

## 1 有限元法基本原理

有限单元法是求解数学物理方程的一种数值计算方法，是解决工程问题的一种强有力的计算工具。由弹性力学构建的平衡方程、几何方程、物理方程及边界条件虽然能很好的刻画物体的力学行为，但该方程组为二阶偏微分方程组，需要极为苛刻的条件才能得到解析解答或者近似解答，故在早期实用价值不高。随着有限单元法的发展和计算机学科的兴起，利用数值方法求解弹性方程变成了一种可行的手段，能够得到满足工程精度的数值解答，有限单元法因此得到了飞速发展，并且日趋完善。

有限单元法分析一般包括三个步骤，即离散化、单元分析和整体分析。把一个连续的弹性体分为若干个有限大小的区域组成的离散结构，我们称这种离散结构为有限元网格。这些有限大小的区域就称为有限单元，简称为单元。平面问题常用的单元有三角形单元、矩形单元和等参单元。在将结构离散化之后，我们假设荷载只作用在结点上，并且只有结点会发生位移。在单元内部，我们利用特定的位移模式，用结点位移表示出单元内部点的位移、应变、应力等特征量，从而计算出由变形导致的结点荷载。再利用结点处的平衡条件，即由变形引起的结点荷载等于外部力引起的结点荷载，求解出结点位移，进而求出其他物理量。

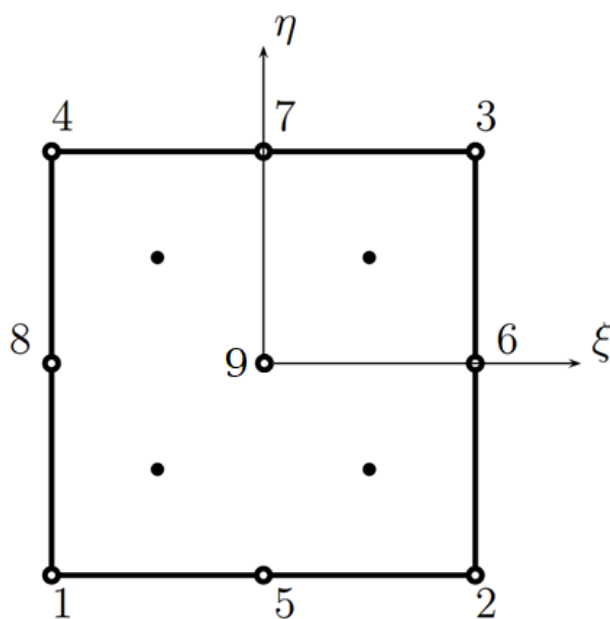


图1 四边形九结点等参单元结点编号

本课程设计选题为二维弹性力学问题二次等参元程序设计，分析受多组荷载共同作用下的悬臂梁结构的位移和应力。本课程设计主要构造四边形九结点等参单元，建立对应的形函数、应变转化矩阵、应力转化矩阵、单元刚度矩阵、等效结点荷载列阵，求解控制方程得到对应的位移，进而求解出对应的应变、应力分量，并对计算结果进行后处理，绘制有限元场云图。

四边形九结点等参单元结点编号如图 1 所示。

其对应的形函数为：

$$N_1(\xi, \eta) = 0.25\xi\eta(\xi - 1)(\eta - 1)$$

$$N_2(\xi, \eta) = 0.25\xi\eta(\xi + 1)(\eta - 1)$$

$$N_3(\xi, \eta) = 0.25\xi\eta(\xi + 1)(\eta + 1)$$

$$N_4(\xi, \eta) = 0.25\xi\eta(\xi - 1)(\eta + 1)$$

$$N_5(\xi, \eta) = 0.5\eta(1 - \xi^2)(1 - \eta)$$

$$N_6(\xi, \eta) = 0.5\xi(1 + \xi)(1 - \eta^2)$$

$$N_7(\xi, \eta) = 0.5\eta(1 - \xi^2)(1 + \eta)$$

$$N_8(\xi, \eta) = -0.5\xi(1 - \xi)(1 - \eta^2)$$

$$N_9(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

应变、应力由下式求出：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = B\mathbf{u}^e$$

$$\boldsymbol{\sigma} = D\boldsymbol{\varepsilon} = DB\mathbf{u}^e$$

其中， $\mathbf{u}^e$ 为结点位移， $B$ 为应变转化矩阵， $D$ 为弹性矩阵。

单元刚度矩阵由下式求出：

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T D B t |J| d\xi d\eta, \quad \mathbf{K}^e = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}^T D B t |J| w_i w_j$$

其中， $t$ 为结构厚度， $J$ 为雅可比矩阵， $w_i$ ， $w_j$ 为高斯积分权重。

等效结点荷载由下式求出：

$$\mathbf{R}^e = \sum_e \mathbf{N}^T \mathbf{P}^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} t dx dy + \int_{S^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}} t ds$$

其中，(1) 作用于结点的集中力  $\mathbf{R}^e = \mathbf{N}^T \mathbf{P}^e$

$$(2) \text{ 自重体力 } \mathbf{f} = [0 \quad -\rho g]^T, \quad \mathbf{R}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{f} |J| d\xi d\eta$$

$$(3) \text{ 分布面力 } \bar{\mathbf{f}} = [\bar{f}_x \quad \bar{f}_y]^T, \quad \mathbf{R}^e = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}} ds$$

通过求解代数方程  $Ku^e = R$  可以求解出结点位移，其中  $K$  和  $R$  分别是由  $K^e$  和  $R^e$  集成得到的总体刚度矩阵和总体等效结点荷载矩阵，由下式求出：

$$K = \sum_e C_e^T k C_e, \quad R = \sum_e C_e^T R^e$$

其中， $C_e$  为选择矩阵。由求得的结点位移  $u^e$  可以进一步计算出对应的应变、应力，再对计算结果进行后处理，得到各结点的应变、应力值。最后利用该结果绘制横向位移场和应力场。有关上述公式的细节，请参见文献[3]。

