3-8 F_x=30+4t(式中F_x的单位为N，t的单位为s)的合外力作用在质量m=10kg的物体上，试求：(1)在开始2s内此力的冲量;(2)若冲量I=300N s,此力作用的时间;(3)若物体的初速度v_1=10m s-1,方向与Fx相同,在t=6.86s时,此物体的速度v_2 .

解：（1） $$I_x=\int_0^t F_x \mathrm{d}t=\int_0^t (30+4t)\mathrm{d}t=30t+2t^2$$

$$t=2\mathrm{s}\text{时}, I=68\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$$

40

（2） $$I_t=30t+2t^2=300 \Rightarrow t=6.86\mathrm{s}$$

（3） $$I=p_2-p_1=mv_2-mv_1$$

$$t=6.86\mathrm{s},\ I=300\mathrm{N}\cdot\mathrm{s} \qquad v_2=300\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

3-10 高空作业时系安全带是非常必要的，假如一质量为**51.0kg**的人，在操作时不慎从高空竖直跌落下来，由于安全带的保护，最终使他悬挂起来．已知此时人离原处的距离为**2.0m**，安全带弹性缓冲作用时间为**0.5s**．求安全带对人的平均冲力．

解：人跌落h=2.0m的速度为 $v_1=\sqrt{2gh}$

$$\overline{F}-mg=\frac{mv_2-m(-v_1)}{\Delta t} \qquad v_2=0$$

$$\overline{F}=mg+\frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t}=1.14\times10^3\,N$$

3-17 一柔软链条长为l，单位长度的质量为λ．若手握链条悬挂着下端刚好触到水平桌面，将手松开，证明：在链条下落的任意时刻，作用于桌面上的压力等于已落到桌面上链条的重量的三倍。

解方法一：整个链条为研究对象受重力、支撑力

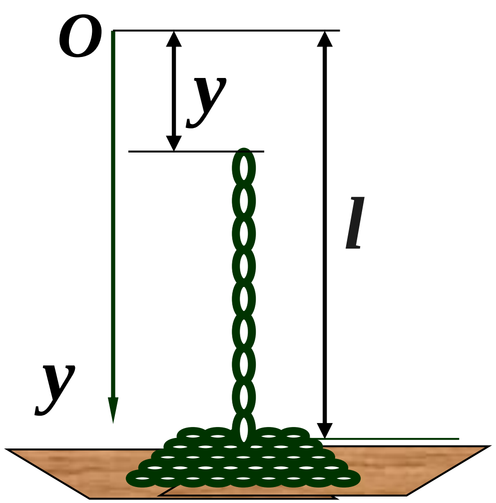
由质点系动量定理得

$$l\lambda g - N = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[(l-y)\lambda v]}{\mathrm{d}t}$$

$$= -\lambda v^2 + (l-y)\lambda a$$

$$v^2 = 2ay, \quad a = g$$

$$N = 3\lambda g y$$



作用于桌面上的压力等于已落到桌面上链条的重量的三倍。

方法二：

把地面上链条为研究对象

$$\vec{F}\cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$$

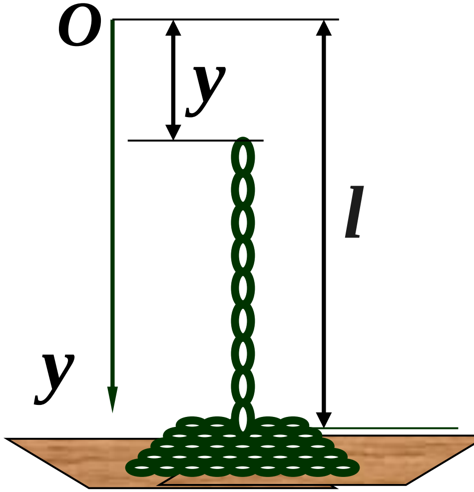
$$\mathrm{d}p = p(t+\mathrm{d}t) - p(t)$$

$$= 0 - \mathrm{d}m\cdot v = -v\lambda \mathrm{d}y$$

$$y\lambda g - N = -\frac{\lambda v \mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\lambda v^2$$

$$v^2 = 2gy$$

$$N = 3\lambda g y$$



方法三：由变质量运动方程得

把地面上链条为研究对象

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}+\vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \qquad u=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2gy}$$

$$0=\lambda yg-N+u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$N=\lambda yg+u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\lambda yg+u\cdot\lambda\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$=\lambda yg+\lambda u^2=\lambda yg+2\lambda yg=3\lambda yg$$

