4-7 某电动机启动后转动角速度随时间变化关系为 $\omega=\omega_0(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})$，式中 $\omega_0=9.0\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，$\tau$=2.0s求：(1) t=6 s时的转速．(2) 角加速度随时间变化的规律．(3) 起动后，启动后6 s内转过的圈数．

解：（1） t=6 s时 $\omega=\omega_0(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})=0.95\omega_0=8.6\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

（2） $\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\omega_0}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}=4.5e^{-t/2}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

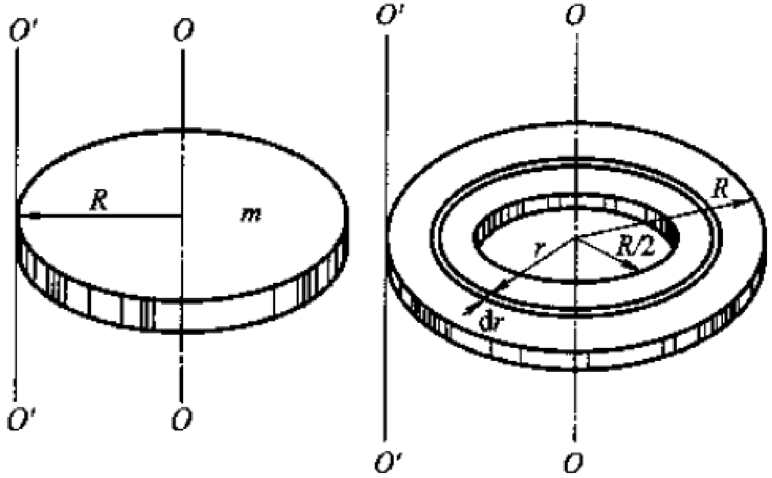
（3）$\theta=\int_0^{6.0s}\omega\,\mathrm{d}t=\int_0^{6.0s}\omega_0(1-e^{-t/2})\mathrm{d}t$

$=36.9\mathrm{rad}$

$n=\dfrac{\theta}{2\pi}=5.87$圈

刚体的转动

4-10 如图所示，圆盘的质量为m，半径为R．求(1))以O为中心，将半径为R/2的那部分挖去，剩余部分对OO′轴的转动惯量(2) 剩余部分对OO'轴(即通过圆盘边缘且平行于盘中心轴)的转动惯量。



解1： （1）$J_z = J_{外} - J_{内}$

$$J_{外} = \frac{1}{2}mR^2 \qquad J_{内} = \frac{1}{2}m'\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$m' = \frac{m}{\pi R^2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{m}{4} \qquad \therefore J_{内} = \frac{1}{32}mR^2 \qquad J_z = \frac{15}{32}mR^2$$

（2） $J_{z'} = J_z + (m - m')R^2 = \dfrac{39}{32}mR^2$

方法二

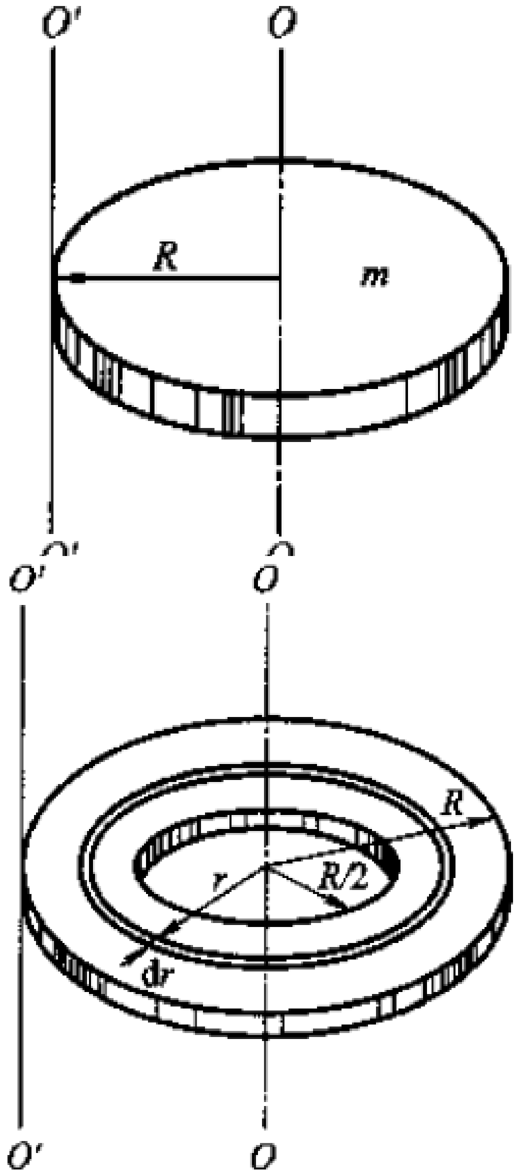
$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$$

