Spiegelkabinett im Computer

Ein gemischtes Lernangebot aus enaktiver und computergestützter Geometrie

Joachim Heller*

16. November 2024

Inhaltsverzeichnis

**Humboldt-Universität zu Berlin*, Studierender zum M.Ed. im Quereinstieg zum Grundschullehramt, Kontakt: joachim.heller@hu-berlin.de –

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

Dem im Folgenden dargestellten Lernangebot liegt das Thema *Spiegelungen in der Ebene und im Raum* zugrunde, um Lerneffekte möglich zu machen, die sowohl dem Aufbau eines vertiefteren Verständnisses geometrisch stilisierter Darstellung dienen, als auch Grundlegung für ein zugewandteres Verhältnis zum mathematischen Tätigsein als besondere Fantasieausübung sein können.

Zunächst wird in einer begrifflichen Klärung die Vereinheitlichung der Terminologie angestrebt, zum auch begrifflich reibungslosen Anschluss an die in der Inklusionspädagogik entwickelte Differenzierungsmatrix, als fächerübergreifend einsetzbares Gestaltungsinstrument einer Lernumgebung im weiteren, auch mathematikdidaktischen Sinne. Ziel ist es, das Lernangebot in einer entsprechend gestalteten Lernumgebung verorten zu können.

Darauffolgend wird das Lernangebot im Hinblick auf seinen fachlichen Hintergrund dargestellt, die als Unterstützungsmaßnahmen notwendig betrachteten Lernangebote als „notwendiges Rahmenwerk“ im engeren Sinne grob umrissen, welche dem „Spiegelkabinett im Computer“ vorausgehen müssen, die konkrete Umsetzung zusammengefasst und schließlich erwartbare Ergebnisse als Lerneffekt reflektiert. Da das Lernangebot noch nicht erprobt ist, liegen keine Dokumente aus der Erprobung vor und unterbleibt die Darstellung konkreter Unterstützungsmaßnahmen im Prozess. Die Reflexion der möglichen Lerneffekte wird schließlich in einem kurzen Ausblick aufgegriffen, in der Andeutung des Ausgangspunkts einer Lernumgebung im hier vertretenen Begriffsverständnis.

2 Begriffliche Klärung

Der Begriff der Lernumgebung wird von *Hirt*, *Wälti* und *Wollring* für den Mathematikunterricht als ein „aus mehreren Teilaufgaben und Arbeitsanweisungen“ bestehendes Arrangement definiert, das die Summe seiner Teile zu einem Ganzen unter einem gemeinsamen Leitgedanken zusammenfügt (Hirt, Wälti und Wollring 2022, S. 13). *Krauthausen* und *Scherer* betrachten diese Definition als Lernumgebung im weiteren Sinne (vgl. Krauthausen und Scherer 2022, S. 116). Merkmal von Lernumgebungen in diesem weiten Sinne ist, dass unter dem gemeinsamen Leitgedanken „einer innermathematischen oder sachbezogenen Struktur ... eine natürliche Differenzierung“ möglich wird, sodass ein solches Arrangement anschlussfähig an Lernende in einem breiten Leistungsspektrum wird (Hirt, Wälti und Wollring 2022, S. 12).

Krauthausen und Scherer bestimmen dahingegen den Begriff „substanzieller Lernumgebungen ... (abgekürzt: SLU)“ (Krauthausen und Scherer 2022, S. 110) im engeren Sinne über die Regelbeispiele der Konkretisierungen von Aufgabenformaten wie „Zahlenmauern“, „Zahlenketten“, „Rechendreiecke“ etc. (ebd., S. 112, im Original hervorgehoben). Sie orientieren sich an der Einführung des Begriffs durch *Wittmann* mit den Merkmalen der Inhaltsbezogenheit, der Reichhaltigkeit, der Adaptierbarkeit, der Ganzheitlichkeit und Anschlussfähigkeit an die empirische Forschung (Krauthausen und Scherer 2022, S. 110–111). Dabei definieren sie den „Begriff des *Aufgabenformats*“ als Aufgabenvorlage wie etwa Zahlenmauern, mit einer vorgegebenen Grundstruktur und Bildungsregel auf Grundlage mathematischer Operationen, die dann bedarfsgerecht angepasst werden können, etwa von einer Regel für die Addition von Feldern nach derselben Struktur wie auf Grundlage der Multiplikation (ebd., S. 112).

