Elektromagnetno polje

Sara Lisjak

September 2023

Predgovor Moj poskus strnjenih odgovorov na izpitna vprasanja pri predmetu Elektromagnetno polje (FMF) s kančkom logike, sledeč istoimenski knjigi. Za morebitne slovnicne in vsebinske napake se opravicujem.

1 Staticno elektricno polje

1.1 Zapiši Poissonovo in Laplaceovo enačbo in ju razloži. Izpelji splošno rešitev (Greenovo funkcijo) Poissonove enačbe v Fourierovem in direktnem prostoru. Z uporabo Greenove funkcije nato zapiši splošno obliko električnega potenciala in električnega polja. Kako se ta rešitev spremeni v končnem volumnu?

$$\mathbf{E}(r) = -\nabla\varphi(r) \tag{1}$$

$$\rho(r) = \epsilon_0 \nabla \mathbf{E} \tag{2}$$

Poissonova enacba:

$$\nabla^2\varphi(r) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3}$$

Laplaceova enacba, ki velja za prostor brez nabojev:

$$\nabla^2\varphi(r) = 0 \tag{4}$$

Predpostavimo, da je resitev Greenova funkcija, prek katere zapisemo potencial kot:

$$\varphi(r) = \int_V G(r-r^{'})\rho(r)d^3r^{'} \tag{5}$$

$$\nabla^2\varphi(r) = \int_V \nabla^2 G(r-r^{'})\rho(r)d^3r^{'} \tag{6}$$

Prek cesa lahko* dolocimo enakost:

$$\nabla^2 G(r-r^{'}) = -\frac{\delta(r-r^{'})}{\epsilon_0} \tag{7}$$

Reprezentacija Greenove funkcije v obliki Fourierovega integrala (tu deluje ∇ le na koordinatni del):

$$G(r-r^{'}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(r-r^{'}} G(k) \tag{8}$$

Ven lahko izvlecemo tudi Fourierovo transformirko operatorja nabla $Ft(\nabla) = ik$. Z izvrednotenjem Greenove funkcije (po Diracovi zvezi), lahko prepisemo elektrostatski potencial in elektricno silo kot:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(r^{'})}{|r-r^{'}|} d^3r^{'} \tag{9}$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(r^{'})(r-r^{'})}{|r-r^{'}|^3} d^3r^{'} \tag{10}$$

1.2 Formuliraj elektrostatsko silo na poljubno nabito telo, ki se nahaja v zunanjem polju, z uporabo samo električnega polja in nato uvedi napetostni tenzor električnega polja. Uporabo napetostnega tenzorja nato ilustriraj na primeru sile med dvema točkastima nabojema.

Zacnemo z izrazom, ki nam poda definicijo sile:

$$\mathbf{F} = \int_V \rho(r)\mathbf{E}(r)d^3r \tag{11}$$

Najprej upostevamo (2), nato zvezo () ter za konec Gauss-Ostogradskega:

$$= \int_V \epsilon_0(\nabla\mathbf{E})\mathbf{E}d^3r = \epsilon_0 \oint_{\partial V} E(E\mathbf{n})dS - \epsilon_0 \int_V (E\nabla)Ed^3r \tag{12}$$

$$\mathbf{F} = \epsilon_0 \oint_{\partial V} [\mathbf{E}(\mathbf{En}) - \frac{1}{2}\mathbf{n}E^2]dS \tag{13}$$

Napetostni tenzor in njegova uporaba v izrazu za silo:

$$T_{ik} = \epsilon_0(E_iE_k - \frac{1}{2}E^2\delta_{ik}) \tag{14}$$

$$F_i = \oint_{\partial V} T_{ik}n_kdS \tag{15}$$

Za konec se ilustracija na primeru dipola ($\rho = (x, y)$, $r = \sqrt{\rho^2 + a^2}$:

$$E_\rho = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{r\vec{h}o}{r} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{r\vec{h}o}{r} \tag{16}$$

$$F_z = \epsilon_0 \oint E_z(\vec{E}\vec{n})dS - \frac{\epsilon_0}{2}\oint E^2dS = -\frac{\epsilon_0\epsilon E^2 2\pi}{2(4\pi\epsilon_0)^2}\int_0^\infty \frac{\rho^2\rho d\rho}{(\rho^2+a^2)^3} \tag{17}$$

1.3 Pokaži in razloži multipolni razvoj električnega potenciala in elektrostatske energije do dipolnega člena. Kakšna je interakcija med dvema telesoma, ki imata neničelen naboj in električni dipolni moment kot funkcija razdalje med telesoma in kakšna je sila in navor (v multipolni sliki) na telo v zunanjem električnem polju?

Za multipolni razvoj je potrebno, da smo dalec od izvorov, saj je potem upravicen Taylorjev razvoj $|r - s| \approx |r|$ in velja $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|} = \frac{1}{|r|} - (s\nabla)\frac{1}{|\vec{r}} + ... = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{s}\vec{r})}{r^3}$. Razvoj uporabimo na potencialu ter tako pridemo do tenzorja kvadrupolnega momenta (prvi integral da naboj, drugi dipolni moment):

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(s)d^3s + \frac{r}{4\pi\epsilon_0 r^3 \int s\rho(s)d^3s} \tag{18}$$

Prek razvoja lahko izrazimo silo in navor. Zacnemo z enacbo za energijo, kjer testno porazdelitev premaknemo za dr in upoštevamo enakost $\nabla(pE) = p\times(\nabla\times E)+(p\nabla)E$:

$$dW = -Fdr = \epsilon_0\nabla\varphi(r_0)dr - \nabla(p_0E(r_0))dr \tag{19}$$

$$\mathbf{F} = e_0\mathbf{E}(r_0) + (p_0\nabla)\mathbf{E}(r_0) \tag{20}$$

Sklep: V homogenem E na testnio naboj ne deluje nobena sila, v nehomogenem pa gre (kaj) v del prostora, kjer je gradient maksimalen. V primeru navora, testno porazdelitev zavrtimo za $d\phi$ in upoštevamo $dp_0 = d\phi \times p_0$

$$dW = -Md\phi = -dp_0E(r_0) = -(d\phi\times p_0)E(r_0) \tag{21}$$

$$\mathbf{M} = p_0 \times \mathbf{E}(r_0) \tag{22}$$

Sklep: V zunanjem E polju se dipol zavrt tako, da skoša biti vzporeden polju E.

1.4 Uvedi in razloži naslednje elektrostatske količine in koncepte: Coulombska sila, naboj, jakost polja, silnice, cirkulacija, pretok, potencial, ekvipotencialne ploskve, in princip superpozicije

Naboj **e**[C] deluje na daljavo in v svoji okolici ustvari elektricno polje, katerega jakost oznacimo z**E**. Polje je posrednik med naboji in zanj velja transformacija $E_i^{'} a_{ik} E_K$:

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{23}$$

Silnice kazejo v smeri E, njihova povrsinska gostota je sorazmerna z jakostjo polja, smer pa doloca ali v (+) naboju izvirajo oziroma v (-) naboju ponirajo. Velja, da se nasprotna naboja privlacita in da so silnice nezakljucene (neskoncne).

$$\mathbf{r}(\dot{s}) = \frac{dr}{ds} = \frac{\mathbf{F}(r(s))}{|\mathbf{F}(r(s))|} \tag{24}$$

Coulombska sila je podana, kot odziv naboja na polje $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$:

$$\mathbf{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{25}$$

Naslednja pojma sta cirkulacija, ki nam pove koliko silnic zaobjema neka sklenjena krivulja in pretok, ki pove koliko silnic prebada neko ploskev. Po Faradayju je pretok skozi povrsino enak stevilu silnic elektricnega polja in s tem ko merimo pretok, stejemo silnice.

$$\Gamma_E = \oint_c \mathbf{E} dr \tag{26}$$

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} dS \tag{27}$$

Elektricni potencial je uvedel Poisson (poglavje 1.1), z elektricnim poljem je povezan prek $\mathbf{E} = -\nabla\varphi(r)$:

$$\varphi(A) - \varphi(B) = -\int_A^B \mathbf{E} dr \tag{28}$$

Velja, da konstanten potencial predstavlja obmocje ekvipotencialnih ploskev (oziroma to je to). Za vse tri kolicine (silo, jakost elektricnega polja in elektricni potencial) velja princip superpozicije, ki pravi, da je dovoljeno posamezne prispekve k kolicinam linearno sestevati (aditivnost), kar je smiselno, ko je v prostoru vec nabojev.

1.5 Zapiši in razloži Gaussov izrek v integralni in diferencialni obliki. Pokaži njegovo uporabo na primeru geometrije/problema, ki ga sam izbereš.

Sklep: Zaobjeti naboj je enak elektricnemu pretoku skozi ploskev. Integralno obliko izpeljemo z upostevanjem principa superpozicije in Gauss-Ostrogradskega. Pri pretvorbi med vsoto in integralom uporabimo $d\Omega = \frac{dscos\theta}{|r-r'|^2}$, $dScos\theta = r^2 d\Phi sin\theta d\theta$ in $\int d\Omega = 4\pi$:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S (\mathbf{E}\mathbf{n}) dS = \oint_S \mathbf{E} cos\theta dS = \sum_i^N \frac{e_i}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{dScos\theta}{|r-r_i|^2} = \sum_i^N \frac{e_i}{\epsilon_0} \tag{29}$$

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(r) d^3 r \tag{30}$$

Diferencialno obliko pa prek Gauss-Ostrogradskega in z izvrednotenjem integrala:

$$\oint_S EdS = \int_V \nabla E d^3r = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(r) d^3r \tag{31}$$

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \tag{32}$$

Primer: sfera

$$\oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{E}cos\theta dS = \oint_S []cos\theta dS... \tag{33}$$

1.6 Uvedi gostoto naboja in za poljubno gostoto zapiši elektrostatsko silo, polje in električni potencial. Nato navedi primere gostote naboja, pri čemer tudi pokaži, kakšna je povezava med gostoto naboja in gostoto dipolnega momenta.

