3-22 一物体在介质中按规律$x=ct^3$作直线运动，c为一常量．设介质对物体的阻力正比于速度的平方．试求物体由$x_0=0$运动到$x=l$时，阻力所作的功．(已知阻力系数为k)

解：

$$x = ct^3 \qquad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3ct^2$$

$$F_r = -kv^2 = -9kc^2t^4 = -9kc^{2/3}x^{4/3}$$

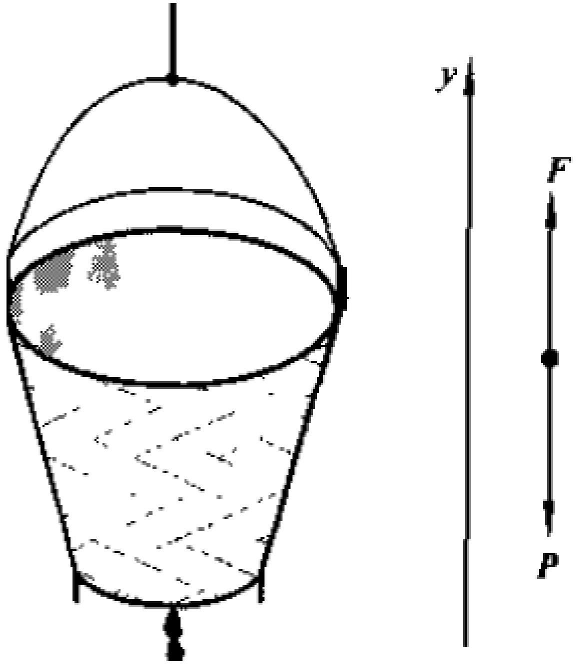
$$W_r = \int_{x_0}^{x} F_r \mathrm{d}x = \int_0^l (-9kc^{2/3}x^{4/3})\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{27}{7}kc^{2/3}l^{7/3}$$

3-23 一人从10m深的井中提水，起始桶中有10kg的水，由于水桶漏水，每升高1m要漏去0.2kg的水，水桶被匀速的从井中提到井口，求人所作的功？

$$W=\int_0^{10}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{y}$$

$$=\int_0^{10}(mg-0.2yg)\mathrm{d}y=882J$$



3-29 一质量为 m 的地球卫星，沿半径为 $3R_E$ 的圆轨道运动，R_E 为地球的半径. 已知地球的质量为 m_E. 求：(1) 卫星的动能；(2) 卫星的引力势能；(3) 卫星的机械能.

解（1）

$$m\frac{v^2}{3R_E}=G\frac{mm_E}{(3R_E)^2} \qquad E_k=\frac{1}{2}mv^2=G\frac{mm_E}{6R_E}$$

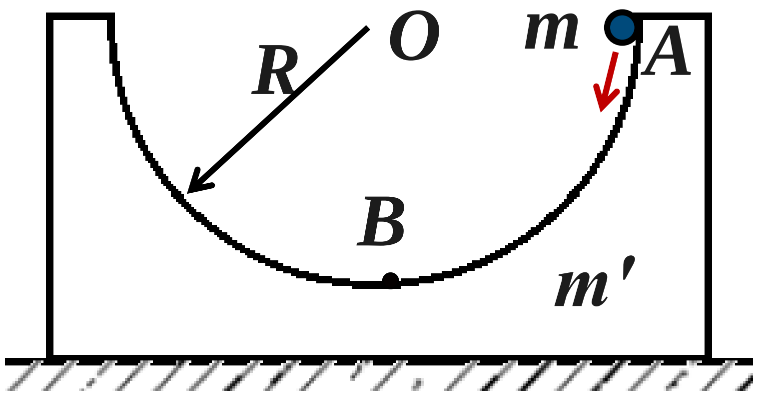
（2）

$$E_p=-G\frac{mm_E}{3R_E}$$

（3）

$$E=E_k+E_p=G\frac{mm_E}{6R_E}-G\frac{mm_E}{3R_E}=-G\frac{mm_E}{6R_E}$$

3-38 一个质量为m的小球，从内壁为半球形的容器边缘点A滑下，设容器质量为m'.半径为R,内壁光滑并放置在无摩擦的水平桌面上，开始时小球和容器都是静止的，当小球滑到容器底部的B点时,求受到的向上的支持力的大小?



解： 由动量守恒

$$mv_m - m'v_{m'} = 0$$

机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}m'v_{m'}^2 = mgR$$

得

$$v_m = \sqrt{\frac{2m'gR}{m+m'}} \qquad v_{m'} = \frac{m}{m'}\sqrt{\frac{2m'gR}{m+m'}}$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2m'gR}{m+m'}} \qquad v_{m'} = \frac{m}{m'}\sqrt{\frac{2m'gR}{m+m'}}$$

小球**m**相对于**m'**的速度

$$v'_m = v_m - (-v_{m'}) = \sqrt{\frac{2(m+m')gR}{m'}}$$

当小球**m**到达**B**点时，**m'**加速度为零，以**m'**为参照器，小球所受惯性力为零，则

$$N - mg = m\frac{{v'_m}^2}{R}$$

$$N = mg\left(3 + \frac{2m}{m'}\right)$$

1-25 一半径为0.5m的飞轮在启动时的短时间内，其角速度与时间的平方成正比，在*t*＝2s时测得轮缘一点的速率为4m/s，求（1）该轮在*t'*＝0.5s时的角速度，轮缘一点的切向加速度和总加速度；（2）该点在 *t*＝2s内转过的角度.