## 2 有限元程序设计

### （一）几何模型

悬臂梁的基本构造和受力情况，如图 2 所示。

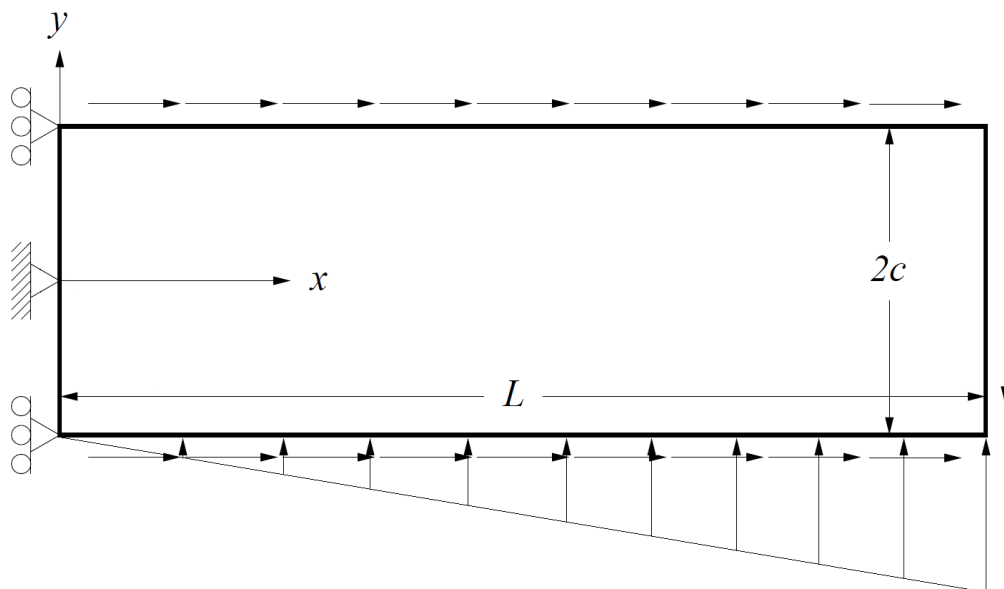
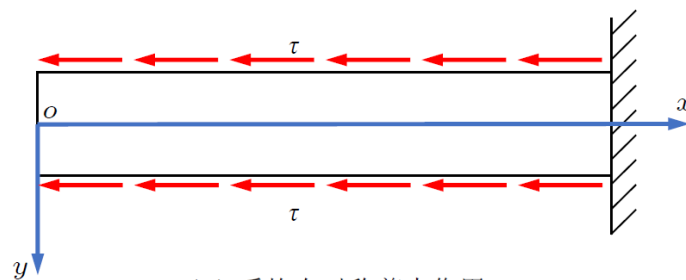
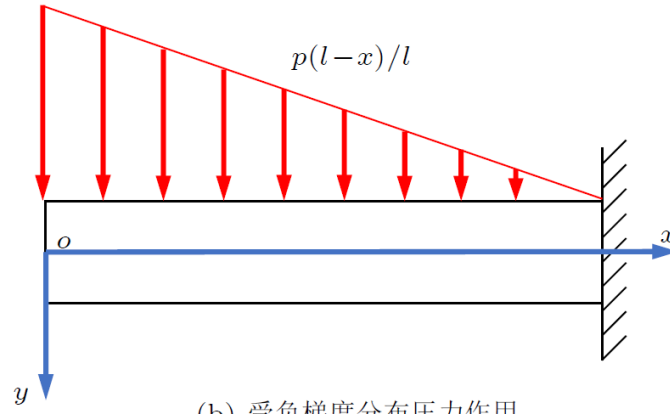


图 2 悬臂浅梁的位移边界和应力边界

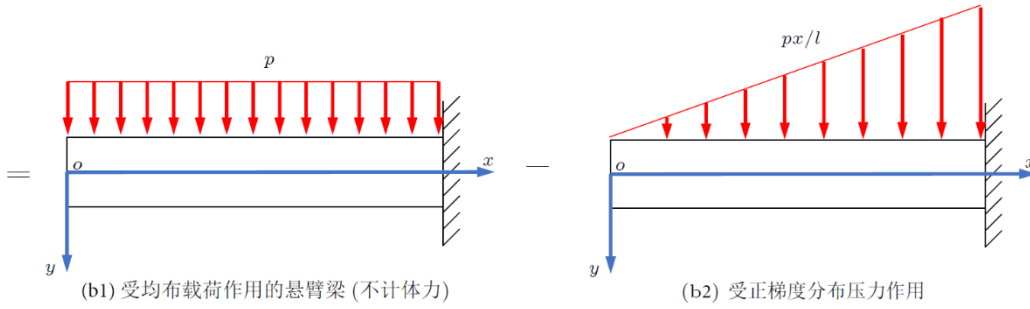
根据弹性力学的基本理论，上述较为复杂的受力情况可以由下列几种简单的受力情况叠加得到。（图片来源：文献[1]）



(a) 受均布对称剪力作用

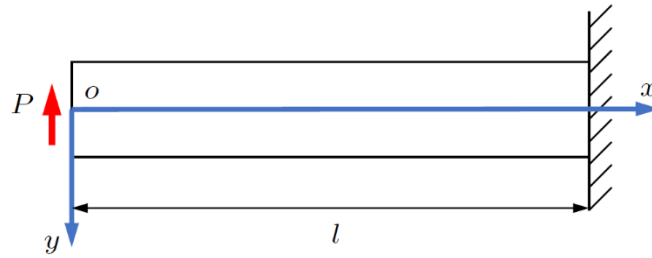


(b) 受负梯度分布压力作用



(b1) 受均布载荷作用的悬臂梁 (不计体力)

(b2) 受正梯度分布压力作用



(c) 端部受集中力作用

对于上面几种荷载受力, (由 Maple 求得) 理论解如下。其中记号  $f_i(x, y)$ 、 $g_i(x, y)$ 、 $h_i(x, y)$  分别代表  $\sigma_{11}$ 、 $\sigma_{22}$ 、 $\sigma_{12}$  ( $\sigma_{21}$ ):

$$(a) \quad f_3(x, y) := \frac{s}{c}x; \quad g_3(x, y) := 0; \quad h_3(x, y) := -\frac{s}{c}y$$

$$(b) \quad f_7(x, y) := -\frac{3px^2y}{4c^3} + \frac{3p\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right)}{4c^3} + \frac{x^3py}{4c^3l} - x\left(\frac{py^3}{2c^3l} - \frac{3py}{10cl}\right);$$

$$g_7(x, y) := -\frac{p\left(1 - \frac{3y}{2c} + \frac{y^3}{2c^3}\right)}{2} - x\left(-\frac{py^3}{4c^3l} + \frac{3py}{4cl} - \frac{p}{2l}\right);$$

$$h_7(x, y) := \frac{3p(-c^2 + y^2)x}{4c^3} + \frac{x^2\left(-\frac{3py^2}{4c^3l} + \frac{3p}{4cl}\right)}{2} + \frac{py^4}{8c^3l} - \frac{3py^2}{20cl} + \frac{cp}{40l}$$