对于变质量物体运动问题，可运用变质量物体运动方程进行求解。

3-18 设在地球表面附近，一质量为5.0×10^5 kg 的火箭，从尾部喷出气体的速率为2.0×10^3 m/s。试求：（1）每秒需喷出多少气体，才能使火箭最初向上的加速度大小为4.9 m/s²；（2）若火箭的质量比为6，该火箭的最后速率。

解（1）若取火箭前进的方向为正向

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=ma=-mg-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

火箭质量为5.0×10^5 kg，使火箭最初向上的加速度大小为4.9 m/s²，则

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-\frac{m_0(g+a_0)}{u}=-3.68\times10^3\,kg\cdot s^{-1}$$

即每秒需喷出3.68×10^3 kg/s气体.

（2）若火箭的质量比为6，该火箭的最后速率

方法一 $$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v = -u\int_{m_0}^{m_0/6}\frac{\mathrm{d}m}{m} - \int_0^t g\mathrm{d}t$$

$$v = u\ln\frac{1}{6} - gt$$

由每秒需喷出3.68×10³ kg/s气体. $u = 2.0\times10^3 m\cdot s^{-1}$

$$m_0 - \frac{1}{6}m_0 = 3.68\times10^3 t \qquad \rightarrow t = \frac{5}{6\times3.68\times10^3}m_0$$

$$v = u\ln\frac{1}{6} - gt = 2.47\times10^3 m\cdot s^{-1}$$

（2）方法二

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \qquad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-mg-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

已知 $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-3.68\times10^{3}kg\cdot s^{-1}$

$$-3.68\times10^{3}m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m}=-mg-3.68\times10^{3}u$$

$$\int_0^v(-3.68\times10^{3})\mathrm{d}v=\int_{m_0}^{m_0/6}(-g+\frac{3.68\times10^{3}u}{m})\mathrm{d}m$$

$$v=2.47\times10^{3}m\cdot s^{-1}$$

3-22 一物体在介质中按规律$x=ct^3$作直线运动，c为一常量．设介质对物体的阻力正比于速度的平方．试求物体由$x_0=0$运动到$x=l$时，阻力所作的功．(已知阻力系数为k)

解：

$$x = ct^3 \qquad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3ct^2$$

$$F_r = -kv^2 = -9kc^2t^4 = -9kc^{2/3}x^{4/3}$$

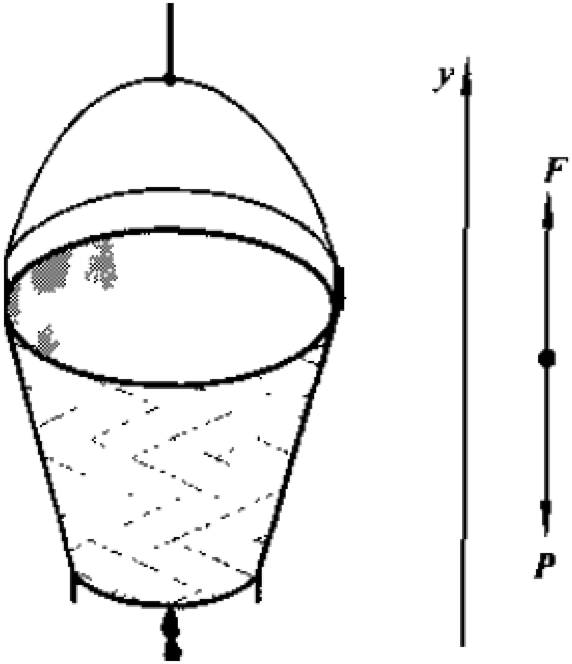
$$W_r = \int_{x_0}^{x} F_r \mathrm{d}x = \int_0^l (-9kc^{2/3}x^{4/3})\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{27}{7}kc^{2/3}l^{7/3}$$

