随机事件及概率

随机事件

- **概念:**
    - 确定现象 / 随机现象 / 模糊现象

- 随机试验(E)
- 随机事件(基本事件 / 样本空间) / 必然事件 / 不可能事件
- 对立事件: $A \cup B = \Omega, AB = \varnothing$

- **运算规律:**
  - 交换律
    $A \cup B = B \cup A$
    $AB = BA$
  - 结合律
    $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
    $(AB)\, C = A\, (BC) = ABC$
  - 分配律
    $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
    $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
  - 摩根公式
    $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
    $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

随机事件的概率

如果在n次重复随机试验中，事件A发生了n_A次，称比值$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$为事件A发生的频率

等可能概型

$P\,(A) = \frac{A\text{中所含基本事件数}}{\text{基本事件总数}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$

条件概率

$P\,(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

- **全概率公式**
  设随机试验E的事件组$A_1, A_2, \cdots$是样本空间Ω的一组划分(有穷或无穷)，假定对于每一个i，$P\,(A_i) > 0$，则对于 任意事件B，$P\,(B) = \sum_{i=1}^{n} P\,(A_i)\, P\,(B \mid A_i)$
- **贝叶斯公式**
  设随机试验E的事件组$A_1, A_2, \cdots$是样本空间Ω的一组划分(有穷或无穷)，假定对于每一个i，$P\,(A_i) > 0$，则对于 任意事件B，只要$P\,(B) > 0$，有$P\,(A_i \mid B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}$

随机事件独立性

若$P\,(A \cap B) = P\,(A)\, P\,(B)$，则$A$和$B$相互独立

- **独立扩张定理**
  事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立，将任意多个事件替换成它们各自的对立事件后，任然是n个相互独立的事件

随机变量及其概率分布

随机变量

设E是一个随机试验，$\Omega=\{\omega\}$是其样本空间，如果对每一个$\omega\in\Omega$有唯一的实数$X\left(\omega\right)$与之对应，则称X是E的一个随机变量

随机变量的分布函数

设X是一个随机变量，$x\in\mathbb{R}$是一个实数，函数$F\left(x\right)-P\left(X\le x\right)$就称为随机变量$X$的概率分布函数，简称分布函数

- 分布函数的定义域为一切实数
- 分布函数在x处的取值所表示的是随机变量X在$(-\infty,x]$上的概率
- **性质:**
  - 单调不减，若$x_1<x_2$，则$F\left(x_1\right)\le F\left(x_2\right)$
  - $0\le F\left(x\right)\le 1,F\left(-\infty\right)=0,F\left(+\infty\right)=1$
  - 右连续，$F\left(x+0\right)=F\left(x\right)$
- **常用公式:**
  - $P\left(X\le b\right)=F\left(b\right)$
  - $P\left(a\le X\le b\right)=F\left(b\right)=F\left(a\right)$
  - $P\left(X>b\right)=1-F\left(b\right)$
  - $P\left(X<b\right)=F\left(b-0\right)$
  - $P\left(X=b\right)=F\left(b\right)-F\left(b-0\right)$

离散型随机变量

- **分布列 / 分布律:**
  $P\left(X=x_k\right)=p_k$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

- **分布函数:**
  $F\left(x\right)=P\left(X\le x\right)=\sum\limits_{x_k\le x}p_k$
  $(0-1)$**分布:**
  $P\left(X=x\right)=p^x\left(1-p\right)^{1-x},x=0,1$
- **二项分布:**
  把试验E在相同的条件下重复进行n次各次试验的结果有限且互不影响，则称这n次试验为n**次独立试验**
  如果每次试验只有两个结果，则n次独立试验又称为n**重贝努里试验**
  X为n重贝努里试验中成功的次数，
  $P\left(X=k\right)=C_n^kp^k\left(1-p\right)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$
  记为$X\sim B\left(n,p\right)$
  当k为最可能成功的次数时，称$P\left(X=k\right)$为**二项分布的中心项**
- **泊松分布:**
  $P\left(X=k\right)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots,\lambda>0$
  记为$X\sim P\left(\lambda\right)$

- $B(n,p)$中n较大，p较小时，趋近于泊松分布，$\lambda = np$

- **超几何分布:**
  $P(X=k) = \frac{C_M^k C_{N_M}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0,1,2,\cdots,\min\{n,M\}$
  记为$X \sim H(N,M,n)$
- **几何分布:**
  $P(X=k) = pq^{k-1}, k = 1,2,3,\cdots$
  记为$X \sim G(P)$
- **负二项分布 / 帕斯卡分布:**
  $P(X=k) = C_{r-1}^{k-1} p^r (1-p)^{k-r}, k = r, r+1, \cdots$
  记为$X \sim NB(r,p)$

