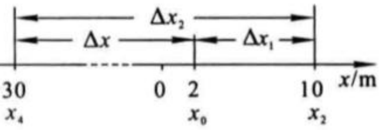
1-6 已知质点沿 x 轴作直线运动，其运动方程为 $x=2+6t^2-2t^3$，式中 x 的单位为 m，t 的单位为 s. 求：(1) 质点在运动开始后 4.0 s 内的位移的大小；(2) 质点在该时间内所通过的路程；(3) $t=4.0$ s 时质点的速度和加速度.

分析 位移和路程是两个完全不同的概念. 只有当质点作直线运动且运动方向不改变时，位移的大小才会与路程相等. 质点在 t 时间内的位移 Δx 的大小可直接由运动方程得到：$\Delta x=x_t-x_0$，而在求路程时，就必须注意到质点在运动过程中可能改变运动方向，此时，位移的大小和路程就不同了. 为此，需根据 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$ 来确定其运动方向改变的时刻 t_p，求出 $0\sim t_p$ 和 $t_p\sim t$ 内的位移大小 Δx_1、Δx_2，则 t 时间内的路程 $s=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|$，如图所示. 至于 $t=4.0$ s 时质点速度和加速度可用 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ 两式计算.



题 1-6 图

解 (1) 质点在 4.0 s 内位移的大小

$$\Delta x=x_4-x_0=-32\ \mathrm{m}$$

(2) 由

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$$

得知质点的换向时刻为

$$t_p=2\ \mathrm{s}\quad (t=0\ 不合题意)$$

则

$$\Delta x_1=x_2-x_0=8.0\ \mathrm{m}$$

$$\Delta x_2=x_4-x_2=-40\ \mathrm{m}$$

所以，质点在该 4.0 s 时间间隔内的路程为

$$s=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|=48\ \mathrm{m}$$

(3) $t=4.0$ s 时

$$v=\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=4.0\ \mathrm{s}}=-48\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$a=\left.\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=4.0\ \mathrm{s}}=-36\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

1-9 质点的运动方程为

$$x=-10t+30t^2$$
$$y=15t-20t^2$$

式中 x、y 的单位为 m，t 的单位为 s.

试求：(1) 初速度的大小和方向；(2) 加速度的大小和方向.

分析 由运动方程的分量式可分别求出速度、加速度的分量，再由运动合成算出速度和加速度的大小和方向.

解 (1) 速度的分量式为

$$v_x=\frac{dx}{dt}=-10+60t,$$
$$v_y=\frac{dy}{dt}=15-40t$$

当 $t=0$ 时，$v_{0x}=-10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$v_{0y}=15\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，则初速度大小为

$$v_0=\sqrt{v_{0x}^2+v_{0y}^2}=18.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

设 $\boldsymbol{v}_0$ 与 x 轴的夹角为 α，则

$$\tan\alpha=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}=-\frac{3}{2}$$
$$\alpha=123°41'$$

(2) 加速度的分量式为

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=60\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=-40\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

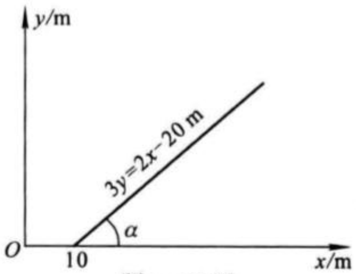
则加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=72.1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

设 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴的夹角为 β，则

$$\tan\beta=\frac{a_y}{a_x}=-\frac{2}{3}$$
$$\beta=-33°41'(\text{或 } 326°19')$$

1-15 一质点具有恒定加速度 $\boldsymbol{a}=(6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. 在 $t=0$ 时，其速度为零，位置矢量 $\boldsymbol{r}_0=(10\ \mathrm{m})\boldsymbol{i}$. 求：(1) 在任意时刻的速度和位置矢量；(2) 质点在 Oxy 平面上的轨迹方程，并画出轨迹的示意图.



题 1-15 图

分析 与上两题不同处在于质点作平面曲线运动，根据叠加原理，求解时需根据加速度的两个分量 a_x 和 a_y 分别积分，从而得到运动方程 $\boldsymbol{r}$ 的两个分量式 $x(t)$ 和 $y(t)$. 由于本题中质点加速度为常矢量，故两次积分后所得运动方程为固定形式，即 $x=x_0+v_{0x}t+\frac{1}{2}a_xt^2$ 和 $y=y_0+v_{0y}t+\frac{1}{2}a_yt^2$，两个分运动均为匀变速直线运动. 读者不妨自己验证一下.

