自觉遵守考场纪律　如考试作弊　此答卷无效

姓名________　学号________

线　封　密

东　南　大　学　考　试　卷（A 卷）

课程名称 概率论与数理统计及随机过程　考试学期 17-18-2　得分______

适用专业 全校　考试形式 闭卷　考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt$ 表示标准正态分布的分布函数，

$\Phi(-1.645)=0.05$; $\Phi(-1.96)=0.025$; $\Phi(0)=0.5$; $\Phi(1)=0.8413$

$\Phi(1.3)=0.9032$; $\Phi(1.96)=0.975$; $\Phi(2)=0.9772$

$T_n\sim t(n)$　$P(T_{35}\ge 2.0301)=0.025$;　$P(T_{35}\ge 1.6869)=0.05$;

$P(T_{36}\ge 2.0281)=0.025$;　$P(T_{36}\ge 1.6883)=0.05$;

一、填充题（每空格 2’，共 36’）

1) 已知 P(B)=0.5，P(AB)=0.3，A 和 B 相互独立，则 P(A-B)=________;P(AUB)=_________。

2) 一电梯在一楼载有 4 名乘客,该楼共六层,设每个人在每层下是等可能的.则有两人在三楼下的概率为________;二楼和三楼各有一个人下的概率为___________。

3) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(-2，4)$, $P(X>0)=$ _________ 。

4) 设 $\{B_t,t\ge 0\}$ 为 $\sigma^2=1$ 的维纳过程，则 $P(B_1+B_3>\sqrt{6})=$________。

5) 随机变量 X，Y 的联合分布律为：P(X=-1,Y=-1)=0.2; P(X=-1,Y=2)=0.4; P(X=-2,Y=-1)=0.2; P(X=-2,Y=2)=0.2 。max(X,Y) 分布律为_____________________。X 的边缘分布律为 _____________。

6) 随机变量 X，Y 的的相关系数为 0.2，DX=DY=2，则 cov(2X-3Y，X+Y)=____________。

7) 在 $[0,t]$ 时间段内乘客到达某售票处的数目为一强度为 $\lambda=2$ 的泊松过程，令 T_i 表示第 $i-1$ 个和第 i 个乘客到达售票处的时间间隔，

$\frac{1}{n}(T_1^2+T_2^2+...+T_n^2)\xrightarrow{p}$______。

8) 设总体 X 服从均匀分布$U(-2,2)$, $X_1,X_2,...,X_{20}$是来此该总体的样本，$\bar{X},S^2$分别表示样本均值和样本方差， 则 D（$\bar{X}$）=_______，$E(S^2)=$_________。

9) 随机变量 X 的分布律为 P(X= 1)=0.3，P(X=2)=0.3，P(X=3)=0.4，则其分布函数为_______________。

10) 随机变量 X 服从均值为 2 的指数分布,则 Y=-2X+1 的密度函数为_______________。

11) 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 N(0,4)的简单随机样本，则 $E(X_1^2+X_2^2+X_4^2)$ =__________，则若 $b\frac{X_2^2}{X_3^2+X_4^2}\sim F(1,2)$，则常数 $b=$_________。

12) 设某种产品的次品率为 p。对假设检验问题：$H_{0:}p=0.1;H_1:p>0.1$进行检验。若该假设检验的拒绝域为：任取容量为 5 的简单随机样本，若其中次品数大于 1 件，则拒绝原假设。该检验问题犯第一类错误的概率α =_________。

13) 设总体服从均匀分布$U[a,3a]$，a为未知参数，若 2.2, 3.4, 2.5, 2.4, 3.5 是来自该总体的样本， 则a的矩估计值为_______________。

二、(10’) 设一箱子中有 3 颗红球，1 颗白球，2 颗黑球。现掷一枚均匀的骰子，出现几点，就从箱子中取出几个球。（1）求取出的球为均红球的概率；（2）如果取出的球为均为红球，则骰子掷出 2 点的概率是多少？

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________

学号________

线 封 密

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名____ 学号____ 学号____

密 封 线

三、(15')设一 Markov 链$\{X_n, n \geq 0\}$的状态空间为{1, 2, 3 }。 其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array}$$

初始分布$p_i(0)=P\{X_0=i\}=\dfrac{1}{3}$，$i=1,2,3.$ 试求：

$(1)\quad P\{X_0=1, X_2=2, X_4=3\}$;$(2)\quad P\{X_2=1\}$;(3)平稳分布

四、(10’)设随机变量 X 和 Y 相互独立,都服从均匀分布 U[-1,1],令 Z=$X-Y$，求随机变量 Z 的概率密度函数 $\boldsymbol{f_Z(z)}$。

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名______ 学号______

线 封 密

五、(10’) 假设一大批产品的合格率为 0.8，现从中随机抽取 100 件。试用中心极限定理近似计算100件产品中合格品的个数介于76至84之间的的概率。

六、(10’)设总体 X 的分布律如下,

$$f(x,p)=p^{(x-2)/2}(1-p)^{(4-x)/2}, x=2,4; 0<p<1$$

设 $X_1,\ldots X_n$ 为来自该总体的样本, (1)求参数 p 的最大似然估计量 $\hat{p}$, (2) $\hat{p}$ 是否是 p 的无偏估计量，说明理由。.