$$\mathrm{d}J_z = r^2 \mathrm{d}m = r^2 \sigma 2\pi r \cdot \mathrm{d}r$$

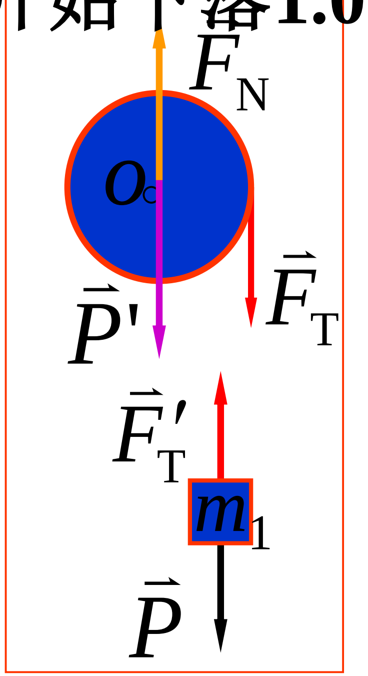
$$J_z = \int_{R/2}^{R} 2\pi\sigma r^3 \mathrm{d}r$$

$$J_z = 2\pi\sigma[\frac{R^4}{4} - \frac{(R/2)^4}{4}]$$

$$= \frac{15}{32}\sigma\pi R^4 = \frac{15}{32} m R^2$$



4-13 如图a所示，质量为m1=16kg的实心圆柱体A，其半径为r=15cm，可以绕其固定水平轴转动，阻力忽略不计。一条轻的柔绳绕在圆柱体上，其另一端系一质量为m2=8.0kg的物体B，求：（1）物体B由静止开始下落1.0s后的距离；（2）绳的张力.



解

$$m_2 g - F_T' = m_2 a$$

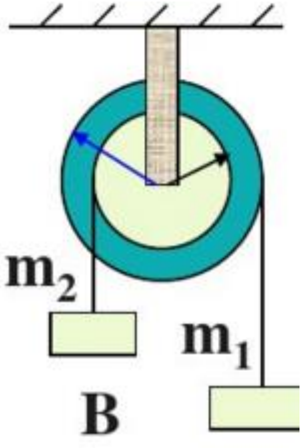
$$F_T r = J\alpha = \frac{1}{2} m_1 R^2 \alpha$$