连续型随机变量

若存在非负可积函数$f(x)$，使得对于任一实数x，有$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$，则称$X$是**连续型随机变量**，其中函数$f(x)$称为$X$的**概率密度函数**(PDF)，简称为**概率密度**

- $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$
- $F'(x) = f(x)$
- $P(X = x_0) = 0$
- $P(X \in I) = \int_I f(x)\,\mathbf{d}x$
- **均匀分布:**
  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & 其它 \end{cases}$
  记为$X \sim U[a,b]$
- **指数分布:**
  $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$
  记为$X \sim e(\lambda)$
  $P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k)$
- **正态分布:**
  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
  记为$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - 当$x = \mu$时曲线处于最高点
    σ越大，曲线越矮胖
  - $N(0,1)$为**标准正态分布**
  - 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
    $F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
  - $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- α分位点x_a: $P(X > x_a) = \alpha$

随机变量函数的分布

已知随机变量X的分布，$g(x)$是一连续函数，求$Y = g(x)$的分布

- X为离散型随机变量
- X为连续型随机变量
  - 设X的密度函数为$f_X(x)$，则随机变量$Y=g(X)$的分布函数为
    $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\int_{g(x)\le y}f_X(x)\mathrm{d}x$
    $f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)$
  - 设X的概率密度函数为$f_X(x)$，若$g'(x)>0$或$g'(x)<0$，记$x=h(y)$为$y=g(x)$的反函数，则$Y=g(X)$概率密度为
    $f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))\left|h'(y)\right| & y\in g(R)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$
    其中$g(R)=\{g(x)\mid x\in R\}$为$g(x)$的值域

随机向量及其概率分布

二维随机向量的联合分布

设$\Omega=\{\omega\}$是随机试验E的样本空间，X和Y是定义在Ω上的随机变量，由它们构成的二维向量(X,Y)称为E的一个二维随机向量

- **联合分布函数**
  $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$
  - $0\le F(x,y)\le 1$
    $F(-\infty,y)=0$
    $F(x,-\infty)=0$
    $F(-\infty,-\infty)=0$
    $F(+\infty,+\infty)=1$
  - $F(x_1,y)\le F(x_2,y)\ x_1<x_2$
    $F(x,y_1)\le F(x,y_2)\ y_1<y_2$
  - $F(x,y)=F(x+0,y)$
    $F(x,y)=F(x,y+0)$
  - $P(x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)$
- **二维离散型随机变量**
  - $p_{ij}\ge 0$
  - $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$
  - $F(x,y)=\sum\limits_{x_i\le i}\sum\limits_{y_j\le j}p_{ij}$
- **连续型二维变量**
  $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
  - $f(x,y)\ge 0$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$
  - $f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$
  - 设G为平面xy上的一个区域，则$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- **二维均匀分布**
  设G为平面xy上的一个区域，S是G的面积，则
  $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S} & (x,y)\in G\\ 0 & (x,y)\notin G\end{cases}$

- **二维正态分布**
  $f\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]$
  $-\infty<\mu_1,\mu_2<+\infty,\sigma_1>0,\sigma_2>0,|r|<1$
  记作$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;r\right)$
- **Γ函数**
  $\Gamma\left(\alpha\right)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x,\alpha>0$
  $\Gamma\left(\alpha+1\right)=\alpha\Gamma\left(\alpha\right)$

边缘分布

- **定义**
  $F_1(x)=F_X(x)=F(x,+\infty)$
  $F_2(y)=F_Y(y)=F(+\infty,y)$
- **边缘分布率**
  若联合分布律为$P\left(X=x_i,Y=y_i\right)=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$，则
  X的边缘分布率$P\left(X=x_i\right)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_i,i=1,2,\cdots$
  Y的边缘分布率$P\left(Y=y_j\right)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_j,j=1,2,\cdots$
- **边缘概率密度**
  $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$
  $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x$

条件分布

- **定义**
  - 连续型随机变量
    $F_{Y|X}(y\mid x)=P\left(Y\le y\mid X=x\right)=\frac{P(X=x,Y\le y)}{P(X=x)}=\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{F(x,y)-F(x-\alpha,y)}{F(x,+\infty)-F(x-\alpha,+\infty)}$
  - 离散型随机变量
    $P\left(Y=j\mid X=i\right)=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(X=i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$
- **条件概率密度**
  $f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