Električni naboj je lahko zvezno $\rho(r) = \frac{de}{dV}$ ali diskretno $\rho(r) = \sum_i e_i \delta(r - r_i)$. Diskretna vsota pove, da je integral gostote po volumnu enak vsoti vseh posameznih nabojev. Električna sila (izpeljava je že nekje):

$$\mathbf{F}_e = \epsilon_0 \int_{\partial V} [E(En) - \frac{1}{2}nE] dlS \tag{34}$$

Električno polje:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(r')\frac{1}{r - r'}d3 \tag{35}$$

Električni potencial:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(r')\frac{1}{r - r'}d3 \tag{36}$$

Gostoto naboj, kot porazdelitev lahko opišemo za različne primere: Naboj:

$$\rho(r) = e\delta 3(r - r') \tag{37}$$

Dipol:

$$\rho(r) = e\delta 3(r - r_1) - e\delta 3(r - r_2) = -e(r_1 - r_0)\nabla\delta 3(r - r_0) + e(r_2 - r_0)\nabla\delta 3(r - r_0) \tag{38}$$

Upoštevamo definicijo za dipolni moment $p = e(r_1 - r_2)$ in prepišemo enačbo:

$$\rho(r)\rho(r)\rho(r)\rho(r) = (e(r_1 - r_2)\nabla)\delta 3(r - r_0) = -\nabla(\mathbf{p}\delta 3(r - r_0) = -\nabla\mathbf{P}(r)(39)$$

In v primeru, ko je porazdelitev površinska, se enačbi pretvorita v $\rho(r) = \sigma(\rho)\delta(z - z_0)$ in $\rho(r) = -p(\rho)\frac{\partial}{\partial z}\delta(z - z_0)$.

Enačbi povezuje zveza:

$$\rho_{DIP} = ((r_1 - r_2)\nabla)\rho_{NAB} \tag{40}$$

1.7 Uvedi in razloži elektrostatsko energijo, in sicer (i) nabojev v zunanjem polju in (ii) celotno energijo polja, ki ga neka gostota naboja ustvarja. Celotno energijo polja prepiši v odvisnosti samo od gostote naboja in samo od električnega polja in dobljeno komentiraj.

Zacnemo z energijo nabojev v zunanjem polju, ob upostevanju splosnega izraza za elektricno silo in delektricno delo, ter $A = W(2) - W(1)$. Tockast naboj:

$$W = e\varphi \tag{41}$$

Zvezen naboj:

$$W = \int \rho(r)\varphi(r)d^3r \tag{42}$$

Nato izpeljemo celotno energijo elektricnega polja (gostoto), z upostevanjem parametra vkljucitve α in definicije elektricnega potenciala. Obravnavamo $\rho(r)$, ki ustvari $\varphi(r)$ in upostevamo linearnost Poissonove enacbe $\nabla^2(\alpha\varphi) = -\frac{\alpha\varphi}{\epsilon_0}$

$$dW = \int d\rho(r)\varphi(r)d^3r = \int d\alpha\rho(r)\alpha\varphi(r)d^3r = \int_0^1 \alpha d\alpha \int \rho(r)\varphi(r)d^3r \tag{43}$$

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int_v\int_v \frac{\rho(r)\rho(r')d^3rd^3r'}{|r - r'|} \tag{44}$$

In z polji:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(r)d^3r = \frac{1}{2}\epsilon_0\int(\nabla E)\varphi d^3r = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V[\nabla(\varphi E) - (\nabla\varphi)E]dS \tag{45}$$

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0\oint_{\partial V}\varphi(En)dS - \frac{1}{2}\epsilon_0\int_V(\nabla\varphi)Ed^3r \tag{46}$$

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int E^2(r) d^3r \tag{47}$$

Sklep: Elektrostatska energija je popolnoma dolocena z (koef.???) elektricnega polja v prostoru.

Primer: Elektrostatska energija kot funkcional gostote naboja

Gostota energije elektricnega polja $\vec{E}$ oziroma energija potrebna, da ustvarimo to polje, ce imamo neko gostoto naboja v prostoru:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(r)\varphi(r) d^3r = \frac{1}{2}\int_V \epsilon_0 \nabla E \varphi d^3r = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V [\nabla(\varphi E) - \nabla\varphi E] d^3r = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\partial V} \varphi E dS - \frac{\epsilon_0}{2}\int_V E^2 d^3r \tag{48}$$

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_V E^2 d^3r \tag{49}$$

2 Staticno magnetno polje

2.1 Izpelji Kirchoffovo enačbo za magnetni vektorski potenial in zapiši ter komentiraj njeno rešitev. Kakšna povezavo ima z Biot-Savartovim zakonom?

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla\nabla A - \nabla^2 A$$

(50)

Po predpostavki, da je polje B staticno sledi $\nabla \mathbf{j} = 0$ in z upostevanjem Helmholtzovega izreka, ki pravi da lahko vsak potencial sestavimo iz brezizvornega in brezvrtincnega dela "$A = A_1 + A_2$" sledi:

$$\nabla^2 A = -\mu \mathbf{j} \tag{51}$$

Za poetencial velja resitev oblike in resitev (7):

$$A(r) = \int_v G(r - r^{'}) j(r^{'}) d^3 r^{'} \tag{52}$$

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(r^{'}) d^3 r^{'}}{|r - r^{'}|} \tag{53}$$

Resitev velja v homogenem prostoru. Bo Biot-Savarta pridemo prek povezave med gostoto magnetnega polja in potencialom:

$$\mathbf{B}(r) = \nabla \times \mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{j(r^{'}) d^3 r^{'}}{|r - r^{'}|} \tag{54}$$

Sklep: Ta enacba velja v neskoncnem prostoru?. In potencial je kirchoffova enacba?

2.2 Formuliraj magnetostatsko silo na telo s poljubno gostoto električnega toka, ki se nahaja v zunanjem polju, z uporabo samo magnetnega polja in uvedi napetostni tenzor magnetnega polja. Uporabo napetostnega tenzorja nato pokaži na primeru sile med dvema točkastima nabojema.

Zacnemo z definicijo sile prek gostote magnetnega polja in toka, upostevamo $\mu_0\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$ in enacbo (*):

$$F = \int (\mathbf{j}(r) \times \mathbf{B}(r) d^3r = \frac{1}{\mu_0}\int_v ((\nabla \times B) \times B)d^3r = \frac{1}{\mu_0}\int_v [\nabla(\mathbf{B} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{2}\nabla B^2)]d^3r \tag{55}$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0}\oint_{\partial V} [\mathbf{B}(\mathbf{B}\vec{n}) - \frac{1}{2}B^2\vec{n}]dS \tag{56}$$

Napetostni tenzor (opise napetost, ki jo prenasa polje) in uporaba v enacbi za silo:

$$T_{ik} = \frac{1}{\mu_0}[B_iB_k - \frac{1}{2}B^2\delta_{ik}] \tag{57}$$

$$F_i = \oint_V T_{ik}n_k dS \tag{58}$$

Manjka se primer uporabe na tokovni zanki...

2.3 Zapiši in razloži multipolni razvoj magnetnega polja do dipolnega člena z uporabo vektorskega magnetnega potenciala. Razloži multipolni razvoj magnetne energije gostote toka v zunanjem magnetnem potencialu. Kakšna pa sta sila in navor na magnetni dipol v poljubnem zunanjem magnetnem polju?

Magnetno polje opazujemo dalec od izvorov, ker velja Taylorjev razvoj (upostevamo enak predpis kot pri elektricnem polju), za razliko od elektricnega polja bo enacba tu vektorska :

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(s)d^3s}{|r-s|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathbf{j}(s)d^3s = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int (\vec{r}\vec{s})\mathbf{j}(s)d^3s + ... \tag{59}$$

Predpostavimo, da velja $\nabla j = 0$ ker tedaj 1. clen ob upostevanju $\int j d^3 r = I \oint dl = 0$ odpade. Drugi clen privede do dipolnega momenta, ki je definiran kot $\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{s} \times \vec{j}(s) d^3 s$ in sicer:

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} \tag{60}$$

V posplosenem zapisu, pa razvoj prepisemo v obliko z konstantnim clenom in naslednjimi:

$$\mathbf{A}(r) = \mathbf{A}(r_0) + ((r - r_0)\nabla_0 \mathbf{A}(r_0)) + ... \tag{61}$$

Multipolni razvoj naredimo s pomocjo zadnje enacbe, kjer v definiciji upostevamo, da je konstanten clen nic, drugi clen pa predelamo z $\int j d^3 r = I \oint dl = 0$ in $((r - r_0)\nabla_0)(dl A(r)) = ((r - r_0) \times dl)(\nabla_0 \times A(r_0))$, torej drugi clen postane:

$$I \oint dl((r - r_0)\nabla_0)A(r_0) = (\nabla_0 \times A(r_0))\frac{1}{2} I \oint ((r - r_0) \times dl) \tag{62}$$

$$W = -\int_V d^3 r j_0(r) A(r_0) = -\nabla \times A(r_0)(\frac{1}{2}\int_v d^3 r (r - r_0) \times j_0(r_0) \tag{63}$$

$$W = -\mathbf{mB}(r_0) \tag{64}$$

Silo in navor izpeljemo prek diferencialov energije $dW = -F dr = -\nabla(mB(r))dr$ in $dW = -M d\phi = -dmB(r_0) = -(d\phi \times m)B(r)$:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}(r) \tag{65}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \tag{66}$$

Sklep: Iz zadnje enacbe vidimo, da se **m** poskusa zavrteti tako, da je vzporeden gostoti magnetnega polja.