注: (b) = (b1) - (b2)

$$(c) \quad f4(x,y) := \frac{Pxy}{\frac{2}{3}c^3} ; \quad g4(x,y) := 0 ; \quad h4(x,y) := \frac{P(c^2 - y^2)}{\frac{4}{3}c^3}$$

不难发现，上述计算结果的坐标架与图 1 不同。所以需要对上述公式作变换“ $x \rightarrow l-x$ ,  $h_i(x,y) \rightarrow -h_i(x,y)$ ”即可得到图 1 问题的理论解。

进一步，就可以由公式  $\sigma_{ij} \cdot n_j = f_i$  得出四个应力边界条件如下：

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & h \\ h & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$$

其中， $l$ 、 $m$  分别是边界法线的单位方向余弦。在具体的计算中，有：

值	上边界	下边界	左边界	右边界
$l$	0	0	-1	1
$m$	1	-1	0	0

这样，就完成了应力边界的计算。在不考虑自重的影响前提下，引入应力边界可以对悬臂梁的固支位移边界进行放松；若考虑梁的自重，应力理论解难以求得（参见文献[2]、[4]），从而应力边界条件难以解出，此时不能对固支位移边界进行放松。

## （二） 程序架构

程序整体分为 7 个部分，如下所示。

% ---beam.m	主程序：定义材料参数、网格信息、计算刚度
%	矩阵、等效荷载列阵、求解方程等
% ---square_node_array.m	生成二维结点数组
% ---make_elem.m	按编号顺序生成单元的结点整体坐标数组
% ---plot_mesh.m	绘制有限元网格图
% ---plot_field.m	绘制有限元场云图
% ---quadrature.m	返回数值积分点和对应权重
% ---lagrange_basis.m	返回形函数及其对于局部坐标的梯度数组

## （三） 主程序参数说明

表 1 主程序参数说明

参数名	参数含义
L	梁的长度
c	梁的外边缘到中性轴的距离
elemType	有限元模拟中使用的单元类型。其中，“T3”代表三结点常应变三角形单元，“Q4”为四结点四边形单元，“Q9”表示九结点四边形单元
numy	y 方向上的单元个数(梁高度方向，横向)
numx	x 方向上的单元个数(梁长度方向，纵向)
plotMesh	标志信号，如果设置为 1，则绘制初始网格 (以确保网格是正确的)
P	梁右边缘的集中力大小(方向沿 y 轴负向)
p	梁下边缘三角形荷载的峰值大小(方向沿 y 轴正向)
s	梁上/下边缘剪切力的大小(方向沿 x 轴正向)
G	梁重量的大小

### 3 计算实例

#### (一) 算例一

平面应力问题，悬臂浅梁，长度 16，高度  $2c=4$ ，上、下边界施加均布剪力面力  $s=-5$ ，下边界施加正梯度三角形荷载（峰值大小  $p=3$ ），右边界施加集中力  $P=4.5$ ，不计梁的自重。几何模型及网格划分情况如下：