随机变量的独立性

- **定义**
  若$F\left(x,y\right)=F_X\left(x\right)\cdot F_Y\left(y\right)$，则称$X$和$Y$是相互独立的
- **充要条件**
  - $P\left(X=x_i,Y=y_i\right)=P\left(X=x_i\right)P\left(Y=y_i\right)$
  - $f\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$

n维随机向量

- **定义**

- 联合分布函数
  $F\left(x_1, \cdots, x_n\right)=P\left(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n\right)$
- 联合分布律
  $P\left(X_1=x_i^{(1)}, \cdots, X_n=x_j^{(n)}\right)=p_{i \cdots j}$
- 联合概率密度
  $F\left(x_1, \cdots, x_n\right)=\int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f\left(x_1, \cdots, x_n\right) \mathrm{d} x_1 \cdots \mathrm{d} x_n$

随机向量函数的分布

- **二维连续型随机变量**

  $Z=g(X, Y)$

  - 分布函数

    $F_Z(z)=P(Z \leq z)=P(g(X, Y) \leq z)=\iint\limits_{g(x, y) \leq z} f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y$

  - 概率密度

    $f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} z} F_Z(z)$

  - 卷积公式

    $f_X \cdot f_Y=f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \mathrm{d} x=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d} y$

随机变量的数字特征

数学期望

- **定义**

  - 设离散型随机变量X的分布律为$P\left(X=x_i\right)=p_i, i=1,2, \cdots$，若级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|x_i\right| p_i$收敛，则$X$的数学期望存在，$E X=\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_i$
  - 设连续型随机变量X的分布律为$f(x)$，若积分$\int_{-\infty}^{+\infty}|x| f(x) \mathrm{d} x$收敛，则$X$的数学期望存在，$E X=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x$
- **常见数学期望**
  - $(0,1)$分布
    $E X=p$
  - 二项分布$B(n, p)$
    $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2, \cdots, n$
    $E X=n p$
  - 泊松分布$P(\lambda)$
    $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k=0,1,2, \cdots, \lambda>0$
    $E X=\lambda$
  - 几何分布$G(p)$
    $P(X=k)=p q^{k-1}, k=1,2,3, \cdots$
    $E X=\frac{1}{p}$

- 超几何分布$H\left(N,M,n\right)$
  $P\left(X=k\right)=\frac{C_M^kC_{N_M}^{n-k}}{C_N^n},k=0,1,2,\cdots,\min\left\{n,M\right\}$
  $EX=\frac{nM}{N}$
- 均匀分布$U\left(a,b\right)$
  $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\leq x\leq b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$
  $EX=\frac{a+b}{2}$
- 指数分布$e\left(\lambda\right)$
  $f\left(x\right)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$
  $EX=\frac{1}{\lambda}$
- 正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$
  $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
  $EX=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}+\left|\mu\right|=\mu<+\infty$

- **随机变量函数的数学期望**
  - 设$Y=g\left(X\right)$
    - 若X为离散型随机变量，其分布律为$P\left(X=x_k\right)=p_k,k=1,2,\cdots$，则$EY=\sum\limits_{k=1}^{\infty}g\left(x_k\right)p_k$
    - 若X为连续型随机变量，其密度函数为$f\left(x\right)$，则$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(x\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x$
  - 设$Z=g\left(X,Y\right)$
    - 若$\left(X,Y\right)$为离散型随机变量，则$EY=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}g\left(x_i,y_j\right)p_{ij}$
    - 若$\left(X,Y\right)$为连续型随机变量，则$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(x,y\right)f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- **数学期望的性质**
  - $EC=C$
  - $E\left(CX\right)=CEX$
  - $E\left(X+Y\right)=EX+EY$
    $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i$
    $E\left(aX+b\right)=aEX+b$
  - 若X,Y相互独立，则$E\left(X\cdot Y\right)=EX\cdot EY$

方差

- **定义**
  $DX=E(X-EX)^2=EX^2-(EX)^2$
- **常见方差**
  - $\left(0,1\right)$分布
    $DX=pq$
  - 二项分布$B\left(n,p\right)$
    $DX=np\left(1-p\right)$
  - 泊松分布$P\left(\lambda\right)$
    $DX=\lambda$
  - 几何分布$G\left(p\right)$
    $DX=\frac{q}{p^2}$
  - 均匀分布$U\left(a,b\right)$
    $DX=\frac{(b-a)^2}{12}$

- 指数分布$e(\lambda)$
  $DX=\frac{1}{\lambda^2}$
- 正态分布$N(\mu,\sigma^2)$
  $DX=\sigma^2$

- **方差的性质**
  - $DC=0$
  - $D(aX+b)=a^2DX$
  - 若X,Y相互独立，则$D(aX\pm bY)=a^2DX+b^2DY$
  - 标准化随机变量$X^*=\frac{X-EX}{\sqrt{DX}},EX^*=0,DX^*=1$
  - $DX\le E(X-C)^2,C=EX$时取等号
  - $DX=0\Longleftrightarrow P(X=EX)=1$
- **不等式**
  - 切比雪夫不等式
    $\forall\varepsilon>0,P(|X-EX|\ge\varepsilon)\le\frac{DX}{\varepsilon^2}$
  - 马尔可夫不等式
    $\forall\varepsilon>0,P(|X|\ge\varepsilon)\le\frac{E|k|^k}{\varepsilon^k}(k=1,2,\cdots)$

