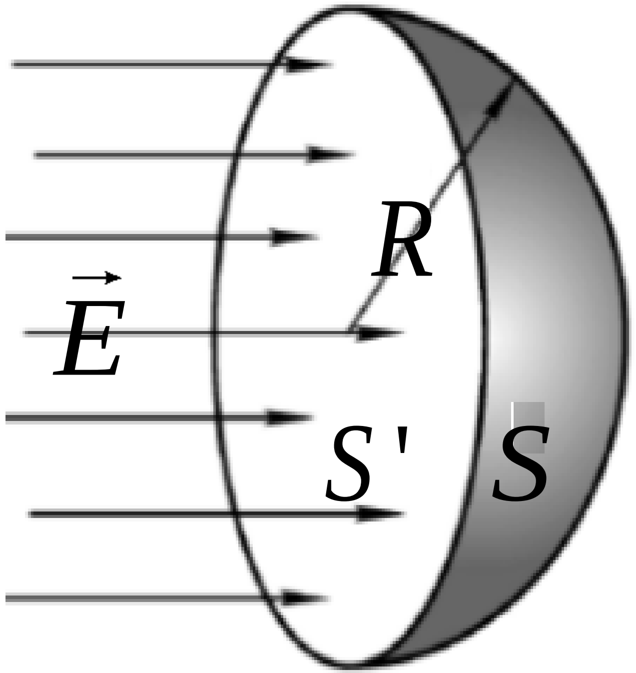
5-15 设匀强电场的电场强度E与半径为R的半球面的对称轴平行，试计算通过此半球面的电场强度通量.

解：补偿法

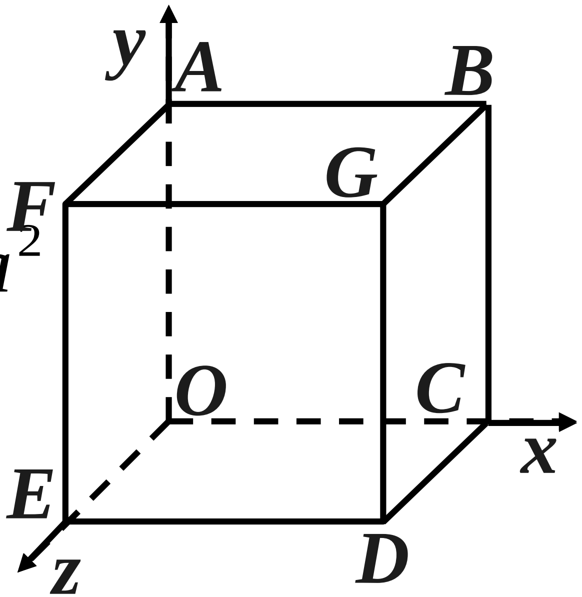


$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i^{in} = 0$$

$$\phi_e = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_{S'} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \pi R^2 E$$

5-16 如图所示，边长为 a 的立方体，其表面分别平行于Oxy，Oyz和Ozx平面，立方体的一个顶点为坐标原点。现将立方体置于电场强度为 $\vec{E}=(E_1+kx)\vec{i}+E_2\vec{j}$ 的非均匀电场中，求立方体各表面及立方体的电场强度通量(k、E_1、E_2均为常量)。



解：

$$\phi_{eOABC}=\phi_{eDEFG}=0$$

$$\phi_{eABGF}=\int_S\left[(E_1+kx)\vec{i}+E_2\vec{j}\right]\cdot(\mathrm{d}S\vec{j})=E_2a^2$$

$$\phi_{eCDEO}=-\phi_{eABGF}=-E_2a^2$$

$$\phi_{eAOEF}=\int_S\left[E_1\vec{i}+E_2\vec{j}\right]\cdot(-\mathrm{d}S\vec{i})=-E_1a^2$$

