

Poševni met s kvadratnim uporom, vetrom in Coriolisom

Sara Lisjak Tavčar

28.6.2022

1 Uvod

Balistika. Cilj naloge je predstaviti trajektorije delca v odvisnosti od razmer na Zemlji. Na delec vpliva sila gravitacije, sila upora in v posebnih okoliščinah tudi veter. V kolikor gibanje obravnavamo v treh dimenzijah je prisotna tudi Coriolisova sila. Nalogo je sestavljena iz več delov, najprej bom obravnavala odvisnost trajektorije od naklonskega kota, velikosti začetne hitrosti in parametrov v brezveterju, nato v konstantnem horizontalnem vetrovnem polju in za konec še vključno s Coriolisovo silo. Za konec bom prvi del izvedla ponovno z upoštevanjem barometerske enačbe, ki opisuje spreminjanje gostote zraka z višino.

Gibanje opisujejo Newtonove enačbe, natančneje 2. Newtonov zakon.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

Enačbo je potrebno prilagoditi okoliščinam in numerično izračunati časovni razvoj hitrosti in poti. Začetne pogoje sem določila podobne kot so bili predlagani v navodilu. Hitrost sem izbrala manjšo, efektivni presek in maso večja, da bi bil vpliv upora bolj izrazit.

- $S = 30cm^2$
- $\rho = 1.2kg/m^3$
- $m = 70 \text{ kg}$
- $c_{telo} = 1$ - koeficient upornosti
- $g = 9.8m/s^2$
- $v_0 = 200m/s$

Kljub temu je v teh okoliščinah vpliv zračnega upora skoraj zanemarljiv, zaradi relativno velike začetne hitrosti. Za bolj jasn vpliv upora in pričakovano poškodovano parabolo bom rezultate primerjala z namišljenim faktorjem, ki bo tolikšen, da bo sprememba oblike razvidna iz slike.

V prvem delu želim najti optimalen kot dometa v standardnih razmerah in v primeru povečanega faktorja upora ter raziskati vpliv posameznih parametrov na let. V drugem delu bom za dva začetna kota s približno enakima dometoma ter optimalni kot upoštevala vpliv vetra. V zadnjem delu bom prešla v (3D) koordinatni sistem in upoštevala vpliv Coriolisa na smer leta in domet.

2 Reševanje - enačbe

2.1 Gibanje (2D)

Najprej bom opisala gibanje v brezveterju - diferencialna enačba v x-smeri je navdana enačbo za kvadratni upor. V y-smeri opisujem gibanje pod vplivom gravitacije in kvadratnega upora. Ker se smer hitrosti tekom leta spreminja, je ta odvisna od komponent v obeh smereh. To privede do sistema sklopljenih diferencialnih enačb, ki jih lahko rešim le numerično.

$$\vec{F}_u = \frac{1}{2} c_{telo} \rho S v_{rel}^2 \quad (2)$$

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad (3)$$

Opomba, tekom naloge uporabljam novo oznako - faktor upora za bolj pregledne enačbe: $c = \frac{1}{2} \rho S$.

V uvodu sem openila, da se simetrična oblika parabole zaradi upora popači. Y - komponenta upora v neki točki izenači silo gravitacije, ker je namreč vpliv upora videm le dokler je hitrost manjša od termične. Vzpostavi se ravnovesje sil in gibanje ni več pospešeno. Efekt je možen le v y-smeri in ko sta si sili nasprotni (telo se spušča). Termično hitrost določimo iz ravnovesja sil:

$$F_g = F_u$$

To pomeni, da je

$$v_t = \sqrt{2mg\rho} \quad (4)$$

Sistem sklopljenih diferencialnih enačb ob upoštevanju (1), (2) in (3) je:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - cv^2 \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \quad (5)$$

$$m\ddot{x} = -c\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\dot{x} \quad (6)$$

$$m\ddot{z} = mg - c\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\dot{z} \quad (7)$$

2.2 Dodatek: barometerska enačba

Gostota zraka se z višino zmanjšuje. Zrak lahko obravnavam kot idealni plin, za katerega velja splošna plinska enačba. V enačbi so konstante molska masa zraka M , referenčna višina $z_{ref} \approx 11000m$, splošna plinska konstanta R in povprečna temperatura zraka T .