协方差和相关系数

- **定义**
  $\operatorname{Cov}(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)=EXY-EXEY$
  相关系数$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}$
  - 当$\rho_{XY}=0$时，称X,Y不相关
  - X,Y相互独立，则其一定不相关；但若X,Y不相关，却未必相互独立
- **协方差的性质**
  - $\operatorname{Cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$
  - $\operatorname{Cov}(X,X)=DX$
  - $\operatorname{Cov}(aX,bY)=ab\operatorname{Cov}(X,Y)$
  - $\operatorname{Cov}(X,C)=0$
  - $\operatorname{Cov}\left(\sum\limits_{i=1}^n c_ix_i,Y\right)=\sum\limits_{i=1}^n c_i\operatorname{Cov}(X_i,Y)$
- **相关系数**
  - $|\rho_{XY}|\le1$
  - $|\rho_{XY}|=1\Longleftrightarrow\exists a,b,a\ne0,P(Y=aX+b)=1$

矩和协方差矩阵

- **矩**
  随机变量各种数学期望的集中称呼，反映了概率在随机变量空间上的分布。
  - $\alpha_k=EX^k$是X的k阶原点矩
  - $\beta^k=E(X-EX)^k$是X的k阶中心矩
  - EX^kY^l是X和Y的$(k+l)$阶混合原点矩
  - $\gamma_{kl}=E(X-EX)^k(Y-EY)^l$是$X$和$Y$的$(k+l)$阶混合中心矩
    数学期望EX 为X的1阶原点矩
    方差DX 为X的2阶中心矩

协方差$\mathrm{Cov}(X,Y)$为X和Y的$(1+1)$阶混合中心矩
若高阶矩存在，则低阶矩一定存在，如方差存在则期望一定存在。

- **协方差矩阵**
  设$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是n维随机向量，
  $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n),\mu_i=EX_i,i=1,2,\cdots,n$称为$X$的期望向量
  $\sigma_{ij}=E(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)$为$X_i$和$X_j$的协方差
  则称n阶矩阵$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn}\end{bmatrix}$为$X$的协方差矩阵
  - $\sigma_{ii}=DX_i$
  - $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$
  - $\forall t=(t_1,t_2,\cdots,t_n),t\sum t^T=\sum\limits_{i,j=1}^{n}t_i\sigma_{ij}t_j\geq 0$
  - $\sigma_{ij}^2\leq\sigma_{ii}\cdot\sigma_{jj}$
- **n维正态分布**
  n维随机向量$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合概率密度为
  $f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)^T\right]$，其中
  $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n),\Sigma=(\sigma_{ij})_{n\times n}$,$\Sigma$正定,$|\Sigma|$是$\Sigma$的行列式，则称$X$服从$n$维正态分布，记为$X\sim N(\mu_{1\times n},\Sigma_{n\times n})$
  - $X\sim N(\mu_{1\times n},\Sigma_{n\times n})\iff\forall l=(l_1,l_2,\cdots,l_n),Xl^T\sim N\left(\mu l^T,\Sigma l^T\right)$
  - $C_{m\times n}$为实矩阵，$X\sim N(\mu_{1\times n},\Sigma_{n\times n})\Longrightarrow Y=XC^T\sim N\left(\mu C^T,\Sigma C^T\right)$
  - $X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，$X\sim N(\mu_{1\times n},\Sigma_{n\times n})\iff\Sigma$为对角矩阵

极限定理

大数定律

- **定义**
  - 设$\{X_n\}(n=1,2,\cdots)$为一随机变量序列，X为随机变量，若对于$\forall\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=0$，则称序列$\{X_n\}$依概率收敛于$X$，记作$\{X_n\}\stackrel{P}{\to}X$
    - $A_n=\{|X_n-X|<\varepsilon\},p_n=P(A_n)$，则$p_n\to 1(n\to\infty)$时，$X_n$以很大的可能性靠近$X$，其中$\varepsilon$为误差（随机性消失）
  - 设$\{X_n\}(n=1,2,\cdots)$为一随机变量序列，数学期望EX_n存在，记$\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$，若$\overline{X_n}\stackrel{P}{\to}E\overline{X_n}$，则称序列$\{X_n\}$服从大数定律
- **切比雪夫大数定律**
  设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$为相互独立的随机变量所构成的序列，其中
  $EX_k=\mu_k,DX_k\leq C<+\infty(k=1,2,\cdots,n,\cdots)$，则$\forall\varepsilon>0$,
  $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k\right|\geq\varepsilon\right)=0$
  - 相互独立，期望存在，方差有限，算术平均值依概率收敛到它本身的数学期望
- **辛钦大数定律**
  $\{X_n\}$独立同分布，$EX_n=\mu(n=1,2,\cdots)$存在，则$\forall\varepsilon>0,\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|\geq\varepsilon\right)=0$
  - 切比雪夫大数定律加上同分布（注意这时方差不要求存在）
- **伯努利大数定律**

