

Optika

Sara Lisjak

^aUniversity of Ljubljana,

Abstract

Skripta je namenjena učenju za ustni izpit predmeta Optika (FMF) in je napisana po knjigi, skripti in predavanjih profesorice. Pri branju bodite pozorni na morebitne vsebinske in pravopisne napake. Prvih pet poglavij vsebuje vprašanja iz prvega sklopa, ostala spadajo v drugega.

1. Geometrijska optika

1.1. Geometrijska optika – žarkovna enačba in ABCD matrike

Žarkovna enačba za zvezno speminjajoč se lomni količnik je trajektorija optičnega žarka z lomnim količnikom $\vec{n}(r) = n(x, y, z)$. Numerično bi snov razdelili na majhne dele in na mejah med njimi uporabili lomni/odbojni zakon. Analitično iščemo enačbo za minimum funkcionala S .

$$S = \int_1^2 n(x, y, z) ds = \int_1^2 n(x, y, z) \vec{v} dt = \int_1^2 n(x, y, z) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (1)$$

Izračunamo Euler-Lagrangeove (EL) enačbe za vse tri komponente x, y in z in dobimo rešitev, iz katere lahko izrazimo trajektorijo optičnega žarka:

$$\nabla n = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right). \quad (2)$$

Ločimo primere:

- $n = \text{konst.}$
- Paraboličen $n = n(x)$.

Transformacija ABCD matrike v obosnem približku:

Optični žarek opišemo z dvema parametroma; naklonskim kotom žarka glede na optično os $\theta = \frac{dx}{dz}$ in oddaljenostjo od optične osi x . Poanta matrike je ta, da povežemo dve točki, če vemo kakšne so vmesne spremembe snovi:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ABCD matrika je transformacijska oziroma prehodna matrika vmesnega optičnega medija. Sestavimo jo tako, da parametre povežemo prek geometrije problema.

- Homogena snov:

$$u_T = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

- Meja med ravnima materialoma z n_1 in n_2 :

$$u_T = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

- Ukrivljena meja med materialoma z n_1 in n_2 :

$$u_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \frac{n_1 - n_2}{2} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

V primeru, da imamo več elementov nanizanih enega za drugim, dobimo celotni učinek sistema tako, da zmnožimo transformacijske matrike v pravem vrstnem redu $\vec{u} = u_N \dots u_2 u_1$.

2. Svetloba kot EM valovanje

2.1. Valovna enačba in njene rešitve v homogeni in izotropni ter neprevodni snovi

Homogena, izotropna in neprevodna snov je npr. zrak. Ob upoštevanju $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ in $\mathbf{j} = 0$ ter konstitucijskih relacij, dobimo valovno enačbo:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \mu \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \mu \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

Katere rešitev je mnogo, npr. ravni val:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0(t) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \quad (9)$$

Izpeljemo lahko fazo valovanja $\Phi_F = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta$ in fazno hitrost $v_F = \frac{\omega}{k} = \frac{v}{\mu_0 \mu \epsilon \epsilon_0} = \frac{v}{n}$. Zaradi Maxwellovih enačb velja, da so si vektorji $\vec{B} \perp \vec{E} \perp \vec{k}$ in z upoštevanjem zvez $\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}$, se dokopljemo do enakosti $E_0 = c \cdot B_0$.

Naprej si lahko pogledamo gostoto energije:

Vektor za energijski tok valovanja:

2.2. EM valovanje v prevodnih snoveh

(?)

2.3. Polarizacija EM valovanja, Jonesov kalkulus

Polarizirana svetloba je svetloba, pri kateri ima fazni zamik konstantno vrednost. Za izpeljavo faznega zamika upoštevamo, da je:

$$E(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \delta_1) + E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta_2) \quad (10)$$

Tu velja, da je $\delta(t)$ naključna funkcija časa. Za linearno polarizirano svetlobo velja, da je $\delta = n\pi$, za cirkularno polarizirano pa $\delta = (2N + 1)\frac{\pi}{2}$. Vedno, ko sta amplitudi v x in y smeri različni, lahko prispevek ene faze postavimo na 0, drugega pa izračunamo.

- Cirkularna polarizacija:

Opazujemo sučnost (s stališča opazovalca in čas poteka na izbranih mestih). Velja, da je $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ in fazni zamik $\delta = \frac{\pi}{2}$.

- Eliptična polarizacija:

Tu velja, da sta $E_{0x} \neq E_{0y}$ in $\delta = (2N + 1)\frac{\pi}{2}$, ko je eliptično polarizirana v smereh x ali y in $\delta \neq \text{konst.}$ Zasukani elipsi lahko določimo kot zasuka in razmerje med osmi a in b prek:

$$\tan(2\theta) = \frac{2E_{0x}E_{0y}\cos(\delta)}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (11)$$

$$\frac{b}{a} = \frac{E_{0y}\cos(\theta)\sin(\delta)}{E_{0x}\cos(\theta)} \quad (12)$$

Računsko polarizacijo opisemo z Jonesovim kalkulusom. Izpeljemo normalizirano polje:

$$E_n = \frac{\vec{e}_x E_{0x} e^{ikz - i\omega t} + E_{0y} e^{ikz - i\omega t + i\delta}}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}} = \frac{E_{0x} e^{ikz - i\omega t}}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}} (e_x + e_y e^{i\delta}) \quad (13)$$

Jonesov vektor:

$$j = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i\delta} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}} \quad (14)$$

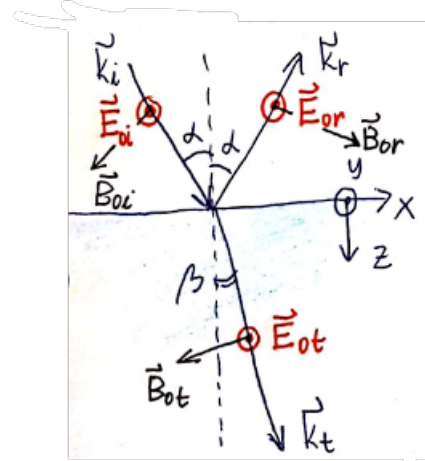
Primeri Jonesovih vektorjev za linearno polarizirano, cirkularno polarizirano in eliptično polarizirano svetlobo: (?)

Polarizatorji so optični elementi (?)

2.4. Prehod EM valovanja čez mejo dveh snovi - TE valovanje

Obravnavamo EMV na meji dveh snov, kar opišemo s pomočjo Fresnelovih enačb. Upoštevamo robne pogoje na meji, kjer ni tokov in nabojev. Zapišemo posamezne prispevke EMV za vpadni, odbojni in prepuščen val ter amplitude izrazimo z ustreznimi električnimi polji. Opazujemo mejo med sredstvi in ob upoštevanju robnih pogojev dobimo enakost iz katere je razvidno, da se frekvenca valovanja pri prehodu ne spremeni in, da vsi vektorji ležijo v isti, tako imenovani vpadni ravnini. Velja:

$$\mathbf{k}_i = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha) \frac{\omega}{c_0} n_1 \quad (15)$$



Slika 1: Vpad svetlobe in smeri vektorjev pri TE polarizaciji.

$$\mathbf{k}_r = (\sin\alpha, 0, -\cos\alpha) \frac{\omega}{c_0} n_1 \quad (16)$$

$$\mathbf{k}_i = (\sin\beta, 0, \cos\beta) \frac{\omega}{c_0} n_2 \quad (17)$$

Ponovno, upoštevamo robne pogoje $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$ ter izpeljemo odbojni in lomni zakon:

$$\alpha = \tilde{\alpha} \quad (18)$$

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta \quad (19)$$

Z upoštevanjem teh zvez in premikanja hribov ter dolin vzdolž meje, kar pomeni uskladitev amplitud polj \vec{E}_{oi} , \vec{E}_{or} in \vec{E}_{ot} pridemo do Fresnelovih enačb.

Polarizacijo, za katero velja $\mathbf{E}_{oi} \parallel \mathbf{E}_{or} \parallel \mathbf{E}_{ot} \parallel \mathbf{e}_y$ imenujemo TE, s, δ polarizacija oz. valovanje.