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(\frac{-gM(z - z_{ref})}{RT}\right) \quad (8)$$

Sistem sklopljenih diferencialnih enačb ob upoštevanju (1), (2), (3) in (8) je:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - \frac{1}{2}S\rho(z)v^2 \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \quad (9)$$

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{2}S\rho_0 \exp\left(\frac{-gM(z - z_{ref})}{RT}\right) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \dot{x} \quad (10)$$

$$m\ddot{z} = mg - \frac{1}{2}S\rho_0 \exp\left(\frac{-gM(z - z_{ref})}{RT}\right) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \dot{z} \quad (11)$$

2.3 Gibanje v konstantem polju vetra (2D)

K reševanju pristopim na enak način, le da tokrat v enačbi upoštevam relativno hitrost, ki je spremenjena za vpliv vetra v določeni smeri. Naloga zahteva, da upoštevam le veter v horizontalni smeri, kar posledično vpliva le na x-komponento (dolžino dometa). Rezultati postanejo bolj zanimivi, če poleg poljubne vrednosti vetra v intervalu med $[0, c_{max}]$ upoštevam še poljuben kot $\gamma \in [0, \pi/2]$, pod katerim piha.

$$v_{veter-horizontalen} = \begin{bmatrix} \pm c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$v_{veter} = \pm c \begin{bmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Sistem sklopljenih diferencialnih enačb ob upoštevanju (1), (2), (3) in (12) je:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - cv_{rel}^2 \frac{\vec{v}_{rel}}{\|\vec{v}_{rel}\|} \quad (14)$$

$$m\ddot{x} = -c\sqrt{(\dot{x} \pm v_{veter})^2 + \dot{z}^2} \dot{x} \quad (15)$$

$$m\ddot{z} = mg - c\sqrt{(\dot{x} \pm v_{veter})^2 + \dot{z}^2} \dot{z} \quad (16)$$

2.4 Gibanje pod vplivom Coriolisa (3D)

Coriolisova sila se pojavi v vrtečih se sistemih in deluje na telo v smeri vrtenja, ko se telo približuje osi vrtenja in v nasproti, ko se oddaljuje.

Izračunamo jo preko enačbe:

$$\vec{F}_{cor} = -2m(\vec{\Omega} \times \vec{v}) = -2m \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \cos(\theta) \\ \Omega \sin(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = -2m\Omega \begin{bmatrix} \cos(\theta)\dot{z} - \sin(\theta)\dot{y} \\ \sin(\theta)\dot{x} \\ -\cos(\theta)\dot{x} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Sistem sklopljenih diferencialnih enačb ob upoštevanju (1), (2), (3) in (17) je:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - cv_{rel}^2 \frac{\vec{v}_{rel}}{\|\vec{v}_{rel}\|} - 2m(\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel}) \quad (18)$$

$$m\ddot{x} = -c\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\dot{x} - 2m\Omega(\dot{\cos}(\theta)\dot{z} - \sin(\theta)\dot{y}) \quad (19)$$

$$m\ddot{y} = mg - c\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\dot{y} - 2m\Omega(\sin(\theta)\dot{x}) \quad (20)$$

$$m\ddot{z} = -c\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\dot{z} + 2m\Omega(\cos(\theta)\dot{x}) \quad (21)$$

3 Interpretacija rezultatov

3.1 Trajektorije (2D)

V prvem delu sem obravnavala odvisnost leta od začetnih parametrov. Za podrobnejše rezultate sem obravnavala štiri podprimere, kjer sem spremenjala:

- kot
- začetno hitrost
- faktor upora (zajema gostoto sredstva in prečni presek telesa)
- maso telesa.

3.1.1 Odvisen parameter: kot

Najprej sem izbrala kote na intervalu $[0, 90^\circ]$ za okvirno oceno dometov 1.