Die natürliche Differenzierung, ebenfalls von Wittmann geprägt, wird definiert als „ganzheitliche Erarbeitung von Themen . . . , bei der sich Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeitsniveaus in natürlicher Weise ergeben“; dabei wird noch Uneinigkeit über die Antworten auf die Fragen gesehen: „Was bedeutet es, wenn alle Kinder am gleichen Gegenstand arbeiten“ (ebd., S. 49–50). Antworten auf diese Fragen, um relevante Lerngegenstände zu identifizieren (dazu Hahn 2023, S. 252–253), verspricht das seit rund vierzig Jahren theoretisch fundierte Konzept des gemeinsamen Gegenstands, das dem von *Feuser* begründeten Ansatz der „entwicklungslogischen Didaktik [. . .] für den Gemeinsamen Unterricht“ zugrundeliegt (Frickel 2022, S. 109), welcher im Anschluss an *Holzkamp* in der Tradition *Vygotskis* und anderen Vertretern der kulturhistorischen Schule der Psychologie entwickelt wurde (vgl. Sasse und Schulzeck 2023c, S. 59). Auf seiner Grundlage ist das Instrument zur inklusiven Unterrichtsplanung der *Differenzierungsmatrix* entwickelt worden, inspiriert von dem mathematikdidaktischen Konzept der „Strukturgitter“ von *Kutzer* (Sasse und Schulzeck 2023b, S. 20–23). Damit werden zusammenhängende Lernangebote gestaltet, welche das Potential für die gemeinsame „*gedankliche* Arbeit am gemeinsamen Lerngegenstand“ besitzen (Sasse und Schulzeck 2023c, S. 74, Hervorh. im Orig.). Dabei werden als „*Lerngegenstand* [. . .] die Grenzen der eigenen Handlungsfähigkeit“ verstanden, die durch gezieltes Lernen verschoben werden können (ebd., S. 71, Hervorh. im Orig.). Der gemeinsame Lerngegenstand ist sodann ein vereinbartes Konstrukt, dass ebenso geeignet ist, den Individuen einer Lerngruppe persönliche Lerngegenstände zu bieten, als auch als Gruppe eine gemeinsame Lernproblematik zu bearbeiten (ebd., S. 75). Auf die kooperative Analyse, Konstruktion und Strukturierung möglicher gemeinsamer Lerngegenstände ist die Differenzierungsmatrix gerichtet, für einen Zeitraum von rund vier Wochen (Sasse und Schulzeck 2023b, S. 23–31, 2023a, S. 34). In diesem Konzept ist die Lernumgebung die Gesamtheit der ausgearbeiteten Lernangebote (Sasse und Schulzeck 2023a, S. 36–37) die in drei mal fünf bis fünf mal fünf Feldern die aufsteigende kognitive und thematische Komplexität des gemeinsamen Lerngegenstands abbilden. Dadurch können die Lernenden ihren eigenen Lernweg durch die Angebote suchen (Held 2023, S. 105–106), wodurch die natürliche Differenzierung, bei der die Lehrpersonen zu Lernbegleitenden werden, realisiert wird.

Die Merkmale der Differenzierungsmatrix und ihres theoretischen Fundaments erscheinen hinreichend verträglich mit den auf Wittmann zurückgehenden Vorstellungen natürlich differenzierender substanzieller Lernumgebungen. Im Gegensatz zu begrifflicher Vielfalt von ‹Differenzierung› im mathematikdidaktischen Diskurs (Krauthausen und Scherer 2022, 16 ff.), unterschiedlichen Auffassungen von ‹natürlicher Differenzierung› (ebd., S. 46–49), verschieden weiten Begriffen von ‹Lernumgebungen› und weiteren Detailproblemen, wie unterschiedlichen Verwendungen von ‹Aufgabenformaten›, bietet die Inklusionspädagogik hier ein zudem fächerübergreifend anschlussfähiges, kohärentes Konzept und Verfahren. Das bietet Vorteile für die ökonomische Unterrichtsgestaltung in allen Fächern und auch fächerübergreifend, da kein Umdenken erforderlich ist und allgemeine didaktische Prinzipien leichter in die Fachdidaktiken hinein adaptiert werden können (u.a. zum Anschluss an *Klafki* vgl. etwa Sasse und Schulzeck 2023c, S. 74).

Aus diesem Grund wird hier folgendes Begriffsverständnis vertreten:

1. Der ‹gleiche Gegenstand› wird als der *gemeinsame Lerngegenstand* im Sinne der entwicklungslogischen Didaktik Feusers interpretiert.

2. Die ‹natürliche Differenzierung› (näher bestimmt in Krauthausen und Scherer 2022, S. 49–52) ist das Ziel inklusiven Unterrichts in jedem Fach, das erreicht wird, wenn die Lernenden voneinander nicht getrennt, kognitiv anregende, von den Lehrpersonen angemessen vorstrukturierte, für sie anschlussfähige Aufgaben eigenständig bearbeiten können (vgl. dazu auch ebd., S. 47–48).

3. *Lernumgebungen* sind, etwa mit Hilfe von Differenzierungsmatritzen gestaltete, von einem gemeinsamen Lerngegenstand zusammengehaltene Aufgabensammlungen, die über einen längeren Zeitraum von Lernenden natürlich differenzierend bearbeitet werden, also mit Krauthausen und Scherer ‹SLU im weiteren Sinne›.

4. *Lernangebote* sind ‹SLU im engeren Sinne›, also für die Lernumgebung konkret adaptierte Lernformate, die für die Lernenden adäquat sind im Sinne ‹guter› Aufgaben (vgl. dazu Krauthausen und Scherer 2022, S. 113–114; zum Anspruch an die Lernangebote, Krauthausen und Scherer 2022, S. 53, 56).

5. Eingefügt in eine Differenzierungsmatrix sind Lernangebote für eine Lerngruppe adaptiert auf den aufsteigenden Stufen *kognitiver Komplexität* (vgl. im Detail Kracke 2023, S. 52–53):
   a) anschaulich-praktische Handlung
   b) teilweise-vorstellende Handlung
   c) vollständig-vorstellende Handlung
   d) symbolische Ebene/Darstellung

   e) abstrakt

6. Die *thematische Komplexität* der Lernangebote wird bei der Gestaltung der Lernumgebung als gemeinsame didaktische Entscheidung der Planenden definiert, etwa durch fortgesetzte Hinzunahme von Aspekten (vgl. Sasse und Schulzeck 2023c, S. 79–80). Die konkrete thematische Komplexität bildet jeweils eine Säule, auf der Lernangebote auf allen kognitiven Komplexitätsstufen gestaltet und bearbeitet werden können.