设n_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数，p是事件A在每次试验中发生的概率，则$\forall\varepsilon>0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)=0$

- 辛钦大数定律加上同分布到$(0-1)$分布
- 伯努利定律说明，事件A发生的频率$\frac{n_A}{n}$以概率收敛到事件A发生的概率p, 这就以严格的数学形式表达了频率的稳定性。 就是说，当n很大时，事件A发生的频率与概率有较大的差别的可能性很小，因而在实际中便可以用频率来代替概率。

中心极限定律

- **定义**

  相互独立的随机变量序列$\{X_n\}$，设$EX_n, DX_n\ (n=1,2,\cdots)$存在，令$Y_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i-\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}DX_i}}$，若

  $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{Y_n\leq x\right\}=\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$成立，则称$\{X_n\}$服从中心极限定理

- **林德贝格定理**

  设$\{X_n\}$相互独立，数学期望和方差存在$EX_k=\mu_k, DX_k=\sigma_k^2\ (k=1,2,\cdots,n,\cdots)$，记$B_n^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2$，若$\forall\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{B^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{|x-\mu_k|\geq\varepsilon B_n}\left(x-\mu_k\right)^2\mathrm{d}F_k\left(x\right)=0$，则$\{X_n\}$服从中心极限定理

  - 相互独立，期望方差存在，满足林德贝格条件，序列和的标准化随机变量在n很大的时候满足标准正态分布
  - 某随机变量由大量相互独立的随机因素的综合影响所成，且每一个别因素在总的影响中所起的作用都很小，这种变量往往近似地服从正态分布
  - 记$B_n^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2$，若$\forall\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{B^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{|x-\mu_k|\geq\varepsilon B_n}\left(x-\mu_k\right)^2\mathrm{d}F_k\left(x\right)=0$件就是对每一个子因素影响都很小的要求条件

- **独立同分布的中心极限定理**

  设$\{X_n\}$独立同分布，数学期望和方差存在$EX_k=\mu, DX_k=\sigma^2<+\infty\ (k=1,2,\cdots)$，则$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}$,

  $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right)=\Phi\left(x\right)$

  - 林德贝格定理加上同分布

- **德莫佛-拉普拉斯定理**

  设随机变量μ_n服从二项分布$B\left(n,p\right)$，对于$\forall x$，有

  $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\frac{\mu_n-np}{\sqrt{np(1-p)\sigma}}\leq x\right)=\Phi\left(x\right)$

  - 应用

    令μ_n是n重伯努利试验中事件A发生的次数，则$\mu_n\sim B\left(n,p\right)$，其中$p=P\left(A\right)$

    $P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-1$

  - 若$\eta_n\sim B\left(n,p\right)$，则当$n\to\infty$，$p$不是很小（如0.5）时，$\eta_n$近似服从正态分布$N\left(np,np\left(1-p\right)\right)$；$p$很小时用$\lambda=np$的泊松分布更精确

抽样分布

基本概念

- **总体**

  我们把所研究的全部元素组成的集合称作母体或总体，总体中的每一个元素称为个体
  我们只研究感兴趣的某个或者几个指标（记为X），因此把这些指标的分布称为总体的分布，记为$X \sim F(x)$

- **个体**

  设总体X具有分布函数$F(x)$，若$X_1, X_2, \cdots, X_n$是具有分布函数$F(x)$的相互独立的随机向量，则称其为总体F（或总体X）的简单随机样本，简称样本，它们的观察值$x_1, x_2, \cdots, x_n$称为样本观察值，又称为X 的n个独立的观察值

- **统计量**

  设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本，$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个与总体分布中未知参数无关的样本的连续函数，则称$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为统计量

  统计量是样本的函数，它是一个随机变量，如果$x_1, x_2, \cdots, x_n$是样本观察值，则$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是统计量$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的一个观察值