Oblika trajektorije spominja na parabolo, ki bi jo pričakovali v primeru brez zračnega upora. Najdaljši domet je dosežen za 45° , zato postavim hipotezo, da je efekt upora za dane parametre skoraj zanemarljiv, kar preverimo na ožjem okoliškem intervalu $[44.5^\circ, 45.5^\circ]$ 2. To je bolj jasno vidno na približku 3.

Hipotezo lahko zlahka preverimo, če bolj natančno pogledamo za kateri kot dosežemo maksimalen domet.

Maksimalen domet je na desetinko stopinje natančno res pri kotu 45° .

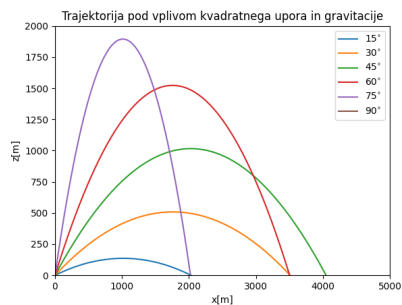


Figure 1: Določitev maksimalnega dometa. Opazka je tudi, da koti simetrično glede na 45° zadanejo približno enako točko.

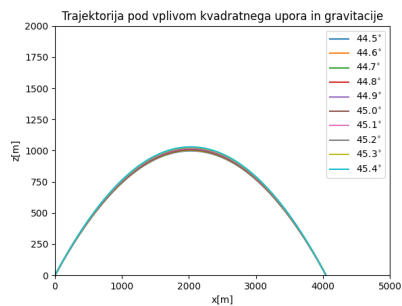


Figure 2: Določitev maksimalnega dometa, tokrat opazujemo dogajanje v okolici pričakovanega optimalnega kota.

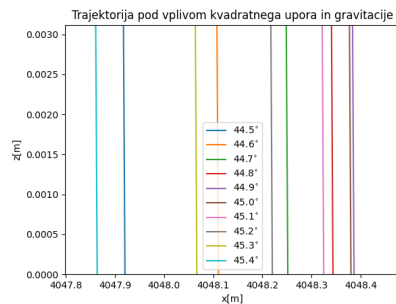


Figure 3: Približek slike 2. Največji domet dosežemo pri kotu 44.9°

3.1.2 Odvisen parameter: začetna hitrost

Pri obravnavi naloge sem opazila, da začetna hitrost izmed vseh parametrov najbolj vpliva na domet. Za vse lete sem uporabila kot 45° in začetne parametre.

Uporabim faktorje [0.1, 0.5, 1, 1.5, 2].

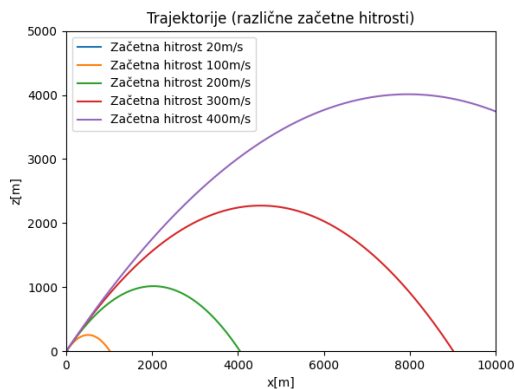


Figure 4: Opazimo velike razlike v dometu, na primer za faktor 1.5 je domet več kot 2-krat daljši od osnovnega.

3.1.3 Odvisen parameter: faktor upora

V zadnjem delu bom spremenila faktor upora za večkratnik začetne vrednosti. Raziskati želim, kako vpiva na domet in obliko trajektorije. V uvodu sem omenila, da se efekt upora v y-smeri ustavi, ko dosežemo termično hitrost. Hipoteza pravi, da bi se oblika v y-smeri morala počasneje spreminjati, kar bi povročilo v desno zamaknjeno "parabolo". Ker je začetni parameter zanemarljivo vplival na obliko, sem raziskala trajektorije za večje faktorje [1, 10, 50, 100] 5