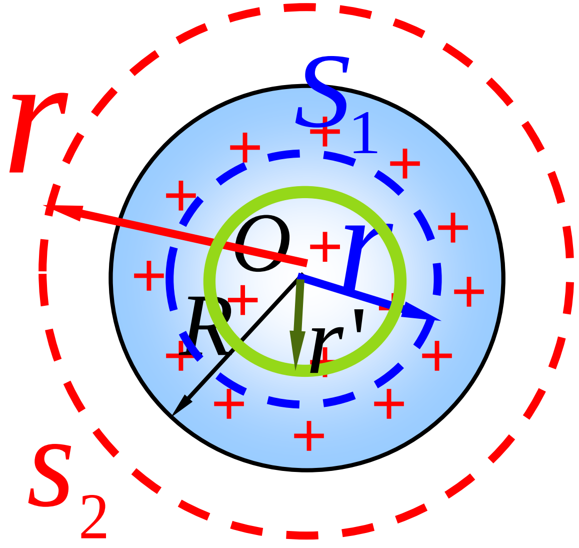
$$\phi_{eBCDG}=\int_S\left[(E_1+ka)\vec{i}+E_2\vec{j}\right]\cdot(\mathrm{d}S\vec{i})=(E_1+ka)a^2$$

$$\phi_e=\sum_i\phi_{ei}=ka^2$$

5-18设在半径为R的球体内,其电荷为球对称分布,电荷体密度为： $\rho=kr$ **(0≤r≤R)；** $\rho=0$ **(r >R),k为一常量。试分别用高斯定理和电场叠加原理求电场强度E与r的函数关系。**

解：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i^{in}$$



当0≤r≤R

$$\therefore E\cdot 4\pi r^2=\frac{\int_0^r kr'\cdot 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r'}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E}=\frac{kr^2}{4\varepsilon_0}\vec{e}_r$$

$$\mathrm{d}q=\rho\cdot 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r'$$

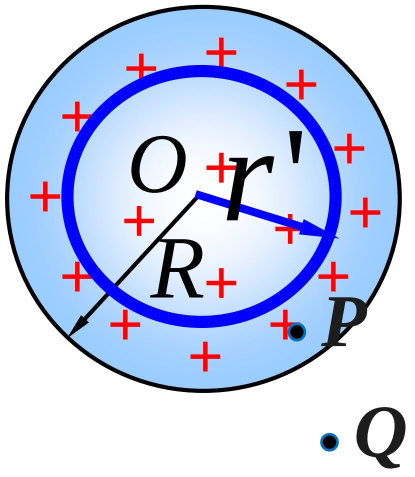
当r >R

$$\therefore E\cdot 4\pi r^2=\frac{\int_0^R kr'\cdot 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r'}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E}=\frac{\rho R^4}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

方法二 用电场叠加原理

$$dq = \rho \cdot 4\pi r'^2 dr'$$



当$0 \le r \le R$（P点）

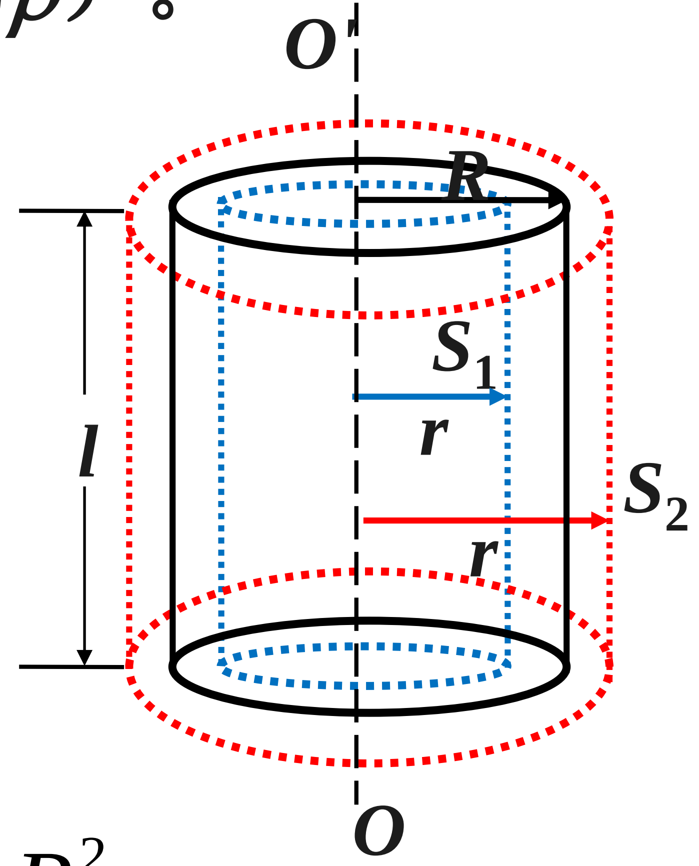
$$r < r', dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; r > r', dE = 0$$