Zapišemo 4 robne pogoje in iztržimo 2 enačbi za 3 neznanke E_{oi} , E_{or} , E_{ot} , ki jih uporabimo naprej:

1. $E_{\parallel} = \text{konst.}$

$$E_{oi} + E_{or} = E_{ot} \quad (20)$$

2. $D_{\perp} = \text{konst.} = 0$

3. $H_{\parallel} = \text{konst.}$ (Velja $\mu_1 = \mu_2 = 1$, torej je $B_{\parallel} = \text{konst.}$)

$$-B_{oi} \cos\alpha + B_{or} \sin\alpha = B_{ot} \sin\beta \quad (21)$$

$$-E_{oi} \sin\alpha + n_1 E_{or} \sin\alpha = n_2 E_{ot} \sin\beta \quad (22)$$

$$n_1 \cos\alpha E_{oi} - n_1 \cos\alpha E_{or} = n_2 \cos\beta E_{ot} \quad (23)$$

4. $B_{\perp} = \text{konst.}$

$$B_{oi} \sin\alpha + B_{or} \sin\alpha = -B_{ot} \sin\beta \quad (24)$$

$$n_1 E_{oi} \sin\alpha + n_1 E_{or} \sin\alpha = n_2 E_{ot} \sin\beta \quad (25)$$

$$n_1 \sin\alpha (E_{oi} + E_{or}) = n_2 \sin\beta (E_{ot}) \quad (26)$$

Ob upoštevanju lomnega zakona $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$, dobimo enačbo (1).

Z ustrezno kombinacijo enačb 1. in 3. pridemo do zveze med vpadnim in odbojnim žarkom imenovani amplitudna refleksivnost oz. amplitudni refleksijski koeficient:

$$E_{0r} = \left(\frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \right) E_{0i} = r E_{0i} \quad (27)$$

$$r = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \alpha}{n_2} \right)^2}}{n_1 \cos \alpha + n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \alpha}{n_2} \right)^2}} = \frac{-\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (28)$$

Amplitudna transmisivnost, prek $E_{0t} = (1 + r)E_{0i}$:

$$t = 1 + r = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \quad (29)$$

Refleksivnost (odbojnost):

$$\mathcal{R} = \frac{j_r}{j_i} = \dots = \left(\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right)^2 \quad (30)$$

Transmisivnost (prepustnost):

$$\mathcal{T} = (t)^2 \frac{n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha} \quad (31)$$

Odvisnot $\mathcal{R}(\alpha)$ pove, pri katerem kotu β ni več prepuščene svetlobe in določimo le še odbito (v Snella vstavimo podatek za $\beta = 90^\circ$, ter dobimo mejni kot $\sin \alpha_m = \frac{n_2}{n_1}$). V primeru negativnega koeficienta refleksivnosti pravimo, da je odboj v proti fazi.

Totalni odboj se zgodi, ko se vsa svetloba odbije (energijski tok odbite in vpadne svetlobe je enak) in kot pogoj vzamemo, da mora biti α večji od α_m , kar poda imaginaren prispevek k koeficientu refleksivnosti, zato odbojnost izračunamo prek $\mathcal{R} = rr^*$.

2.5. Prehod EM valovanja čez mejo dveh snovi - TM valovanje

Enak pristop za TM valovanje:

1. $H_{\parallel}, B_{\parallel} = \text{konst.}$, z upoštevanjem zveze $B_0 = \frac{E_0}{c_0} n$

$$B_{0i} + B_{0r} = B_{0t} \quad (32)$$

$$E_{0i} n_1 + E_{0r} n_1 = E_{0t} n_2 \quad (33)$$

2. $B_{\perp} = \text{konst.} = 0$
3. $E_{\parallel} = \text{konst.}$

$$E_{0i} \cos \alpha - E_{0r} \cos \alpha = E_{0t} \cos \beta \quad (34)$$

4. $D_{\perp} = \text{konst.}$, z upoštevanjem $D_0 = \epsilon \epsilon_0 E_0 = \epsilon_0 n^2 E_0$

$$E_{0i} \sin^2 \alpha_1 + E_{0r} \sin^2 \alpha_1 = E_{0t} \sin^2 \beta n_2^2 \quad (35)$$

$$(E_{0i} n_1 + E_{0r} n_1)(\sin \alpha n_1) = (E_{0t} n_2)(\sin \beta n_2) \quad (36)$$

Ponovno, z upoštevanjem Snellovega zakona pridemo do enačbe 1.

Razmerje amplitud in refleksijski koeficient:

$$E_{0r} = \left(\frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \right) E_{0i} = r E_{0i} \quad (37)$$

$$r = \left(\frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \right) = \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \alpha}{n_2} \right)^2}}{n_2 \cos \alpha + n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \alpha}{n_2} \right)^2}} \quad (38)$$

Z upoštevanjem Snellovega zakona in trigonometričnih zvez (dodatek) lahko enačbo predelamo v lepšo obliko:

$$r = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \quad (39)$$

Transmisivnost:

$$t = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = (1 - r) \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \quad (40)$$

Preverka: Pogledamo pravokotni vpad, kjer se morata zvezi za TE in TM ujemati.

Nadaljevanje (ki ga za TE primer izpustim):

Zveza, ki jo je smiselno uporabiti, da se izognemo računanju prepustnosti, ko poznamo odbojnost:

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1 \quad (41)$$

Odbojnost:

$$\mathcal{R} = \left(\frac{j_r}{j_i} \right) = \frac{\frac{1}{2} \epsilon_0 E_{0r}^2 c_0 n_1}{\frac{1}{2} \epsilon_0 E_{0i}^2 c_0 n_1} = r^2 = \left(\frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right)^2 \quad (42)$$

Prepustnost:

$$\mathcal{T} = \left(\frac{j_t}{j_i} \right) = \frac{E_{0t}^2 n_2 \cos \beta}{E_{0i}^2 n_1 \cos \alpha} = t^2 \frac{n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha} \quad (43)$$

Ponovno lahko pogledamo odvisnost odbojnosti od vpadnega kota. V primeru, ko je β večji od 0 dobimo totalni odboj. V primeru, ko je $\mathcal{R} = 0$, dobimo pojav imenovan Brewstrov kot (pogoj za to je, da imenovalec v izrazu za koeficient refleksivnosti divergira $\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}$).

3. Odboj in lom

3.1. Totalni odboj EM valovanja na meji dveh snovi, odboj in lom na kovinskih materialih

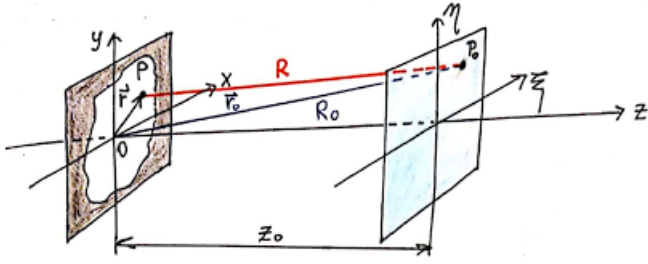
Izpeljavo naredimo prek Snellovega zakona, upostevajoč, da imata sredstvi različen lomni kolicnik $n_1 \sin \alpha = n_2 \cdot 1$ in $\alpha > \alpha_m$:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \alpha}{n_2} \right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_m} \right)^2} \quad (44)$$

$$= i \left(\sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha_m}} - 1 \right) = i \mathcal{K} \quad (45)$$

Prepis amplitudne refleksivnosti:

$$r_{TE} = \frac{n_1 \cos \alpha - i n_2 \mathcal{K}}{n_1 \cos \alpha + i n_2 \mathcal{K}} \quad (46)$$



Slika 2: Prikaz geometrije uklona. Levo je izvorna reza, desno vpadni zaslon.

$$r_{TM} = \frac{n_2 \cos \alpha - i n_1 \mathcal{K}}{n_2 \cos \alpha + i n_1 \mathcal{K}} \quad (47)$$

Zanima nas, kaj se dogaja z valovanjem v snovi. Ko za primer TE polarizacije zapišemo amplitudo vidimo, da ta z globino eksponentno pojema. Pojav se imenuje evanescentno valovanje (valovne fronte potujejo v smeri x osi, pojav (interferenčno modulirano polje) v smeri z osi).

$$\mathbf{E}_t = E_0 e^{i k_0 n_1 \sin \alpha x} e^{-i \omega t} e^{-k z} \quad (48)$$

$$\mathbf{E}_1 = E_0 \mathbf{e}_y e^{i k_x x} e^{i k_z z - i \omega t} + E_0 \mathbf{e}_y e^{i k_x x} e^{-i k_z z} e^{-i \omega t} = \quad (49)$$

$$= E_0 \mathbf{e}_y (e^{i k_0 n_1 \sin \alpha x} e^{i k_0 n_1 \cos \alpha z} + e^{i k_0 n_1 \sin \alpha x} e^{-i k_0 n_1 \cos \alpha z}) e^{-i \omega t} \quad (50)$$

Preuredimo, uporabimo zvezo med trigonometričnimi funkcijami in eksponenti ter vzamemo realni del:

$$\text{Re}(\mathbf{E}_1) = E_0 \mathbf{e}_y (2 \cos(n_1 \cos \alpha z)) \text{Re}(e^{i k_0 n_1 \sin \alpha x - i \omega t}) = \quad (51)$$

$$= E_0 \mathbf{e}_y 2 \cos(k_0 n_1 \cos \alpha z) \cos(k_0 n_1 \sin \alpha x - \omega t) \quad (52)$$

Poyntingov vektor ima v obeh snoverh samo komponento vzdolž x, kar pove, da se energija propagira samo v smeri x.