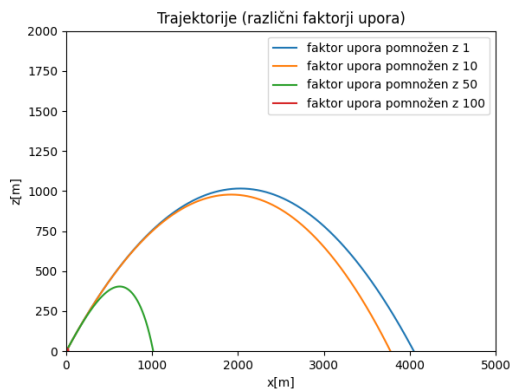


Figure 5: Trajektorije v odvisnosti od faktorja upora za kot 45°

Trajetorije se ujemajo s pričakovanji, kar pomeni, da se pospešek v y-smeri zmanjšuje. Daljši domet bi lahko dosegli, če bi čas padanja v y-smeri zmanjšali

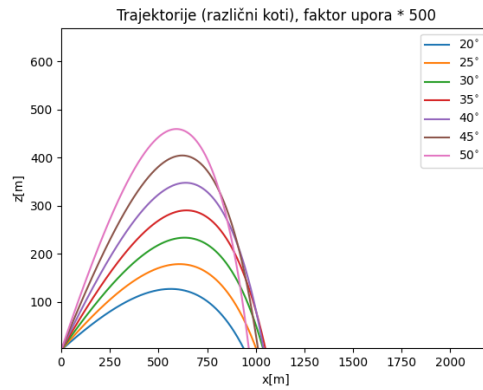


Figure 6: Optimalni kot se pri večjem faktorju upora zmanjša.

oz. zmanjšali začetni kot. Natančneje, maksimalni domet za faktor 50 znaša m in je dosežen pri kotu $^{\circ}$. V razmerah na Zemlji bi to pomenilo, da smo ali v 50-krat gostejši atmosferi ali imamo 50-krat večji efektivni presek telesa.

3.1.4 Odvisen parameter: masa telesa

Pristopimo na podoben način in začetno maso (70kg) pomnožimo z faktorjem $\in [0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000]$ 7. Pričakujem, da bo za lažje delce domet krajši, saj so vsi izstreljeni z enako začetno hitrostjo, torej bodo tisti z večjo maso imeli večjo kinetično energijo.

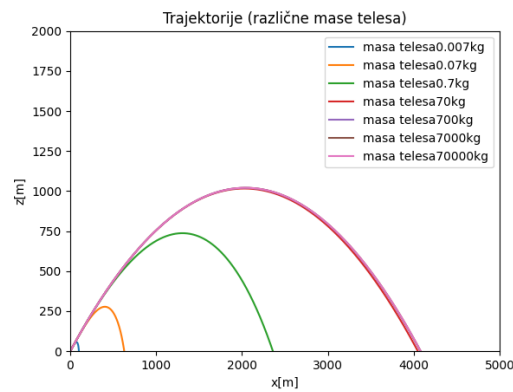


Figure 7: Trajektorije v odvisnosti od mase, opazimo da se dolžina dometa pri velikih masah manj spremeni.

3.1.5 Dodatek: barometerska enačba

Barometerska enačba (8) opiše spreminjanje gostote zraka z višino. Za začetne parametre je telo lahko deseglo višino skoraj 2000m, kjer se gostota zraka zmanjša za $\approx 20\%$. Na sliki 8 je prikazna primerjava z oceno atmosfere, kjer je gostota zraka konstantna.

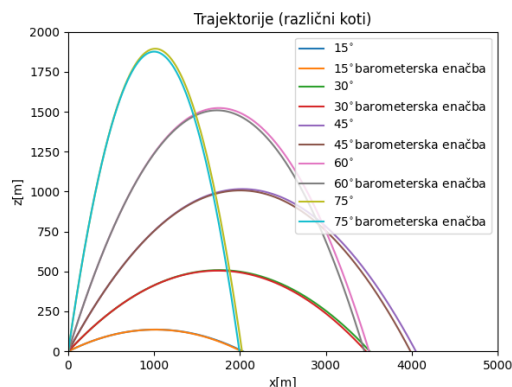


Figure 8: Primerjava: spreminjanja gostote zraka in konstantna gostota zraka za več kotov.