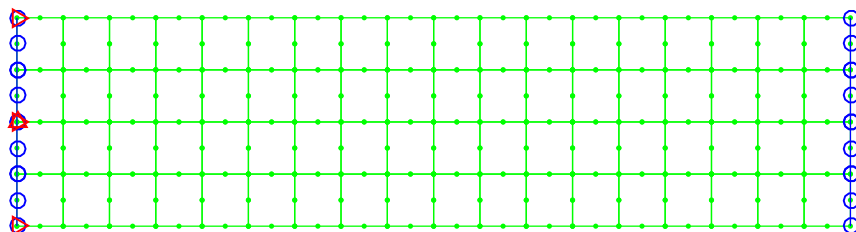


图 2 几何模型及网格划分

计算结果如下：

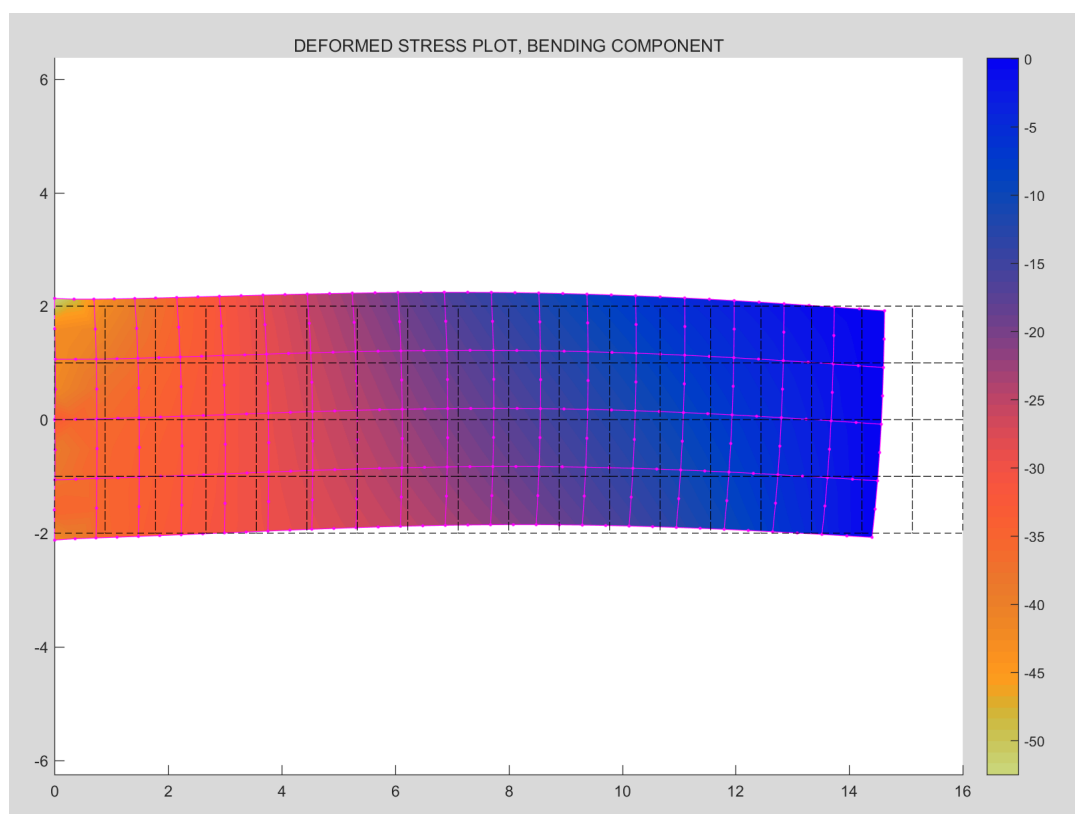


图 3 应力场

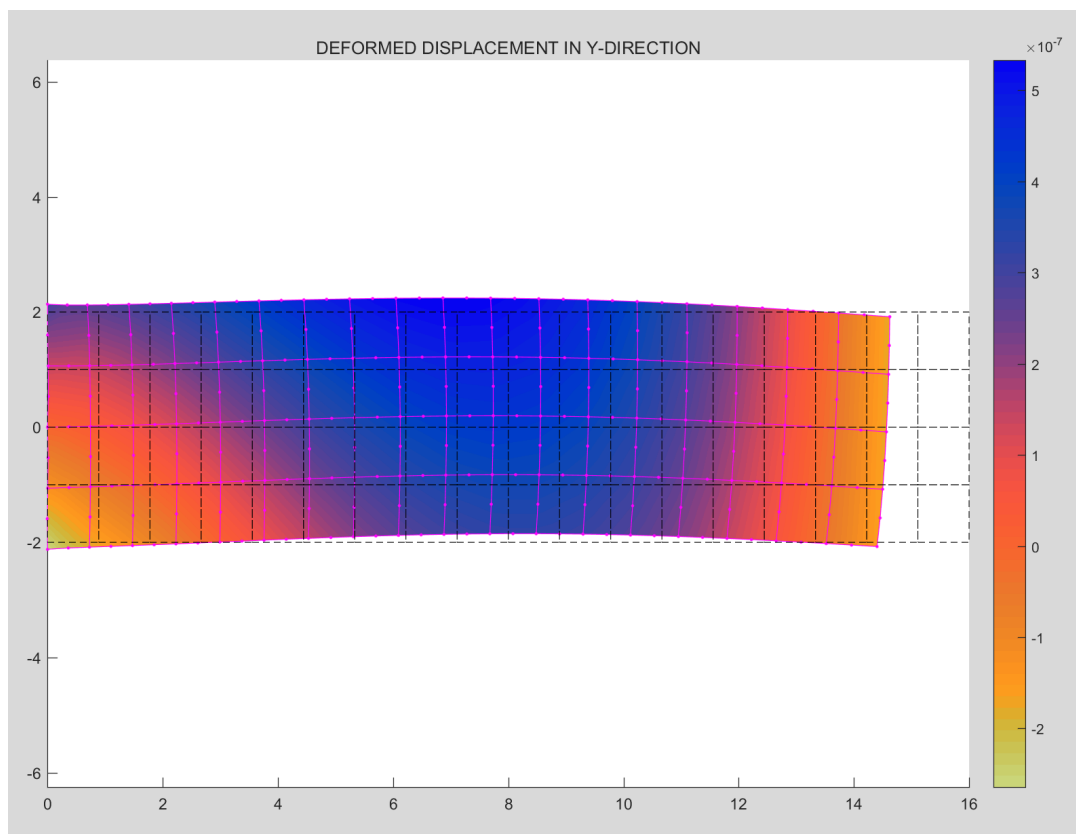
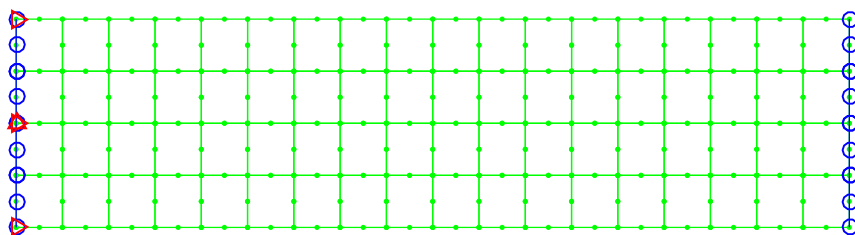


图 4 横向位移场

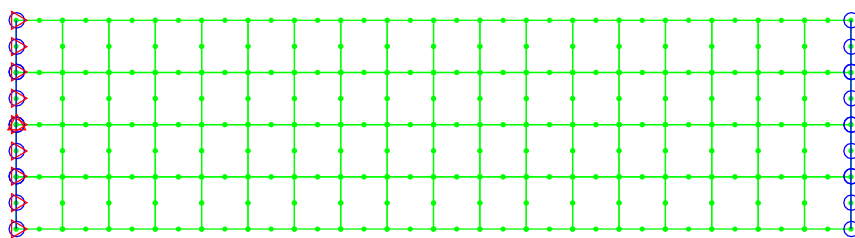
结果分析：该算例的计算结果与实际情况基本相符，多参数边界使得程序的应用性更强。可以积累更多的理论解以适应更复杂的受力情况。