4. Uklon

4.1. Uklon svetlobe – Fraunhoferjeva obravnava uklona

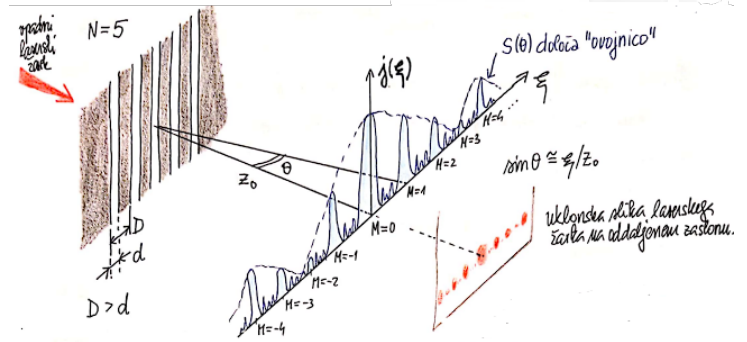
Uklon je pojav, ko se svetloba širi v območje geometrijske sence pri prehodu skozi reže podobnega reda velikosti valovni dolžini svetlobe. Pri prehodu se navadno v valovanju pojavijo oslavitve in ojačitve, ki so posledica interference valovnih front valovanja. Huygens - Fresnelov uklonski integral (svetloba se širi kot sferične fronte, zanemarimo polarizacijo in vektorsko naravo polja) je sestevek vseh sekundarnih polj po vseh točkah objektnega zaslona. Faktor $C(r)$ ima vrednost $\frac{1}{\lambda}$ in namesto, da integriramo po odprtini vzamemo priročno geometrijo in aperturno funkcijo $E(r) = f(r)E_0$.

$$E_{P_0} = E_{r_0} = \iint_A C(r) E_0 \left(\frac{e^{i k R(r)}}{R(r)} \right) dS \quad (53)$$

$$R^2 = (\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2 + z_0^2 \quad (54)$$

Fraunhoferjev uklon (konstanten člen označimo z R_0):

$$R = \sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2 + z_0^2} = \sqrt{\zeta^2 + \eta^2 + z_0^2 - 2\zeta x - 2\eta y + x^2 + y^2} = \quad (55)$$



Slika 3: Slika pride prav pri kakšni kolokvijski nalogi.

$$\approx R_0 - \frac{\zeta x}{R_0} - \frac{\eta y}{R_0} + \left[\frac{x^2 + y^2}{2R_0} + \dots \right] \quad (56)$$

Člen, ki opisuje sferične monokromatske valove zapišemo:

$$\left(\frac{e^{i k R}}{R} \right) = \frac{e^{i k R_0} e^{-i k \frac{\zeta x}{R_0}} e^{-i k \frac{\eta y}{R_0}}}{R_0} \quad (57)$$

In ob upoštevanju novih oznak (ti. uklonskih kotov $\sin \theta_\zeta \approx \theta_\zeta = \frac{\zeta}{R_0}$ in prostorske frekvence $\omega_\zeta = k \theta_\zeta$ etc.) prepišemo Fraunhoferjev približek:

$$\mathbf{E}(\omega_\zeta, \omega_\eta) = \frac{1}{\lambda} \frac{e^{i k R_0} E_0}{R_0} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i \omega_\zeta x} e^{-i \omega_\eta y} dx dy \quad (58)$$

Kateri izmed približkov je v veljavi izračunamo prek Fresnelovega števila. Uporabimo člen v oglatem oklepaju in ga reskaliramo, ko velja, da je Fresnelovo število manj kot 1 je Fraunhoferjev približek relevanten. To je približek daljnega polja.

$$\frac{k(x^2 + y^2)}{22R_0} \ll 2\pi \quad (59)$$

$$\frac{2\pi d^2}{\lambda R_0} \ll 2\pi \quad (60)$$

$$F = \frac{d^2}{\lambda R_0} \quad (61)$$

Sklep: Obstaja veliko primerov, od okroglega zaslona, ki kot rešitev poda gostoto toka porazdeljeno po Airyevem disku (svetel krog z stranskimi obroči), do drugih geometrij in več rež.

Primer: Fraunhoferjev uklon na sistemu N rež

$$\mathbf{j}(\theta) = S(\theta) \mathcal{U}(\theta) = j_0 \left(\frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2} \right)^2 \left(\frac{\sin(N\Delta/2)}{N\Delta/2} \right)^2 \quad (62)$$

$$D \sin \theta = \mathcal{U} \lambda \quad (63)$$

4.2. Uklon svetlobe – Fresnelova obravnava uklona

V primeru, ko ne osvetljujemo z monokromatskimi valovi (vsaj v približku), je vpadno polje na objektu zaslonu funkcija kraja $E_0 = E_0(x, y)$, nakar je uklonski integral:

$$E(\zeta, \eta, z) = \frac{1}{\lambda} E'_0 \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left(\frac{e^{ikR'}}{R'} \right) \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) dx dy. \quad (64)$$

Tokrat upostevamo člen v oglatem oklepaju oziroma pristopimo nekoliko drugače, z upoštevanjem TR funkcije $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \dots$:

$$R^2 = z_0^2 + (y - \eta)^2 + (x - \zeta)^2 = z_0^2 \left(1 + \frac{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2}{z_0^2} \right) \quad (65)$$

$$R \approx z_0 + \frac{1}{2} \frac{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2}{z_0} \quad (66)$$

$$E(\zeta, \eta, z) = \frac{1}{\lambda} \frac{E'_0 e^{ikz_0}}{z'_0 z_0} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{\left(\frac{ik}{2z_0} \right) [(x-x')^2 + (y-y')^2]} e^{\left(\frac{ik}{2z_0} \right) [(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2]} dx dy. \quad (67)$$

Obravnavamo le dva primera (zaradi težavnosti integrala), to sta Fresnelove conske plošče in uklon na pravokotni reži.

5. Sipanje

5.1. Sipanje svetlobe v nehomogenih snoveh

Pri sipanju nas zanima učinek ovir, ki jih postavimo na pot svetlobi. Za 3D objekte velja, da se faza valovanja spreminja tudi v smeri z. Sipanje svetlobe vpliva na slabljenje (ekstinkcijo) svetlobnega toka v smeri osi z. V splošnem bi na slabljenje vplivala tudi absorpcija vendar to za dielektrike ne velja.

Sipalni presek (poveže sipanje in model ploščate ovire):

$$\sigma_s = Q_s A \quad (68)$$

Opomba: Q_s je sipalni izkoristek.

Gostota svetlobnega toka (smer z), z upoštevanjem atenuacijskega koeficienta $\mu = \sigma_s \rho_s$:

$$\mathbf{j} = j(z=0) e^{-\mu z} \quad (69)$$

Primeri sipanj (za okrogle strukture):

1. Rayleighovo sipanje (majhni delci $R \ll \lambda$)

Optično polje je znotraj volumna delca konstantno in to polje v delcu inducira dielektrično polarizacijo, ki s časom sinusno oscilira (dipolno sevanje delca).