3-23 一人从10m深的井中提水，起始桶中有10kg的水，由于水桶漏水，每升高1m要漏去0.2kg的水，水桶被匀速的从井中提到井口，求人所作的功？

$$W=\int_0^{10}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{y}$$

$$=\int_0^{10}(mg-0.2yg)\mathrm{d}y=882J$$



3-29 一质量为 m 的地球卫星，沿半径为 $3R_E$ 的圆轨道运动，R_E 为地球的半径. 已知地球的质量为 m_E. 求：(1) 卫星的动能；(2) 卫星的引力势能；(3) 卫星的机械能.

解 (1)

$$m\frac{v^2}{3R_E}=G\frac{mm_E}{(3R_E)^2}\qquad E_k=\frac{1}{2}mv^2=G\frac{mm_E}{6R_E}$$

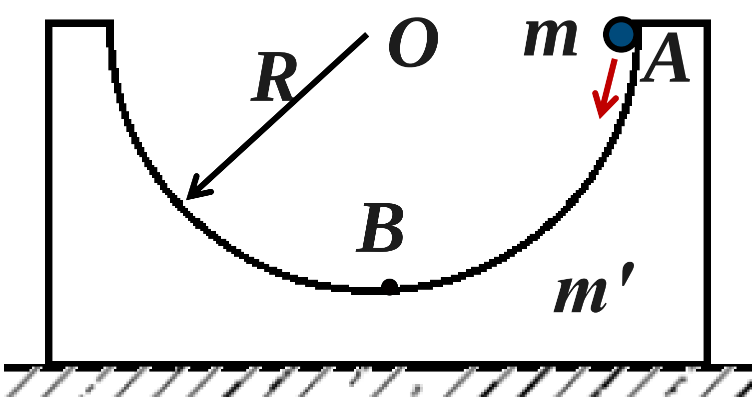
(2)

$$E_p=-G\frac{mm_E}{3R_E}$$

(3)

$$E=E_k+E_p=G\frac{mm_E}{6R_E}-G\frac{mm_E}{3R_E}=-G\frac{mm_E}{6R_E}$$

3-38 一个质量为m的小球，从内壁为半球形的容器边缘点A滑下，设容器质量为m'.半径为R,内壁光滑并放置在无摩擦的水平桌面上，开始时小球和容器都是静止的，当小球滑到容器底部的B点时,求受到的向上的支持力的大小?



解： 由动量守恒

$$mv_m - m'v_{m'} = 0$$

机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}m'v_{m'}^2 = mgR$$

得

$$v_m = \sqrt{\frac{2m'gR}{m+m,}} \qquad v_{m'} = \frac{m}{m'}\sqrt{\frac{2m'gR}{m+m,}}$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2m'gR}{m+m'}} \qquad v_{m'} = \frac{m}{m'}\sqrt{\frac{2m'gR}{m+m'}}$$

小球**m**相对于***m'***的速度

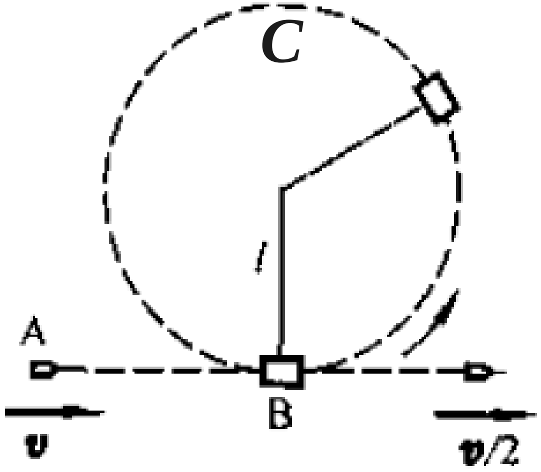
$$v'_m = v_m - (-v_{m'}) = \sqrt{\frac{2(m+m')gR}{m'}}$$