$$\vec{E} = \int_0^r \frac{kr' \cdot 4\pi r'^2 dr'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{kr^2}{4\varepsilon_0} \vec{e}_r$$

当$r > R$（Q点）

$$\vec{E} = \int_0^R \frac{kr' \cdot 4\pi r'^2 dr'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

5-23 求半径为R的无限长均匀带正电圆柱体内、外的场强分布（电荷体密度为ρ）。



解：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i^{in}$$

当 $r < R$ 时，

$$E\cdot 2\pi r l = \frac{\rho \pi r^2 l}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r$$

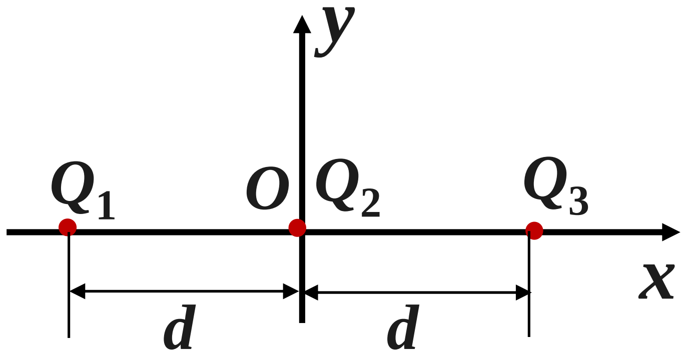
当 $r > R$ 时，

$$E\cdot 2\pi r l = \frac{\rho \pi R^2 l}{\varepsilon_0} \qquad \therefore \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

5-25 如图所示，有3个点电荷Q_1、Q_2、Q_3沿一条直线等间距分布，且$Q_1=Q_3=Q$，已知其中任一点电荷所受合力均为零，求在固定Q_1、Q_3的情况下，将Q_2从O点推到无穷远处外力所作的功。

解:

$$Q_1\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}+Q_1\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 (2d)^2}=0$$

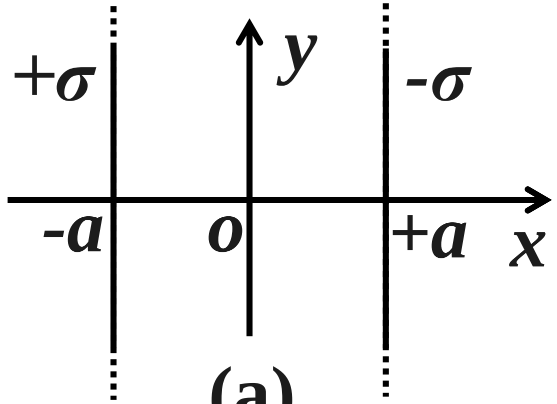


$$Q_1=Q_3=Q \rightarrow Q_2=-\frac{Q}{4}$$

$$W_{外力}=-W_e=-Q_2(V_0-V_\infty)$$

$$=-(-\frac{Q}{4})(\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 d})=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

5-29 电荷面密度分别为+σ和-σ的两块“无限大”均匀带电的平行平板，如图(a)放置，取坐标原点为零电势点，求空间各点的电势分布并画出电势随位置坐标x变化的关系曲线。