  - 常用统计量
    - 样本均值$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$
    - 样本方差$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$
    - 样本k阶原点矩$A_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k, k = 1, 2, \cdots$
    - 样本k阶中心矩$B_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k, k = 2, 3, \cdots$
      - 当样本容量很大时，$B_2 \approx S^2$
      - 总体X的k阶矩存在，则当n很大时，A_k依概率收敛到a_k
      - 样本的联合分布
        - 若$X \sim F(x)$,$X_1, X_2, \cdots, X_n$为F的一个样本，则$X_1, X_2, \cdots, X_n$的联合分布函数为$F^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} F(x_i)$
        - 若总体X是离散型随机变量，其分布律为$p_x = P(X = x), x = x_1, x_2, \cdots$，则$X_1, X_2, \cdots, X_n$的联合分布函数为$P(X_1 = y_1, \cdots, X_n = y_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} F(X_i = y_i)$，其中$y_i = x_1, x_2, \cdots$
        - 若X具有概率密度$f(x)$，则$X_1, X_2, \cdots, X_n$的联合分布函数为$f^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} F(x_i)$
      - 设$X_1, \cdots, X_n$是总体X的样本，$EX = \mu, DX = \sigma^2$存在，

        $\begin{cases} E\overline{X} = \mu \\ D\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n} \end{cases} \begin{cases} ES^2 = \sigma^2 \\ DS^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1} \end{cases}$

        $\overline{X} \xrightarrow{P} \mu, S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$

统计中的重要分布

统计量$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布称为抽样分布

- χ^2**-分布**

- 定义

  设$X_1, X_2, \cdots, X_n$来自总体$N(0,1)$的样本，则称统计量$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$服从自由度为$n$的$\chi^2$分布，记作$\chi^2 \sim \chi^2(n)$

- $\chi^2(n)$概率密度为$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$

- Γ分布和$\chi^2(n)$分布关系

  $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

- 性质
  - 若$\chi_1^2 \sim \chi^2(m), \chi_2^2 \sim \chi^2(n)$，且$\chi_1^2, \chi_2^2$独立，有$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(m+n)$
  - 若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$

- χ^2分布的上α分位点

  对于给定整数$\alpha, 0 < \alpha < 1, P\left(\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\right) = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{d}y = \alpha$的点$\chi_\alpha^2(n)$为$\chi^2(n)$分布的上$\alpha$分位点

- **t-分布**
  - 定义

    设$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，且$X, Y$相互独立，则称$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$服从自由度为$n$的$t$-分布，记作$T \sim t(n)$

  - $t(n)$概率密度为$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, -\infty < t < +\infty$
    - $\lim\limits_{n \to \infty} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$，即当$n$充分大时，$t$-分布近似$N(0,1)$分布

  - t-分布的上α分位点

    对于给定整数$\alpha, 0 < \alpha < 1, P(t > t_\alpha(n)) = \int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \alpha$的点$t_\alpha(n)$为$t(n)$分布的上$\alpha$分位点
    - $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

- **F-分布**
  - 定义

    设$U \sim \chi^2(m), V \sim \chi^2(n)$，且$U, V$相互独立，则称$F = \frac{\frac{U}{m}}{\frac{V}{n}}$服从自由度为$(m,n)$的$F$-分布，记作$F \sim F(m,n)$

  - F分布的概率密度为$\psi(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{m}{n}y\right)^{\frac{m+n}{2}}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$

  - 性质
    - 若$F \sim F(m,n)$，则$\frac{1}{F} \sim F(n,m)$

  - F-分布的上α分位点

    对于给定整数$\alpha, 0 < \alpha < 1, P(F > F_\alpha(m,n)) = \alpha$的点$F_\alpha(m,n)$为$F$-分布的上$\alpha$分位点
    - $F_{1-\alpha}(m,n) = \frac{1}{F_\alpha(n,m)}$

正态总体中统计量的分布

- **单个正态总体**

设$(X_1,\cdots,X_n)$为来自总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的一组容量为$n$的样本，令$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$，则

- $U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N\left(0,1\right)$
- $\overline{X}$与S^2相互独立
- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2\left(n-1\right)$
- $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t\left(n-1\right)$

- **两个正态总体**

  设$(X_1,\cdots,X_m)$为来自总体$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$的一组容量为$m$的样本，$(Y_1,\cdots,Y_n)$为来自总体$Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$的一组容量为$n$的样本，两组样本相互独立，令$\overline{X}=\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}X_i,S_{1m}^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\overline{X}\right)^2,\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i,S_{2n}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$，则

  - $\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N\left(0,1\right)$
  - $\frac{(m-1)S_{1m}^2}{\sigma_1^2}+\frac{(n-1)S_{2n}^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2\left(m+n-2\right)$
  - $\frac{\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{(m-1)S_{1m}^2}{\sigma_1^2}+\frac{(n-1)S_{2n}^2}{\sigma_2^2}}{m+n-2}}}\sim t\left(m+n-2\right)$

    $\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_{1m}^2+(n-1)S_{2n}^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t\left(m+n-2\right),\sigma_1=\sigma_2$
  - $\frac{S_{1m}^2}{S_{2n}^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F\left(m-1,n-1\right)$