七、(9’)设总体 X 服从正态分布 N (u,9),u 未知。现有来自该总体样本容量为36的样本, 其样本均值为 24. （1）试检验 H_0: u=22.0 v.s. H_1: u>22.0.(检验水平$\alpha=0.05$)，(2)求 u 的置信度为 95%的置信区间。

概率过程 2017-18-2(A)解答

一.1)0.3;0.8;

2)96/625=0.1536; 108/625=0.1728

3)0.1587; 4) 0.1587

5) $P(\max(X,Y)=-1)=0.4;\ P(\max(X,Y)=2)=0.6;$
$P(X=-1)=0.6;\qquad P(X=-2)=0.4.$

6)-2.4 7)0.5

8)1/15; 4/3

9) $F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0.3 & 1\le x<2\\ 0.6 & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$

10) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1-y}{4}} & y\le 1\\ 0 & y>1\end{cases}$

11) 12; 2;

12) 0.0815 13)1.4

二 Ai 表示事件骰子掷出 i 点；i=1,2,3,4,5,6;B 表示事件取出的球均为红球。

$$P(A_i)=\frac{1}{6};i=1,\ldots,6;$$

$$P(B\mid A_i)=\frac{C_3^i}{C_{12}^i},i=1;2;3;P(B\mid A_i)=0;i=4,5,6$$

$$(1)\ P(B)=\sum_{i=1}^{6}P(A_i)P(B\mid A_i)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

$$=\frac{1}{6}[\frac{C_3^1}{C_{12}^1}+\frac{C_3^2}{C_{12}^2}+\frac{C_3^3}{C_{12}^3}]=\frac{1}{6}[\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}]=\frac{1}{8}=0.125;$$

$$(2)P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}=\frac{4}{15}\approx 0.267$$

三.

$$(1)P^2=\begin{bmatrix}\frac{13}{36} & \frac{13}{36} & \frac{10}{36}\\ \frac{16}{48} & \frac{19}{48} & \frac{13}{48}\\ \frac{17}{48} & \frac{17}{48} & \frac{14}{48}\end{bmatrix}$$

$$P(X_0=1;X_2=2;X_4=3)=p_1(0)p_{12}(2)p_{23}(2)$$

$$=\frac{1}{3}\frac{13}{36}\frac{13}{48}=\frac{169}{5184}\approx 0.0326$$

$$(2)P(X_2=1)=\sum_{i=1}^{3}p_i(0)p_{i1}(2)$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{13}{36}+\frac{16}{48}+\frac{17}{48})=\frac{151}{432}\approx 0.35$$

(3)设平稳分布为$p=(p_1,p_2,p_3)$;则

$$pP=p,p_1+p_2+p_3=1$$

$$\begin{cases}\frac{1}{3}p_1+\frac{1}{4}p_2+\frac{1}{2}p_3=p_1\\ \frac{1}{3}p_1+\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{4}p_3=p_2\\ p_1+p_2+p_3=1\end{cases}$$

解得：$p_1=\frac{15}{43};p_2=\frac{16}{43};p_3=\frac{12}{43};$

四、解：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & -1<x<1,-1<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X-Y\le z)$

当$z<-2$时，$F_Z(z)=0;$

当$z>2$时，$F_Z(z)=1;$

当$-2\le z\le 0$时，$F_Z(z)=\frac{1}{8}(2+z)^2;$

;

当$0\le z\le 2$时，$F_Z(z)=1-\frac{1}{8}(2-z)^2;$

$$\therefore\ f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\begin{cases}\frac{1}{4}(2+z) & -2<z<0\\ \frac{1}{4}(2-z) & 0\le z\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

五、解：X 表示 100 件中合格品的个数，则

$X\sim b(n,p),n=100,p=0.8;$

$EX=np=80;DX=np(1-p)=16;$

$P(76\le X\le 84)=P(\frac{76-80}{\sqrt{16}}\le\frac{X-80}{\sqrt{16}}\le\frac{84-80}{\sqrt{16}})$

$\approx\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826.$

六、解：

(1) 似然函数：$L(p)=\prod_{i=1}^{n} f(X_i,p)=\prod_{i=1}^{n} p^{(X_i-2)/2}(1-p)^{(4-X_i)/2}$

$=p^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-2)}(1-p)^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(4-X_i)}$

对数似然函数：$\ln L(p)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-2)\ln p+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(4-X_i)\ln(1-p)$

$[\ln L(p)]'=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-2)}{2p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(4-X_i)}{2(1-p)}=0$

$\hat{p}=\frac{\overline{X}}{2}-1; \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$(2) E\hat{p}=\frac{1}{2}E\overline{X}-1=EX-1$

$EX=2\times(1-p)+4\times p=2p+2;$

$\therefore E\hat{p}=EX-1=p;$

所以，$\hat{p}$是p的无偏估计量。

七、当原假设成立时，检验统计量：

$U=\frac{\overline{X}-22}{3}\sqrt{36}\sim N(0,1)$

拒绝域：$D=\{U>u_{0.05}\}=\{U>1.645\}$

U的观测值为：$U=\frac{24-22}{3}*6=4>1.645;$

故拒绝原假设。

（2）u的置信区间为$[\overline{X}\pm\frac{3}{6}u_{0.025}]=[\overline{X}\pm\frac{1}{2}1.96]$

$=[24\pm0.98]=[23.02, 24.98]$