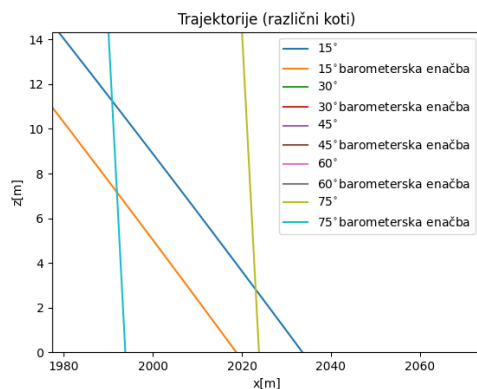


Figure 9: Približek pokaže, da je efekt bolj izrazit pri večjih kotih, saj ti izstrelki pridejo višje.

Rezultat se mi zdi nesmislen, saj se z višino zmanjšuje gostota in posledično zmanjšuje upor, kar bi pomenilo, da bo let lahko s popravnom daljši. To se ne ujema z dobljenim rezultatom 9. Ta del je narobe, zato ga lahko bralec ali bralka po želji ignorira.

3.2 Trajektorije v konstantem polju vetra (2D)

Zdaj upoštevamo veter, kjer za začetne parametre in 3 izbrane kote upoštevamo popravek horizontalnega vetra (12).

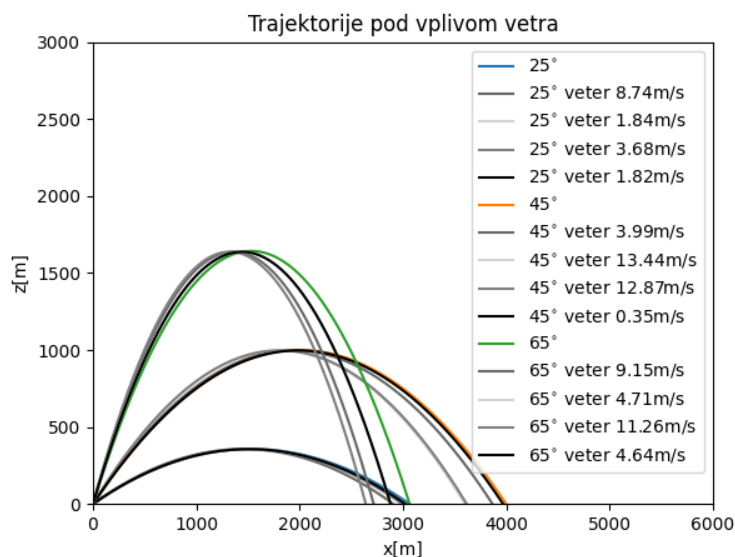


Figure 10: Vpliv naključnih vetrov na let delca.

3.3 Trajektorije pod vplivom Coriolisa (3D)

V zadnjem delu bom obravnavala odvisnost leta od začetnih parametrov v treh dimenzijah. Ponovno iščem optimalni kot, pri katerem je doomet največji in kako ostala dva parametra vplivata na let.

- kot
- začetna hitrost
- faktor upora

Radij Zemlje pri nas znaša $\approx 3.4 \text{ km} * \sin(\gamma)$ in leti so bili reda nekaj km, zato bom ukrivljenost Zemlje pri določitvi dometa zanemarila.

3.4 Parameter: kot

Najprej poiščimo smiselne kote, pod katerimi lahko pride do velikega dometa. V nasprotju z 2D interpretacijo je moja intuicija tukaj slaba, zato sem vzela večje število kotov¹¹.

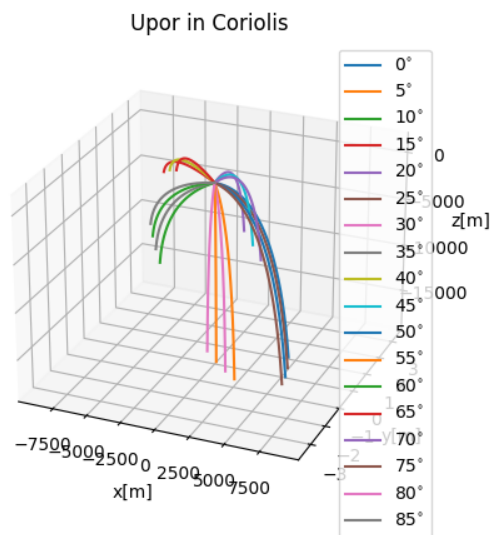


Figure 11: Met pod koti iz intervala $[0, 90^\circ]$. Leti delujejo dokaj naključni, vendar opazim 3 območja kjer je do met smiseln - pozitiven.