Die hier vorgestellte Aufgabe ist ein Lernangebot, das einem Feld einer Säule der Differenzierungsmatrix mit höherer thematischer Komplexität zugeordnet werden kann, in dem anschaulich-praktische Handlung und teilweise-vorstellende Handlung in Paararbeit verknüpft werden. Obligatorisch vorausgehend sind zwei anschaulich-praktische Handlungen niedrigerer thematischer Komplexität zu planen. Hier ist also die Freiheit des Lernwegs insoweit eingeschränkt, als dass das vorgestellte Lernangebot die vorherige Annahme zweier Angebote voraussetzt. Eines kann bereits Teil einer anderen Lernumgebung gewesen sein, in welcher bereits auch die Zusammenarbeit am Computer und die Bedienung des verwendeten dynamischen Geometriesystems (DGS) eingeübt worden ist (zu DGS im Allgemeinen etwa Ludwig und Weigand 2018, S. 62). Das weitere vorausgesetzte Lernangebot sollte dem hier im Detail beschriebenen unmittelbar vorausgehen, weshalb es im folgenden Abschnitt ebenfalls grob umrissen wird.

3 Das Lernangebot

Mit der in Zweiergruppen durchzuführenden Aktivität wird potentiell eine solidarische Lernsituation im Sinne *Wockens* hervorgerufen (Wocken 2016, S. 71), in der beide Beteiligte durch ihre individuellen Beiträge das gemeinsame Ziel verfolgen, das Verhalten von geometrischen Abbildungen phänomenal erfahren zu können. Bestenfalls findet sie nicht zugleich als kompetetiv-kooperative Lernsituation paralleler Zweiergruppen (ebd., S. 71) statt, steht also als Wahlmöglichkeit offen ohne strenge Ergebnisorientierung und Zeitvorgabe.

Das phänomenbezogene Vorgehen macht das Lernangebot auch anschlussfähig für eine fächerübergreifende Lernumgebung, die Sachunterricht mit naturwissenschaftlichem Schwerpunkt und Mathematik verbindet, insbesondere in von *Oser* (Krabbe, Fischer und Girwidz 2020, S. 141–143) und *Wagenschein* (Kircher und Girwidz 2020a, S. 222–225) geprägten Gestaltungsansätzen, in denen ein möglicher Lerneffekt auch sein kann, eine erste Vorstellung von der mathematischen Idealisierung in der Physik aufzubauen (dazu Kircher und Girwidz 2020b, S. 172–174).

Allein bezogen auf den Mathematikunterricht kann der Begriff der Spiegelung in der Ebene und im Raum mit Inhalt gefüllt und das Verständnis für die symbolische Darstellung im Koordinatensystem vorbereitet werden.

3.1 Fachlicher Hintergrund

Das Lernangebot ist die Umsetzung einer Anregung von *Leuders* zur Erkundung von Spiegelungen in einem „‚Polygon-Kaleidoskop'“ (Leuders 2016, S. 7) wie in Abbildung 1 und ihrer Übertragung in ein DGS (Abbildung 2) – dort zur „offenen“ und „fokussierten

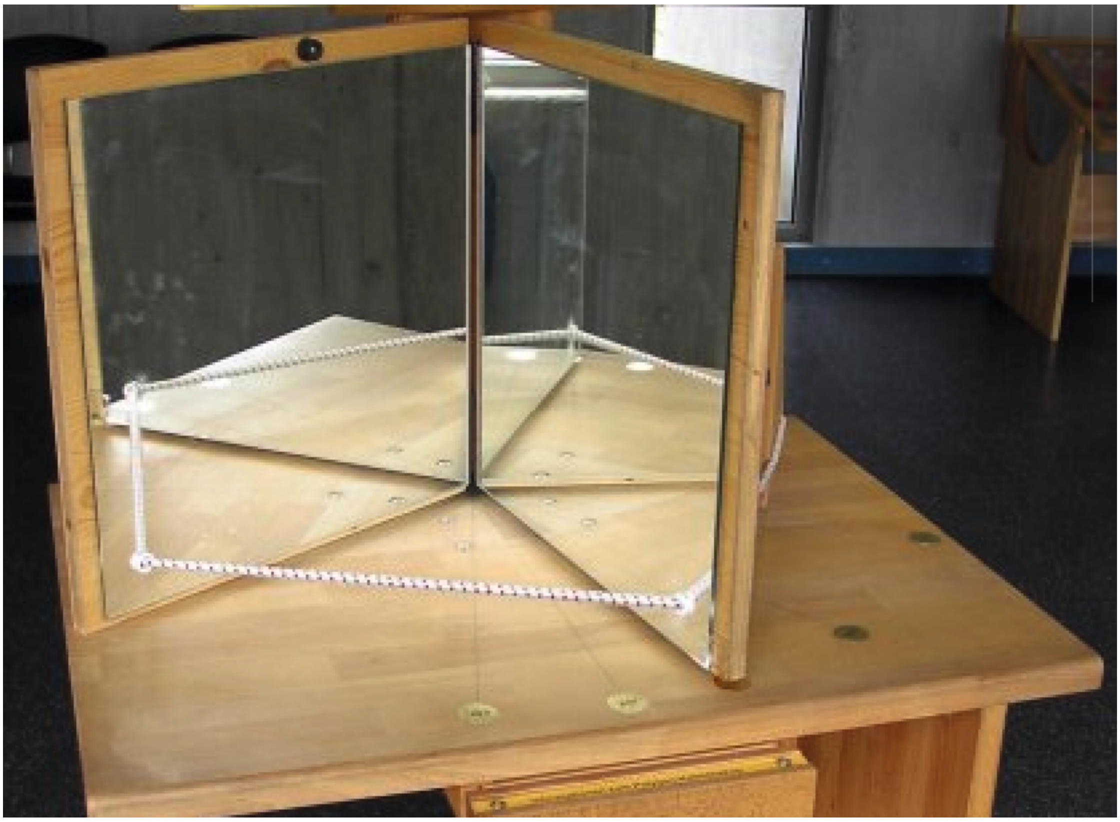

Abbildung 1: Polygon-Kaleidoskop (Quelle: Leuders 2016, S. 7)

Erkundung“ zum Übergang in eine algebraische Perspektive (ebd., S. 8–14).