当小球**m**到达**B**点时，***m'***加速度为零，以***m'***为参照器，小球所受惯性力为零，则

$$N - mg = m\frac{{v'_m}^2}{R}$$

$$N = mg(3 + \frac{2m}{m'})$$

3-33 以质量为m的弹丸，A穿过如图所示的摆锤B后，速率由v减少到$v/2$．已知摆锤的质量为m'．摆线长度为l．如果摆锤能在垂直平面内完成一个完全的圆周运动，弹丸的速度的最小值应为多少？



解：弹丸与摆锤相碰，动量守恒

$$mv = m\frac{v}{2} + m'v_B$$

摆锤完成圆周运动中，机械能守恒

$$\frac{1}{2}m'v_B^2 = \frac{1}{2}m'v_C^2 + 2m'gl$$

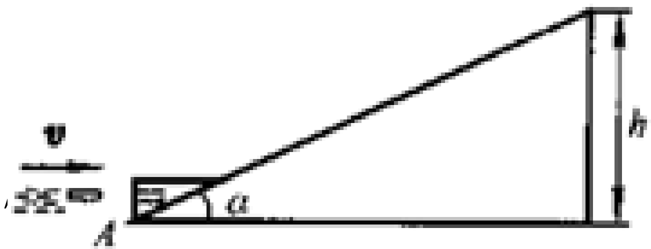
摆锤在最高点C

$$F_T + m'g = m'\frac{v_C^2}{l}, F_T \geq 0$$

解得

$$v \geq \frac{2m'}{m}\sqrt{5gl}$$

3-37 一质量为m'的物块放置在斜面的最底端A处，斜面倾角为α高度为h,物块与斜面的滑动摩擦因数为μ，今有一质量为m的子弹以v_0速度沿水平方向射入物块并留在其中，且使物块沿斜面向上滑动，求物块滑出顶端时的速度大小。



解：子弹与物块沿斜面动量守恒：

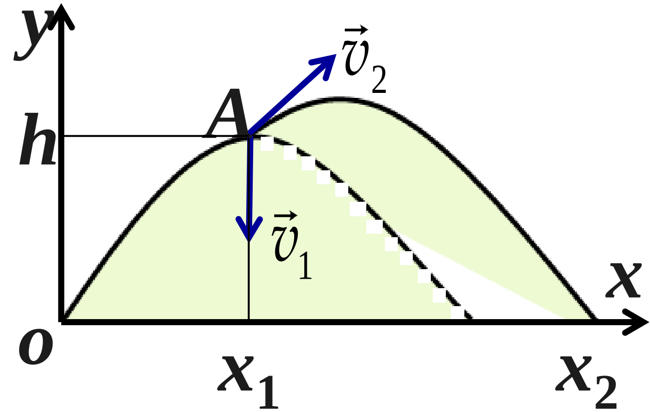
$$mv_0\cos\alpha=(m+m')$$

物块沿斜面向上滑动，由功能原理：

$$-\mu(m+m')g\cos\alpha\cdot\frac{h}{\sin\alpha}=\frac{1}{2}(m+m')v_2^2+(m+m')gh-\frac{1}{2}(m+m')v_1^2$$

$$v_2=\sqrt{\left(\frac{m}{m+m'}v_0\cos\alpha\right)^2-2gh(1+\mu\cot\alpha)}$$

3-13 一作斜抛运动的物体，在最高点炸裂为质量相等的两块，最高点距地面 **19.6** 米,爆炸**1** 秒钟后，第一块落到爆炸点的正下方的地面，此处距抛出点 **100** 米，问条二块落在距抛出点多远的地面上.（空气阻力不计.）



解：爆炸前物体的水平分速度v_0

$$v_{0x} = \frac{x_1}{t_0} = x_1\sqrt{\frac{g}{2h}} = 50\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