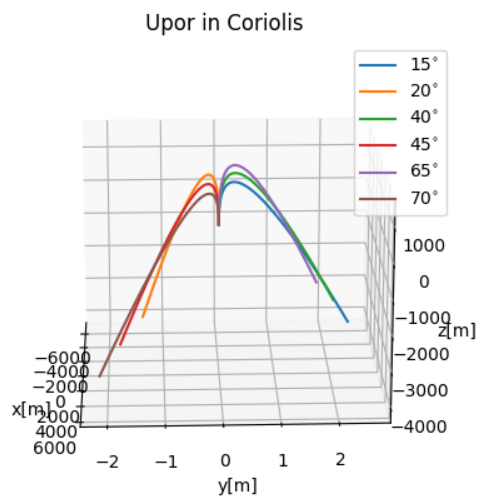


Figure 12: Potencialni optimalni koti, opazim neke vrste simetrijo.

Za izbrane kote sem izračunala domete in določila, da je optimalni kot

Takot bom uporabilav naslednjih dveh delih vaje.

3.5 Parameter: začetna hitrost

Tokrat bom izračunala domete za vsako hitrost in pogledala, kako ta vpliva na ukrivljenost leta, kar je razvidno že iz slike 9

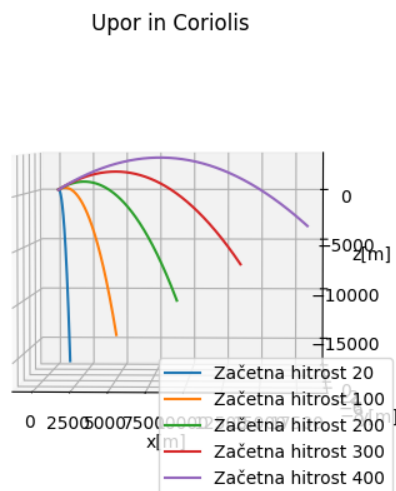


Figure 13: Izmed smiselnih meritev

3.6 Parameter: faktor upora

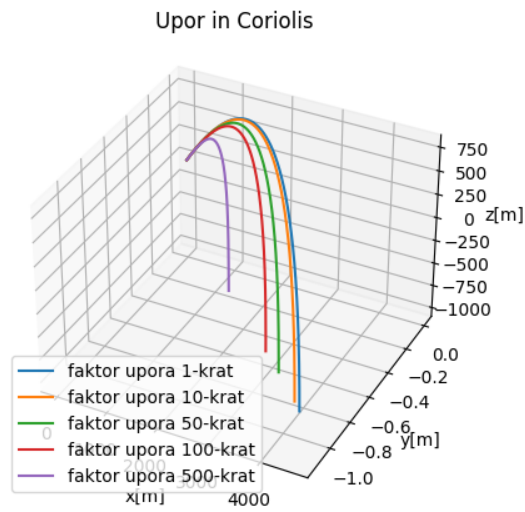


Figure 14: Izmed smiselnih meritev

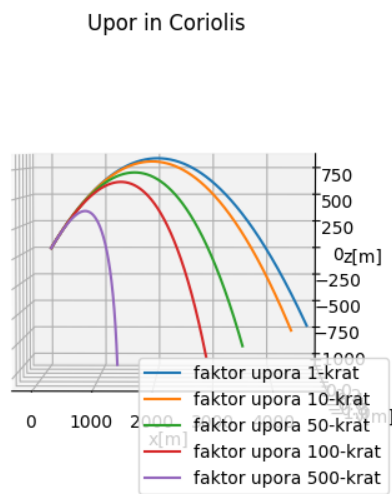


Figure 15: Izmed smiselnih meritev