Der phänomenale Ansatz wird hier als Ausgangspunkt für die Vorbereitung einer geometrischen Begriffsbildung gewählt (dazu Weigand 2018, S. 87–88). Das Lernangebot zielt damit primär auf die „Leitidee Raum und Form“ der Bildungsstandards Mathematik für die Grundschule und darin auf die Kompetenz „Geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen“, insbesondere die Abbildung ebener Figuren (Kul-

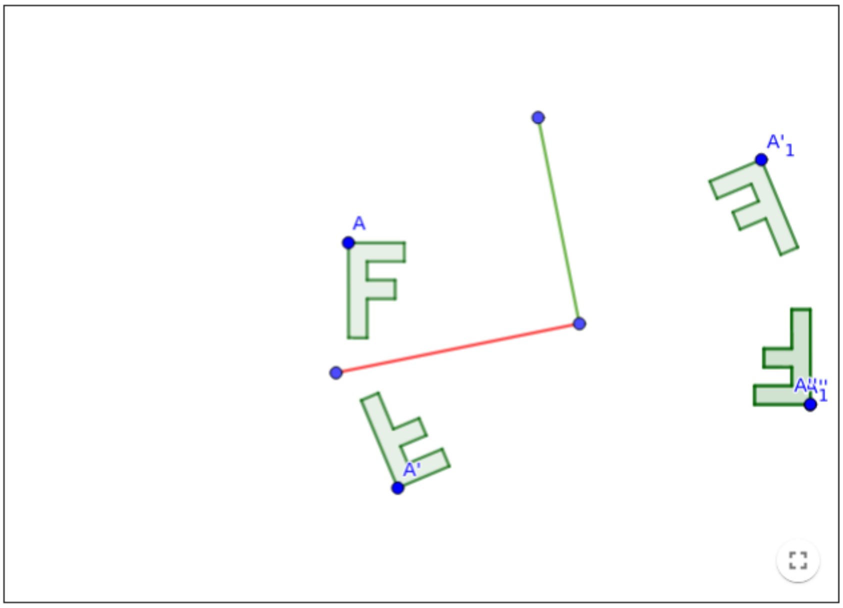

Abbildung 2: Darstellung im DGS *Geogebra* nach Leuders 2016, S. 8

tusministerkonferenz 2022, S. 16–17). Zudem enthält das Lernangebot Anregungen zum mathematischen Kommunizieren (Kultusministerkonferenz 2022, S. 10).

Für das Land Berlin lässt sich die Aktivität daher einordnen in dessen Rahmenlehrplan für den mathematischen Grundschulunterricht im inhaltsbezogenen Kompetenzbereich „L3 – Raum und Form“ mit Blick auf die Kompetenz der Ausführung geometrischer Abbildungen auf den Niveaustufen A und B – „Bewegungsanweisungen ausführen und Lageveränderungen in Ebene und Raum ausführen“ und „Geometrische Abbildungen und ihre Eigenschaften nutzen“ – sowie auf den Niveaustufen A bis C – „deckungsgleiche Figuren finden“, „Lageveränderungen umgangssprachlich beschreiben“ und „Kongruenzabbildungen erkennen“ (Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie Berlin und Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg 2023, S. 30–31). Zudem kann der prozessbezogene Standard K6 des mathematischen Kommunizierens auf den Niveaustufen A bis C weiter ausgebildet werden, indem beobachtete geometrische Zusammenhänge beschrieben und die Überlegungen dazu erklärt werden (ebd., S. 24). Daraus könnte sich ableiten lassen, dass das Lernangebot bereits in den Jahrgangsstufen 3 bis 4 verfangen könnte (ebd., S. 13). Die in ihr enthaltene stilisierte geometrische Darstellung mag in diesem Alter noch zu abstrakt scheinen. Im Sinne eines Unterrichts nach dem Spiralprinzip mit sparsam eingesetzten Materialien (Franke und Reinhold 2016, S. 32) kann dieses erste Kennenlernen der Darstellungsweise jedoch schon früher gerechtfertigt sein, um später vertiefend wieder aufgegriffen werden zu können und in mehreren Versuchsphasen Routine im Umgang mit den eingesetzten Materialien zu erhalten (dazu auch Franke und Reinhold 2016, S. 16).

Wesentlich greift hier, Symmetrie zu erfahren und den Zusammenhang von Spiegelungen in der Ebene an einer Spiegelachse und Spiegelungen im Raum an einer Spiegelebene zu entdecken (ebd., S. 262–263). Dabei geht das Lernangebot über die ebenso wichtige manuelle achsensymmetrische Spiegelung auf dem Papier hinaus, (ebd., S. 266–270), auch über das wertvolle enaktive Vorgehen mit Legefiguren und Falt- und Schneidetechniken (ebd., S. 270–273) und führt das „Experimentieren mit mehreren Spiegeln" weiter (ebd., S. 276–278). Mit synchronen Beobachtungen am physischen Objekt und in der idealisierten Darstellung im DGS wird schließlich eine Alltagserfahrung generiert (ebd., S. 260), welche die Möglichkeit bekannt macht, eine reale Situation stilisiert darstellen zu können.

3.2 Notwendiges Rahmenwerk

Es ist zu vermuten, dass außerhalb einer an die Aktivität hinführenden Rahmung die Lernerfahrungen vom Bereich der als möglich erwünschten Lerneffekte (als Ziel sachgerechter Angebote, Krauthausen und Scherer 2022, S. 56) weiter entfernt sein werden. Aus diesem Grund werden im Folgenden die unmittelbaren Voraussetzungen angedeutet.