2.4 Uvedi in razloži Amperovo silo med poljubnima tokovnima vodnikom in nato pokaži ter zapiši Biot-Savartov zakon za magnetno polje. Opiši tipične velikosti magnetnega polja in komentiraj, kakšna je značilna lastnost magnetnih silnic, posebej v primerjavi z električnimi silnicami.

Sila je lahko posledica interakcije dveh tokov po vodnikih ali interakcije enega vodnika z magnetnim poljem. V magnetostatiki so vedno zakljucene zanke. Velja, da je magnetno polje posrednik sile med vodniki, ki ga opise Biot-Savartova enacba. Najprej zacnemo z amperovo silo med vodnikoma, ki jo postopno preoblikujemo v obliko, ki lahko opise splosne geometrije:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi|\rho_2 - \rho_1|}\frac{\vec{\rho_2} - \vec{\rho_1}}{|\rho_2 - \rho_1|} \tag{67}$$

Prepisemo z diferenciali, upostevajoc $\vec{dl} = \vec{t}dl$ in zvezo za trojni vektorski produkt:

$$d^2F = \frac{\mu_0 (I_1 dl_1)(I_2 dl_2)}{4\pi|r(l_2) - r(l_1)|^2}\frac{r(l_2) - r(l_1)}{|r(l_2) - r(l_1)|} \tag{68}$$

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{(dl_1 dl_2)}{|r(l_2) - r(l_1)|^2}\frac{r(l_2) - r(l_1)}{|r(l_2) - r(l_1)|} \tag{69}$$

$$F = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{(dl_1 \times (dl_2 \times r(l_2) - r(l_1))}{|r(l_2) - r(l_1)|^3} \tag{70}$$

Sklep: Rezultat je pomemben pri izpeljavi Biot Savarta.

Obstaja povezava med silo in magnetnim poljem, velja namrec da je sila, ki deluje med dvema tokovnima vodnikoma posredno odvisna od le tega. Tok po prvem vodniku ustvari magnetno polje, ki deluje na drugi vodnik. Prepisemo izraz za silo tako, da bo zadnja poved bolj jasna:

$$= \oint_{C_1} I_1 dl_1 \times [\frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{(dl_2 \times r(l_2) - r(l_1))}{|r(l_2) - r(l_1)|^3}] \tag{71}$$

$$\mathbf{F} = \oint_{C_1} I_1 dl_1 \times \mathbf{B}(r(l_1))) \tag{72}$$

Izraz, nadomescen z magnetnim polje je Biot Savart.

Za magnetno polje veljajo transformacijske lastnosti $B_i' = det(a_{lm})a_{ik}B_k$ in $B'^2 = B^2$. Velikosti se raztezajo od 1 T (mozganska aktivnost) do nevtronskih zvezd ali atomskih jeder z vrednostjo $10^6 - 10^{10}T$ oziroma 1TT.Podobno kot elektricno polje, lahko tudi magnetno opisemo s silnicami, vendar se te ne sekajo in nimajo ne izvorov in ne ponorov. Med seboj se odbijajo in ponazarjajo gostoto ter so vedno zakljucene.

2.5 Uvedi magnetni pretok in razloži kolikšen je pretok skozi zaključeno zanko. Zapiši in uvedi Amperov izrek v integralni in diferencialni obliki in ga razloži.

O cirkulaciji govorimo, ko objekt zajamemo s krivuljami, o pretoku pa ko s ploskvami. Magnetni pretok je definiran:

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S |B|(\vec{r}(s)\vec{n})dS \tag{73}$$

÷÷÷Dokaz, da je po zakljuceni ploskvi pretok 0 (z Gauss-Ostogradskim):

$$\oint_S \vec{B} dS = 0 = \oint_C \nabla B dl \tag{74}$$

Torej je $\nabla B = 0$, kar je pravilno. Gostota elektricnega toka:

$$I = \int_S \vec{j} dS \tag{75}$$

Amperov izrek pravi, da je rotor polja skozi zanko enak pretoku rotorja polja skozi zakljuceno povrsino, to pa je enako cirkulaciji B. Izpeljemo ga z upostevanjem $dl \times dl' = dS$ in $dS \nabla \frac{1}{|r(l_1) - r(l_2)|} = -d\Omega$:

$$\Gamma_m = \oint_C \vec{B} dl = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} [dl' \times \nabla \frac{1}{|r(l_1) - r(l_2')|}] dl = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} (dl' \times dl) \nabla \frac{1}{|r(l_1) - r(l_2')|} = ... \tag{76}$$

Integralna oblika Amperovega zakona:

$$\Gamma_m = \mu_0 I \tag{77}$$

Diferencialno obliko izpeljemo prek definicije in ob upostevanju, da je $I = \oint_S j dS$:

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{B}) dS = \mu_0 \oint_S \vec{j} dS \tag{78}$$

Diferencialna oblika:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{79}$$

2.6 Uvedi magnetni vektorski potencial in ga razloži (poračunaj) na primeru dolge tuljave. Na primeru tuljave tudi razloži umeritev (nedoločenost) magnetnega potenciala.

Veljati mora, da B ni brezvrtincno. To je pogoj za definicijo skalarnega potenciala.

$$\nabla \mathbf{B} = 0 = \nabla(\nabla \times \mathbf{A}) \tag{80}$$

$$\Phi_M = \int_S \vec{B} dS = \int_S \nabla \times \vec{A} dS = \int_C \vec{A} dr \tag{81}$$

Sklep: Magnetni pretok je enak cirkulaciji magnetnega potenciala po zanki. Ko so tokovi to namrec ni mozno, saj je B (???).

Primer: Dolga tuljava (noter je B razlicen od nic, zunaj je nic)

- Noter

  Velja, da je $= (0{,}0{,}B_0)$ in $= \frac{1}{2} B_0(-y, x, 0) = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r})$

- Zunaj (suspekta ni, ali je konstanten)

  Vseeno velja zveza $\int_S \vec{B} d\vec{S} = B_0 \pi a^2 = \oint_C \vec{A} dr$. Ob upostevanju, da velja $A = c\vec{B} \times \frac{\vec{r}}{r^2}$, sledi da je $\oint_C \vec{A} dr 2\pi c B_0$ in mag. vektorski potencial za primer dolge tuljave:

  $$\vec{A} = \frac{a^2}{2} \vec{B} \times \frac{\vec{r}}{r^2} \tag{82}$$

  Rezultat je na meji tuljave zvezen, ni aditiven in sega v prostor, kjer je magnetno polje 0.

Magnetno polje je neodvisno od umeritve $A' = A + \nabla\zeta(r)$. Magnetni potencial za tak primer je:

$$A' = \frac{a^2}{2} \vec{B} \times \frac{\vec{r}}{r^2} - \frac{B_0 a^2}{2} \nabla arctan(\frac{y}{x}) = \frac{a^2}{2} \vec{B} \times \frac{\vec{r}}{r^2} - \frac{B_0 a^2}{2} \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2} \tag{83}$$

Primer: Diracova struna ...

2.7 Uvedi in razloži magnetno energijo in sicer: (i) sklenjene tokovne zanke v zunanjem magnetnem polju z uporabo zakona o ohranitvi energije in (ii) celotno energije magnetnega polja, ki ga ustvarja in vzdržuje neka gostota električnega toka.

Izpeljava:

$$\mathbf{F} = I \oint_C (\vec{t} \times \vec{B}) dl \tag{84}$$

$$dA = -Fdr = -I \oint_C dr(\vec{t} \times \vec{B}) dl = -I \oint (d\vec{r} \times t) dlB \tag{85}$$

$$A = -I \int_S \vec{B} d\vec{S} = -I\Phi_M = -I \oint_{c_2} d\vec{r}\vec{A} + I \oint_{C_1} d\vec{r}\vec{A} \tag{86}$$

Ob upostevanju zveze med tokom in gostoto toka, dobimo:

$$W = -\int_V \vec{j}(r)\vec{A}(r) d^3\vec{r} \tag{87}$$

$$\omega = -\vec{j}(r)\vec{A}(r). \tag{88}$$

Celotna energija prek gostote elektricnega toka:

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(r^{'}) d^3 r^{'}}{|r - r^{'}|} \tag{89}$$

$$W = -\frac{\mu_)}{4\pi} \int_V \int_V \frac{\mathbf{j}(r^{'}) d^3 r^{'} \mathbf{j}(r) d^3 r}{|r - r^{'}|} \tag{90}$$

Sklep: Z oddaljenostjo () porazdelitev toka zmanjsuje.

Celotna magnetna energija:

$$dW = -\int_V d\alpha j(r) \alpha A(r) d^3 r = -\alpha d\alpha \int_V j(r) A(r) d^3 r = -\int_0^1 \alpha d\alpha \int_V j(r) A(r) d^3 r = -\frac{1}{2} \int j(r) A(r) d^3 r \tag{91}$$

Teci zacne tok, ki trosi energijo (tudi v stacionarnem primeru) in s tem opravlja delo. Torej:

$$P = -IU = -I \int_C E dr = I \frac{\partial}{\partial t} \int_S B dS \tag{92}$$

$$W = I \int_S B dS = I \int_S (\nabla \times A) dS = \oint_C I A dR = \int_V j(r) A(r) d^3 r \tag{93}$$

Celotna energija magnetnega polja je torej sestevek obeh prispevkov $W = -\frac{1}{2}\int_V jAd^3r + \int_V jAd^3r$:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\int_V \vec{j}(r)\vec{A}(r)d^3r \tag{94}$$

Sklep: Predznak je pozitiven zaradi Faradayeve indukcije.