第一块初速度为v_1 $\quad v_1 t_1 = h - \frac{1}{2} g t_1^2$

$$v_1 = 14.7\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

则另一块根据爆炸时动量守恒

$$m v_{0x} = \frac{m}{2} v_{2x}, 0 = -\frac{m}{2} v_1 + \frac{m}{2} v_{2y} \qquad v_{2x} = 100\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}, v_{2y} = 14.7\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

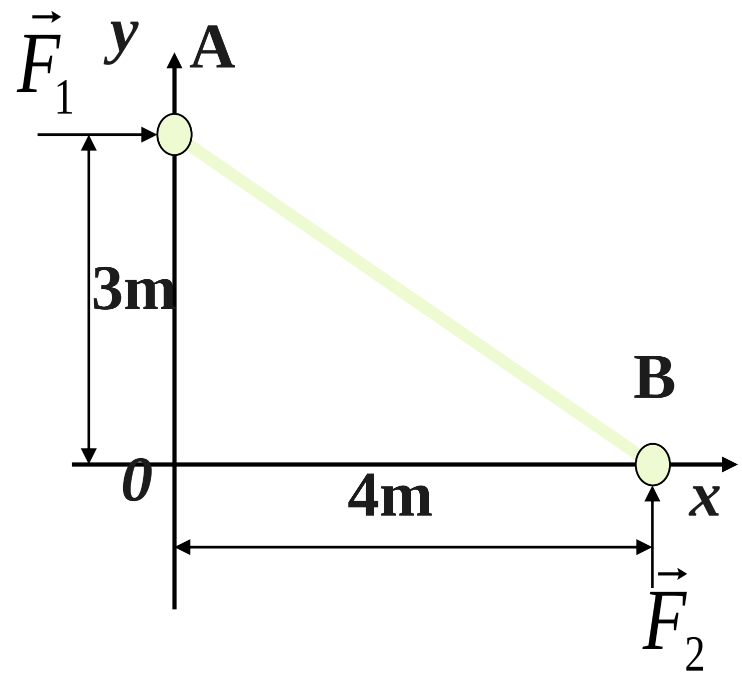
第二块落地点距爆炸点的水平距离

$$h = v_{2y} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2, x_2 = x_1 + v_{2x} t_2 \qquad x_2 = 500\mathrm{m}$$

3-41 如图所示,质量分别为m_1=10.0kg和m_2=6.0kg的两小球A和B，用质量可略去不计的刚性细杆连接，开始时它们静止在*Oxy*平面上，在图示的外力 $\vec{F}_1 = 8.0N\vec{i}$ 和 $\vec{F}_2 = 6.0N\vec{j}$的作用下运动，试求（1）它们质心的坐标与时间的函数关系；（2）系统总动量与时间的函数关系。

解:

（1）建立图示坐标，则*t*=0时，系统质心坐标为



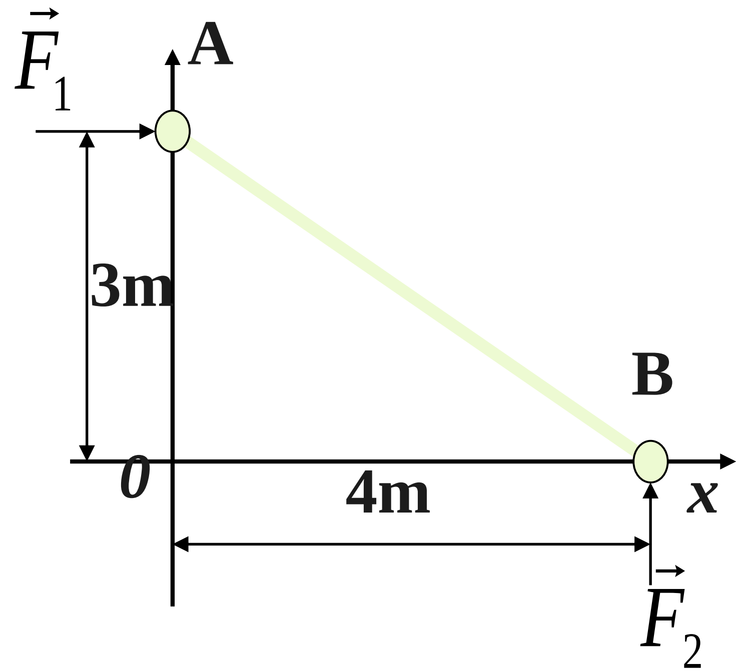
$$x_{c0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_{20} = 1.5\text{m}$$

$$y_{c0} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} y_{10} = 1.9\text{m}$$