## （二）算例二

几何模型和受力情况同算例一，但是考虑了梁的自重  $G=1$ 。计算结果如下：

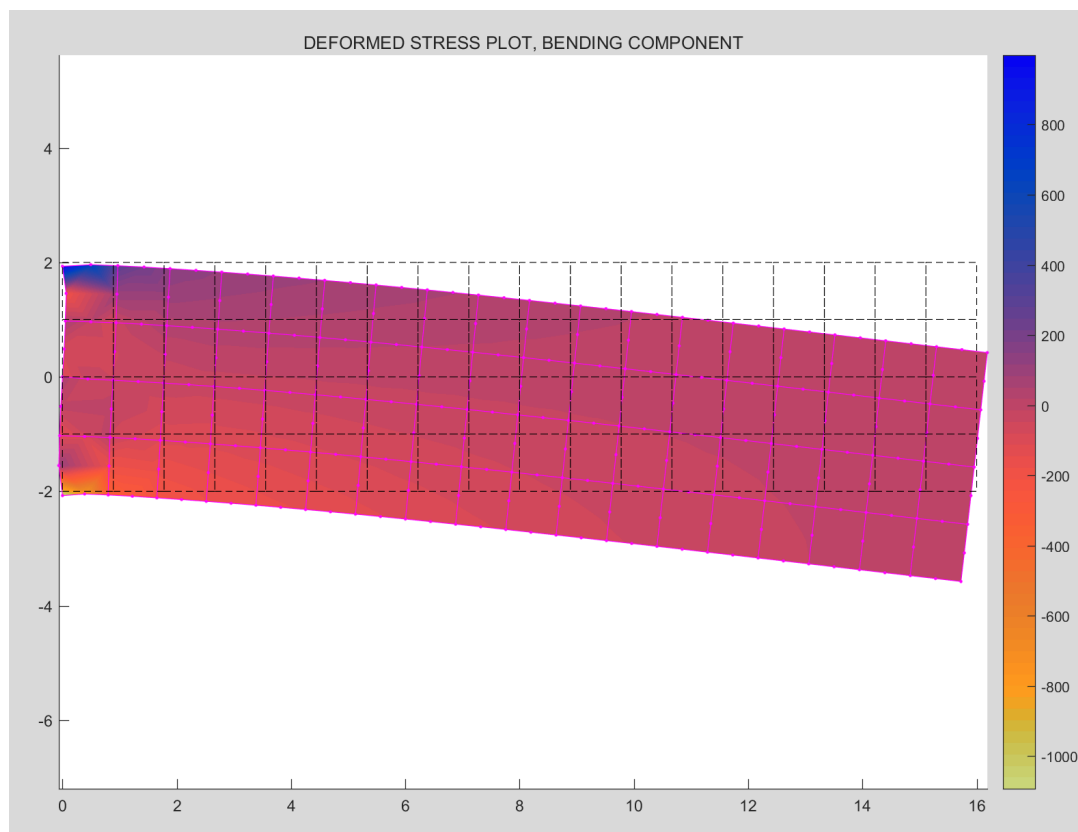


（放松固支约束，图 2）

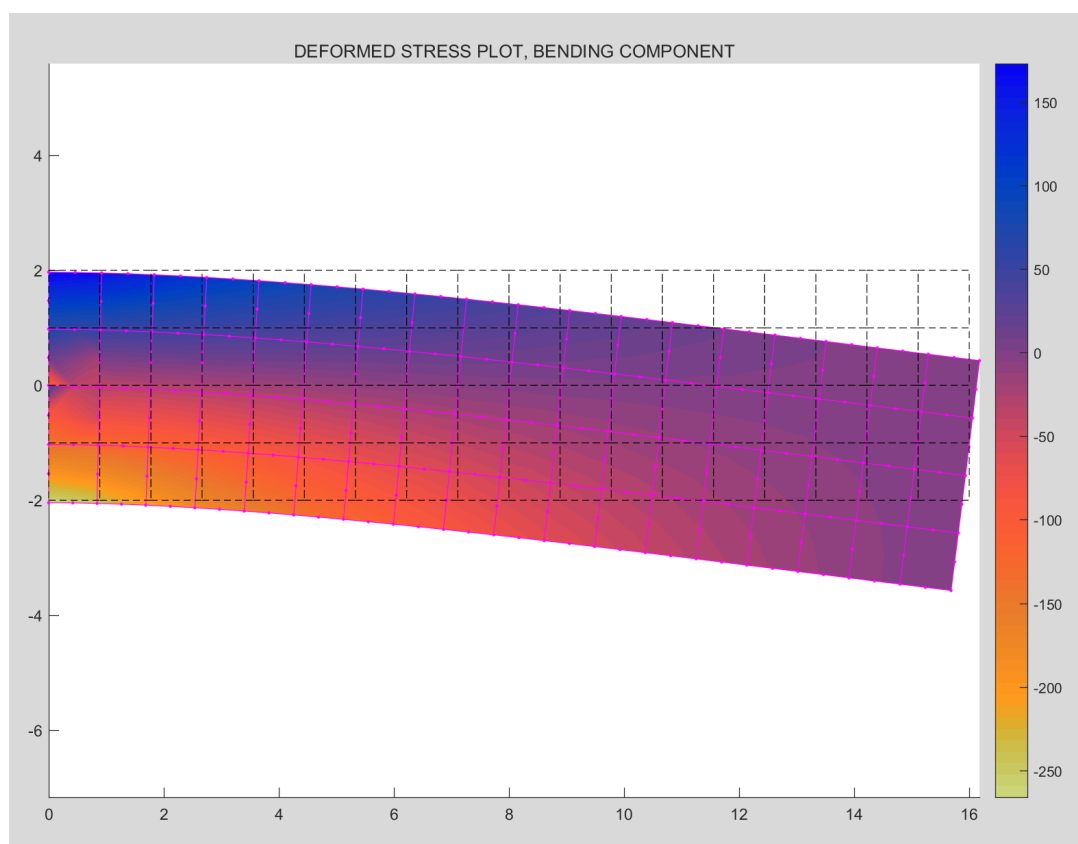


（不放松固支约束）

图 6 几何模型及网格划分比较



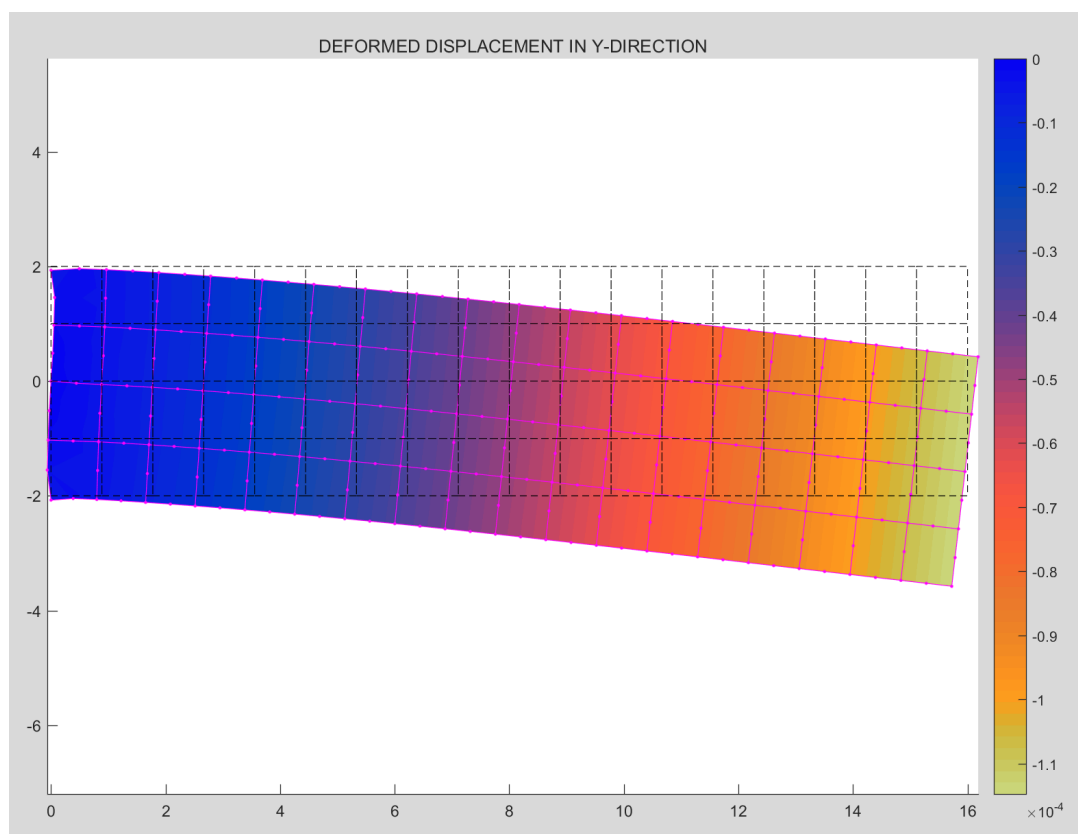
(放松固支约束)



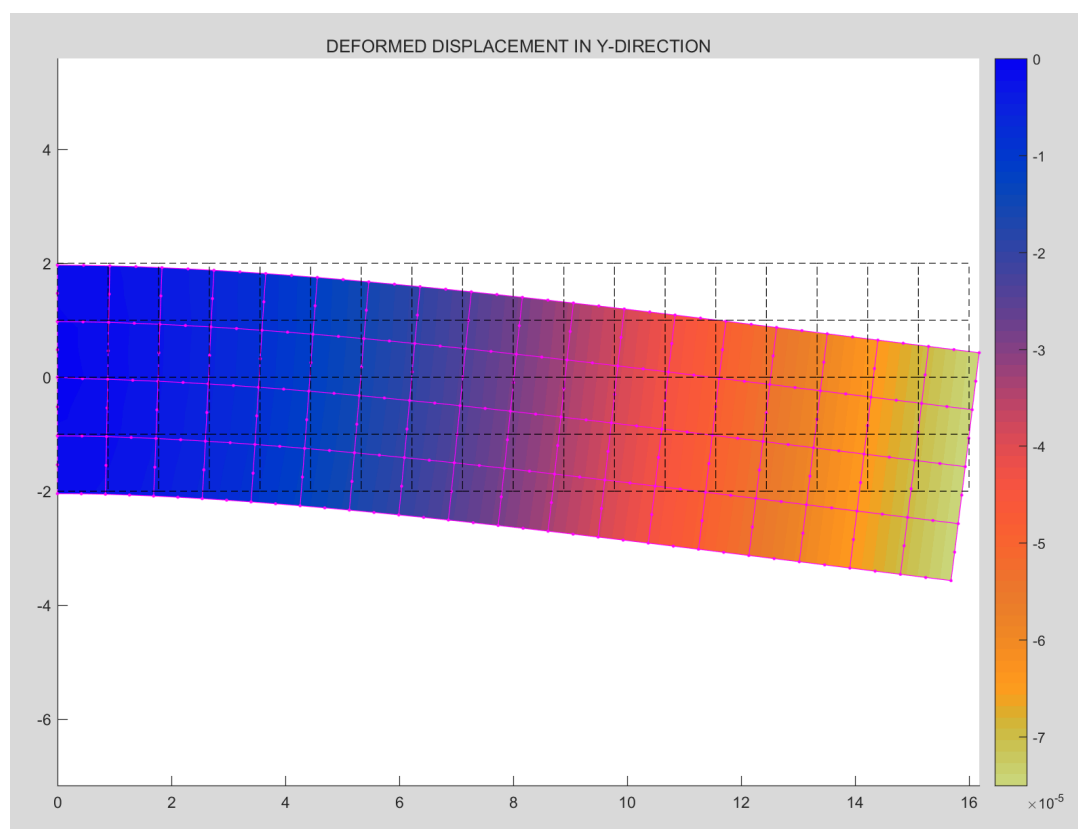