解 由加速度定义式，根据初始条件$t_0=0$ 时$v_0=0$，积分可得

$$\int_0^{v} \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int_0^t \boldsymbol{a}\mathrm{d}t = \int_0^t (6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{v}=6t\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j}$$

又由 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$及初始条件 $t=0$ 时，$\boldsymbol{r}_0=(10\ \mathrm{m})\boldsymbol{i}$，积分可得

$$\int_{r_0}^{r} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^t \boldsymbol{v}\mathrm{d}t = \int_0^t (6t\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{r}=(10+3t^2)\boldsymbol{i}+2t^2\boldsymbol{j}$$

由上述结果可得质点运动方程的分量式，即

$$x=10+3t^2$$

$$y=2t^2$$

消去参量 t，可得运动的轨迹方程

$$3y=2x-20\ \mathrm{m}$$

这是一个直线方程. 直线斜率 $k=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\alpha=33°41'$. 轨迹如图所示.

1–16 质点沿直线运动，加速度 $a=4-t^2$，式中 a 的单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，t 的单位为 s. 如果当 $t=3\ \mathrm{s}$ 时，$x=9\ \mathrm{m}$，$v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求质点的运动方程.

分析 本题属于运动学第二类问题，即已知加速度求速度和运动方程，必须在给定条件下用积分方法解决. 由 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$和 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$可得 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$. 如 $a=a(t)$或 $v=v(t)$，则可两边直接积分. 如果 a 或 v 不是时间 t 的显函数，则应经过诸如分离变量或变量代换等数学操作后再做积分.

解 由分析知，应有

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t a\mathrm{d}t$$

得

$$v=4t-\frac{1}{3}t^3+v_0 \tag{1}$$

由

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t v\mathrm{d}t$$

得

$$x=2t^2-\frac{1}{12}t^4+v_0t+x_0 \tag{2}$$

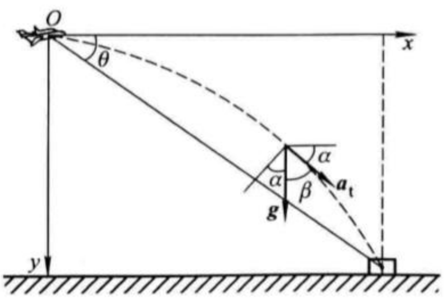
将 $t=3\ \mathrm{s}$ 时，$x=9\ \mathrm{m}$，$v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 代入式(1)、(2)得 $v_0=-1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$x_0=0.75\ \mathrm{m}$. 于是可得质点运动方程为

$$x=2t^2-\frac{1}{12}t^4-t+0.75$$

1-23 飞机以100 m · s^{-1}的速度沿水平直线飞行，在离地面高为 100 m 时，驾驶员要把物品空投到前方某一地面目标处，问：(1) 此时目标在飞机下方前多远？(2) 投放物品时，驾驶员看目标的视线和水平线成何角度？(3) 物品投出 2.0 s 后，它的法向加速度和切向加速度各为多少？

分析 物品空投后作平抛运动. 忽略空气阻力的条件下，由运动独立性原理知，物品在空中沿水平方向作匀速直线运动，在竖直方向作自由落体运动. 到达地面目标时，两个方向上运动时间是相同的. 因此，分别列出其运动方程，运用时间相等的条件，即可求解.

此外，平抛物体在运动过程中只存在竖直向下的重力加速度. 为求特定时刻 t 时物体的切向加速度和法向加速度，只需求出该时刻它们与重力加速度之间的夹角 α 或 β. 由图可知，在特定时刻 t，物体的切向加速度和水平线之间的夹角 α，可由此时刻的两速度分量 v_x、v_y 求出，这样，也就可将重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 的切向和法向分量求得.



题 1-23 图

解 (1) 取如图所示的坐标系，物品下落时在水平和竖直方向的运动方程分别为

$$x = vt, \quad y = \frac{1}{2}gt^2$$

飞机水平飞行速度 $v = 100\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，飞机离地面的高度 $y = 100\ \mathrm{m}$，由上述两式可得目标在飞机正下方前的距离

$$x = v\sqrt{\frac{2y}{g}} = 452\ \mathrm{m}$$

(2) 视线和水平线的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} = 12.5°$$

(3) 在任意时刻物品的速度与水平轴的夹角为

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{gt}{v}$$

取自然坐标，物品在抛出 2 s 时，重力加速度的切向分量与法向分量分别为

$$a_t = g\sin\alpha = g\sin\left(\arctan\frac{gt}{v}\right) = 1.88\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$a_n = g\cos\alpha = g\cos\left(\arctan\frac{gt}{v}\right) = 9.62\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

1-24 一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$ 运动，v_0、b 都是常量.（1）求 t 时刻质点的总加速度；（2）t 为何值时总加速度在数值上等于 b?（3）当加速度达到 b 时，质点已沿圆周运行了多少圈？

分析 在自然坐标中，s 表示圆周上从某一点开始的曲线坐标. 由给定的运动方程 $s=s(t)$，对时间 t 求一阶、二阶导数，即是沿曲线运动的速度 v 和加速度的切向分量 a_t，而加速度的法向分量为 $a_n=v^2/R$. 这样，总加速度为 $\boldsymbol{a}=a_t\boldsymbol{e}_t+a_n\boldsymbol{e}_n$. 由于质点实际上作匀变速运动，故可由公式 $v^2-v_0^2=2a_ts$ 求第三问中所涉及的路程 s. 再因圆周长为 $2\pi R$，质点所转过的圈数自然可求得.