3 Kvazistaticna polja

3.1 V splošnem vpelji kapacitivnost N prevodnikov in jo razloži na primeru nabite prevodne krogle.

Na povrsini prevodnikov velja, da je $\varphi(\partial V) = konst.$Ko obravnavamo, da je naboj le na povrsini, lahko uporabimo substitucijo $\rho d^3r = \sigma_i dS_i$:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho(r)\varphi(r)d^3r = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \oint \sigma_i dS_i = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i e_i \tag{95}$$

$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(r)\rho(r')d^3rd^3r'}{|r-r'|} = \frac{1}{2}\sum_{ik} e_i e_k \frac{1}{4\pi\epsilon_0 e_i e_k}\int_{i,k}\frac{\sigma_i\sigma_k dS_i dS_k}{|r_i - r_k|} \tag{96}$$

V enacbi smo upostevali definicijo elektricnega potenciala in del, ki pride za nabojema je kapacitivnost prevodnikov i in k:

$$C_{i,k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 e_i e_k}\int_{i,k}\frac{\sigma_i\sigma_k dS_i dS_k}{|r_i - r_k|} \tag{97}$$

$C_{i,k}$ je simetricni koeficient kapacitivnosti prevodnikov, C_{ii} pa je lastna kapacitivnost, ki je ni mogoce izracunati po enacbi in opisuje sorazmernost med nabojem izoliranega prevodnika in njegovim potencialom (ta je odvisen od geometrije).

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i e_i = \frac{1}{2}\sum_{i,k}(C^{-1})_{i,k} e_i e_k \tag{98}$$

Zveza med potencialom in ustreznim celotnim nabojem na prevodniku.

$$\varphi_i = \sum_k (C^{-1})_{i,k} e_k \tag{99}$$

Primer: Krogla (lastna kapacitivnost)

$$\varphi(a) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} = C_{11}^{-1} e \tag{100}$$

3.2 V splošnem vpelji induktivnost N tokovnih vodnikov-zank in jo razloži na primeru induktivnosti dolge tuljave.

Izpeljavo induktivnosti storimo prek magnetne energije, z upostevanjem substitucije $jd^3r = I_i dl_i$, Stokesovega izreka $\int_S \nabla\times\mathbf{A}dS = \oint_C Adl$ in $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{j}\vec{A}d^3r = \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint_i \vec{A}_i d\vec{l}_i = \frac{1}{2}\sum_i I_i \int_S \nabla\times\vec{A}dS_i = \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i \tag{101}$$

Z upostevanjem definicije magnetnega potenciala prepisemo enacbo:

$$W_m = \frac{\mu_0}{8\pi}\int_V \frac{j(r)j(r')d^3rd^3r'}{|r-r'|} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_i I_k \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{i,k}\frac{dl_i dl_k}{|r(l_i)-r(l_k)|} = \frac{1}{2}\sum_i I_i\Phi_i \quad (102)$$

Iz cesar sledi, da je induktivnost clen po toku $L_{i,k} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{i,k}\frac{dl_i dl_k}{|r(l_i)-r(l_k)|}$, nakar:

$$\Phi_i = \sum_k L_{i,k} I_k \quad (103)$$

$L_{i,k}$ so simetricni koeficienti indukctivnosti, $L_{i,i}$ so lastne induktivnosti, ki jih ne gre izracunati po enacbi. Med magnetnim pretokom skozi vsakega od nitastih prevodnikov in tokov mora veljati linearna zveza (princpi superpozicije p[ravi, da je vsota magnetnega polja N vodnikov enaka celotnemu?).

Primer: Induktivnost dolge tuljave

Magnetno polje dolge tuljave je $B = \frac{\mu_) IN}{L}$, pretok je $\Phi = N\int \vec{B}\vec{n}dS = \frac{\mu_) N^2 I\pi a^2}{L}$ $= L_{ii}I$. Sklep: Tuljavo se bolj splaca zaviti, kot krajsati.

3.3 Razloži kožni pojav in zapiši vodilni enačbi (odvisnosti) za električno in magnetno polje. Zapiši oblike polj za izbrano geometrijo in komentiraj posledice.

Hrvaski fizik Nikola Tesla je z eksperimenti z visokofrekvencnimi poskusi ugotovil, da so ti mogoci le, ko se tok omeni na povrsino. Faradayev zakon namrec poskrbi, da s ev koncno velikem vodniku tok izrine na povrsino in s tem povca njegovo upornost, saj se zmanjsa presek po katerem tece. temu, da je ves tok tudi v nestaticnem primeru skoncentriran na povrsini pravimo kozni pojav. Sklep: V koncno velikem podniku se tok izrine na povrsino in poveca.

$$ \quad (104)$$

Pojav izpeljemo prek mnozenja kinematicnih ME z rotorji in upostevanju lastnosti polj npr. brezizvirnost ($\nabla \times POLJE = 0$):

$$\nabla\times\nabla\times E = \nabla\times(-\frac{\partial B}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\sigma E) \quad (105)$$

$$\nabla\times\nabla\times B = \nabla\times(\mu_0\sigma E) = -\mu_0\sigma\frac{\partial B}{\partial t} \quad (106)$$

Enacbi za kozni pojav sta torej:

$$\nabla^2 E = \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} = k^2 E \tag{107}$$

$$\nabla^2 B = \mu_0 \sigma \frac{\partial B}{\partial t} = k^2 B \tag{108}$$

Z ustreznima, casovno periodicnima resitvama:

$$E(t), B(t) \approx e^{-kz} = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\mu_0\sigma\omega}z} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\mu_0\sigma\omega}z} \tag{109}$$

Vdorna globina $d = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\mu_0\sigma\omega}$ je funkcija frekvence polja (vecja kot je ν, manjsa je).
Primer: Kozni pojav v cilindricni geometriji
Primer v cilindricnih koordinatah, da polja odvisna od Besselovih funkcij.

$$E_z(r) = AJ_0(kr) \tag{110}$$

$$B_\Phi(r) = iA\frac{k}{\omega}J_1(kr). \tag{111}$$

3.4 Razloži Maxwellovo formulacijo elektromagnetne indukcije in Maxwellov impulz. Zapiši kvazistatičen sistem Maxwellovih enačb in pripadajočo kontinuitetno enačbo ter jih razloži. Kakšna sta ustrezajoča elektromagnetna potenciala za kvazistatična polja?

Elektromagnetna indukcija (je ni v staticnem primeru/ poljih) temelji na Lenzovem pravilu, ki je formulirano na podlagi opazanj:

- Sprememba toka v 1. tuljavi povzroci napetostni sunek v 2. tuljavi
- Relativno gibanje 1. tuljave povzroci napetostni sunek v 2. tuljavi
- Relativno giganje permanentnega momenta in (ali 1. tuljave?) povzroci napetostni sunek v 2. tuljavi

$$\Gamma^E = -\frac{d}{dt}\Phi_M \tag{112}$$

Faradayev zakon indukcije:

$$\Gamma^E = -\frac{d}{dt}\Phi_M = -\frac{d}{dt}\int_S BdS = \oint_C Edr = \int_S \nabla \times EdS =_s \frac{\partial B}{\partial T}dS \tag{113}$$

iz zadnjih enakosti lahko izluscimo zvezo, ki ji pravimo kinematicna Maxwellova enacba:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{114}$$

Globji vpogled v indukcijo omogoci tako imenovan Maxwellov impulz.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial A}{\partial t} \tag{115}$$

Iz enakosti sledi, da je $\vec{E} = -\frac{\partial A}{\partial t}$, kar omogoci prepis Maxwellovega zakona indukcije v:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} = -\frac{\partial(e\mathbf{A})}{\partial t} \tag{116}$$

To omogoci mehansko interpretacijo magnetnega pojava, saj je tako receno $e\mathbf{A}$ posploseni impulz magnetnega polja. Sklep: Obstajajo vrtinci v elektricnem polju, ki prek impulza inducirajo rotacijo magnetnega polja.

Kvazistaticen (od casa odvisen) sistem Maxwellovih enacb in kontinuitetna enacba:

1. Maxwellova enacba

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{117}$$

2. Maxwellova enacba

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \tag{118}$$

3. Maxwellova enacba

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{119}$$

4. Maxwellova enacba

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{120}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0 \tag{121}$$

V kvazistaticnih poljih se spremeni tudi EM potencial, se vedno zaradi 1. ME velja $B = \nabla \times A$, vendar:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times \frac{\partial A}{\partial t} \tag{122}$$

$$\nabla \times E + \nabla \times \frac{\partial A}{\partial t} = \nabla \times (E + \frac{\partial A}{\partial t}) = 0 \tag{123}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{124}$$

Sklep: 1. clen predstavlja gradient skalarnega potenciala, 2. pa casovni odvod vektorskega potenciala **B**.

3.5 Razloži, kaj so prevodniki, ter zapiši Ohmov zakon. Kje se nahaja naboj v prevodniku, če ga postavimo v zunanje električno polje? Kakšne so tipične časovne skale za premikanje nosilcev naboja?

Prosti nosilci nabojev so elektroni, vrzeli in disociirani ioni. Ohmov zakon opise sorazmernost med gostoto toka in elektricnim poljem v snovi, kjer je σ_E Ohmska prevodnost snovi:

$$\mathbf{j} = \sigma_E \mathbf{E} \tag{125}$$

Nosilci naboja se gibljejo vse do vzpostavitve termodinamskega ravnovesja (v prevodniku), to je, ko je $j = 0$ oziroma $E = 0$. Takrat ni nabojev ($\nabla\mathbf{E} = 0$), oziroma so le na povrsini (induciran naboj):

$$\vec{E}\vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{126}$$

Pomembno je, da je $\vec{E} \perp \vec{n}$, saj tako ne stece tok in je posledicno 3.ME (kinematicna) $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.Iz pogoja, da je elektricno polje nic sledi, da je tudi gradient tega nic $\nabla\mathbf{E} = 0$.