(不放松固支约束)

图 7 应力场比较





(放松固支约束)



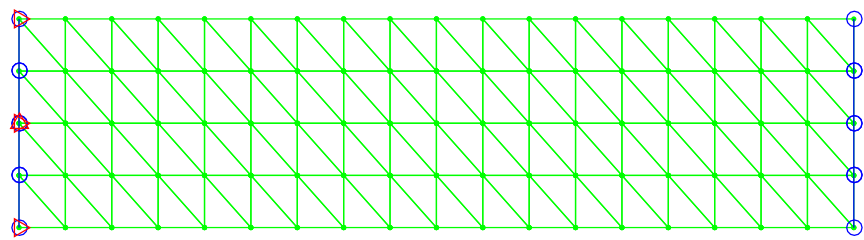
(不放松固支约束)

图 5 横向位移场比较

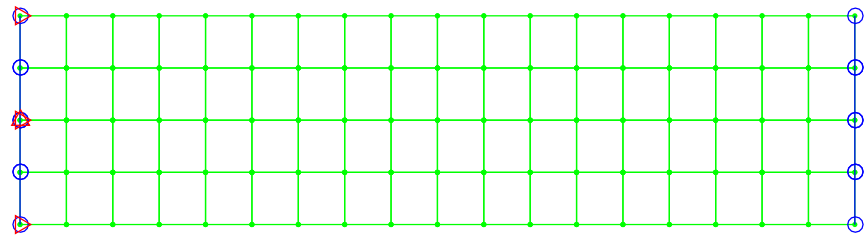
结果分析：在考虑梁自重的前提下，若对固支位移边界进行放松，则会造成固支端的网格畸变，并且对比两种情况下的计算结果，可以发现：放松约束相较于不放松约束的情况应力数值解大了近 4 倍，横向位移数值解大了近 1 个数量级，不符合实际结果。