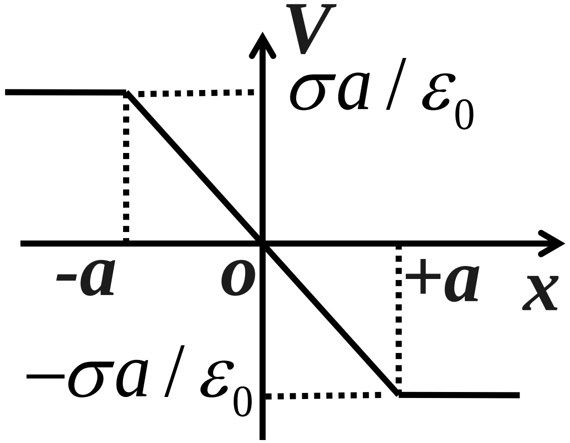


(a)

解：

$$\vec{E}=\begin{cases}0 & (x<-a,x>a)\\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i} & (-a<x<a)\end{cases}$$

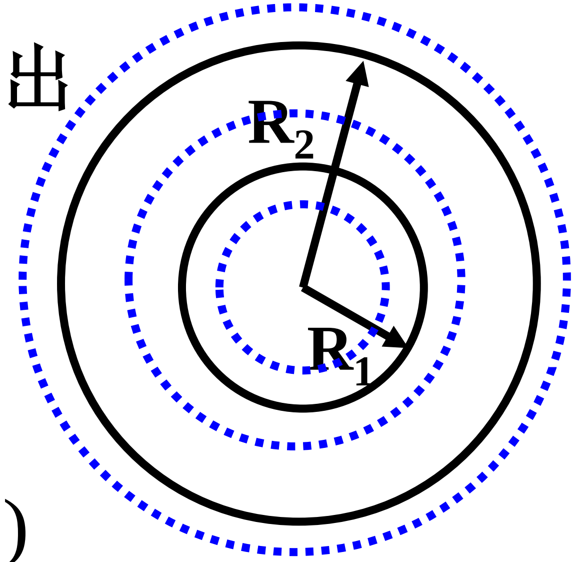
$$V=\begin{cases}\displaystyle\int_x^0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x & (-a<x<a)\\ \displaystyle\int_x^{-a}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_{-a}^0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a & (x<-a)\\ \displaystyle\int_x^{a}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_{a}^0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a & (x>a)\end{cases}$$



(b)

5-30 两个同心球面的半径分别为R_1和R_2，各自带有电荷Q_1和Q_2. 求：（1）各区域电势分布，并画出电势分布曲线；（2）两球面间的电势差.

解：方法一　由电场与电势积分关系求出



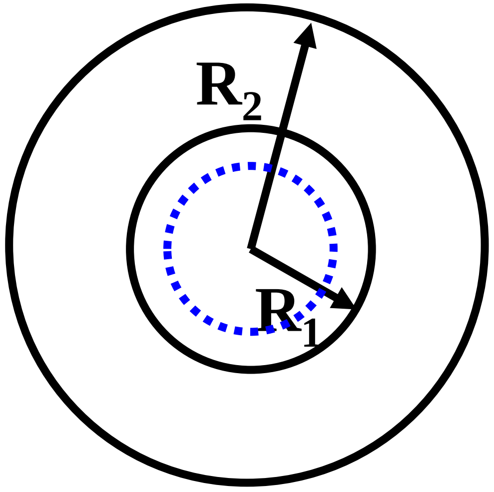
由高斯定理（或以前的讨论）知

$$E_1 = 0 \qquad (r < R_1)$$

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (R_2 < r)$$

所以，在 $r < R_1$ 区域



$$V_1 = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_r^{R_1} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= 0 + \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r$$