Casovne skale dolocajo dobre oziroma slabe prevodnike v elektricnem polju, saj velja, da se prosti naboj iz prevodnika pojavi na povrsini v Maxwellovem relaksacijskem casu $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma_E}$. V primeru, da je snov dielektrik se faktor poveca za ϵ. Velikostni red (????).

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\mathbf{j} = 0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\sigma_E\mathbf{E}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sigma_E\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(127)

$$\rho(r,t) = \rho(r,0)e^{-t/\tau} \tag{128}$$

3.6 Razloži in opiši Drudejev model prevodnika (mikroskopsko sliko prevodnika). Od česa je odvisna prevodnost? S prevodnostjo poveži upornost vodnika z znano dolžino in presekom.

Za delce v prevodnikih lahko zapisemo 2.NZ, ob upostevanju, da na naboje delujejo zunanje elektromagnetne sile in procesi disipacije (sipalni (trki z ioni), hidronomski (viskoznot)). To vpliva na prevodnost materiala:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -m\gamma v(t) + eE(t) \tag{129}$$

Locimo primera, ko je:

- E = 0:

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} \tag{130}$$

$$W_e(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 e^{-2\gamma t} \tag{131}$$

- E $\neq$ 0:

$$v(t) = \frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t^{'})}E(t^{'})dt^{'} \tag{132}$$

$$j(t) = nev(t) = \frac{ne^2}{m}\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t^{'})}E(t^{'})dt^{'} = \frac{ne^2}{m}\frac{1}{\gamma}E = \sigma_E E \tag{133}$$

  To je Ohmov zakon. Vrednost relaksacijskega casa je z prevodnostjo povezana prek zveze $\tau = (2\gamma)^{-1}$.

Elektricna prevodnost je definirana kot $\sigma_E[Sm^{-1}]$, ki je funkcija casa. Ko gre temperatura proti 0, gre elektricna prevodnost proti neskoncno in takim materialom pravimo superprevodniki.

Tenzor prevodnosti in Hallov pojav:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -m\gamma v(t) + e(E(t) + v(t) \times B(t)) \tag{134}$$

V primeru stacionarnega stanja in magnetnega polja v z smeri ter ob upostevanju $\mathbf{j} = ne\mathbf{v}$, velja, da obstaja nek tenzor prevodnosti.

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m\gamma}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{135}$$

$$\mathbf{j} = \frac{e}{m\gamma}(\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})$$

(136)

$$\mathbf{j} = \sigma_E \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \frac{e}{m\gamma}\mathbf{B} \tag{137}$$

Upornost:

$$R = \int \frac{dl}{\sigma_E S(l)} = \frac{\int_C E dl}{\int_S (jn) dS} \tag{138}$$

4 Maxwellove enacbe

4.1 Ohranitveni zakoni Maxwellovih enačb: razloži in opiši ohranjanje energije, giblane količine in vrtilne količine.

Tole bo najdaljsi, vendar precej logicen sklop ;).

Maxwellove enacbe predpostavijo ohranjanje naslednjih kolicin:

1. Ohranitev naboja:

$$e(t) = \int_{V_0} \rho(r,t) d^3r \tag{139}$$

$$\frac{d}{dt}e(t) = -\oint_{V_0} (j(r,t)\vec{n})dS = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0} \rho(r,t)d^3r = \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r = -\oint_{\partial_{V_0}} j(r,t)dS = -\int_{V_0} \nabla j dS \tag{140}$$

   Ob primerjavi vrednosti integrirancev dobimo kontinuitetno enacbo: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0$.

2. Ohranitev energije:

$$B \cdot \nabla \times E = -B \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \tag{141}$$

$$E \cdot \nabla \times B = E \cdot \mu_0 j + \epsilon_0 \mu_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial E} \tag{142}$$

   Enacbi odstejemo in delimo z μ_0:

$$\epsilon_0 \mu_0 E \frac{\partial E}{\partial t} + B \frac{\partial B}{\partial t} = E \cdot \nabla \times B - B \nabla \times E - \mu_0 j E \tag{143}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\frac{1}{2}\epsilon_) E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2] + \nabla \frac{E \times B}{\mu_0} = -jE \tag{144}$$

   Z upostevanjem definicij gostote energije in Poyntingovega vektorja (vektor gostote energijskega toka), prepisemo enacbo v:

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega + \nabla \mathcal{P} + \mathbf{jE} = 0 \tag{145}$$

   Ohranitveno enacbo nato integriramo po volumnu, kjer prvi clen opisuje spreminjanje energije v volumnu, drugi poda prispevek dotoka in odtoka skozi ploskev, tretji pa opise izgubljanje energije znotraj zaradi Joulove toplote. To je Poyntingov teorem:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \omega d^3r = -\oint_{\partial V}(\vec{P}\vec{n})dS - \int_V(\vec{j}\vec{E})d^3r \tag{146}$$

Drugi clen lahko oznacimo za moc, oziroma odvod mehanske energije, kar privede do druge oblike:

$$\frac{d}{dt}[W_p + W_m] = -\oint_{\partial V}(\vec{P}\vec{n})dS \tag{147}$$

Sklep: Velja posplosen zakon o ohranitvi celotne (mehanske in elektromagnetne) energije $W_p + W_m = konst.$

3. Ohranitev gibalne kolicine:

   Zacnemo z kontinuitetno enacbo, v kateri naredimo substitucijo dveh clenov $(\nabla \times B \times B)$in $(E \times \nabla \times E)$ (izpeljavi v ***):

$$\frac{d}{dt}\epsilon_0(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \frac{d}{dt}\epsilon_0[\frac{\partial E}{\partial t}\times B + E\times\frac{\partial B}{\partial t}] = \epsilon_0[\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}(\nabla\times B\times B) - \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}(E\times\nabla\times E)] \tag{148}$$

$$= [\frac{1}{\mu_0}(-\frac{1}{2}\nabla B^2 + \nabla(B\times B)) - (j\times B) - \frac{1}{2}\nabla E^2 + \nabla(E\times E) + \frac{\rho}{\epsilon_0}E] \tag{149}$$

$$= -\epsilon_0[\frac{1}{2}\nabla E^2 - \nabla(E\times E) + c^2\nabla(B\times B) - \frac{c^2}{2}\nabla B^2] - (\rho E + j\times B) \tag{150}$$

Z upostevanjem definicij gostote gibalne kolicine $\mathbf{g} = \epsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})$, Lorentzove sile $\mathbf{f} = \rho E + (j\times B)$ in tenzorja napetosti $T_{ik} = ...$, zapisemo Cauchyjevo enacbo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\epsilon_0(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \nabla[\epsilon_0(\mathbf{E}\times\mathbf{E}) - \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\times\mathbf{B}) - \frac{1}{2\mu_0}B^2] + (\rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}) = 0 \tag{151}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}_i - \frac{\partial}{\partial x_k}T_{i,k} + \mathbf{f}_i = 0 \tag{152}$$

Do ohranitvenega zakona pridemo, ko enacbo integriramo po volumnu. Prvi clen predstavlja odvod gostote gibalne kolicine, drugi gibalno kolicino, ki skozi meje volumna doteka in odteka in zadnji spremembo gibalne kolicine, ki se znotraj volumna izgublja, ker mora okrog poganjati nabite delce z Lorentzovo silo. Prepisemo lahko se z $\int_V \mathbf{g} d^3r = \mathbf{G}_p$, $\int_V \mathbf{f} d^3r = \mathbf{F}$ in definicijo Lorentzove sile za EMP $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{G}_M$:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{G}_{P_i+\mathbf{G}_{M_i}}) = \oint T_{i,k} n_k dS \tag{153}$$

Poincare-Einsteinov zakon nam pove, da se v snovi ohranja celotna gibalna kolicina elektromagnetnega polja $G_p + G_m = konst$.

4. Ohranitev vrtilne kolicine:

   Ponovno zacnemo z kontinuitetno enacbo, kjer nastopa simetricni napetostni tenzor $\epsilon_{lji} T_{ji} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} x_j g_j - \frac{\partial x_j T_{ik}}{\partial x_k} \tag{154}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{lji} x_j g_j - \frac{\partial \epsilon_{lji} x_j T_{ik}}{\partial x_k} + \epsilon_{lji} x_j f_i = 0 \tag{155}$$

   Ponovno dobimo kontinuitetno enacbo, ki jo za obrazlozitev dogajanja integriramo po volumnu. Drugi clen pove, da skozi meje volumna doteka gostota toka vrtilne kolicine prek konponent tenzorja, tretji pa to, da se vrtilan kolicina v volumnu izgiblja ker mora vrteti nabite delce skozi Lorentzov navor:

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_e - \frac{\partial \epsilon_{ji} x_j T_{ik}}{\partial x_k} + m_l = 0 \tag{156}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \gamma_e = \oint_{\partial V} \epsilon_{lji} x_j T_{ik} n_k dS - \int_v m_l d^3r$$

(157)

   Ohranitveni zakon lahko prepisemo se z uvedbo $\mathcal{M}_{ij} = \epsilon_{jik} x_i T_{ik}$ in kot poprej velja, da se v snovi ohranja celotna vrtilna kolicina $\Gamma_p + \Gamma_m = konst$:

$$\frac{d}{dt}(\Gamma_p + \Gamma_m) = \oint_{\partial V} \mathcal{M}_{ij} n_j dS \tag{158}$$

4.2 Zapiši popoln set Maxwellovih enačb in ga razloži. Pojasni tudi matematično ozadje za tako obliko enačb. Uvedi kontinuitetno enačbo v popolni obliki in razloži Maxwllov premikalni tok.