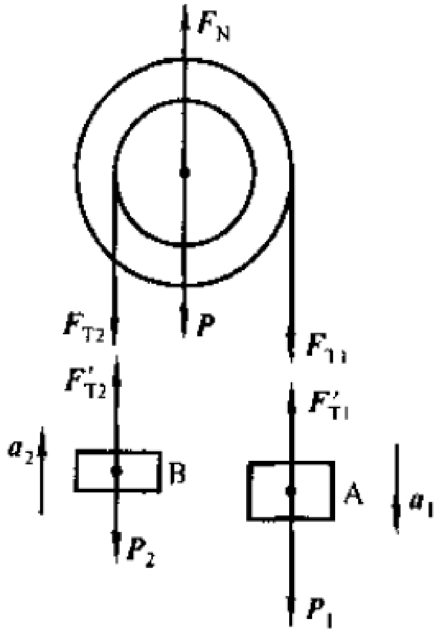
$$F_T = F_T', a = r\alpha$$

得 $$a = \frac{2m_2 g}{m_1 + 2m_2}$$

$$h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{m_2 g t^2}{m_1 + 2m_2} = 2.45m \qquad F_T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + 2m_2} = 39.2N$$

4-14 质量为m_1和m_2的两物体A、B分别悬挂在(a)图所示的组合轮两端．设两轮的半径分别为R和r，两轮的转动惯量分别为J_1和J_2，轮与轴承间、绳索与轮间的摩擦力均略去不计，绳的质量也略去不计．试求两物体的加速度和绳的张力.





解

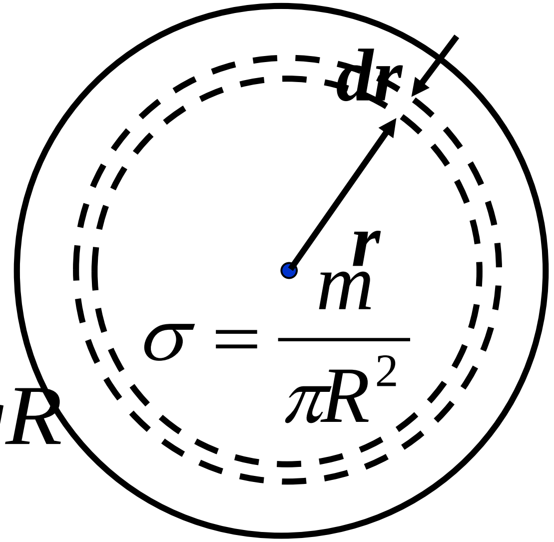
$$\begin{cases} m_1 g - F_{T1} = m_1 a_1 \\ F_{T2} - m_2 g = m_2 a_2 \\ RF_{T1} - rF_{T2} = (J_1 + J_2)\alpha \\ a_1 = R\alpha, a_2 = r\alpha \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{m_1 R - m_2 r}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} gR \qquad a_2 = \frac{m_1 R - m_2 r}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} gr$$

$$F_{T1} = \frac{J_1 + J_2 + m_2 r^2 + m_2 Rr}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} m_1 g \quad F_{T2} = \frac{J_1 + J_2 + m_1 r^2 + m_1 Rr}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} m_2 g$$

4-17 一半径为*R*，质量为m的匀质圆盘，以角速度*ω*绕其中心轴转动，现将它平放在一水平板上，盘与板表面的摩擦系数为*μ*．(1)求圆盘所受的摩擦力矩．(2)问经多少时间后，圆盘转动才能停止？

解：（1）



$$\sigma=\frac{m}{\pi R^2}$$

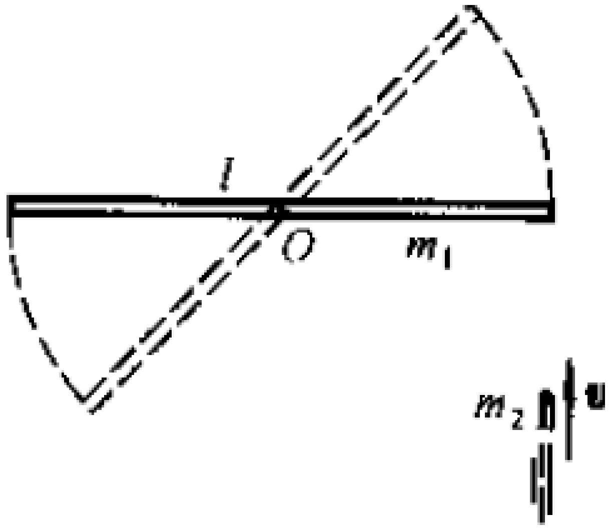
$$\mathrm{d}M=-\mathrm{d}m\cdot g\mu r=-\sigma 2\pi g\mu r^2\mathrm{d}r$$

$$M=\int \mathrm{d}M=-\frac{2\pi g\sigma\mu}{3}r^3\Big|_0^R=-\frac{2}{3}\mu mgR$$

