笔记：二阶行列式和三阶行列式的定义

李爽

2025 年 2 月 2 日

1 定义

有以下一个方程组：

$$\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 7x+9y=11 \end{cases}$$

解出来的是：

$$x=\frac{5\times 9-4\times 11}{3\times 9-4\times 7}$$

$$y=\frac{3\times 11-5\times 7}{3\times 9-4\times 7}$$

观察可知，x 和 y 的解都可以表示为两个数相乘减两个数相乘。为了表示方便，引出了另一个符号，即二阶行列式。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\times d-b\times c$$

因此，x 和 y 的解都可以表示为：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 11 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}$$

2 克莱姆法则：快速求解二元一次方程

现有以下一个方程组：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

其中，$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 都是常数。

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

3 二阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

a_{ij} 被称为一个**元素**。i 是**行**，j 是**列**。从行列式的左上角到右下角被称为**主对角线**，右上角到左下角被称为**副对角线**。对角线方向相乘并相减被称为**对角线法则**。

4 三阶行列式的定义

三阶行列式可表示为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

三阶行列式计算方法为:

原式 $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

4.1 上三角行列式

如下所示的行列式就被称为上三角行列式。空白区域都是 0。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{vmatrix}$$

此时原式 $= a_{11}a_{22}a_{33}$

4.2 下三角行列式

下三角行列式如下所示，空白区域都是 0。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

同上三角行列式，此时原式 $= a_{11}a_{22}a_{33}$

4.3 主对角线行列式

主对角线行列式如下所示，空白区域都是 0。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{vmatrix}$$

同上三角行列式，此时原式 $= a_{11}a_{22}a_{33}$