解 （1）质点作圆周运动的速率为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-bt$$

其加速度的切向分量和法向分量分别为

$$a_t=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-b,\quad a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

故加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\frac{\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}}{R}$$

其方向与切线之间的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{a_n}{a_t}=\arctan\left[-\frac{(v_0-bt)^2}{Rb}\right]$$

（2）要使 $|\boldsymbol{a}|=b$，由 $\frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}=b$ 可得

$$t=\frac{v_0}{b}$$

（3）从 $t=0$ 开始到 $t=v_0/b$ 时，质点经过的路程为

$$s=\frac{v_0^2}{2b}$$

因此质点运行的圈数为

$$n=\frac{s}{2\pi R}=\frac{v_0^2}{4\pi bR}$$

1-26 一质点在半径为0.10 m的圆周上运动，其角位置为 $\theta=2+4t^3$，式中 θ 的单位为 rad，t 的单位为 s.（1）求在 $t=2.0$ s 时质点的法向加速度和切向加速度；（2）当切向加速度的大小恰等于总加速度大小的一半时，θ 值为多少？（3）t

为多少时，法向加速度和切向加速度的值相等？

分析 掌握角量与线量、角位移方程与位矢方程的对应关系，应用运动学求解的方法即可得到.

解 （1）由于 $\theta=2+4t^3$，则角速度 $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=12t^2$. 在 $t=2$ s 时，法向加速度和切向加速度的数值分别为

$$a_n|_{t=2\text{ s}}=r\omega^2=2.30\times10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_t|_{t=2\text{ s}}=r\frac{d\omega}{dt}=4.80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

（2）当 $a_t=a/2=\dfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2+a_t^2}$ 时，有 $3a_t^2=a_n^2$，即

$$3(24rt)^2=r^2(12t^2)^4$$

得

$$t^3=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

此时刻的角位置为

$$\theta=2+4t^3=3.15(\text{rad})$$

（3）要使 $a_n=a_t$，则有

$$r(12t^2)^2=24rt$$

$$t=0.55\ \text{s}$$

1-30 如图(a)所示，一汽车在雨中沿直线行驶，其速率为 v_1，下落雨滴的速度方向偏于竖直方向之前 θ 角，速率为 v_2，若车后有一长方形物体，问车速 v_1 为多大时，此物体正好不会被雨水淋湿？

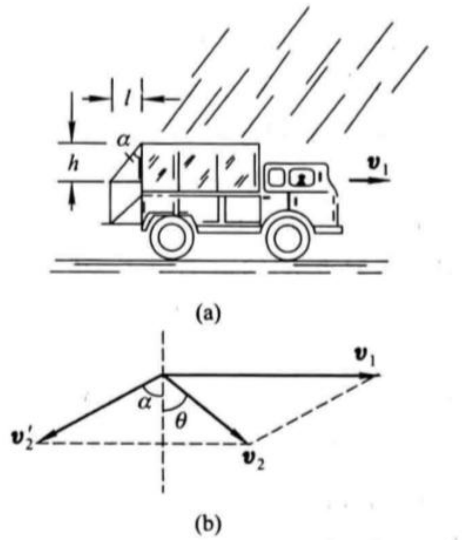
分析 这也是一个相对运动的问题. 可视雨点为研究对象，地面为静参考系 S，汽车为动参考系 S′. 如图(a)所示，要使物体不被淋湿，在车上观察雨点下落的方向（即雨点相对于汽车的运动速度 $\boldsymbol{v}_2'$ 的方向）应满足 $\alpha\geqslant\arctan\dfrac{l}{h}$. 再由相对速度的矢量关系 $\boldsymbol{v}_2'=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$，即可求出所需车速 $\boldsymbol{v}_1$.

解 由 $\boldsymbol{v}_2'=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$［图(b)］，有

$$\alpha=\arctan\frac{v_1-v_2\sin\theta}{v_2\cos\theta}$$

而要使 $\alpha\geqslant\arctan\dfrac{l}{h}$，则

$$\frac{v_1-v_2\sin\theta}{v_2\cos\theta}\geqslant\frac{l}{h}$$



题 1-30 图

$$v_1 \geqslant v_2\left(\frac{l\cos\theta}{h}+\sin\theta\right)$$