V celotnem delcu se inducira polarizacija, ki je vzporedna z vpadnim poljem:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\mathbf{E} \quad (70)$$

Električni dipolni moment delca (sipanja):

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{P}V \quad (71)$$

V primeru, da je delec (ϵ_2) v dielektrični snovi (ϵ_1), na sipanje vpliva le razlika v polarizaciji med delci in okolico:

$$\Delta \mathbf{P} = \epsilon_0 \Delta \epsilon \mathbf{E} \quad (72)$$

$$\Delta \mathbf{p}_e = \Delta \mathbf{P}V = \Delta \epsilon \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right) \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = \Delta \mathbf{p}_{e0} e^{-i\omega t} \quad (73)$$

Sklep: Sinusno nihajoč dipol = dipolno sevanje.

$$\mathbf{E}_{SEV} = \frac{\omega^2 \Delta p_{e0}}{4\pi \epsilon_0 c_0^2} \sin \Theta \left(\frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \right) \mathbf{e}_\Theta \quad (74)$$

$$\mathbf{H}_{SEV} = \frac{\omega^2 \Delta p_{e0}}{4\pi \epsilon_0 c_0^2} \sin \Theta \left(\frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \right) \mathbf{e}_\varphi \quad (75)$$

$$\mathbf{j}_{SEV} = \langle \mathcal{P} \rangle = \langle \mathbf{E}_{SEV} \times \mathbf{H}_{SEV} \rangle = \frac{\omega^4 \Delta p_{e0}^2 \sin^2 \Theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c_0^3 r^2} \mathbf{e}_r \propto \frac{1}{\lambda^4} \quad (76)$$

Velja, da se energijski tok iz vpadne smeri x širi v druge, kar opišemo s pomočjo razdelitve tega na vertikalno in horizontalno polarizacijo. Merimo v vertikalni in horizontalni ravnini, kjer je β sipalni kot.

$$j_{SIP} = j_{sev,V} + j_{sev,H} = j_{sev,0} + j_{sev,0} \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \quad (77)$$

Sipalni izkoristek:

$$Q_s = \frac{\sigma_s}{A} \propto \frac{R^6}{\lambda^4 (\pi R^2)} \propto \left(\frac{R}{\lambda} \right)^4 \quad (78)$$

Sipalna matrika:

$$\begin{bmatrix} E_{s,H} \\ E_{s,H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{s,\parallel}(\beta) \\ E_{s,\perp}(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\parallel,i} \\ E_{\perp,i} \end{bmatrix} \left(\frac{e^{ik(r-x)}}{ikr} \right) \quad (79)$$

$$\begin{bmatrix} j_{s,\parallel} \\ j_{s,\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |S_2|^2 & 0 \\ 0 & |S_1|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{i,\parallel} \\ j_{i,\perp} \end{bmatrix} \quad (80)$$

2. Mieovo sipanje ($R \approx \lambda$)

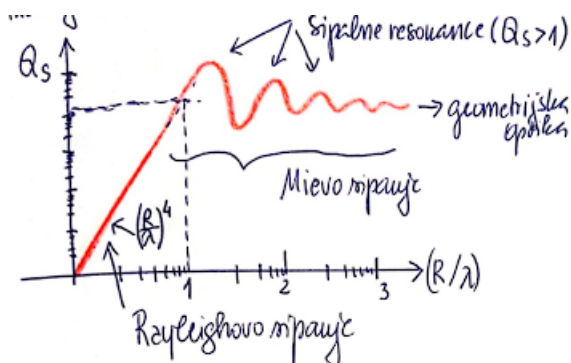
Prek ME izračunamo polje znotraj in zunaj delca in upoštevamo RP.

Skalarna Helmholtzova enačba:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (81)$$

$$E_{lm}(r, 0, \varphi) = R_l(r) \Theta_l^m(\theta) \Phi_m(\varphi) = E_0 e^{im\varphi} P_l^m(\cos \Theta) Z_l(kr) \quad (82)$$

Sklep: Celotno valovanje v prostoru zapišemo kot superpozicijo vpadnega in sipanega. Velja tudi, da v sferičnih delcih lahko pride do resonance, kadar sta polmera delca in valovna dolžina v ustreznem razmerju. Maksimumi in minimumi se pojavljajo tudi pri kotni odvisnosti.



Slika 4: Prikaz v logaritemski skali.

6. Interferenca

Za začetek nekaj o interferenci, ki je tako kot uklon manifestacija pojava superpozicije optičnega polja. Naprave, s katerimi apliciramo pojav se imenujejo interferometri.

Interferenčni vzorec dveh ravnih valovanj (z realnima amplitudama):

$$\mathbf{E}_1 = E_{10} e^{ik_1 r - i\omega t + i\delta_1}, \mathbf{E}_2 = E_{20} e^{ik_2 r - i\omega t + i\delta_2} \quad (83)$$

Celotno polje:

$$\mathbf{E} = E_{10} e^{i\Phi_1 - i\omega t} + E_{20} e^{i\Phi_2 - i\omega t} \quad (84)$$

Gostota svetlobnega toka:

$$\mathbf{j} = \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 |E|^2 c \quad (85)$$

$$\mathbf{j} \propto (E_1 + E_2)(E_1^* + E_2^*) = E_{10}^2 + E_{20}^2 + E_{10} E_{20} [e^{i\Phi_1 - i\Phi_2} + e^{-i\Phi_1 + i\Phi_2}] = \quad (86)$$

$$= E_{10}^2 + E_{20}^2 + E_{10} E_{20} [2 \cos \Delta \Phi] \quad (87)$$

To odvisnost v eksperimentu vidimo le, če se $\Delta \Phi$ ne spreminja s časom:

$$j = j_1 + j_2 + 2 \sqrt{j_1 j_2} \cos \Delta \Phi \quad (88)$$

Vidljivost (kontrast interferenčnega vzorca):

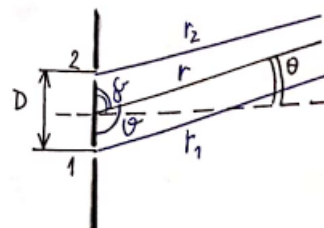
$$v = \frac{j_{\max} - j_{\min}}{j_{\max} + j_{\min}} \quad (89)$$

Naprave, glede na delitvijo valovanja delimo na:

- Interferometri, pri katerih razdelimo valovno fronto (Youngov poskus,...)
- Interferometri, pri katerih razdelimo amplitudo valovanja (Michelsonov interferometer,...)

6.1. Interferenca – Youngov poskus in sorodni poskusi

Poskus spada v kategorijo interference z delitvijo valovne fronte. Monokromatsko svetlobo pošljemo skozi dve tanki reži in opazujemo interferenco na oddaljenem zaslonu. Zanima nas, kako bi opisali periodični vzorec na oddaljenem zaslonu.



Slika 5: Geometrija za opis interference.

$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 - 2R\left(\frac{D}{2}\right) \cos \theta \quad (90)$$

$$r_2^2 = r^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 - 2R\left(\frac{D}{2}\right) \cos \gamma \quad (91)$$

Najprej smo uporabili kosinusni izrek $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma$, nato upoštevamo, da je $\theta = \pi - \gamma$ in enačbi odštejemo:

$$r_1^2 - r_2^2 = 2 \cdot 2R \frac{D}{2} \cos \gamma = 2rD \cos \gamma = 2rD \sin \theta \quad (92)$$

In se enakost, ko velja limita $r_1, r_2 \gg D$:

$$\Delta r = D \sin \theta \quad (93)$$

Gostota svetlobnega toka (z maksimumi pri argumentu $0, \pi, 2\pi, \dots$ in minimumi pri argumentu $(2N + 1)\frac{\pi}{2}$):

$$j = 4j_0 \cos^2\left(\frac{\Delta \Phi}{2}\right) = 4j_0 \cos^2\left(\frac{kD \sin \theta}{2}\right) = 4j_0 \cos^2\left(\frac{kD \sin \theta}{2}\right). \quad (94)$$

Sklep: Interferenčni vzorec se pojavi na oddaljenem zaslonu s periodo $\Delta \zeta_0$, ki jo ob upoštevanju pogoja izvednostimo $\Delta\left(\frac{kD \sin \theta}{2}\right) = \pi$, tako da dobimo $\Delta \zeta_0 = \frac{\lambda z_0}{D}$. Preverka prek Fraunhoferjevega uklona za ozke reže.