Tekom obravnavanja snovi so k zacetnim Maxwellovim enacbam za staticna in casovno neodvisna polja dodali kvazistaticen popravek in popravek zaradi premikalnega toka. Glede na sklop 3.4 se spremeni le cetrta enacba:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \tag{159}$$

2. in 3. sta lepilni, 3. in 4. sta kinematicni, vsekakor pa so Maxwellove enacbe triumf klasicne teorije polja, katere matematicno odzadje so izvori in vrtinci.

Premikalni tok opisuje gostoto toka tudi v delu prostora, kjer ni nosilcev temvec le casovno spreminjajoce elektricno polje. Dodan je bil, ko je bila opazena nekonsistentnost z enacbo za naboj, ki je vodila v perpetuum immobile. Skupno clen na desni imenujemo Maxwellova gostota toka.

Izpeljava kontinuitetne enacbe:

$$B \cdot \nabla \times E = -B \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \tag{160}$$

$$E \cdot \nabla \times B = \mu_0 j E + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \tag{161}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 E \frac{\partial E}{\partial t} + B \frac{\partial B}{\partial t} = E \nabla \times B - B \nabla \times E - \mu_0 j E \tag{162}$$

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2] + \nabla \frac{E \times B}{\mu_0} = -jE \tag{163}$$

$$\frac{d}{dt}\omega + \nabla \mathcal{P} + jE = 0 \tag{164}$$

In ponovno, z integracijo po volumnu dobimo Poyntingov teorem.

5 Frekvencna odvisnost dielektricne funkcije

5.1 Uvedi in razloži frekvenčno odvisnost dielektrične funkcije in Kramers Krnonigove relacije. V kakšni povezavi sta disipacija enegije in dielektrična funkcija? Zapiši osnovne modele za frekvenčno odvisno dielektrično funkcijo (gibalna enačba za vezan naboj, Debyeva relaksacija, Lorentzova relaksacija, plazemska relaksacija) in razloži, kako sta povezana dielektrična funkcija in prevodnost.

Von Sellmeier:

$$\epsilon(\omega) = n^2(\omega) = 1 + \frac{\beta_1\omega^2}{\omega^2 - c_1} + \frac{\beta_2\omega^2}{\omega^2 - c_2} + \frac{\beta_3\omega^2}{\omega^2 - c_3} \tag{165}$$

Helmholtz:

$$\epsilon(\omega) = n^2(\omega) = 1 + \frac{1/\epsilon_0}{1/\tau + i\alpha\omega - m\omega^2} \tag{166}$$

Frekvencna odvisnost dielektricne funkcije:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} D(r,\omega) = \epsilon_0 \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} E(r,t) + \epsilon_0 \int_{-\infty}^{t} \chi(t-t^{'}) \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} E(r,\omega) dt^{'} \tag{167}$$

$$0 = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}[D(r,\omega) - \epsilon_0 E(r,t) - \epsilon_0 \chi(\omega) E(r,\omega)] \tag{168}$$

$$\epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 + \int_{-\infty}^{t} \chi(t-t^{'}) e^{i\omega t} e^{-i\omega t^{'}} dt^{'} \tag{169}$$

Z substitucijo $\tau = t - t^{'}$ dobimo enacbo, katere realni del predstavlja odgovor snovi, ki je v fazi z zunanjim poljem in imaginarni del odgovor snovi, ki je fazno zakasnjena za $\frac{\pi}{2}$.

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_{-\infty}^{t} \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \tag{170}$$

Kramars - Kronigove relacije se uporabljajo za dolocitev koeficientov odbojnosti v spektroskopiji, kar je vcasih mozno prek delitvije na realno in imaginarno konponento (ena je lahko npr. 0). Uvedemo Hilbertove transformacije:

$$Re(\epsilon(\omega)) - 1 = \frac{2}{\pi}\mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega^{'} Im(\epsilon(\omega)}{\omega^{'2} - \omega^2} d\omega^{'} \tag{171}$$

$$Im(\epsilon(\omega)) = -\frac{2\omega}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{\omega' Re(\epsilon(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \tag{172}$$

Za $\epsilon(\omega)$ velja parnost, uporabno pa je pogledati limite proti 0 in neskoncno ter analiticnost???. Obstaja vec modelov za dielektricno funkcijo (ce prav razumem, so to kot neke limite za razlicno obnasanje frekvenc):

Izpeljava:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -m\gamma r' - m\omega_0^2 r + e_p E(t) \tag{173}$$

Ob upostevanju, da je $r(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} r(\omega)$ izvedemo FT in dobimo:

$$-m\omega^2 r(\omega) = m\gamma(i\omega)r(omega) - m\omega_0^2 r(\omega) + e_p E(\omega) \tag{174}$$

$$r(\omega) = \frac{e_0}{m}\frac{E(\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \tag{175}$$

Upostevajoc zvezo $P(\omega) = \epsilon_0(\epsilon(\omega) - 1)E$...

$$\epsilon_0(\epsilon(\omega) - 1) = \frac{\frac{\epsilon_p^2 \pi p}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \tag{176}$$

- Debyjeva relaksacija ($\omega \to 0$):

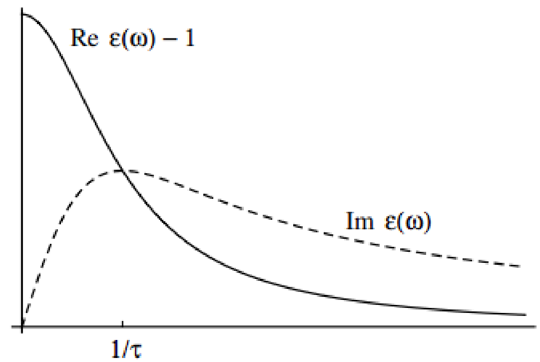
$$\mathcal{P}(\omega) = r(\omega)e_p n_p = \frac{e_p^2 n_p}{n\omega_0^2}\frac{E(\omega)}{1 - i\tau\omega} = \frac{\epsilon_0(\epsilon(\omega) - 1)E(\omega)}{1 - i\tau\omega} \tag{177}$$

$$\epsilon(\omega) - 1 = \frac{(\epsilon_0 - 1)(1 + i\omega\tau)}{1 + \tau^2\omega^2} \tag{178}$$

  Sklep: To je Debyjeva dielektricna funkcija.

$$[Re(\epsilon(\omega) - 1) - \frac{1}{2}(\epsilon(\omega) - 1)]^2 + (Im(\epsilon(\omega))^2 = \frac{(\epsilon - 1)^2}{4} \tag{179}$$

  Graf: Odvisnost Re in Im dela DFF.



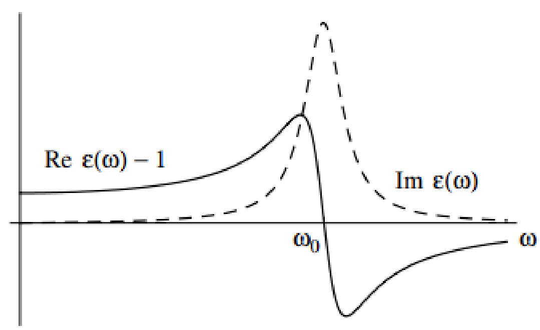
Cole - Coleov diagram je krog (Kompleksna ravnina).

- Lorentzova relaksacija ($\omega \to \infty$):

$$\mathcal{P}(\omega) = r(\omega)e_p n_p = \frac{n_n e^2}{m}\frac{E(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \tag{180}$$

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{(\epsilon_0 - 1)\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \tag{181}$$

Graf: Odvisnost Re in Im dela DFF:



Zapis Re in Im dela...

- Plazemska relaksacija($\omega \to$velika vrednost):

$$\mathcal{P} = n_b e r(\omega) = -\frac{n_p e_p^2}{m\omega^2}E(\omega) \tag{182}$$

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{183}$$

- Frekvencna odvisnost prevodnikov: V prevodnikih je gibljiv in negibljiv ali vezan naboj. V primeru, ko je ves naboj gibljiv je to plazma

$$m\frac{dv}{dt} = -m\gamma v + eE \tag{184}$$

$$v = \frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t} e^{-\sigma(t-t')}E(t')dt' \tag{185}$$

Z upostevanjem izraza za j in FT iz casovne v frekvencno domeno, dobimo frekvencno odvisno prevodnost:

$$j(r,\omega) = \sigma(\omega)E(r,\omega) \tag{186}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m}\frac{1}{\gamma - i\omega}. \tag{187}$$

Drugi pristop je prek Ohmovega zakona:

$$j = nev = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \sigma(\omega)E(r,\omega) = -i\omega\mathcal{P}(R,\omega) \tag{188}$$

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\sigma(\omega)}{i\omega\epsilon_0} \tag{189}$$

V prevodniku ne moramo imeti staticnega elektricnega polja. Mogoce je le, da se prosti naboj iz notranjosti preseli na povrsino in tam senci zunanje polje.

6 Elektromagnetno valovanje

7 Elektromagnetno polje v snovi

7.1 Razloži in opiši električno polje v snovi: vezan naboj, polarizacija, slika snovi, konstitutivna relacija, pomen polarizacije in klasifikacija snovi.

Snovi najprej klasificirajmo. Poznamo dielektrike v katerih so v notranjosti elektricne napetosti premajhne, da bi zaznale njihovo kemijsko dekompozicijo, vendar jih lahko polarizirajo. Za idealne velja, da v njih ni izgub (skladiscijo elektricno polje), za neidealne pa je podana frekvencna odvisnost (prek dielektricne funkcije) in je EM polje podvrzeno izgubam. Izolatorji prenasajo polarizirana stanja, prevodnikov pa ne moremo trajno polarizirati saj imajo neskoncno vrednost staticne dielektricne funkcije oziroma idealno sencijo polje v notranjosti (efekt Faradayeve kletke).