参数估计

点估计

- **问题的提法**

  设总体X的分布函数$F\left(x;\theta\right)$的形式为已知，θ为待估参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为X的一个样本，$x_!,x_2,\cdots,x_n$为相应的一个样本值

  点估计问题及为构造一个统计量$\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$，用它的观察值$\hat{\theta}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$来估计未知参数$\theta$，称$\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$为$\theta$的估计量，$\hat{\theta}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$为$\theta$的估计值

- **矩估计法**

  设总体X的分布函数为$F\left(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$，称$\begin{cases}\alpha_r\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=EX^r=A_r=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^r\\ r=1,2,\cdots,k\end{cases}$的解$\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$为$\hat{\theta}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$的矩估计量

  - 样本原点矩依概率收敛于相应的总体原点矩，而样本矩的连续函数依概率收敛于相应的总体矩的连续函数，所以所有的矩估计都有依概率收敛这一性质（相合性）

- **极大似然估计法**

  总体$X\sim f\left(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$，$L\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}f\left(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$称为参数$(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$的似然函数

- 若似然函数$L\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$在$\hat{\theta}_i\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$处取最大值，则称$\hat{\theta}_i$为$\theta_i$的极大似然估计值，$\hat{\theta}_i\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$为参数$\theta_i$的极大似然估计量
- 求解方法：
  - 求解对数似然方程$\frac{\partial\ln L(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)}{\partial\theta_i}=0\left(i=1,2,\cdots,k\right)$，若驻点唯一，即为极大似然估计
  - 根据定义计算
- 设θ的函数$u=u\left(\theta\right),\theta\in\Theta$具有单值反函数$\theta=\theta\left(u\right),u\in\mu$，且$\hat{\theta}$是参数$\theta$的极大似然估计，则$\hat{u}=u\left(\hat{\theta}\right)$是$u\left(\theta\right)$的极大似然估计

估计量的评选标准

- **无偏性**

  若估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$的数学期望$E\left(\hat{\theta}\right)$存在，且$\forall\theta\in\Theta,E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的无偏估计量

  若$\lim\limits_{n\to\infty}E\hat{\theta}=\theta$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的渐近无偏估计

- **有效性**

  若$E\hat{\theta}_1=E\hat{\theta}_2=\theta$，若有$D\left(\hat{\theta}_1\right)\leq D\left(\hat{\theta}_2\right)$，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效

  所有无偏估计中方差最小的无偏估计称为最小方差无偏估计，或称为有效估计

  - 总体$X\sim f\left(x;\theta\right)$，若$E\hat{\theta}=\theta$，则$D\left(\hat{\theta}\right)\geq\frac{1}{nI(\theta)}$（G-R下界），其中Fisher信息数$I\left(\theta\right)=E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f\left(X,\theta\right)\right]^2$

  若$D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{1}{nI(\theta)}$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的有效估计

  若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{nI(\theta)}}{D\left(\hat{\theta}\right)}=1$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的渐近有效估计

- **相合性（一致估计）**

  若$\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)\xrightarrow{P}\theta$，即$\forall\varepsilon>0,\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right|\geq\varepsilon\right)=0$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的相合估计量

  - 所有的矩估计都是相合估计

  若$\lim\limits_{n\to\infty}D\hat{\theta}=0,\lim\limits_{n\to\infty}b\left(\theta\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(E\hat{\theta}-\theta\right)=0$，则$\hat{\theta}$为$\theta$的相合估计量

  $D\overline{X}=\frac{1}{n}DX$

区间估计

- **定义**

  设总体$X\sim f\left(x;\theta\right)$，其中$\theta$未知，若对于给定的$0<\alpha<1$，统计量$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1\left(X_1,\cdots,X_n\right)$和$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2\left(X_1,\cdots,X_n\right)$满足$P\left(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\right)=1-\alpha$，则称随即区间$\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间，$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$分别称为置信度为$1-\alpha$的置信上限和置信下限，$1-\alpha$称为置信度或置信水平

  - 置信区间不唯一
  - 置信区间长度越短，估计越精确，所以一般我们是对称的取，此时的置信区间长度最短

- **求置信区间（枢轴量法）**

  1. 设法构造一个随机变量$Z=Z\left(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta\right)$，除参数外，$Z$不包含其他任何未知参数，$Z$的分布已知或可求出，并且不依赖于参数$q$，也不依赖于其他任何未知参数（$Z$即称为枢轴量）

2. 对于给定的置信度$1-\alpha$，求出a,b，使得$P\{a<Z(X_1,\cdots,X_n;\theta)<b\}=1-\alpha$
3. 由不等式$a<Z(X_1,\cdots,X_n;\theta)<b$解得$\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$，即$P\left(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\right)=1-\alpha$