3.2.1 Spiegelkabinett

Das Lernangebot beinhaltet eine beginnende Verinnerlichung der konkret erfahrenen Spiegelungen im Spiegelkabinett und ihre homomorphe zweidimensionale Abbildung in Geogebra. Dabei ist insbesondere der Vergleich zwischen dem optischen Spiegelungsphänomen und den darüber hinausgehenden Möglichkeiten der idealisierten, symbolischen Darstellung von Interesse. Um sich stärker darauf konzentrieren zu können, sollten die Phänomene im Spiegel bereits hinreichend entdeckt worden sein. Daher sei hier das vorangehende komplementäre Lernangebot grob beschrieben:

> *In Zweiergruppen werden zwei über ein Scharnier verbundene quadratische Spiegel dazu verwendet, die vielfachen Spiegelungen in diesem ‹Spiegelkabinett› zu betrachten und sich in der Kleingruppe darüber auszutauschen. Es wird Anregungen geben, in der Weise: „Wieviele Spiegelbilder seht ihr?", „Wo seht ihr die Spiegelbilder?" usw.*

3.2.2 Drehbuch

Da das Lernangebot hohe Anforderungen an die Koordinations- und Kooperationsfertigkeiten der Teilnehmenden stellt und wiederum komplexe Beobachtungen und Reflexion beinhaltet, sollten die Lernenden vom Einüben der Zusammenarbeit am Computer bereits entlastet sein.

Für jegliche Paararbeit am Computer wird hier daher ein ‹Drehbuch› vorgeschlagen, das zugleich Richtschnur für die Koordinierung der Handlungen aller Beteiligten, als auch für ihre Umgangsformen ist. Ein beispielhaftes Drehbuch kann dann etwa aussehen wie in Abbildung 3. Es sollte aber bereits in vergleichbarer Form mit dem reinen Lernziel ‹Computer-Arbeit mit einem DGS koordinieren› eingeführt und eingeübt worden sein. Es erscheint sinnvoll anzustreben, dass jedes Kind darauf vertrauen kann, Rolle Eins und Rolle Zwei übernehmen und bestenfalls beide Rollen als gleichermaßen attraktiv erfahren zu können.

3.3 Umsetzung

Unter den bis hierher genannten Voraussetzungen dient ein Grundgerüst von Arbeitsanweisungen dazu, die Erkundungsgänge am Computer zunächst eng zu führen.* Um die zweidimensionale Darstellung stärker an den realweltlichen Sachverhalt anzubinden, bietet sich an, ebenfalls einen Buchstaben F zu spiegeln (siehe beispielhaft in Abbildung 4).

Die Arbeitsanweisungen dienen nicht der Abarbeitung eines Aufgabenkatalogs, sondern dienen als Grundgerüst zur Beschreibung des Lernangebotes und zur Unterstützung der Zusammenarbeit, eingangs unter Überschriften wie: „Was habt Ihr bisher gemacht?“, „Was könnt Ihr jetzt hier machen?“, „Vergleicht die Darstellung am Computer mit dem Spiegelkabinett.“.

Nach diesem Anschluss an das vorangegangene Lernangebot wird zunächst in einem „Erkundungsgang 1“ auf das bereits eingeübte ‹Drehbuch› Bezug genommen, mit den notwendigen ‹Regieanweisungen› für diese Aktivität. Ein erstes „Sammeln der Beobachtungen“ allein in dem DGS wird mit Beispielfragen angeregt wie: „Was machen die verschiedenen F?“, „Gibt es immer gleich viele F?“, auch „Fandet Ihr eine Veränderung besonders schön?“, um einzuladen, auch die Ästhetik von wiederholten Spiegelungen zu würdigen.

Im zweiten Erkundungsgang wird nach vergleichbarem Muster schließlich die Beobachtung erweitert, in dem synchron das Spiegelkabinett und die digitale Darstellung bewegt und verglichen werden. Mit ähnlichen Beispielfragen wird angeregt, auch diese Beobachtungen zu dokumentieren.

Es ist erforderlich, dieses Gerüst an die für die konkrete Lerngruppe geeigneten Zugangswege anzupassen. Vorzugsweise liegen die Anweisungen in Papierform vor in einfacher Sprache, auch gestützt durch Piktogramme und weitere Möglichkeiten im erweiterten Textbegriff (Dönges 2015, S. 100).

*Abrufbar unter: `https://www.geogebra.org/m/sueqe5hp`.

Zuerst: Rollen verteilen.

Entscheidet: Wer ist von Euch **zuerst**

- **Rolle 1**? ⇒ *Steuert den Computer mit der Maus.*
- **Rolle 2**? ⇒ *Steuert* ***Rolle 1*** *mit ihren Anweisungen*. Ihr tauscht die Rollen, wenn in einer Aufgabe steht: **Rollentausch!** Ihr nennt Euch bei Euren Vornamen und nicht "**Rolle 1**" und "**Rolle 2**".

Danach: Lernen, wie das Bild verändert wird.

Rolle 2 gibt ihre Anweisungen zuerst nach diesem **Drehbuch**:

- "**Rolle 1**, bitte beweg' den Mauszeiger auf die weiße Fläche im Bild."
- "Bitte drücke jetzt die linke Maustaste und halte sie gedrückt." *[Rolle 1 tut worum Rolle 2 bittet. Beide sehen, dass der Mauspfeil zu einer Hand wird.]*
- "Bitte schieb' jetzt die Maus langsam hin und her." *[Rolle 1 tut worum Rolle 2 bittet. Beide sehen, dass sich die Figuren im Bild hin- und herbewegen.]*
- "**Rolle 1**, bitte lass' jetzt die linke Maustaste los."
- "Bitte dreh' jetzt das Mausrad nach vorne und nach hinten." *[Rolle 1 tut worum Rolle 2 bittet. Beide sehen, dass die Figuren kleiner und größer werden, "näher" und "weiter weg" rücken.]*
- "**Rolle 1**, jetzt bewege bitte den Mauszeiger in das **F** über dem roten Strich. Wenn der Mauszeiger eine Hand wird, dann drücke bitte die linke Maustaste. Werden alle Ränder von dem **F** dunkler? Dann halte bitte die linke Maustaste gedrückt und schiebe die Maus langsam hin und her. *[Rolle 1 tut worum Rolle 2 bittet. Beide sehen, dass das F sich bewegt.]*
- "**Rolle 1**, bitte lass jetzt die linke Maustaste los. Bewege den Mauszeiger bitte auf den linken blauen Punkt von dem roten Strich. Wird der Mauszeiger eine Hand? Dann drücke bitte die linke Maustaste. Ist noch ein Rand um den Punkt? Dann halte bitte die linke Maustaste gedrückt und bewege die Maus hin und her. *[Rolle 1 tut worum Rolle 2 bittet. Beide sehen, dass sich die rote Strecke verändert.]*