Molekule so navzven nevtralne, vendar imajo znoter porazdelitev naboja, ki mu pravimo vezan naboj (odvisen od snovi). Ko snov ni v E, je gostota vezanega naboja $\rho_V = 0$. Ko vstavimo snov v zunanje polje, se v snovi (prek molekul) vzpostavi konstantna polarizacija, ki povzroci povrsinsko porazdelitev vezanega naboja.

$$e = e_{zun} + e_{vez} \tag{190}$$

$$\rho_{vez}(r,t) = \overline{\sum_i e_i \delta^3(r - r_i)} \tag{191}$$

$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \tag{192}$$

Povezava med vezanim nabojem in polarizacijo:

$$\rho_V = -\nabla \mathbf{P} \tag{193}$$

$$\nabla(\epsilon \mathbf{E} - \mathbf{P}) = \rho \tag{194}$$

Kolicino v oklepaju navadno oznacimo z $\mathbf{D}$, kar je gostota elektricnega polja, ki je odvisna le od zunanjih nabojev. Sestavljena je iz prispevkov notranjega polja E in odziva snovi na le to - P.

Konstitutivna relacija $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{D})$, nam pove kaksna je porazdelitev vezanih nabojev v snovi v odvisnosti od zunanjega elektricnega polja. Za izotropne in homogene snovi v 1.redu velja $P(D) = \chi_E D + \delta(D^2)$, kjer smo uvedli elektricno susceptibilnost $\chi_E = 1 - \frac{1}{\epsilon}$

$$D = \epsilon_0 E + \chi_E D = \epsilon_0 E + (1 - \frac{1}{\epsilon})D \tag{195}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} \tag{196}$$

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\mathbf{E} \tag{197}$$

Polarizacijo lahko razumemo tudi kot gostoto elektricnega dipolnega momenta v snovi.

7.2 Razloži in opiši magnetno polje v snovi: vezan tok, magnetizacija, konstitutivna relacija, pomen magnetizacije in klasifikacija snov.

V snovi se pojavijo lokalni vezani tokovi, ki predstavljajo hidrodinamsko povprecje magnetnega polja in v primeru, ko je B razlicen od 0 se odzovejo na polje. Gostota vezanega toka je dolocena z naravo snovi, katerega povprecje izracunamo prek hidrodinamskega volumna. Snovi klasificiramo v ferimagnetike/antiferomagnetike, v katerih je permanentna vrednost magnetizacije (neodvisna od zunanjega polja, vendar odvisna od T). Ti se nad Courijevo temperaturo razmagnetijo. Diamagnetiki imajo magnetizacijo le ob prisotnosti zunanjega magnetnega polja. Idealni diamagnetiki so superprevodniki, ki imajo magnetno permeabilnost μ=0. Paramagnetiki imajo smer magnetizacije v smeri zunanjega magnetnega polja ter χ_M ¿ 0. Vezan tok gledamo mikroskopsko in opise polje magnetizacije (odziva na snov):

$$jv = \nabla \times M + \frac{\partial P}{\partial t} \tag{198}$$

$$\nabla jv + \frac{\partial \rho v}{\partial t} = \nabla \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial \nabla P}{\partial t} = 0 \tag{199}$$

$$\nabla \times (\frac{B}{\mu_0} - M) = j + \frac{\partial B}{\partial t} \tag{200}$$

Ta enakost je ekvivalentna enacbi (kak maxwell??):

$$\nabla \times B = \mu_0 j + \mu_0 jv + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \tag{201}$$

Tu upostevamo definicijo jakosti magnetnega polja $H = \frac{B}{\mu_0} - M$. Enacba pravi, da zunanje magnetno polje, ki deluje na snov (H) se v njen razklopi na vsoto notranjega polja B in magnetizacije (odziva snovi). Magnetizacijo vpeljemo kot vektorsko polje **M**, prek enacbe:

$$jv = \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial P}{\partial t} \tag{202}$$

Dokaz: Enakost zadosca kontinuitetni enacbi.

Primer: Klada, z tokovi v ravninah xy (na spodnji in zgornji ploskvi). V tem primeru, kaze magnetizacija le v smeri z.

Sklep: Pojavijo se tokovi na vseh povrsinah, pravokotnih na smer magnetizacije in sencijo gostoto magnetnega polja v kladi. Vpeljemo konstitutivno relacijo $M =$

$M(H)$, kjer je $\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H} + o(H^2)$ in velja za homogeno, izotropno snov. $\chi_M = \mu - 1$ je magnetna susceptibilnost. Iz danih enacb lahko izpeljemo:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi_M \mathbf{H} = \frac{B}{\mu_)} - (\mu - 1)H \tag{203}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu} \tag{204}$$

Pomen magnetizacije (staticno???).

7.3 Zapiši in razloži Maxwellove enačbe v snovi. Pojasni ohranitvene zakone v snovi (energija, giblana količina). Kakšna je sila na nehomogeno snov v EM polju?

$$\nabla \mathbf{D} = \rho \tag{205}$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \tag{206}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\mathbf{t}} \tag{207}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{208}$$

Konstitutivni relaciji za izotropne snovi, ki podata sklopitev med notranjim in zunanjim poljem:

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} \tag{209}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H} \tag{210}$$

Za anizotropne snovi velja tenzorska sklopitev $D_i = \epsilon_{ik} \epsilon_) E_k$ in $B_i = \mu_{ik} \mu_) H_k$. Ohranitveni zakoni so sledeci:

1. Ohranitev energije

   Cetrto ME pomnozimo z $\mathbf{E}$ in uporabimo zvezo (*):

$$\nabla \times H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \tag{211}$$

$$jE = E(\nabla \times H) - E\frac{\partial D}{\partial t} = H(\nabla \times E) - \nabla(E \times H) - E\frac{\partial D}{\partial t} \tag{212}$$

$$-jE = H\frac{\partial B}{\partial t} + E\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla(E \times H) \tag{213}$$

Zadnji clen prepisemo z upostevanjem definicije Poyntingovega vektorja $\mathcal{P} = E \times H$, in zapisemo energijo elektromagnetnega polja:

$$W_{EM} = \int_V (\int_0^D EdD + \int_0^B HdB) d^3r \tag{214}$$

$$d\omega_{EM} = EdD + HdB \tag{215}$$

Zakon o ohranitvi energije:

$$\frac{d}{dt}(W_{EM} + W_M) = -\oint_{\partial V} (\mathbf{Pn}) dS \tag{216}$$

2. Gibalna kolicina (Cauchyjeva enacba v snovi)

$$\frac{\partial}{\partial t}(D \times B) = [D \times E - \nabla(DE) + B\nabla H - \nabla(BH)] - (\rho E + j \times B) \tag{217}$$

Clen v oklepaju predstavlja napetostni tenzor T, nadaljni prepis s tenzorjem pa je mogoc le, ce je snov izotropna in so konstitutivne relacije linearne.

$$T_{ik} = E_i D_k - \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D})\delta_{ik} + B_i H_k - \frac{1}{2}(\vec{B}\vec{H})\delta_{ik} \tag{218}$$

$$G_{EM} = \int_V g_{EM} d^3r = \int_V \vec{D} \times \vec{B} d^3r \tag{219}$$

Zakon o ohranitvi gibalne kolicine:

$$\frac{d}{dt}(G_{EM} + G_M) = \oint_{\partial V} T_{ik} n_k dS \tag{220}$$

3. Sila na nehomogeno snov

Ponovno bomo uporabili napetostni tenzor, le da ga najprej spremenimo v simetricnega in upostevamo, da sta μ in ϵ funkciji kraja (brez da to pisem v enacbi):

$$T_{ik} = \epsilon\epsilon_0 E_i E_k - \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0 E^2 \delta_{ik} + \mu\mu_0 H_i H_k - \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 \delta_{ik} \tag{221}$$

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_t} = E_i(\partial_k D) + (E_k \partial_k) D_i - \frac{1}{2}(\partial_i \epsilon)\epsilon_0 E^2 - \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0 \partial_i E^2 \tag{222}$$

$$F_i = \int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_t} dV \quad (223)$$

Z upostevanjem $\frac{1}{2}\nabla E^2 = E \times (\nabla \times E) + (E\nabla)E$ in 2. in 3. ME $\nabla B = 0$, $\nabla \times E = 0$ dobimo elektrostatski del sile:

$$F = \int_V [E(\nabla B) + (E\nabla)B - D \times (\nabla \times E) - (E\nabla)\nabla] dV - \frac{1}{2}\int_V (\nabla\epsilon)\epsilon_0 E^2 dV \quad (224)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2}\int_V (\nabla\epsilon)\epsilon_0 E^2 dV \quad (225)$$

Magnetostatski del:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2}\int_V (\nabla\mu)\mu H^2 dV$$

(226)

7.4 Razloži in izpelji splošne robne pogoje za Maxwellove enačbe v snovi.

Ukvarjamo se s koncnim prostorom in dvema konstitutivnima relacijama $D = \epsilon\epsilon_0 E$ in $H = \frac{B}{\mu_0 \mu}$. T je tangentna konponenta, n je normalna. Robni pogoji so naslednji:

- $D_{1n} - D_{2n} = \sigma$
- $B_{1n} - B_{2n} = 0$
- $E_{1t} - E_{2t} = 0$
- $H_{1t} - H_{2t} = K$

1. RP za B (volumen)

$$\int_S BdS = 0 = \int_{S_1} (B_1 n_1) dS + \int_{S_2} (B_2 n_2) dS + \int_{plasc} (B_{PL\|} n_{PL}) dS \quad (227)$$

Zadnji clen je 0, ker je $\lim_{dl\to 0} \oint (\vec{B}\vec{n}) dS = \lim_{dl \to 0} \int (\vec{B_{PL}} \vec{n_{PL}}) 2\pi r dl$.

$$0 = \int_S (B_1 n_1 + B_2 n_2) dS \quad (228)$$

Velja torej, da je $(\vec{B}\vec{n})_1-(\vec{B}\vec{n})_2=0$ iz cesar, ob upostevanju, da normali kazeta v nasprotno smer dobimo RP:

$$\mathbf{B}_{1n}=\mathbf{B}_{2n}. \tag{229}$$

2. RP za D (volumen)

$$\int \nabla\vec{B}d^3r=\int_V \rho d^3r=\int_{\partial V}\sigma dS=\int_S (D_1n_1+D_2n_2)dS \tag{230}$$

Ob upostevanju, da morata biti integriranca ali integranda enaka, dobimo:

$$\mathbf{D}_{1n}-\mathbf{D}_{2n}=\sigma \tag{231}$$

Kar bi lahko zapisali tudi z $(\vec{D}\vec{n})_1-(\vec{D}\vec{n})_2=\sigma$.

