

Vrtavka

Sara Lisjak Tvačar

Fizikalni praktikum 4: 3/12

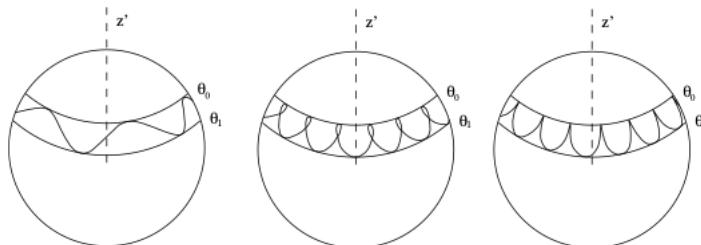
1 Uvod

V splošni obliki predstavlja gibanje vrtavke eno najtežjih nalog mehanike. Vendar se dajo bistvene lastnosti vrtavke prikazati na primeru rotacijsko simetrične vrtavke. Vrtavko imenujemo rotirajoče togo telo, katerega os lahko spreminja smer v prostoru in je vpeta (podprta) le v eni točki. Imamo 3 različne osi: - geometrijska os vrtavke \mathbf{z} - vektor kotne hitrosti določa trenutno smer osi vrtenja - vektor vrtilne količine določa tretjo os. Druga dva sta preko vztrajnostnega tenzorja J_{ij} povezana z enačbo: $\Gamma_i = J_{ij}\omega_j$. Gibanje opazujemo v laboratorijskem koordinatnem sistemu, enačbe gibanja pa najlažje napišemo v lastnem sistemu telesa. Koordinatne osi so vezane na togo telo in imajo smeri glavnih osi tenzorja vztrajnostnega momenta.

Za simetrično vrtavko velja, da vsi trije vektorji \mathbf{z} , \mathbf{l} in $\mathbf{\Gamma}$ vedno ležijo v eni ravnini, ki jo npr. določata \mathbf{l} in \mathbf{z} . Na vrtavko, ki ni podprta v težišču, deluje zaradi sile težnosti navor: $M = mgl\sin(\theta)$, kjer je m masa vrtavke, g težnosti pospešek, l razdalja med težiščem in oporno točko osi (l je ročica navora), in θ kot med osjo vrtavke in vertikalo. Za simetrično vrtavko pod vplivom težnosti je še mogoče dobiti točne rešitve Eulerjevih enačb, to je enačb, ki opisujejo gibanje vrtavke. Gibanje je precej zapleteno in ga opišemo s tem, kako se os vrtavke giblje v prostoru (določena je s kotoma θ in ϕ). Vektor $\mathbf{\Gamma}$ ni več konstanten, ohranja pa se energija in tudi \mathbf{z} je konstanta gibanja, saj okoli vzdolžne osi vrtavke ni navora.

Enostavneje se da gibanje opisati približno za primer tako imenovane "hitre vrtavke", torej pri pogoju, da je kinetična energija mnogo večja od potencialne ($1/2 J \omega^2 \gg 2mgl$). ($2mgl$ je razlika potencialne energije med stanjema $\theta = 0$ in $\theta = \pi$) Gibanje osi vrtavke ponazorimo na naslednji način. Določena točka na osi opisuje neko trajektorijo na krogli s središčem v točki, kjer je os fiksirana. Slika 1 kaže tri možne primere, ki nastopajo pri različnih začetnih pogojih. Slika 1.1 c kaže primer, če hitro vrtečo vrtavko nagnemo iz navpičnice za kot θ_0 in jo spustimo. Naklonski kot se spreminja med 0 in π in v tem približku hitre vrtavke dobimo:

$$\cos(\theta_0) - \cos(\theta_1) \approx \frac{J_{11}}{J_{33}} \frac{2mgl}{J_{33}\omega_z^2} * \sin^2(\theta_0)$$



Slika 1: Gibanje osi simetrične vrtavke pri različnih začetnih pogojih.

Na splošno dobimo obe vrsti gibanja osi: nutacijo in precesijo.

1.1 Nutacija

Način gibanja kota θ je seveda odvisen od začetnih pogojev in od dušenja. Vrtavka niha med skrajnima vrednostma kota θ z nutacijsko kotno hitrostjo N :

$$\omega_N = \frac{J_{33}}{J_{11}} \omega_z$$

Frekvenca nutacije bo v našem primeru primerljiva s frekvenco vrtenja vrtavke in se zmanjšuje pri večjih oddaljenostih uteži od težišča. Čim hitreje se vrtil vrtavka, tem težje je vzbuditi nutacijo in je tudi bolj dušena. Nutacija je dušena zaradi trenja. Hitrejša kot je vrtavka, manj je začetnega padca in s tem manjša začetna amplituda nutacije. Nutacija je poleg tega hitrejša, saj je sorazmerna hitrosti vrtenja vrtavke in bolj dušena, zato je skoraj ne opazimo več.

1.2 Precesija

To je gibanje okrog osi z (navpičnice v prostoru) s kotno hitrostjo:

$$\omega_{pr} = \frac{mgl}{J_{33}\omega_z}$$

S tem pridemo v težavo v prej obravnavanem primeru, saj naj bi se precesija začela s konstantno precesijsko frekvenco takoj, ko vrtavko spustimo iz mirovanja. (Za preskok iz mirovanja v enako- merno precesijo bi potrebovali neskončen navor.) Ko vrtavko spustimo, v resnici začne padati zaradi sile teže. To se zelo dobro vidi pri počasnejši vrtavki. Zaradi navora sila teže začne vrtavka s precesijo. Začetno padanje se nadaljuje v nutacijo.