解：（1）$\omega = kt^2$ $\quad t = 2s, k = \dfrac{v/r}{t^2} = 2\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ $\quad \omega = 2t^2$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 4t$$

t'＝0.5s时， $\omega = 0.5\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}, \alpha = 2\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

$$a_t = r\alpha = 1.0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \qquad a_n = r\omega^2 = 0.125\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$\vec{a} = 1.0\vec{e}_t + 0.125\vec{e}_n\ (\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}) \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 1.01\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

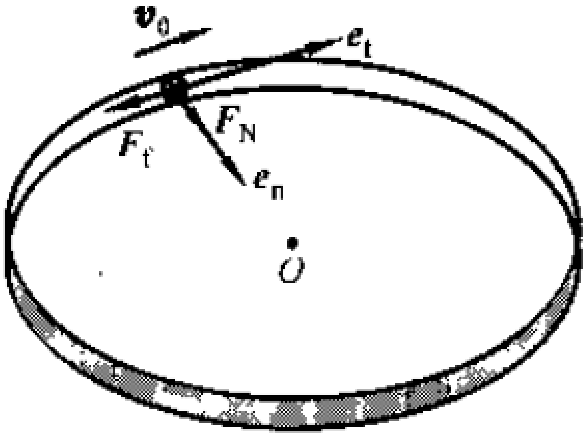
（2）

$$\theta = \int_0^2 \omega \mathrm{d}t = \int_0^2 2t^2 \mathrm{d}t = 5.33\mathrm{rad}$$

2-21 光滑的水平桌面上放置一半径为R的固定圆环,物体紧贴环的内侧做圆周运动，其摩擦因数为μ，开始时物体的速率为v_0，求：

（1）t时刻物体的速率；

（2）当物体速率从v_0减少到0.5 v_0时，物体经历的时间和路程。



解：（1）

$$\begin{cases} F_N = \dfrac{mv^2}{R} \\ -\mu F_N = m\dfrac{dv}{dt} \end{cases} \rightarrow \mu\frac{mv^2}{R} = -m\frac{dv}{dt}$$

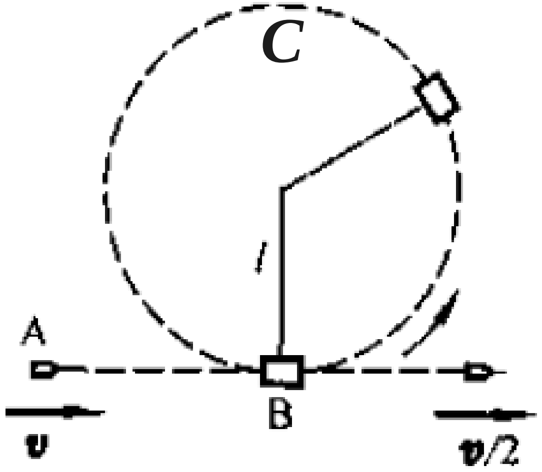
$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} = -\frac{\mu}{R}\int_0^t dt$$

$$\therefore v = \frac{Rv_0}{R+\mu v_0 t}$$

（2）当 $v = \dfrac{v_0}{2}$ 时 $t = \dfrac{R}{\mu v_0}$

$$s = \int_0^{\frac{R}{\mu v_0}} v\,dt = \int_0^{\frac{R}{\mu v_0}} \frac{Rv_0}{R+\mu v_0 t}dt = \frac{R}{\mu}\ln 2$$

3-33 以质量为m的弹丸，A穿过如图所示的摆锤B后，速率由v减少到$v/2$．已知摆锤的质量为m'．摆线长度为l．如果摆锤能在垂直平面内完成一个完全的圆周运动，弹丸的速度的最小值应为多少？



解：弹丸与摆锤相碰，动量守恒

$$mv = m\frac{v}{2} + m'v_B$$

摆锤完成圆周运动中，机械能守恒

$$\frac{1}{2}m'v_B^2 = \frac{1}{2}m'v_C^2 + 2m'gl$$

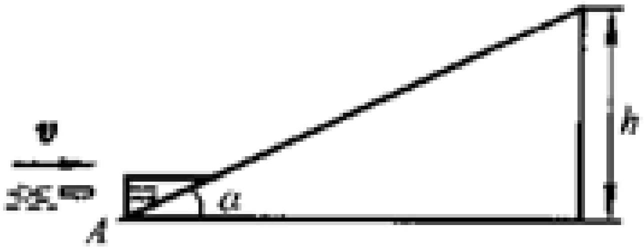
摆锤在最高点C $\quad F_T + m'g = m'\frac{v_C^2}{l}, F_T \geq 0$

解得

$$v \geq \frac{2m'}{m}\sqrt{5gl}$$

3-37 一质量为m'的物块放置在斜面的最底端A处，斜面倾角为α高度为h,物块与斜面的滑动摩擦因数为μ，今有一质量为m的子弹以v_0速度沿水平方向射入物块并留在其中，且使物块沿斜面向上滑动，求物块滑出顶端时的速度大小。

解：子弹与物块沿斜面动量守恒：



$$mv_0\cos\alpha=(m+m')$$

物块沿斜面向上滑动，由功能原理：

$$-\mu(m+m')g\cos\alpha\cdot\frac{h}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}(m+m')v_2^2+(m+m')gh-\frac{1}{2}(m+m')v_1^2$$

$$v_2=\sqrt{\left(\frac{m}{m+m'}v_0\cos\alpha\right)^2-2gh(1+\mu\cot\alpha)}$$