（三）算例三

几何模型和受力情况同算例一，但是分别采用一次单元等参单元（三角形三结点、四边形四结点）计算。几何模型及网格划分情况如下：



（三角形三结点）



（四边形四结点）

图 6 几何模型及网格划分

计算结果与算例一比较如下：

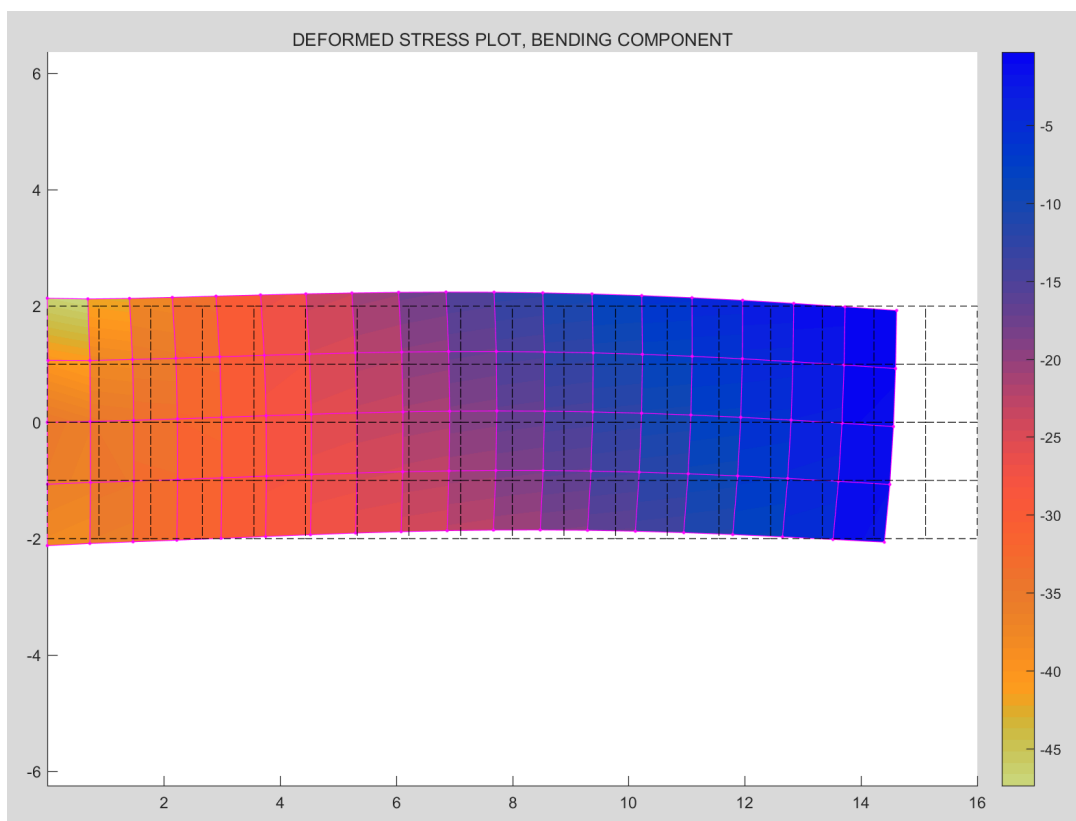
绝对值	三角形三结点	四边形四结点	四边形九结点
最大应力	$\approx 45$	$\approx 47$	$\approx 52$
最大横向位移 ( $\times 10^{-7}$ )	$\approx 4.1$	$\approx 5.1$	$\approx 5.2$

结果分析：算例三与算例一相比，只是把二次等参单元改为了一次等参单元，不难发现随着结点数的减少，单元偏刚性，数值结果逐步减小，并且应力集中区的平滑度逐渐变差。这说明一次单元的边界无法很好地表征出梁地弯曲，出现了剪切自锁现象。这一现象的出现意味着应变能正在产生剪切变形，而不是产生所希望的弯曲变形，因此总的挠度变小，即单元过于刚硬。

横向位移场和应力场绘制如下：

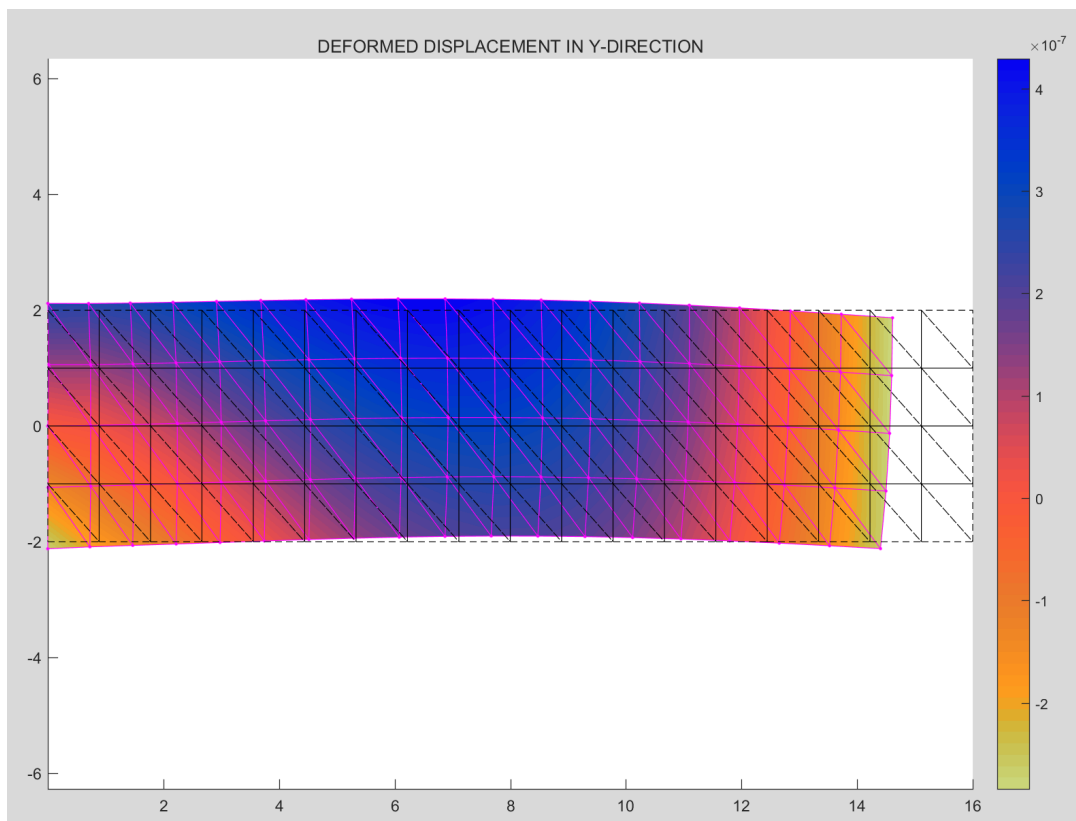


(三角形三结点)

