P_{29}, 16:

$$p(A|\bar{A}\cup B)=\frac{p(A\bar{A}\cup AB)}{p(\bar{A}\cup B)}=\frac{p(B\bar{\bar{A}})}{p(\bar{A})+p(B)-p(\bar{A}B)}$$

$$=\frac{P(B)-P(B\bar{A})}{p(\bar{A})+p(B)-p(\bar{A}B)}=\frac{0.7-0.5}{0.6+0.7-0.5}=\frac{1}{4}$$

P_{29}, 19:

$\because 1\geqslant p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(AB)$，同除 $p(B)>0$

$$\Rightarrow \frac{1}{p(B)}\geqslant \frac{p(A)}{p(B)}+1-p(A|B) \Rightarrow p(A|B)\geqslant \frac{p(A)+p(B)-1}{p(B)}$$

P_{29}, 22:

设 A_i：{第 i 次抽样检查时，抽到正品}

则产品被接受的概率 P：

$P=p(A_1A_2A_3A_4A_5)$

$=p(A_1)p(A_2|A_1)p(A_3|A_1A_2)p(A_4|A_1A_2A_3)p(A_5|A_1A_2A_3A_4)$

$=\frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}\cdot\frac{91}{96}$

$\simeq 0.77$

P_{29}, 24:

(1) 样本空间划分：$\Omega=A_1\cup A_2\cup A_3$，$A_1A_2=A_2A_3=A_1A_3=\phi$

A_1：{第一个盒中取出 2 红球}，A_2：{第一个盒中取出 2 白球}

A_3：{第一个盒中取出 1 红球 1 白球}.

B：{第二个盒中取出 1 白球}

$p(B)=p(A_1)p(B|A_1)+p(A_2)p(B|A_2)+p(A_3)p(B|A_3)$

$$= \frac{C_5^2}{C_9^2}\cdot\frac{5}{11} + \frac{C_4^2}{C_9^2}\cdot\frac{7}{11} + \frac{C_5^1\cdot C_4^1}{C_9^2}\cdot\frac{6}{11} = \frac{53}{99}$$

(2) $$p(A_3|B) = \frac{p(A_3)p(B|A_3)}{p(B)} = \frac{\frac{C_5^1\cdot C_4^1}{C_9^2}\cdot\frac{6}{11}}{53/99} = \frac{30}{53}$$

P_{30}, 30:

设 A:{输入0}, B:{输出0}

A与$\bar{A}$构成Ω的有穷划分

$p(A)=\frac{2}{3}$, $p(\bar{A})=\frac{1}{3}$, $p(B|A)=0.98$, $p(B|\bar{A})=0.01$

$$p(A|B) = \frac{p(A)p(B|A)}{p(A)p(B|A)+p(\bar{A})p(B|\bar{A})} = \frac{\frac{2}{3}\times 0.98}{\frac{2}{3}\times 0.98+\frac{1}{3}\times 0.01}$$

$$=0.995$$

P_{30}, 33:

(1) $p(\overline{(A\cup B)}\,\bar{C}) = p(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = p(\bar{A}\bar{B})p(\bar{C}) = p(\overline{A\cup B})p(\bar{C})$

$\overline{A\cup B}$与$\bar{C}$独立

(2) $$p(\overline{AB}\cdot C) = p((\bar{A}\cup\bar{B})\cdot C) = p(\bar{A}C\cup\bar{B}C)$$
$$= p(\bar{A})p(C) + p(\bar{B})p(C) - p(\bar{A})p(\bar{B})p(C)$$
$$= \left(p(\bar{A}) + p(\bar{B}) - p(\bar{A}\bar{B})\right)p(C)$$
$$= p(\bar{A}\cup\bar{B})p(C)$$
$$= p(\overline{AB})p(C)$$

$\overline{AB}$与C独立

P_{30}, 35:

① 当 n 为偶数时:

$$P_E = C_n^0 p^0 (1-p)^n + C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} + \cdots + C_n^n p^n (1-p)^0 = \sum_{k=0}^{n/2} C_n^{2k} p^{2k} (1-p)^{n-2k}$$

$$(p+1-p)^n = C_n^0 p^0 (1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} + \cdots + C_n^n p^n (1-p)^0$$

将 $C_{奇}$ 的项除去即为所求，$C_{奇} p_{奇} \to -C_{奇} p_{奇}$

$$(-p+1-p)^n = C_n^0 p^0 (1-p)^n - C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} + \cdots + C_n^n p^n (1-p)^0$$

$$P_E = \frac{1}{2}[(p+1-p)^n + (-p+1-p)^n] = \frac{1}{2}(1+(1-2p)^n)$$

② 当 n 为奇数时:

$$P_E = C_n^0 p^0 (1-p)^n + C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} p^{n-1} (1-p)^1 = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} C_n^{2k} p^{2k} (1-p)^{n-2k}$$

同上 $= \frac{1}{2}[(p+1-p)^n + (-p+1-p)^n] = \frac{1}{2}(1+(1-2p)^n)$

$\therefore$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$, $P_E = \frac{1}{2}(1+(1-2p)^n)$

P_{30}; 36: A_i: {烧坏第 i 个灯泡}, C_i: {烧坏 i 个灯泡}, B: {仪器故障}

$i = 1, 2, 3$ $\qquad$ $i = 0, 1, 2, 3$

$C_0 = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$

$C_1 = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$

$C_2 = A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3$

$C_3 = A_1 A_2 A_3$.

已知 $P(A_1) = 0.1$

$P(A_2) = 0.2$

$P(A_3) = 0.3$

$P(B|C_1) = 0.25$

$P(B|C_2) = 0.6$

$P(B|C_3) = 0.9$

另 $P(B|C_0) = 0$

$\Rightarrow P(C_0) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) = 0.504$

$P(C_1) = P(A_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) P(A_2) P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(A_3) = 0.398$，各交事件两两互斥，加法公式.