正态总体参数的区间估计

- **单个正态总体参数的区间估计**

  总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

被估参数	条件	选用统计量	分布	$1-\alpha$的置信区间
μ	σ^2已知	$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$	$N(0,1)$	$\left[\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right]$
μ	σ^2未知	$T=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$t(n-1)$	$\left[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$
σ^2	μ未知	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$

  - 若$g(x)$单调增，则$P\left(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\right)=1-\alpha\Longrightarrow P\left(g\left(\hat{\theta}_1\right)<g(\theta)<g\left(\hat{\theta}_2\right)\right)=1-\alpha$

    若$g(x)$单调减，则$P\left(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\right)=1-\alpha\Longrightarrow P\left(g\left(\hat{\theta}_2\right)<g(\theta)<g\left(\hat{\theta}_1\right)\right)=1-\alpha$
- **两个正态总体的区间估计**

$N\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim(\mu_2,\sigma_2^2)$相互独立

参数	条件	$1-\alpha$的置信区间
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$\left[\overline{X}-\overline{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}},\overline{X}-\overline{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right]$
$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$未知	$\left[\overline{X}-\overline{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}S_{\varpi}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\overline{X}-\overline{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}S_{\varpi}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right]$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2未知	$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\right]$

假设检验

基本概念

- 基本思想
  - 假设某个结论成立
  - 小概率事件在一次抽样过程中发生了/一次抽样中没有发生小概率事件
  - 认为原假设不成立/接受原假设
- 一般步骤
  - 根据实际问题提出原假设H_0及备择假设H_1
  - 选择适当统计量，在H_0条件下决定统计量分布
  - 对给定的显著性水平$0<\alpha<1$，根据$P((X_1,X_2,\cdots,X_n)\in S\mid H_0)=\alpha$确定拒绝域$S$

- 一旦得到一组样本观察值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，若$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in S$，则拒绝$H_0$，否则接受$H_0$

- 假设检验的两类错误
  - 第一类错误：如果原假设H_0成立，而观察值落入拒绝域，从而作出拒绝H_0的结论，称作第一类错误，又称弃真的错误。由定义知，显著性水平α恰好是犯第一类错误的概率
  - 第二类错误：如果原假设H_0不成立，而观察值却落入接受域，从而作出接受H_0的结论，称作第二类错误，又称取伪的错误，通常记作β。

  一般按照控制犯第一类错误的原则进行检验而不考虑犯第二类错误（保护原假设的原则），这种检验问题 称为显著性检验问题

单个正态总体参数的检验

总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$(X_1,\cdots,X_n)$是一组样本

- σ^2已知，检验μ
  - $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，双边检验
    - 假设H_0成立
    - 当$\mu=\mu_0$时，统计量$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N\left(0,1\right)$分布已知
    - $P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right|\geq k\mid H_0\right)\leq\alpha$，满足该不等式则为$H_0$的拒绝域
    - 令$k=u_{\frac{\alpha}{2}}$，最大允许拒绝域为$S=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\mid\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$
  - $H_0:\mu\leq\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$，单边右检验
    - 假设H_0成立
    - 当$\mu\leq\mu_0$时，统计量$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n},1\right)$分布已知
    - $$P\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\geq k\mid H_0\right)=P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\geq k-\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\mid H_0\right)\leq P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\geq k\mid H_0\right)\leq\alpha$$
      ，满足该不等式则为H_0的拒绝域
    - 令$k=u_\alpha$，最大允许拒绝域为$S=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\mid\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right|\geq u_\alpha\right\}$

H_0	**H_0真时统计量的分布**
$\mu=\mu_0$	$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\sim N\left(0,1\right)$

H_1	**拒绝H_0的区域**
$\mu\neq\mu_0$	$\lvert U\rvert\geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu>\mu_0$	$U\geq u_\alpha$
$\mu<\mu_0$	$U\leq -u_\alpha$

- σ^2未知，检验μ

H_0	**H_0真时统计量的分布**
$\mu=\mu_0$	$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}\sim t\left(n-1\right)$

H_1	**拒绝H_0的区域**
$\mu \neq \mu_0$	$\|T\| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\mu > \mu_0$	$T \geq t_\alpha(n-1)$
$\mu < \mu_0$	$T \leq -t_\alpha(n-1)$

- μ已知，检验σ^2

H_0	**H_0真时统计量的分布**
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i-1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$

H_1	**拒绝H_0的区域**
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}, \chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi^2_\alpha(n)$
$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n)$

- μ未知，检验σ^2

H_0	**H_0真时统计量的分布**
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \sum\limits_{i-1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$

H_1	**拒绝H_0的区域**
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}, \chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi^2_\alpha(n-1)$
$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$