3. RP za E (zanka)

$$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t};integriramo... \tag{232}$$

$$\oint_C \nabla\times E=-\frac{d}{dt}\int_S BdS=\oint_C EdS=E_1t_1dn+E_2t_2dn=-\frac{d}{dt}\vec{B}dldn \tag{233}$$

Zadnji clen je enak 0 (sklepam, da ker je tangentna konponenta E pri prehodu med snovema zvezna - ni preskoka), torej je RP $(\vec{E}\vec{t})_1-(\vec{E}\vec{t})_2=0$.

$$\mathbf{E}_{1t}=\mathbf{E}_{2t} \tag{234}$$

Zapis z normalo: $(\vec{n}\times\vec{E})_1-(\vec{n}\times\vec{E})_2=0$.

4. RP za H (zanka)

$$\nabla\times H=j+\frac{\partial D}{\partial t};integriramo... \tag{235}$$

$$\int_C HdS=\int_S jdS+\frac{\partial}{\partial t}\int_S DdS \tag{236}$$

jS je povrsinska gostota toka oziroma $jS=\lim_{dl\to 0}(\vec{j}t)\vec{d}l$. Zadnji clen odpade, povrsinska gostota povzroci, da meja ni zvezna in je za preskok potrebno preiti vrednost jS: $(\vec{H}\vec{t})_1-(\vec{H}\vec{t})_2dh=Kdh$.

$$\mathbf{H}_{1t}-\mathbf{H}_{2t}=K \tag{237}$$

Zapis z normalo: $(\vec{n}\times\vec{H})_1-(\vec{n}\times\vec{H})_2=K$.

8 Ostalo

8.1 Določi in razloži Lagrangeov in Hamiltonovo funkcijo nabitega gibajočega delca v zunanjem električnem in magnetnem polju in nato Schwartzschildovo invarianto. Nadalje dopolni Lagrangevo funkcijo še s prispevki zradi samega polja, ki ga nabiti delci (delec) ustvarjajo, in zapiši ustrezajoče Euler-Lagrangeve in Rieman-Lorentzove enačbe.

Odgovor spada v Hamiltonove metode v teoriji polja. Lagrangeovo funkcijo zapisemo prek E in B z upostevanjem (trojni vektorski produkt) in zveze $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)A$. Zacnemo z Lorentzovo silo v katero uvedemo potenciale:

$$F = e(E + v \times B) = -e\nabla\varphi - e\frac{\partial A}{\partial t} + e(v \times \nabla \times A) \tag{238}$$

$$m\dot{v} = -e\nabla\varphi + e\nabla(vA) - e\frac{dA}{dt} \tag{239}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r} + eA) = -\nabla(e\varphi - evA) \tag{240}$$

Kar je ekvivalentno:

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}] - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{241}$$

Z nekaj dedukcije pridemo do:

$$L(\dot{r}(t), r(t), t) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2(t) - e\varphi(r(t), t) + e\dot{r}(t)A(r(t), t) \tag{242}$$

Preverimo lahko tudi invariantnost na umeritveno transformacijo, kjer vzamemo potenciala in ju umeritveno transformiramo v $'$; $A^{'} = A + \nabla\chi$ in $\varphi^{'} = \varphi - \frac{\partial\chi]}{\partial t}$:

$$S = \int_1^2 Ldt = \int_1^2 \frac{1}{2}m\dot{r}^2(t) - e\varphi(r(t), t) + e\dot{r}(t)A(r(t), t)dt \tag{243}$$

upostevamo podobno zvezo za pristevek k potencialu (diferencial A) in prepisemo:

$$S^{'} = S + e\int_1^2 \frac{d\chi}{dt}dt = S + e(\chi(1) - \chi(2)) \tag{244}$$

Hamiltonovo funkcijo nabitega delca zapisemo z upostevanjem definicije $\mathcal{H} = \dot{r}p - L$, $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + eA$. V Hamiltonovem formalizmu je p kanonicni impulz, p - eA pa kineticni impulz.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\mathbf{p} - \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 = e\varphi - e\mathbf{A}(\frac{\mathbf{p} - e\mathbf{A}}{m}) \tag{245}$$

$$\mathcal{H}(p, r, t) = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\varphi \tag{246}$$

Schwartzova invarianta (naredi kaj???):

$$L_{DP} = -e\varphi + evA \tag{247}$$

$$\mathcal{L}_{DP} = -\rho\varphi + jA \tag{248}$$

Ce v Lagrangeovi funkciji upostevamo tudi prispevke polj delcev samih, dobimo:

$$L = \int_V \mathcal{L} d^3r = \int_V \mathcal{L}_P - \int_V \rho\varphi d^3r + \int_v jAd^3r \tag{249}$$

Mislim, da je ekvivalent temu LF za polje in izvore:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 - \rho\varphi - (\frac{1}{2\mu_0}B^2 - jA) \tag{250}$$

Magnetni delec prispeva kineticno, elektricni delec pa potencialno energijo. Iz Lagrangeove funkcije lahko naprej izpeljemo EL enacbe in RL enacbe, pri cemer velja, da so EL enacbe za gostoto Lagrangeove funkcije ekvivalentne RL enacbam. Oboje je poenostavitev ME, kjer racunamo namesto s polji s potenciali.

8.2 Posebna teorija relativnosti: razloži transformacijo EM polj z Lorentzovo transformacijo, vlogo prostora Minkovskega in formulacijo štirivektorjev, štirivektor gostote toka in štirivektor EM potenciala.

V posebni teoriji relativnosti velja postulat o univerzalnosti svetlobne hitrosti, ki pove, da je ta v vseh opazovalnih sistemih enaka. Lorentzova transformacija preslika $\vec{r}\vec{r} - c^2t^2 = \vec{r'}\vec{r'} - c^2t^2$ in ustrezno zarotira/ preslika koordinate:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \tag{251}$$

Kjer sta $x^{'} = xcos(\varphi) + ysin(\varphi)$ in $y^{'} = -xsin(\varphi) + ycos(\varphi)$. Ob upostevanju $x^{'} = xcos(\varphi) + ictsin(\varphi)$ ter $ict^{'} = -xsin(\varphi) + ictcos(\varphi)$ dobimo zvezo za vrtenje koordinat in casa:

$$x^2 + (ic)^2 t^2 = x^{'2} + (ic)^2 t^{'2} \tag{252}$$

Lorentzove transformacije EM polja se lotimo tako, da najprej vse clene v ME (tako polja, kot gradiente) premaknemo v referencni sistem $S^{'}$. Sledi, da veljajo enakosti: $\frac{\partial E_z^{'}}{\partial y^{'}} - \frac{\partial E_y^{'}}{\partial z^{'}} = -\frac{\partial E_x^{'}}{\partial t}$. Ob upostevanju ze znanih zvez, veljajo enakosti:

$$B_x = B_x^{'} \tag{253}$$

$$E_y = \gamma(E_{y''} + vB_{z''}) \tag{254}$$

$$E_z = \gamma(E_{z''} + vB_{y''}) \tag{255}$$

Poglejmo si zdaj se iz prostora Minkovskega, ki poveze casovne in prostorske konponente:

$$x_\mu = (x_1, x_2, x_3, ct) \tag{256}$$

$$x^\mu = (x_1, x_2, x_3, -ct) \tag{257}$$

Lorentzove transformacije lahko zapisemo tudi v prostoru Minkovskega:

$$A_\mu^\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \tag{258}$$

Prepisemo lahko se stirivektor EM potenciala $A_\mu = (A, \frac{\phi}{c})$ in $A^\mu = (A, \frac{-\phi}{c}$ in stirivektor gostote toka, ki ga lahko locimo na gostoto toka in gostoto naboja $j_\mu = \rho(v, c)$. Velja, da je naboj invarianten, gostota toka pa ni.

9 Enacbe, izreki in matematicne zveze

$$\mathbf{E}(\nabla\mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{E}) - (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E} \tag{259}$$

$$\nabla \times \frac{j(r^{'})}{|r - r^{'}|} = \nabla\frac{1}{|r - r^{'}|} \times j = \frac{j(r^{'}) \times (r - r^{'})}{|r - r^{'}|^3} \tag{260}$$

$$\mathbf{B}\nabla\mathbf{B} = \frac{1}{2}\nabla\mathbf{B}^2 - \nabla(\mathbf{B}\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}(\nabla\mathbf{B}) \tag{261}$$

$$A \times (B \times C) = B(AC) - C(AB) \tag{262}$$

Kazalo vsebine

References