(Soweit es zur Routine geworden ist (Ansicht verschieben, Zoomfunktion, Objekte auswählen und bewegen), werden in "Lernen, wie das Bild verändert wird." direkt die beweglichen Objekte benannt, sodass *Rolle 2* unmittelbar zum ersten Erkundungsgang übergehen kann.)

Abbildung 3: Drehbuch (eigene Darstellung)

3.4 Erwartbare Ergebnisse

Die über rein mathematische Sachverhalte hinausgehenden Möglichkeiten des Lernangebotes bleiben unberücksichtigt. Eingebettet in eine Lernumgebung im oben ausge-

Abbildung 4: Papp-Buchstabe (Quelle: www.bauhaus.info)

führten Verständnis (s. Abschnitt 2) muss je nach gemeinsamem Lerngegenstand nicht jedes Lernangebot sondern die Lernumgebung als ganzes über „(mathematischen) *Gegenstand und Sinn* verfügen“ (Franke und Reinhold 2016, S. 18, m.w.N., Hervorh. im Orig.). Dennoch hat auch diese spezifische Aktivität einer komplexen Lernumgebung einen mathematischen Schwerpunkt.

Lernen wird betrachtet „als ein Prozess . . . , bei dem durch Erfahrung mit der Umwelt Erleben, Verhalten und Verhaltensmöglichkeiten relativ dauerhaft verändert werden“ und für den „das *Gedächtnis* . . . eine entscheidende Rolle spielt“; dabei „wird das Gedächtnis als ein großes Wissensnetz verstanden (‚semantisches Netzwerk‘), in dem Informationen miteinander verbunden sind“ (Kracke 2023, S. 42). Soweit sichergestellt werden kann, dass mehrere Personen am selben Ort zur selben Zeit dieselben Erfahrungen machen und auf dieselbe Weise diese Erfahrungen in ihrem individuellen semantischen Netzwerk abspeichern, bleibt immer noch fraglich, welches „wünschenswerte Lernen“ sich im Erfahrungskollektiv mit einem geeigneten Lernangebot „ereignen kann“ (Krauthausen und Scherer 2022, S. 56) und inwieweit dieses Lernen vorersehbar ist. Soweit davon auszugehen ist, dass unterschiedliche Vorerfahrungen und Lernwege unterschiedliches Erleben, Verhalten und nicht übereinstimmende Verhaltensmöglichkeiten prägen und sich verschiedene semantische Netzwerke in den individuellen Gedächtnissen bilden, wird die nähere Bestimmung des wünschenswerten Lernens noch kontingenter.

Hier können also erwartbare Ergebnisse lediglich vermutet und schon gar nicht als Lernziele formuliert werden sondern allenfalls als Möglichkeitsraum von mit dem Lernangebot assoziierbaren Lerneffekten auf dem Gebiet des Faches Mathematik. Weitere Lerneffekte außerhalb der Mathematik sind aus hiesiger Perpektive Nebenwirkungen, wobei jeder Lerneffekt erwünscht bleibt.

Erwartbar möchten, ungeordnet, folgende mathematischen Lerneffekte erscheinen, auch als Anregung für eine mögliche empirische Operationalisierung, in der die Ausprägung der Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden könnte:

- Die Spiegelung an *einer* Achse, wie sie durch unterschiedliche Zugangsweisen bereits eingeführt sein kann (Franke und Reinhold 2016, S. 266), wird erweitert um die Möglichkeit, an zwei miteinander verbundenen Achsen zu spiegeln.

- Der Abgleich der Aktivität im DGS und der Aktivität mit dem ‹Spiegelkabinett› lässt erahnen, dass die geometrische Darstellung Stilisierung einer realen Situation ist.

- In Verbindung mit einem weiteren Lernangebot, dass den folgenden Effekt hervorhebt, kann die Darstellung als Draufsicht auf die reale Situation interpretiert werden. Ohne entsprechende vorangegangene Sensibilisierung wird hier dieser Lerneffekt indes noch nicht erwartet. Die Interpretation der Spiegelung des Buchstabens verlangt bereits eine größere Abstraktionsleistung: Die graphischen Spiegelachsen sind die Draufsicht auf die physischen Spiegelebenen aber der gespiegelte Buchstabe und seine Abbilder sind deren Seitenansicht.