（2）
$$-\frac{2}{3}\mu mgR=J\alpha=\frac{1}{2}mR^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^t-\frac{2}{3}\mu g\mathrm{d}t=\int_\omega^0\frac{1}{2}R\mathrm{d}\omega \qquad t=\frac{3R\omega}{4\mu g}$$

4-22 在光滑的水平面上有一木杆，其质量m_1=1.0kg，长l=40cm，可绕通过其中点并与之垂直的轴转动．一质量为m_2=10g的子弹，以v=2.0×102m s[-1]的速度射入杆端，其方向与杆及轴正交，若子弹陷入杆中，试求所得到的角速度.



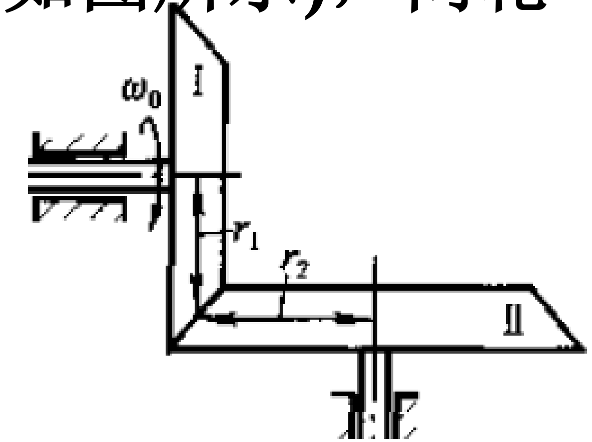
解：子弹射入前后系统角动量守恒

$$m_2 v \frac{l}{2} = (J_1 + J_2)\omega$$

$$m_2 v \frac{l}{2} = \left[m_2 \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} m_1 l^2 \right] \omega$$

$$\omega = \frac{6 m_2 v}{(m_1 + 3 m_2) l} = 29.1 rad \cdot s^{-1}$$

4-23半径分别为r_1、r_2的两个薄伞形轮，它们各自对通过盘心且垂直盘面转轴的转动惯量为J_1和J_2，开始时轮Ⅰ以角速度ω_0转动，问与轮Ⅱ成正交啮合后(如图所示)，两轮的角速度分别为多大?



解:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

$$\int_0^t -F_1 r_1 \mathrm{d}t = J_1(\omega_1 - \omega_0)$$

$$\int_0^t F_2 r_2 \mathrm{d}t = J_2 \omega_2$$

$$F_1 = F_2$$

$$\omega_1 = \frac{J_1 \omega_0 r_2^2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2} \qquad \omega_2 = \frac{J_1 \omega_0 r_1 r_2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}$$

4-25 一转台绕其中心的竖直轴以角速度$\omega_0=\pi$ rad s^{-1}转动，转台对转轴的转动惯量为$J_0=4.0\times10$-3kg m^2．今有砂粒以Q=2t（单位为g s^{-1}）的流量竖直落至转台，并粘附于台面形成一圆环，若环的半径为r=0.10m，求砂粒降落t=10s时．转台的角速度．

解：系统角动量守恒

$$m=\int_0^{10s}Q\mathrm{d}t=\int_0^{10s}2t\mathrm{d}t=0.1kg$$

$$J_0\omega_0=(J_0+mr^2)\omega$$

$$\omega=\frac{J_0\omega_0}{J_0+mr^2}=0.8\pi\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$