6.2. Interferenca – Michelsonov interferometer in sorodne naprave

Obravnavamo interferenco z delitvijo amplitude ter različne naprave delujoč na ta princip:

- Michelsonov interferometer

S pomočjo tega interferometra je bila ovržena hipoteza o obstoju etra.

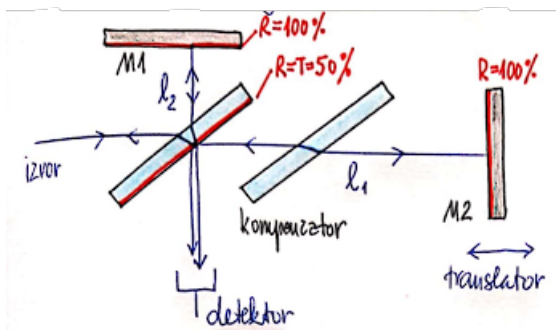
Gostota energijskega toka (na detektorju):

$$\mathbf{j} = 4j_0 \cos^2\left(\frac{\Delta \Phi}{2}\right) \quad (95)$$

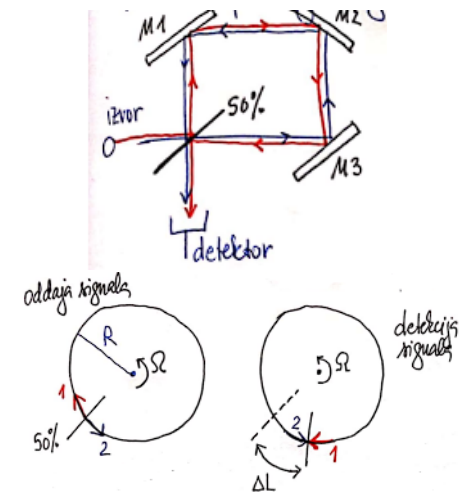
$$\Delta \Phi = k_0(l_1 - l_2)2 \quad (96)$$

Maksimumi se pojavijo pri premiku zrcala za $\frac{\lambda}{2}$, kar dobimo iz zveze $\frac{1}{2}k_0 \Delta l = N\pi$, ki jo predelamo v $\Delta l = \frac{N\pi}{k_0} = \frac{\lambda}{2}N$.

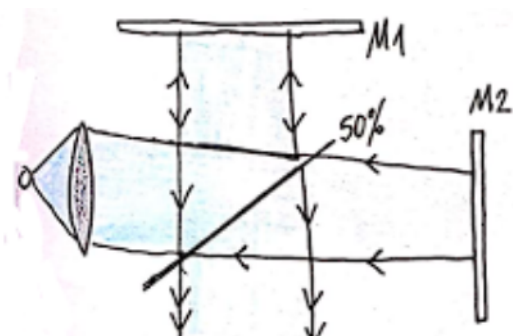
Če uporabimo nekoliminiran snop se na opazovalnem zaslonu pojavijo kolobarji, ki nastajajo oziroma izginjajo proti sredini (posledica tega, da imajo žarki, ki potujejo pod različnimi koti različno dolge poti).



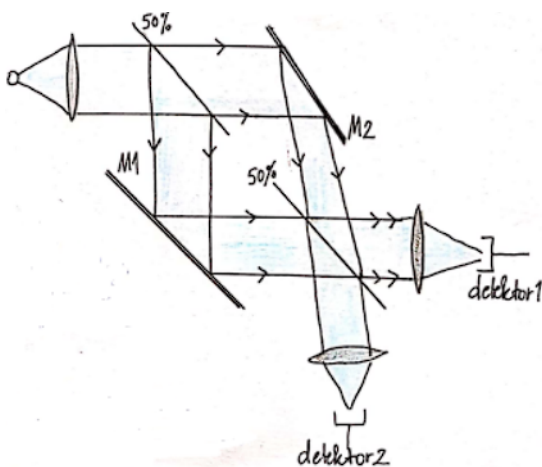
Slika 6: Prikaz poti žarka in postavitve naprave pri Michelsonovem interferometru.



Slika 9: Slika gor prikazuje primer več zrcal v krogu: svetloba se v vsopu v interferometer razdeli na omenjena žarka. Pot svetlobe, ki potuje v nasprotni smeri vrtenja je krajša, kot pot svetlobe, ki potuje v smeri vrtenja. Celotna naprava se vrti.



Slika 7: Uporaben za testiranje homogenosti in ravnosti prozornih objektov



Slika 8: Svetloba gre skozi vsako vejo le enkrat.

- Twyman - Greenov interferometer (nastavitev MI)
- Mach - Zehnderjev interferometer
- Safuacov interferometer

Interferometer, ki se uporablja za laserske giroskope (en del svetlobe potuje v smeri, drugi v nasprotni smeri urinega kazalca). Če interferometer miruje, med žarkoma dobimo konstruktivno interferenco, v primeru, ko se vrti v ravnini žarkov, pa fazni zamik. Za razumevanje predpostavimo, da imamo veliko zrcal v krogu. Čas, ki ga žarek 1 potrebuje od izvora do detektorja je $\Delta t_1 = \frac{2\pi R - \Delta L}{c_0}$, z upoštevanjem $\Delta L = \Omega R \Delta t_1$. Dobimo torej enačbi za prvi (in enako za drugi čas):

$$\Delta t_1 = \frac{2\pi R}{c_0 + \Omega R} \quad (97)$$

$$\Delta t_2 = \frac{2\pi R}{c_0 - \Omega R} \quad (98)$$

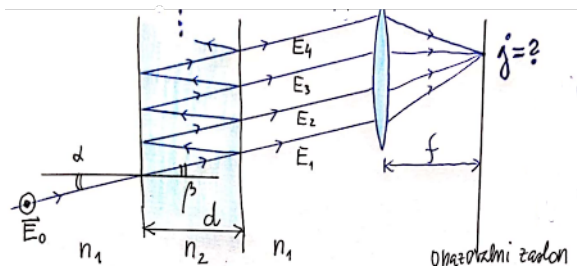
Fazni zamik med signaloma:

$$\Delta \Phi = \omega(-\Delta t_1 + \Delta t_2) = \frac{\omega 2\pi R}{(c_0 - \Omega R)(c_0 + \Omega R)} \cdot 2\pi R \approx \frac{4\omega \Omega S}{c_0^2} \quad (99)$$

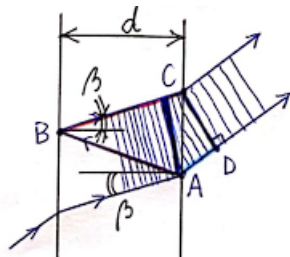
6.3. Fabry-Perotov interferometer, interferenca na tankih plasteh

Analiza dogajanja (za TE pol. valovanje), kjer vemo, da na končno gostoto svetlobnega toka lahko vplivajo vpadni kot in lomni količniki snovi. Za amplitudno prepustnost upoštevamo spremembe na obeh mejah $r_{12} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta}$ in $r_{21} = \frac{n_2 \cos \beta - n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \beta + n_1 \cos \alpha}$. Za plastjo moramo sešteti vseh N polj različnih prispevkov:

$$E_1 = t_{21} t_{12} E_0 = t_{21} t_{12} E_0 \quad (100)$$



Slika 10: Vpad žarkon skozi tanko plast.