- Durch die Erkundung des dynamischen Verhaltens der Darstellung im DGS kann bei fixiertem gespiegelten Buchstaben und synchroner Bewegung seiner Abbilder mit den Spiegelachsen – insbesondere im Abgleich mit dem ‹Spiegelkabinett› – der Lerneffekt hervogerufen werden, die dargestellten Spiegelungen als virtuelle Vervielfältigungen, also Abbildungen zu interpretieren und nicht als geklonte Instanzen derselben Objektklasse. Inwieweit dieser Lerneffekt erwünscht ist oder als unerwünschte Nebenwirkung betrachtet wird, liegt an der Positionierung der beteiligten Lehrpersonen. Rein mathematisch ist die optisch nahegelegte Instanziierung insoweit zutreffend, als dass die Abbilder des gespiegelten Objekts notwendiger Weise wesentliche Eigenschaften des Ursprungsobjekts aufweisen. Der Grund dafür ist, dass bereits das Ursprungsobjekt eine Abbildung des mit ihm assoziierten Objekts im Denken der Person ist bzw. war, die das zu spiegelnde Objekt eingeführt hat. Alle dargestellten Objekte sind also weitestgehend von derselben Qualität. Durch die weitere Einführung der Spiegelachsen und der Regel, dass die Spiegelungen ihren Ausgang von dem zuerst eingeführten Objekt nehmen, erweitert sich die Vorstellung jedoch. Die Regel wird vom DGS strikt eingehalten, während das Bild manipuliert wird. Ohne diese Autorität, mit einer Darstellung auf dem Papier liegt es an der Strenge des Vorgehens der konstruierenden Person, ob sie das **F** mit dem Eckpunkt **A** als Ausgangspunkt vom Abbild **F** mit dem Eckpunkt **A’** betrachten will, oder eine Entscheidung offen halten will, da auf unterschiedlichen Wegen beide **F** so aufeinander gelegt werden können, dass sie wieder als eines erscheinen. In Verbindung mit realen Situationen, insbesondere zur Darstellung realer optischer Sachverhalte, ist es jedoch legitim, die vom DGS aufgezwungene Strenge so zu interpretieren, dass die Eigenschaften des gespiegelten Objekts und seiner Spiegelbilder voneinander abweichen. Letztere bewegen sich nur in Abhängigkeit von der Bewegung der Spiegelachsen oder der Verschiebung des Ursprungsobjekts, also in Abhängigkeit von der Position des **F** mit dem Eckpunkt **A** zu *seinen* Spiegelachsen. Die Abbilder *erben* wesentliche Eigenschaften vom Ursprungsbild, werden aber durch diese Beschränkung erkennbar als dessen «Kindobjekte». Auf diese Weise wird der Bezug zur realen Situation deutlich. Hier kann also der Lerneffekt als wünschenswert betrachtet werden, da er der teilweise anschaulichen Komplexitätsstufe angemessen ist, auf der dieses Lernangebot angesiedelt ist.

- Die im vorherigen Punkt angesprochene Kongruenz aller Bilder, durch entsprechende Verschiebung der Spiegelachsen im DGS, kann sodann im Vergleich mit den Möglichkeiten im ‹Spiegelkabinett den Lerneffekt verursachen, dass auf mathematischem Weg Möglichkeiten – gleichsam «spielregelkonformen Zaubertricks» – offen stehen, wie etwa das vermeintliche Verschmelzen von Objekten, wenn sie zur Deckung gebracht werden oder das Hervorrufen von Abbildern, die in dem physischen Spiegel unsichtbar, aber konsequent denkbar bleiben, auch Winkel der Spiegelachsen, die von den Scharnieren der Spiegel nicht nachvollzogen werden können. Weiter gefasst kann Mathematik als eine Betätigung erfahren werden, in der zwar der Fantasie durch strenge «Spielregeln» Grenzen gesetzt werden, diese aber dennoch deutlich hinter den Grenzen der physischen Welt liegen. Nicht erwartbar, aber als Grundlegung einer Vorstellung nicht unmöglich, ist also der Lerneffekt, dass mit Mathematik Welten erschaffen werden können, die Aspekte der physisch erfahrbaren Welt abbilden können, der Fantasie zugänglich machen und durch die Strenge der Denkregeln die Produkte der Fantasie wieder zurückführbar in die physische Welt.

- Ein weiterer Lerneffekt kann durch die erfahrene Regelstrenge des DGS hervorgerufen werden. Die Tatsache, dass eben nicht jede beliebige geometrische Operation auf die eingezeichneten Objekte möglich ist, sondern alles in einem bestimmten Rahmen abläuft, kann dazu anregen, sich diese «Spielregeln» selbst beim Zeichnen geometrischer Sachverhalte aufzulegen.

4 Ausblick

Nach erfolgter Reflexion der möglichen Lerneffekte des vorgestellten Lernangebotes wird unter anderem eine Lernumgebung denkbar, die auf einem gemeinsamen Lerngegenstand in der vorläufigen Formulierung „Geometrische Sachverhalte in Ebene und Raum“ basiert. In ihr könnten diverse Lernangebote einzelne Aspekte aufgreifen in enaktiver Weise mit physischem Material und in verschiedenen DGS. Wie angedeutet kann etwa die Draufsicht in der ebenen Darstellung durch ein räumliches DGS wie *OpenSCAD* nachvollzogen werden – mit dem entsprechend eng geführten Einstieg zur Unterstützung. Durch die Arbeit mit physischem Material wird sowohl die Differenzierung erleichtert, als auch die Verknüpfung zwischen dem Geschehen am Bildschirm und der Rückführung in den greifbaren Raum.

Literatur

Dönges, Christoph (2015). „Texte schreiben“. In: *Deutsch inklusiv. Gemeinsam lernen in der Grundschule*. Hrsg. von Anja Pompe. Baltmannsweiler, DEU: Schneider Verlag Hohengehren, S. 89–103.

Franke, Marianne und Simone Reinhold (2016). *Didaktik der Geometrie. In der Grundschule*. 3. Aufl. Berlin/Heidelberg, DEU: Springer Spektrum.

Frickel, Daniela A. (2022). „Vielfalt im Literaturunterricht - Differenzierung auf der Grundlage der Entwicklungslogischen Didaktik“. In: *Diversitätsorientierte Deutschdidaktik. Theoretisch-konzeptionelle Fundierung und Perspektiven für empirische Arbeiten*. Hrsg. von Wiebke Dannecker und Kirsten Schindler. Bochum, DEU: Universitätsbibliothek der Ruhr - Universität Bochum, S. 103–119.