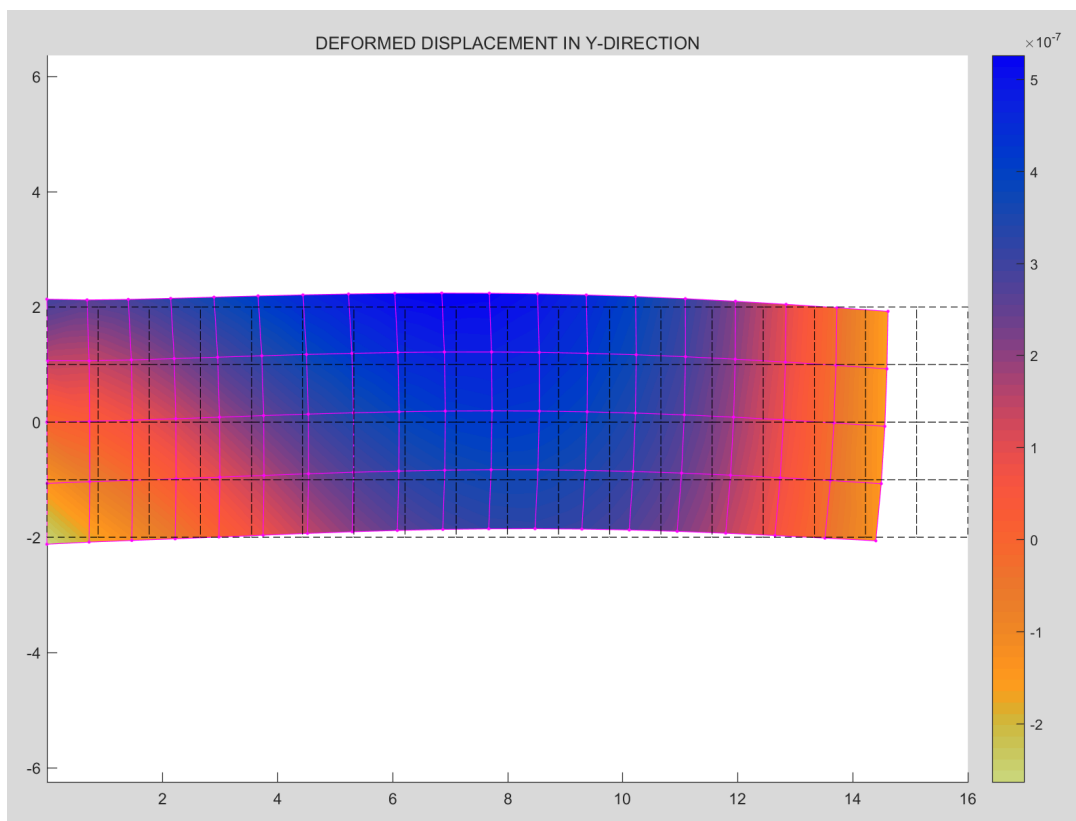


(四边形四结点)

图 7 应力场



(三角形三结点)




(四边形四结点)

图 8 横向位移场

## 4 小结和展望

本课程设计的亮点在于以下几个方面：

(1) 对于悬臂浅梁的小变形问题，在给定荷载条件下根据弹性力学可以对每一组荷载作用分别求解出理论解，再根据叠加原理，可以求出四个应力边界条件（第二类边界，也称自然边界或诺伊曼边界）。应用应力边界意味着可以对位移边界（第一类边界，也称强制边界或迪利克雷边界）进行放松，对于悬臂梁结构而言，若不考虑自重影响，可以放松固定端的约束，将面约束释放为多点约束。然而，理论解的求解并非易事，本课程设计采用了一些技巧，并用 Maple 软件进行符号运算。另一方面，由于小边界利用了圣维南原理，得到的应力边界表达式较为复杂，增加了一定的程序运算量。

(2) 本课程设计在 Jack Chessa 编写的程序基础上进行了改良，增加了应力边界条件的多样性，引入了自重的影响，并且修复了其中的 bug，相关代码已经托管至 GitHub 平台上( <https://github.com/Liskelleo/FEM-Programing-of-Shallow-Cantilever-Beam>)。值得一提的是，Jack Chessa 采用 Dof 索引模式储存结点位移，并且十分注重代码的运行效率。由于 MATLAB 是解释型编程语言，在编写代码的过程中需要尽量避免 for 循环嵌套的使用，使得执行时间得到了很大的改进。相关内容详见参考文献[5]。

(3) 代码支持多种等参单元格式，以及平面应力问题和平面应变问题两种模式。本课程设计对比了三角形三结点单元、四边形四结点单元、四边形九结点单元的结果，分析了一次单元在弯曲梁问题分析中的剪切自锁效应，具有教学启发意义。

## 5 参考文献

- [1]杨振宇, 龚文羿, 卢子兴. 梁在几种典型载荷作用下的弹性力学求解方法[J]. 力学与实践, 2023, 45(1): 206-212. DOI: 10.6052/1000-0879-22-112.
- [2]徐芝纶. 弹性力学(第 5 版)[M]. 高等教育出版社, 2016.
- [3]陈国荣. 有限单元法原理及应用(第 2 版)[M]. 科学出版社, 2016.
- [4]王桂芳. 悬臂深梁的自重应力[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2000(02): 8-12. DOI: 10.15961/j.jsuese.2000.02.003.
- [5] Jack Chessa. Programing the Finite Element Method with Matlab. 2002.10. URL: [https://www.math.purdue.edu/~caiz/math615/matlab\\_fem.pdf](https://www.math.purdue.edu/~caiz/math615/matlab_fem.pdf).