Slika 11: Valovanje E_2 poleg tega, da se dvakrat odbije doživi še fazni zamik $\Phi = k_0 2d \cos \beta n_2$. Ter enako naprej za nadaljna valovanja. (Glej $\Phi = (abc - ad)k_0 n_2$)

$$E_2 = t_{21}(r_{21}r_{21}e^{i\Phi})t_{12}E_0 \quad (101)$$

$$E_{TOTAL} = E_1 + E_2 + E_3 + \dots = E_0 t_{21} t_{12} [1 + r_{21}^2 e^{i\Phi} + (r_{21}^2)^2 e^{2i\Phi} + \dots] = \quad (102)$$

$$= \frac{E_0 t_{21} t_{12}}{1 - (r_{21}^2) e^{i\Phi}} = t \quad (103)$$

Polje je posledica interference številnih delnih valovanj. Ker je snov levo in desno enaka, lahko prek kota šerjenja upoštevamo zvezo $T = \frac{j_t}{j_0} = |t|^2$ in velja, da so za dielektrične materiale vsi koeficienti prepustnosti in odbojnosti realni.

$$T = \frac{j_t}{j_0} = \frac{(t_{21}t_{12})(t_{21}t_{12})^*}{(1 - (r_{21})^2 e^{i\Phi})(1 - (r_{21}^*)^2 e^{-i\Phi})} \quad (104)$$

$$T = \frac{t_{21}^2 t_{12}^2}{(1 - r_{21}^2 e^{i\Phi})(1 - r_{21}^2 e^{-i\Phi})} = \frac{(1 - r_{12})^2 (1 + r_{12})^2}{1 + (r_{21}^2)^2 - r_{21}^2 (e^{i\Phi} + e^{-i\Phi})} = \quad (105)$$

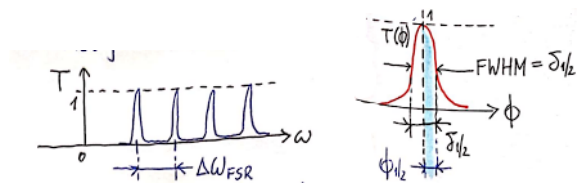
$$= \frac{(1 - r_{12}^2)^2}{1 + (r_{21}^2)^2 - 2r_{21}^2 \cos \Phi} = \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Phi} = \quad (106)$$

$$= \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R(1 - 2\sin^2(\Phi/2))} = \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\Phi/2)} \quad (107)$$

Airyeva funkcija:

$$T = \frac{1}{1 + (\frac{4R}{(1-R)^2}) \sin^2(\Phi/2)} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\Phi/2)} \quad (108)$$

Sklep: Koeficient finese (F) določa kontrast funkcije $T(\Phi)$. Tanka plast deluje kot frekvenčni filter, ki pri fiksni debelini dobro prepušča frekvence, ki izpolnjujejo pogoj ($T = 1$) oziroma $\Phi = N \cdot 2\pi = 2k_0 n_2 d \cos \beta$.



Slika 12: Naprava se uporablja za spektralno analizo (spektroskopijo).

Fabry-Perotov interferometer je naprava, s katero lahko spreminjamo debelino d in s tem reguliramo valovno dolžino. Območje spektra, ki ga lahko analiziramo se razteza od enega do drugega (sosednjega) maksimuma in ga imenujemo prostospektralno območje - FSR:

$$\Delta \nu_{FSR} = \frac{c_0}{2n_2 d} \quad (109)$$

Zanima nas tudi ostrina transmisijskih maksimumov (resolucija FP spektrometra), ki določa število merskih kanalov, ki so na voljo znotraj interavla $\Delta \nu_{FSR}$. Zanima nas vrednost območja, kjer vrednost T pade iz 1 na 0.5 (FWHM).

Finesa interferometra:

$$\mathcal{F} = \left(\frac{\Delta \nu_{FSR}}{\delta \nu_{1/2}} \right) = \frac{c_0 \pi n_2 d}{2 d n_2 c_0} \frac{2 \sqrt{R}}{(1 - R)} = \frac{\pi}{2} \sqrt{F} \quad (110)$$

7. Koherenca

Matematično nekoliko zahtevnejše poglavje. Koherenca pomeni, da obtajajo povezave med fazo EMV na nekem kraju ob nekem času in fazo na drugem kraju ob nekem drugem času. Fazni člen $\Phi(\mathbf{r}, t)$ je odvisen od kraja in časa in zanima nas, vpliv na rezultate.

7.1. Časovna koherenca

Ločimo:

- Popolnoma koherentno valovanje: $\Psi(r, t + \tau) = f(r, t, \Psi(r, t))$ Če poznamo fazo ob nekem času, jo poznamo tudi ob vsakem drugem času.
- Delno koherentno: $\Phi(r, t + \tau) = f(r, t, \Phi(r, t))$ za $\tau < \tau_c$, za $\tau > \tau_c$ ni povezave (realnost npr. plin)
- Nekoherentno: $\Phi(r, t + \tau)$ in $\Phi(r, t)$ sta nepovezana za vsak τ .

Časovno koherenco analiziramo s pomočjo Michelsonovega interferometra (Twyman-Green), kjer dve delni valovanji izvirata iz izvora in na mestu detekcije interferirata, sta pa med seboj zakasnjeni za $\tau = (\frac{2\Delta l}{c_0})$. Polje na detektorji je seštevek prispevkov $E_d = E(t) + E(t + \tau)$.

Gostota energijskega toka:

$$j_d \propto |E(t) + E(t + \tau)|^2 = (E(t) + E(t + \tau))(E^*(t) + E^*(t + \tau)) \quad (111)$$

$$j_d = E(|t|)^2 + |E(t + \tau)|^2 + E(t)E^*(t + \tau) + E^*(t)E(t + \tau) \quad (112)$$

Slika 13: L_C jekoherenčn dolžina.

Povprečna gostota energijskega toka (v časovnem intervalu T) in primeru, ko imata delna žarka enako amplitudo:

$$\langle j_d \rangle \propto \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [|E(t)|^2 + |E(t+\tau)|^2 + 2\text{Re}(E(t)E^*(t+\tau))] dt \quad (113)$$

$$\langle j_d \rangle \propto 2\langle |E(t)|^2 \rangle + 2\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \text{Re}[E(t)E^*(t+\tau)] dt = 2\langle |E(t)|^2 \rangle + 2\text{Re}[G^{(1)}(\tau)] \quad (114)$$

Časovna avtokorelacijska funkcija polja:

$$G^{(1)}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [E(t)E^*(t+\tau)] dt \right) \quad (115)$$

Wiener-Khinchinov teorem

Ker polje analiziramo v nekem končnem časovnem intervalu T , ga temu ustrezno lahko razvijemo v Fourierovo vrsto (upoštevamo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ in $\omega_N = N \cdot \omega_0$):

$$E(t) = \sum_N A_N e^{-i\omega_0 t n} \quad (116)$$

$$E^*(t+\tau) = \sum_m A_m^* e^{i\omega_0 m(t+\tau)} \quad (117)$$

Nadaljejo, da izraza vstavimo v avtokorelacijsko funkcijo:

$$G^{(1)}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n,m} A_n A_m^* e^{-i\omega_0 n t} e^{i\omega_0 m t} e^{i\omega_0 m \tau} dt \right) = \quad (118)$$

$$= \sum_{n,m} A_n A_m^* \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i(\omega_m - \omega_n)t} dt \right] e^{i\omega_m \tau} \quad (119)$$

$$G^{(1)}(t) = \sum_m |A_m|^2 e^{i\omega_m \tau} \quad (120)$$

Dobimo izraz, ki ga naprej integriramo po τ in pomnožimo z eksponentnim členom, ter tako pridemo do spektra svetlobe, ki je Fourierova transformirka časovne avtokorelacijske funkcije. V splošnem je pomembno, da signal na detektorju merimo v intervalih $T \gg \tau_c$, ker le tako opazimo preskok faze. Tudi za koherenčno dolžino velja, da mora biti čim daljša, ker je τ_c statistični parameter in so dolžine nekaterih valovnih potez lahko zelo velike...

$$S(\omega) \propto \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} G^{(1)}(t) e^{-i\omega \tau} d\tau = \quad (121)$$

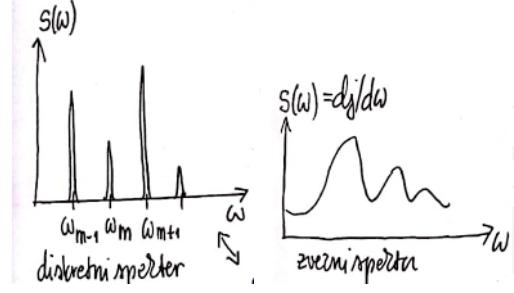
$$= \sum_m |A_m|^2 \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega_m \tau} e^{-i\omega \tau} d\tau \right] = |A_m|^2_{\omega_m = \omega} \quad (122)$$

Diskreten spekter:

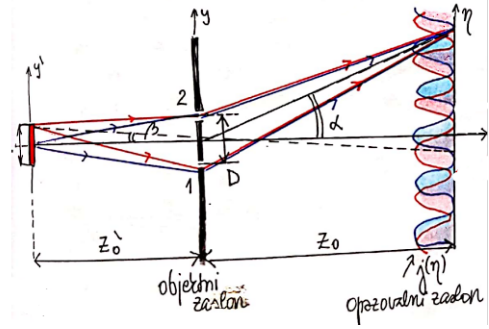
$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} G^{(1)}(t) e^{-i\omega \tau} d\tau \quad (123)$$

Zvezen spekter:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G^{(1)}(t) e^{-i\omega \tau} d\tau \quad (124)$$



Slika 14: Primera spektrov.