Hahn, Heike (2023). „Beispiele fachdidaktischer Umsetzungen der Differenzierungsmatrix: Mathematik“. In: *Inklusiven Unterricht planen, gestalten und reflektieren. Die Differenzierungsmatrix in Theorie und Praxis*. Hrsg. von Ada Sasse und Ursula Schulzeck. 2., durchgesehene und ergänzte Auflage. Lernen inklusiv und kooperativ. Bad Heilbrunn, DEU: Verlag Julius Klinkhardt, S. 251–268.

Held, Verena (2023). „Die Differenzierungsmatrix als Basis der Leistungsbewertung“. In: *Inklusiven Unterricht planen, gestalten und reflektieren. Die Differenzierungsmatrix in Theorie und Praxis*. Hrsg. von Ada Sasse und Ursula Schulzeck. 2., durchgesehene und ergänzte Auflage. Lernen inklusiv und kooperativ. Bad Heilbrunn, DEU: Verlag Julius Klinkhardt, S. 97–114.

Hirt, Ueli, Beat Wälti und Bernd Wollring (2022). „Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule: Begriffsklärung und Positionierung“. In: *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. 7. Aufl. Hannover, DEU: Klett-Kallmeyer, S. 12–37.

Kircher, Ernst und Raimund Girwidz (2020a). „Elementarisierung und didaktische Reduktion“. In: *Physikdidaktik. Grundlagen*. Hrsg. von Ernst Kircher, Raimund Girwidz und Hans E. Fischer. 4. Aufl. Berlin, DEU: Springer Spektrum, S. 155–197.

– (2020b). „Methoden im Physikunterricht“. In: *Physikdidaktik. Grundlagen*. Hrsg. von Ernst Kircher, Raimund Girwidz und Hans E. Fischer. 4. Aufl. Berlin, DEU: Springer Spektrum, S. 199–261.

Krabbe, Heiko, Hans E. Fischer und Raimund Girwidz (2020). „Gestaltung von Unterricht“. In: *Physikdidaktik. Grundlagen*. Hrsg. von Ernst Kircher, Raimund Girwidz und Hans E. Fischer. 4. Aufl. Berlin, DEU: Springer Spektrum, S. 117–153.

Kracke, Bärbel (2023). „Die kognitive Komplexität des gemeinsamen Lerngegenstands – Differenzierungsmatritzen aus lernpsychologischer Perspektive“. In: *Inklusiven Unterricht planen, gestalten und reflektieren. Die Differenzierungsmatrix in Theorie und Praxis*. Hrsg. von Ada Sasse und Ursula Schulzeck. 2., durchgesehene und ergänzte

Auflage. Lernen inklusiv und kooperativ. Bad Heilbrunn, DEU: Verlag Julius Klinkhardt, S. 41–56.

Krauthausen, Günther und Petra Scherer (2022). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule.* 4. Aufl. Hannover: Klett-Kallmeyer.

Kultusministerkonferenz, Hrsg. (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15. 10. 2004, i.d.F. vom 23. 06. 2022).* Berlin/Bonn, DEU: Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland.

Leuders, Timo (2016). *Erlebnis Algebra zum aktiven Entdecken und selbständigen Erarbeiten.* Berlin/Heidelberg, DEU: Springer Spektrum.

Ludwig, Matthias und Hans-Georg Weigand (2018). „Konstruieren“. In: *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Hrsg. von Hans-Georg Weigand u. a. 3., erweiterte und überarbeitete Auflage. Berlin, DEU: Springer-Spektrum, S. 43–66.

Sasse, Ada und Ursula Schulzeck (2023a). „Anhang: Häufig gestellte Fragen zur Differenzierungsmatrix“. In: *Inklusiven Unterricht planen, gestalten und reflektieren. Die Differenzierungsmatrix in Theorie und Praxis.* Hrsg. von Ada Sasse und Ursula Schulzeck. 2., durchgesehene und ergänzte Auflage. Lernen inklusiv und kooperativ. Bad Heilbrunn, DEU: Verlag Julius Klinkhardt, S. 34–40.

– (2023b). „Die Differenzierungsmatrix als Rahmen für Planung und Reflexion inklusiven Unterrichts“. In: *Inklusiven Unterricht planen, gestalten und reflektieren. Die Differenzierungsmatrix in Theorie und Praxis.* Hrsg. von Ada Sasse und Ursula Schulzeck. 2., durchgesehene und ergänzte Auflage. Lernen inklusiv und kooperativ. Bad Heilbrunn, DEU: Verlag Julius Klinkhardt, S. 11–33.

– (2023c). „Die thematische Komplexität des gemeinsamen Lerngegenstandes – Differenzierungsmatritzen aus subjektwissenschaftlicher Perspektive“. In: *Inklusiven Unterricht planen, gestalten und reflektieren. Die Differenzierungsmatrix in Theorie und Praxis.* Hrsg. von Ada Sasse und Ursula Schulzeck. 2., durchgesehene und ergänzte Auflage. Lernen inklusiv und kooperativ. Bad Heilbrunn, DEU: Verlag Julius Klinkhardt, S. 57–83.

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie Berlin und Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg, Hrsg. (2023). *Fachteil C Mathematik des Rahmenlehrplans für die Jahrgangsstufen 1 bis 10.* Berlin/Potsdam, DEU: Land Berlin/Land Brandenburg.

Weigand, Hans-Georg (2018). „Begriffslernen und Begriffslehren“. In: *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Hrsg. von Hans-Georg Weigand u. a. 3., erweiterte und überarbeitete Auflage. Berlin, DEU: Springer-Spektrum, S. 85–106.

Wocken, Hans (2016). *Im Haus der inklusiven Schule. Grundrisse-Räume-Fenster.* Hamburg, DEU: Feldhaus.