A||}\right).$$

Здесь δA - возмущение матрицы системы, δf - возмущение правой части, μ - *число обусловленности матрицы* A,

$$\mu(A) = ||A^{-1}|| \cdot ||A||, \mu \geq 1.$$

Число обусловленности можно считать мерой обусловленности системы.

Задача 5 (Оценка относительной ошибки решения системы). *Для СЛАУ* $Ax = f$*, где* $f = (1, f_2)^T$ *и*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

матрица A *задана точно, а правая часть* f *может иметь возмущение* δf*. Найти такое* f_2*, при котором выполняется неравенство* $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\|\delta f\|_2}{\|f\|_2}$.

Решение: рассмотрим соотношение $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \nu(f)\frac{\|\delta f\|_2}{\|f\|_2}$. Чтобы удовлетворить условию задачи, надо найти такую f, чтобы $\nu(f) = 1$. Найдем верхнюю грань $\nu(f)$ по всем возмущениям правой части δf:

$$\nu(f) = \sup_{\delta f}\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2}\frac{\|f\|_2}{\|\delta f\|_2} = \sup_{\delta f}\frac{\|f\|_2}{\|x\|_2}\frac{\|A^{-1}\delta f\|_2}{\|\delta f\|_2} = \frac{\|f\|_2}{\|x\|_2}\|A^{-1}\|_2.$$

Чтобы получить последнее равенство, было использовано определение нормы матрицы $\|A^{-1}\|_2 = \sup_{\delta f}\frac{\|A^{-1}\delta f\|_2}{\|\delta f\|_2}$. Несложно убедиться, что в этой задаче $\|A^{-1}\|_2 = 1$. Решая исходную СЛАУ, получим решение x относительно f_2, $x = \frac{1}{3}(2-f_2, 2f_2-1)^T$. Приравнивая $\nu(f)$ к единице, из последнего равенства получаем соотношение на f_2 для выполнения требуемой оценки. А именно: $\frac{\sqrt{1+f_2^2}}{\sqrt{(2-f_2)^2/9+(2f_2-1)^2/9}} \cdot 1 = 1$. Решение этого уравнения дает искомое значения $f_2 = -1$. ■

Замечание: можно показать, что верхняя грань $\nu(f)$ по f как раз равняется μ, а нижняя - одному. То есть провести более строгую оценку в задаче не выйдет.

4.2. Прямые методы

При решении системы вида $Ax = f$ после применения метода Гаусса конечный вид системы после преобразований будет $Ux = c$, после применения LU-разложения – $LUx = f$. Здесь U - верхнетреугольная матрица, L - нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали. Метод Гаусса и метод, основанный на LU-разложении, могут быть применены к системам с матрицами общего вида. Элементарные операции, необходимые для представления матрицы A в виде $A = LU$, аналогичны элементарным операциям, используемым в методе Гаусса. В случае, когда матрица A симметричная и положительно определенная, может быть использован метод квадратного корня (разложение Холецкого) $LL^T x = f$. Здесь элементы матрицы L вычисляются по формулам. Симметричные и положительно определенные матрицы часто возникают, например, при использовании метода наименьших квадратов и численном решении дифференциальных уравнений. По сравнению с методом Гаусса или LU-разложением, он устойчивее численно и требует примерно вдвое меньше арифметических операций.

Решение методом Гаусса получается применением обратного хода по конечному виду системы $Ux = c$. Начиная с последней строки и двигаясь последовательно к первой находятся все неизвестные системы. Схема решения задачи с помощью LU-разложения сводится к последовательному решению двух систем $Ly = f$ (прямой ход) и $Ux = y$ (обратный ход). Аналогично и для метода квадратного корня. Стоит обратить внимание, что методы, основанные на разложении матрицы системы, в отличии от метода Гаусса, не меняют правую часть системы. Это означает, что они могут быть применены многократно для систем с одной и той же матрицей и разными правыми частями. Такая задача возникает, например, при численном обращении матрицы.

При применении метода Гаусса стоит помнить о выделении главного члена. Выделение главного члена позволяет избежать проблем, связанных с округлением при численном решении задачи. Хотя выделение главного члена может быть не всегда оправдано, так как может нарушать структуру матрицы системы.

В случае, когда для всех строк матрицы системы выполняется *условие диагонального преобладания*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|,$$

выделять главный член не нужно.

Задача 6 (Разложение Холецкого). *Представить матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

в виде $A = LL^T$, используя разложение Холецкого.

Решение: матрица L имеет общий вид

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливо

$$A = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{11}L_{31} & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Используя такое представление матрицы A будем последовательно вычислять элементы матрицы L, двигаясь по матрице A от первой строки к последней, начиная каждый раз с диагонального элемента вправо: $L_{11} = \sqrt{4} = 2$, $L_{21} = -2/L_{11} = -1$, $L_{31} = 2/L_{11} = 1$, $L_{22} = \sqrt{2 - L_{21}^2} = 1$, $L_{32} = \dfrac{-4 - L_{21}L_{31}}{L_{22}} = -3$, $L_{33} = \sqrt{11 - L_{31}^2 - L_{32}^2} = 1$.

4.3. Метод простой итерации (метод Ричардсона)

Для решения СЛАУ вида $Ax = b$ метод простой итерации будет иметь вид

$$x_{k+1} = (E - \tau A)x_k + \tau b, \tag{8}$$