2 Naloga

Izmeri precesijsko in nutacijsko kotno hitrost v odvisnosti od kotne hitrosti vrtavke. Izvedi meritev pri vsaj treh frekvencah . Na primer pri približno 600,

500 in 400 obratov na minuto. Gornjo meritev izvedi pri nastavitvah vrtavke, ko je vrtavka z utežjo blizu krogle, na sredini palice in na dnu palice. Izmerjene vrednosti primerjaj z izračunanimi in naredi tabelo.

3 Meritve

Na palico pa je še fiksno pritrjena ploščica z močno kontrastnim vzorcem. Z opazovanjem slednjega pod svetlobo stroboskopa določimo frekvenco rotacije okoli lastne osi vrtavke. Meritev frekvence začnemo tako, da stroboskop nastavimo na frekvenco, ki je višja od pričakovanega rezultata meritve, potem pa frekvenco stroboskopa nižamo. Opazujemo vzorec na vrtavki. Ko ta obmiruje, sta frekvenci svetlobnih bliskov in vrtavke enaki. S tem, da začnemo pri visokih frekvencah, se izognemo napaki, da bi se vrtavka med bliski večkrat zavrtela.

Meritev precesije vzbudimo z prislonitvijo svinčnika na os vrtenja vrtavke, in jo ponovimo večkrat, pri različnih odklonih osi.

Meritev nutacije izvedemo tako, da jo najprej vzbudimo z udarcem po palici in nastavimo frekvenco stroboskopa, da se ujema z frekvenco nutacije (nutacija takrat navidezno izgine, saj osvetlimo vrh palice vedno pri istem nutacijskem kotu.)

3.1 Podatki za izračune

1. Vztrajnostni moment krogle: $J = \frac{2}{5}mr^2$ (spodnja krogla)
2. Vztrajnostni moment valja (z osi): $J = \frac{1}{2}mr^2$ (palica, okrogla ploščica, utež)
3. Vztrajnostni moment valja (x, y -i pravokotno na geometrijsko os): $J = m(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{12}h^2)$

$$J_{33} = 1389.64[g/cm^2]$$

$$J_{11} = 3280.3[g/cm^2] + L^2 * 18[g]$$

$$0.426[cm] + 0.031L$$

4 Rezultati

Oddaljenosti uteži od krogle:

- (a) 0cm
- (b) 4.5cm
- (c) 7.5cm (s prostorom za držanje)

| Meritev: Utež na dnu | | | | |
|----------------------|--------------------|-----------------|------------------------|---------------------|
| $\nu_z [Hz]$ | $\omega_{pr} [Hz]$ | $\omega_N [Hz]$ | $\omega_{pr} - r [Hz]$ | $\omega_N - r [Hz]$ |
| 600 | 2.46 | 190 | 2.88 ± 0.06 | 254 ± 6 |
| 500 | 2.61 | 260 | 3.46 ± 0.08 | 211 ± 5 |
| 400 | 4.00 | 240 | 4.32 ± 0.09 | 169 ± 4 |

| Meritev: Utež na sredini | | | | |
|--------------------------|--------------------|------------------|------------------------|---------------------|
| $\nu_z [rpm]$ | $\omega_{pr} [Hz]$ | $\omega_N [rpm]$ | $\omega_{pr} - r [Hz]$ | $\omega_N - r [Hz]$ |
| 600 | 3.30 | 250 | 5.92 ± 0.13 | 253 ± 6 |
| 500 | 3.39 | 220 | 7.11 ± 0.16 | 211 ± 5 |
| 400 | 3.49 | 230 | 8.90 ± 0.20 | 169 ± 4 |

| Meritev: Utež na vrhu | | | | |
|-----------------------|--------------------|------------------|------------------------|---------------------|
| $\nu_z [Hz]$ | $\omega_{pr} [Hz]$ | $\omega_N [rpm]$ | $\omega_{pr} - r [Hz]$ | $\omega_N - r [Hz]$ |
| 600 | 3.49 | 180 | 7.95 ± 0.17 | 252 ± 5 |
| 500 | 3.80 | 170 | 9.54 ± 0.21 | 210 ± 5 |
| 400 | 3.92 | 150 | 11.9 ± 0.26 | 168 ± 4 |

Precesijsko frekvenco sem izračunala preko $\omega_{pr} = \frac{2\pi}{t}$, z upoštevanjem, da je t čas ene rotacije. Meritev notacijske frekvence sem izvedla s pomočjo slow-motion posnetka na telefonu, kjer sem ponovno štela rotacije na časovni interval in jih nato preračunala v rpm.

4.1 Napake

Prispevek k napakam pri izračunanih vrednostih pride izključno od napake oddaljenosti uteži. Ostale prispevke za točne in k napaki niso prispevali.

5 Zaključek

V tabeli so prikazane izračunane in izmerjene vrednosti notacijske in precesijske frekvence. Precesijska frekvenca se manjša, nutacijska frekvenca pa poveča, ko povečamo kotno hitrost vrtavke.