由质心运动定律

$$F_x = F_1 = (m_1 + m_2)\frac{\mathrm{d}v_{cx}}{\mathrm{d}t}$$

$$F_y = F_2 = (m_1 + m_2)\frac{\mathrm{d}v_{cy}}{\mathrm{d}t}$$



根据初始条件t=0时，v=0，对上式积分得：

$$\int_0^t F_1 \mathrm{d}t = \int_0^{v_{cx}} (m_1 + m_2)\mathrm{d}v_{cx} \Rightarrow v_{cx} = \frac{F_1}{m_1 + m_2}t$$

$$\int_0^t F_2 \mathrm{d}t = \int_0^{v_{cy}} (m_1 + m_2)\mathrm{d}v_{cy} \Rightarrow v_{cy} = \frac{F_2}{m_1 + m_2}t$$

对上式再次积分得：

$$\int_{x_{c0}}^{x_c} \mathrm{d}x_c = \int_0^t \left(\frac{F_1}{m_1+m_2}t\right)\mathrm{d}t \Rightarrow x_c = x_{c0} + \frac{F_1}{2(m_1+m_2)}t^2$$

$$= 1.5\mathrm{m} + (0.25\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t^2$$

$$\int_{y_{c0}}^{y_c} \mathrm{d}y_c = \int_0^t \left(\frac{F_2}{m_1+m_2}t\right)\mathrm{d}t \Rightarrow y_c = y_{c0} + \frac{F_2}{2(m_1+m_2)}t^2$$

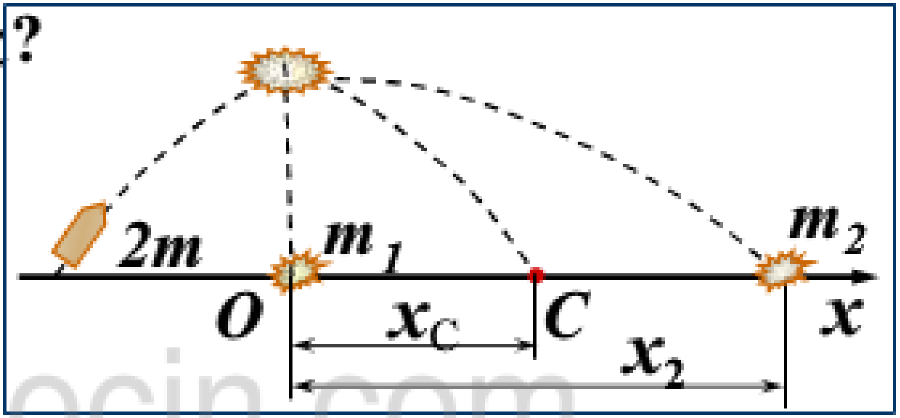
$$= 1.9\mathrm{m} + (0.19\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t^2$$

（2）利用动量定理得

$$\Delta\vec{p} = \vec{p} - 0 = \int_0^t (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\mathrm{d}t$$

$$= (8.0\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t\,\vec{i} + (6.0\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})t\,\vec{j}$$

例3-4 设有一质量为 $2m$ 的弹丸,从地面斜抛出去,它飞行在最高点处爆炸成质量相等的两个碎片，其中一个竖直自由下落,另一个水平抛出,它们同时落地. 试问第二个碎片落地点在何处?



解 选弹丸为一系统,爆炸前、后质心运动轨迹不变. 建立坐标系,

$$m_1 = m_2 = m \qquad x_1 = 0$$

设弹丸碎片落地时质心离原点的距离为 x_C

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad x_2 = 2x_C$$

3-13质量相等的两块不满足同时落地，不能用此式。