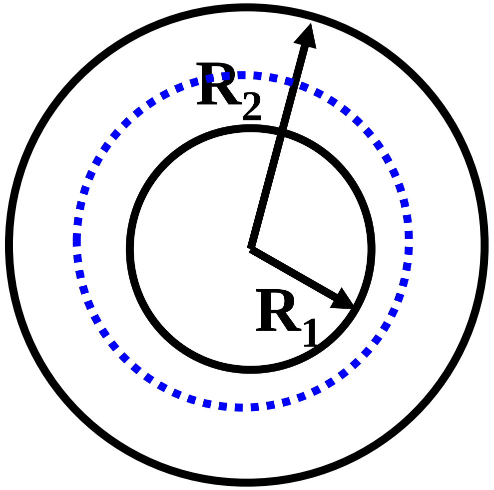
$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

同理，在 $R_1 < r < R_2$ 区域

$$V_2 = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

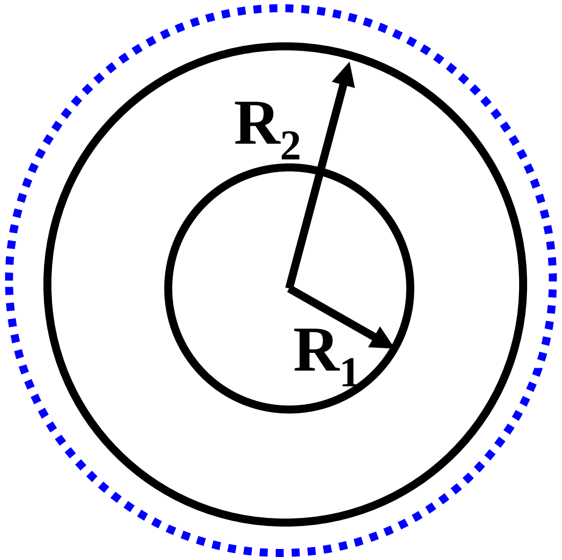
$$= \int_r^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$



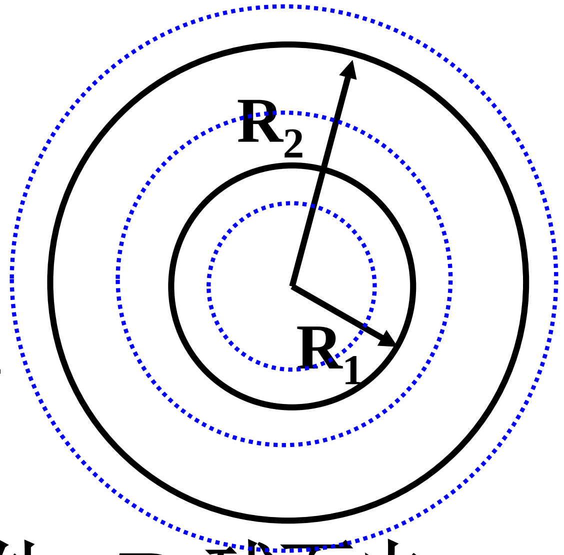
在 $r > R_2$ 区域

$$V_3 = \int_r^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

方法二　电势叠加原理



当 $r < R_1$ 时，该处位于两个球面内

$$V_1 = V_{内} + V_{外} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时，该处位于 R_1 球面外，R_2 球面内

$$V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

当 $r > R_2$ 时，该处位于 R_1 球面和 R_2 球面外

$$V_3 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

5-37 如图所示，在*Oxy*平面上倒扣着半径为R的半球面，在半球面上电荷均匀分布．其电荷面密度为σ．A点的坐标为(0，*R*/2)，B点的坐标为(3*R*/2，0)，求电势差U_{AB}。

解：电荷面密度为σ完整球面在A、B的电势（补偿法）

$$V_A' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

$$V_B' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} = \frac{2\sigma R}{3\varepsilon_0}$$

$$U_{AB} = \frac{1}{2}(V_A' - V_B') = \frac{\sigma R}{6\varepsilon_0}$$