Slika 15: Na zaslonu vidimo superpozicijo interferenčnih vzorcev svetlobe, ki izvira iz različnih delov svetila in prehaja skozi žez.

7.2. Prostorska koherenca

Zanima nas faza valovanja na dveh različnih krajih ob enakem času. Območje, znotraj katerega so faze povezane imenujemo koherenčna ploskev. Analiziramo jo prek Youngovega eksperimenta, kjer zajemamo valovanje iz dveh različnih območij valovne fronte in preverjamo, ali je na oddaljenem zaslonu opazen interfeerenčni uklonski vzorec. Izkazuje se, da je kontrast odvisen od velikosti svetilke in od razdalje med režama.

$$\Phi(r_2, t) = \{\langle r_1 - r_2, t, \Phi(r_1, t) \rangle \quad (125)$$

Fazni zamik med valovanjema na reži ($\sin \alpha \approx \alpha = \frac{\eta}{z_0}$, $\sin \beta \approx \beta = \frac{\eta'}{z_0}$):

$$\Delta \Phi = kD \sin \alpha + kD \sin \beta \quad (126)$$

Pogoj, da se interfeerenčni vzorec povsem izpovepreči:

$$D_{max} = \frac{2z_0' \pi z_0' \lambda}{kL} \quad (127)$$

D_{max} (maksimalna razdalja med mrežama) je merilo za transversalno koherenčno razdaljo svetlobe in za monokromatski vpadni val. Določimo jo tako, da pri Youngovem poskusu postopno večamo razdaljo, dokler ne interfeerenčni vzorec na zaslonu povsem zbledi.

Teorem Van Citterla in Zernikeja (analog Fourierovi spektroskopski):

$$\langle j_d \rangle \propto \langle |E_1(t)|^2 \rangle + \langle |E_2(t+\tau)|^2 \rangle + 2\text{Re} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E_1(t) E_2^*(t+\tau) dt \right) \quad (128)$$

Prvi člen predstavlja polje svetlobe iz 1. reže, drugi iz 2. in 3. navzkrižno korelacijsko funkcijo, za katero ob pogoju časovne koherence velja naslednja enačba. Tu člen \mathcal{J}_{12} določa kontrast interferenčne slike, ki je povezan z intenzitnim profilom izvora. Ta je 2D Fourierova transformirka intenzitetnega profila izvora.

$$\Gamma_{12}(\tau) = \text{Re}(e^{-i\omega\tau} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E_1(t)E_2^*(t)dt) = \text{Re}(e^{-i\omega\tau} \mathcal{J}_{12}) \quad (129)$$

$$J_{12} = \frac{\pi}{z_0'^2} \iint j_{0i}(x', y') e^{ikx' \Delta \bar{x}} e^{iky' \Delta \bar{y}} dx' dy' \quad (130)$$

Izpeljava kontrasta interferenčne slike:

$$J_{12} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E_1(t)E_2^*(t)dt = \langle E_1(t)E_2^*(t) \rangle \quad (131)$$

Svetloba, ki prihaja na režo izvira iz vseh točk zaslona:

$$E_1 \propto \iint_S E_0(x', y') \frac{e^{ikr_1'}}{r_1'} dx' dy' \quad (132)$$

$$E_2 \propto \iint_S E_0(x'', y'') \frac{e^{ikr_2''}}{r_2''} dx'' dy'' \quad (133)$$

$$\mathcal{J}_{12} \propto \langle E_0(x', y')E_0^*(x'', y'') \rangle \propto \delta(x' - x'', y' - y'') \cdot |E_0|^2 \quad (134)$$

$$\mathcal{J}_{12} \propto \iint_S |E_0(x', y'')|^2 \frac{e^{ikr_1'}}{r_1'} \frac{e^{ikr_2'}}{r_2'} dx' dy' \approx \quad (135)$$

$$\approx \frac{1}{z_0'^2} (j_{0i}(x', y')) \frac{e^{ikr_1'}}{r_1'} \frac{e^{ikr_2'}}{r_2'} dx' dy' \quad (136)$$

Za obe razdalji (predstavljata razdalji med poljubnima točkama na izvornem zaslonu do točk objektnega zaslona) uporabimo naslednji Taylorjev razvoj ter poračunamo razliko. Velja, da sta zadnja dva neničelna člena tudi enaka nič, le odprtini morata biti postavljeni simetrično glede na izhodišče KS. Uvedemo še substitucijo za lepši izgled, ter dobimo:

$$r_1' = z_0' \sqrt{1 + \frac{(x_1 - x')^2}{z_0'^2} + \frac{(y_1 - y')^2}{z_0'^2}} \approx z_0' - \frac{x_1 x'}{z_0'} - \frac{y_1 y'}{z_0' +} \quad (137)$$

$$2z_0' + \dots$$

$$r_1' - r_2' = \frac{x'(x_2 - x_1)}{z_0'} + \frac{y'(y_2 - y_1)}{z_0'} + \frac{x_1^2 - x_2^2}{2z_0'^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{2z_0'^2} + 0 \quad (138)$$

$$\mathcal{J}_{12} \propto \frac{1}{z_0'^2} \iint j_{0i}(x', y') e^{ikx' \Delta \bar{x}} e^{iky' \Delta \bar{y}} dx' dy' \quad (139)$$

8. Interakcija svetlobe s snovjo

Lomni količnik je odvisen tudi od lastnosti EMV (frekvence), čemur pravimo disperzija lomnega količnika. Za razlago disperzije $n(\omega)$ moramo poznati $\epsilon(\omega)$.

8.1. Lorentzov model lomnega količnika

Imamo kroglico pozitivnega naboja (Atom/molekula), ki ima fiksno lego ter kroglica negativnega naboja, ki zaradi el. polja povzroča oscilacije negativno nabite kroglice okoli njene ravnovesne lege. Spreminjanje razmaka med kroglicama povzroči nastanek dipolnega momenta \mathbf{p}_e , ki glede na volumsko gostoto molekul ustvarja polarizacijo. To prek znane zveze $\mathbf{P}_e = \epsilon_0(\epsilon - 1)\mathbf{E}$ povežemo z dielektrično funkcijo in prek $n = \sqrt{\epsilon}$ ali $\mathcal{N}^2 = \epsilon$ z lomnim količnikom.

Potencialna energija (za atom/molekulo brez permanentnega dipolnega momenta):

$$V(x) = V(0) + 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dx} \right)_{|x=0} x^2 + \dots \quad (140)$$

Newtonov zakon za sistem (dušenje, za morebitno viskozno snov):

$$ma = -kx - \gamma m \left(\frac{dx}{dt} \right) - e_0 E(t) \quad (141)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma m \frac{dx}{dt} - e_0 E(t) \quad (142)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = - \left(\frac{e_0}{m} \right) E(t) \quad (143)$$

Vstavimo polje $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$, nihanje $x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$ in že od davno poznano ω_0 in izrazimo odmik:

$$x_0 = \frac{(-e_0/m)E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \quad (144)$$

Polarizacija:

$$\mathbf{P}_e = -e_0 x(t) \mathbf{e}_x \rho_x = \frac{e_0 \frac{e_0}{m} E_0 e^{-i\omega t} \rho_N}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \quad (145)$$

Dielektrična funkcija:

$$\epsilon = \mathcal{N}^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \quad (146)$$

Upoštevamo, da je plazemska frekvenca $\omega_p = \frac{\rho_N e_0^2}{m \epsilon_0}$.

Razkol na realni in imaginarni del:

$$\mathcal{N}^2 = (n' + in'')^2 = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} + \frac{i\gamma \omega_p^2 \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (147)$$

Upoštevamo, da je realni del $\epsilon' = n'^2 - n''^2$ in imaginarni del $\epsilon'' = 2n'n''$ ter rešimo sistem enačb.

