20-21-1 复 变 函 数 期 末 试 卷 (A) 答 案

一.　1. D　2. B　3. D　4. C　5. D　6. C

二.　1. $-1+4i$　2. $e^{\frac{i}{2}\ln 2-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)},\ k\in\mathbb{Z}$　3. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　4. $2+i$　5. $-\frac{1}{6}$　6. $\frac{\pi}{4}$　7. $\frac{\pi}{12}i$

三.　由于 u 具有二阶连续偏导数, 且满足Laplace方程, 所以 u 是调和函数.

由C.-R.方程 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x$ 得 $v(x,y)=2xy+h(x)$.

从而由 $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ 得 $h'(x)=1,\ \ h(x)=x+C$.

所以 $f(z)=x^2-y^2-y+i(2xy+x+C)=z^2+i(z+C)$.

由 $f(0)=i$ 得 $C=1$. 故 $f(z)=z^2+i(z+1)$.

四.　(1) $f(z)=\frac{1}{z}\Big(\frac{1}{1-z}\Big)'=\frac{1}{z}\Big(-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\Big)'=\frac{1}{z}\Big(-\frac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}\Big)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{z^{n+3}}$.

(2) $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}\cdot\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{(z-1)^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$

五.　(1) $z=2k\pi i,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 是 $g(z)-1$ 的一级零点

对 $z=0$, 由 $\lim\limits_{z\to0}f(z)=-1$ 得 $z=0$ 为可去奇点;

对 $z=2k\pi i(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$, 是 $[g(z)-1]^2$ 的二级零点, 且 $f(z)$ 在 $z=2k\pi i(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$ 解析且不为0, 所以 $z=2k\pi i(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$ 为二级极点;

对 $z=-1$, 是 $f(z)$ 的一级极点, 且 $1/[g(z)-1]^2$ 在 $z=-1$ 解析且不为0, 所以 $z=-1$ 为一级极点;

由 $2k\pi i\to\infty\ (k\to\infty)$ 得 $z=\infty$ 不是孤立奇点.

$\mathrm{Res}\Big[\frac{f(z)}{g(z),\ \infty}\Big]=-\mathrm{Res}\Big[\frac{f(z)}{g(z)},\ -1\Big]=-\lim\limits_{z\to-1}(z+1)\frac{f(z)}{g(z)}=2e.$

六.　1. 原积分 $=\frac{1}{2}2\pi i\Big(\mathrm{Res}[f(z),\ z_0]+\mathrm{Res}[f(z),\ z_1]\Big)=\pi i\Big(\frac{1}{4z_0}+\frac{1}{4z_1}\Big)=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$

2. (1) 1 和 -1 都不在 C 内, 原积分 $=0$.

(2) 1 在 C 内, -1 在 C 外, 原积分 $=2\pi i\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}\Big|_{z=1}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}i.$

同理, -1 在 C 内, 1 在 C 外, 原积分 $=2\pi i\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}\Big|_{z=-1}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}i.$

(3) 1 和 -1都在 C 外, 原积分 $=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}i+\frac{\sqrt{2}\pi}{2}i=\sqrt{2}\pi i.$

七.　$\because\ \ f(z)=(z-z_0)^m\phi(z)$, 其中 $\phi(z)$ 在 z_0 解析, 且 $\phi(z)\neq0$.

$\therefore\ \ f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}\phi(z)+(z-z_0)^m\phi'(z).$

$\therefore\ \ \frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-z_0}+\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}.$

$\because\ \ \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$在 z_0 解析

$\therefore\ z_0$ 是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一级极点, 且 $\mathrm{Res}\Big[\frac{f'(z)}{f(z)},z_0\Big]=m.$