$P(C_2) = P(A_1) P(A_2) P(\bar{A}_3) + P(A_1) P(\bar{A}_2) P(A_3) + P(\bar{A}_1) P(A_2) P(A_3) = 0.092$

$P(C_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.006$.

$\{C_i\}$事件组构成样本空间的一组有穷划分

$\because P(B)=P(C_0)P(B|C_0)+P(C_1)P(B|C_1)+P(C_2)P(B|C_2)+P(C_3)P(B|C_3)$

$=0+0.398\times0.25+0.092\times0.6+0.006\times0.9$

$=0.1601$

$\therefore P(C_1|B)=\dfrac{P(C_1)P(B|C_1)}{P(B)}=\dfrac{0.398\times0.25}{0.1601}=0.6215$

P_{31}, 39:

用 $i=1,\cdots,n+1$ 标记这 $n+1$ 个盒子，前 n 个盒中各有6白4黑

A_i:{取到第 i 个盒子}，B:{从盒中取到2白球}

$\{A_i\}$事件构成一组有穷划分

已知 $P(A_i)=\dfrac{1}{n+1}$，$P(A_{n+1}|B)=\dfrac{1}{7}$

另 $P(B|A_i)=\dfrac{C_6^2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{3}$，$i=1,\cdots,n$

$P(B|A_{n+1})=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^2}=\dfrac{2}{9}$.

由贝叶斯公式：

$$\frac{1}{7}=P(A_{n+1}|B)=\frac{P(A_{n+1})P(B|A_{n+1})}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)+P(A_{n+1})P(B|A_{n+1})}=\frac{2}{3n+2}$$

$\Rightarrow n=4$

P_{31}, 40（非作业）

超过对方2分比赛停止，则至少进行了两局比赛.

对比赛各种可能的结果，用前两局（第一局，第二局）的胜况对样本空间划分

前两局可能的结果：（计胜）

$\{甲甲\}, \{甲乙\}, \{乙甲\}, \{乙乙\}$ （有穷划分）

已知：$p(甲甲)=\alpha^2$，$p(甲乙)=p(乙甲)=\alpha\beta$，$p(乙乙)=\beta^2$.

求：$p(甲胜)=?$

由全概率公式：

$$p(甲胜)=p(甲甲)p(甲胜|甲甲)+p(甲乙)p(甲胜|甲乙)+p(乙甲)p(甲胜|乙甲)$$
$$+p(乙乙)p(甲胜|乙乙)$$

$p(甲胜|甲甲)=1$，前两局胜则一定胜

$p(甲胜|乙乙)=0$，前两局输则一定输

$p(甲胜|甲乙)=p(甲胜|乙甲)=p(甲胜)$，前两局双方各得1分又重回起点.

$\therefore p(甲胜)=\alpha^2\cdot 1+\beta^2\cdot 0+2\alpha\beta p(甲胜)$ 解得 $p(甲胜)=\dfrac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}$

\# 如果改成超3分胜，可用类似的方法，用前三局来划分样本空间

$\{甲甲甲\}, \{甲甲乙\}, \{甲乙甲\}, \{甲乙乙\}, \{乙甲甲\}, \{乙甲乙\}$

$\{乙乙甲\}, \{乙乙乙\}$.

会用到2分胜的结果，对立事件.

P_{74}, 1:

由 $F(+\infty)=1$ 得 $A=1$

$$P(X=2)=F(2)-F(2-0)=1-\lim_{x\to 2^-}\left(1-e^{-\frac{x}{5}}\right)=e^{-\frac{2}{5}}.$$

P_{74}, 4:

方程 $t^2+Xt+\frac{1}{4}(X+2)=0$ 的判别式：$\Delta=X^2-X-2$

有实根则 $\Delta\geq 0 \Rightarrow X\geq 2$ 或 $X\leq -1$

有实根的概率 $P(\{X\geq 2\}\cup\{X\leq -1\})=1-P(\{X<2\}\cap\{X>-1\})$

$$=1-P(-1<X<2)$$

$$=1-(F(2-0)-F(-1))$$

$$=1-\left(\frac{4}{25}-0\right)=\frac{21}{25}$$

P_{74}, 5:

由 $p_k\geq 0 \Rightarrow C\geq 0$

由 $\sum_k p_k=1 \Rightarrow 1=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}C\frac{2^k}{k!}=C\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}-1\right)=C(e^2-1)$

$$\Rightarrow C=\frac{1}{e^2-1}$$

$\left(e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)$

P_{75}, 10:（小球可区分）

$$P(X=1)=\frac{1}{4^3}\left(C_3^1\cdot 3^2+C_3^2\cdot 3+C_3^3\right)=\frac{37}{64}$$

1号盒 1个球，2个球，3个球

选一个球放1号盒，剩下的球在剩下的盒中放，选两个球放1号盒……

$$P(X=2)=\frac{1}{4^3}\left(C_3^1\cdot 2^2+C_3^2\cdot 2+C_3^3\right)=\frac{19}{64}$$

注意 如果用 $C_3^1\cdot 4^2$ 有重复，须不相交的情况讨论否则出错

$$P(X=3)=\frac{1}{4^3}\left(C_3^1\cdot 1^2+C_3^2\cdot 1+C_3^3\right)=\frac{7}{64},\quad P(X=4)=1/64$$

分布律：

X	1	2	3	4
P	$\frac{37}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{64}$

检查求和是否为1

分布函数：

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ \frac{37}{64}, & 1\le x<2 \\ \frac{37+19}{64}, & 2\le x<3 \\ \frac{37+19+7}{64}, & 3\le x<4 \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$$