Upoštevanje več resonanc v dielektrični funkciji (f je oscilatorska moč resonance):

$$\epsilon = \mathcal{N}^2 = 1 + \sum_N \frac{f_j \omega_{pj}^2}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 - i\gamma_j \omega} \quad (148)$$

Sellmeierjeva enačba (le omejeno območje resonanc):

$$n'^2(\lambda) = A + \sum_j \frac{G_j \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{0j}^2} \quad (149)$$

Drudejev model kovin:

$$N^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{-\omega^2 - i\gamma\omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (150)$$

Opomba: Za frekvence manjše od plazemske je lomni količnik imaginaren, za večje postane snov prozornejša in lomni količnik realen.

Obstaja tudi variacija, kjer obravnavamo popravek lokalnega polja, ki ga ustvarjajo sosednje molekule prek polarizacije. Novo el. polje molekule je $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \frac{P_e}{3\epsilon_0}$, prek katerega dobimo novo lokalno polje $\tilde{\mathbf{E}} + \frac{\epsilon_0(\epsilon-1)\mathbf{E}}{3\epsilon_0} = \frac{(\epsilon_0+2)}{3}\mathbf{E}$. Pri izračunu inducirane polarizacije upoštevamo le to in ob predpostavki, da je dušenje zanemarljivo dobimo enačbo.

Lorentz-Lorenzova zveza:

$$\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) = \frac{N^2-1}{N^2+2} = \frac{1}{3} \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (151)$$

Opomba: Obstajajo tudi posebni materiali, ki imajo ali negativni lomni količnik, negativno dielektričnost ali drugačno kombinacijo lastnosti (negativna tako dielektričnost kot permeabilnost)...

8.2. Optična aktivnost in magneto-optični (Faradayev) pojav

Optična aktivnost je pojav, pri katerem se linearno polarizirani svetlobi ob prehodu skozi snov zasucke smer nihanja električnega polja. Za primer svetlobe polarizirane vzdolž x, vpadno polarizacijo opiše Jonesov vektor $J_{IN} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, izhodno pa $J_{OUT} = \begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi \\ \sin\Delta\varphi \end{pmatrix}$. Na lastnosti takih snovi vpliva to, da imajo različno vrednost lomnega količnika za desno (zasuck za $e^{ik_0 n_{RCP}L}$) in levo krožno (zasuck za $e^{ik_0 n_{LCP}L}$) polarizirano svetlobo.

$$J_{IN} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (152)$$

$$J_{OUT} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{ik_0 n_{RCP}L} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{ik_0 n_{LCP}L} \quad (153)$$

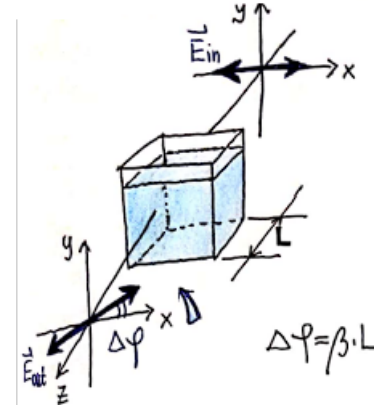
$$J_{OUT} = \frac{1}{2} e^{ik_0 n_{RCP} \frac{L}{2}} e^{ik_0 n_{LCP} \frac{L}{2}} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{ik_0 n_{RCP} \frac{L}{2}} e^{-ik_0 n_{LCP} \frac{L}{2}} + \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-ik_0 n_{RCP} \frac{L}{2}} e^{-i(-k_0 n_{LCP}) \frac{L}{2}} \right] \quad (154)$$

$$J_{OUT} = \frac{1}{2} e^{ik_0 \bar{n}L} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{ik_0 \Delta n \frac{L}{2}} + \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-ik_0 \Delta n \frac{L}{2}} \right] \quad (155)$$

$$= \frac{1}{2} e^{ik_0 \bar{n}L} \left(\begin{bmatrix} 2 \cdot \cos(k_0 \Delta n \frac{L}{2}) \\ 2 \cdot \sin(k_0 \Delta n \frac{L}{2}) \end{bmatrix} \right) \quad (156)$$

$$J_{OUT} = \frac{1}{2} e^{ik_0 \bar{n}L} \begin{bmatrix} \cos\Delta\varphi \\ \sin\Delta\varphi \end{bmatrix} \quad (157)$$

Sklep: Kot zasucka polarizacije dobimo torej prek formule $\Delta\varphi = \frac{1}{2} k_0 L (n_{RCP} - n_{LCP}) = \beta L$, kjer pomeni $n_{RCP} > n_{LCP}$ zasuck v



Slika 16: Optični pojav.

levo. Snovi z razliko v imaginarnem delu lomnega količnika eno cirkularno polarizacijo močno absorbirajo, čemur pravimo cirkularni dihiroizem.

Magnetooptični pojav je optični pojav v sicer optično neaktivnem materialu, ki ga induciramo prek zunanjega magnetnega polja in velja, da je tudi zasuck polja odvisen od smeri zunanjega magnetnega polja. Pojasnimo ga z Lorentzovim modelom dveh kroglic, kjer pozitivno nabita miruje in negativno nabita kroži okrog nje znotraj magnetnega polja. Odvisno od smeri kroženja se pojavi magnetna sila, ki vpliva na spremembo efektivne vzmeti, ki ju povezuje. Za levo in desno sučno polarizacijo dobimo drugačni vrednosti, kar nakazuje na dve lastni frekvenci (Zeemarijev pojav).

$$\Delta\varphi = VLH_0 \quad (158)$$

$$\mathbf{F}_B = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -(e_0)\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \quad (159)$$

Izpeljava prek 2.NZ:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \omega_0^2 r = -\frac{e}{m} (\mathbf{E} + \frac{dr}{dt} \times \mathbf{B}_0) \quad (160)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{e_0}{m} \frac{dy}{dt} B_0 + \omega_0^2 x = -\frac{e_0}{m} E_x \quad (161)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{e_0}{m} \frac{dx}{dt} B_0 + \omega_0^2 y = -\frac{e_0}{m} E_y \quad (162)$$

Polarizacija:

$$P_e = \quad (163)$$

9. Optika v anizotropnih snoveh

9.1. Opis EM polja v anizotropni snovi (optična indikatriza, ploskev valovnega vektorja)

9.2. Lom EMV na meji z optično enoosnim sredstvom; optični elementi iz anizotropnih snovi

10. Osnove laserjev

10.1. Interakcija svetlobe s snovjo, optično ojačevanje, zgradba in delovanje laserskih sistemov

Kazalo vsebine

1 Geometrijska optika	1
1.1 Geometrijska optika – žarkovna enačba in ABCD matrike	1
2 Svetloba kot EM valovanje	1
2.1 Valovna enačba in njene rešitve v homogeni in izotropni ter neprevodni snovi	1
2.2 EM valovanje v prevodnih snoveh	1
2.3 Polarizacija EM valovanja, Jonesov kalkulus . .	2
2.4 Prehod EM valovanja čez mejo dveh snovi - TE valovanje	2
2.5 Prehod EM valovanja čez mejo dveh snovi - TM valovanje	3
3 Odboj in lom	3
3.1 Totalni odboj EM valovanja na meji dveh snovi, odboj in lom na kovinskih materialih	3
4 Uklon	4
4.1 Uklon svetlobe – Fraunhoferjeva obravnava uklona	4
4.2 Uklon svetlobe – Fresnelova obravnava uklona	5
5 Sipanje	5
5.1 Sipanje svetlobe v nehomogenih snoveh	5
6 Interferenca	6
6.1 Interferenca – Youngov poskus in sorodni poskusi	6
6.2 Interferenca – Michelsonov interferometer in sorodne naprave	6
6.3 Fabry-Perotov interferometer, interferenca na tankih plasteh	7
7 Koherenca	8
7.1 Časovna koherenca	8
7.2 Prostorska koherenca	9
8 Interakcija svetlobe s snovjo	10
8.1 Lorentzov model lomnega količnika	10
8.2 Optična aktivnost in magneto-optični (Faradayev) pojav	11
9 Optika v anizotropnih snoveh	11
9.1 Opis EM polja v anizotropni snovi (optična indiktrisa, ploskev valovnega vektorja)	11
9.2 Lom EMV na meji z optično enosnim sredstvom; optični elementi iz anizotropnih snovi .	11
10 Osnove laserjev	11
10.1 Interakcija svetlobe s snovjo, optično ojačevanje, zgradba in delovanje laserskih sistemov	11

References