复数与复变函数

复数的概念与运算

- 虚数单位 i

  $\sqrt{-1}=i$，称 i 为虚数单位
- 复数域 $\mathbb{C}$

  $\forall x,y\in\mathbb{R}$，称 $z-x+iy$ 为复数

  实部 $\Re(z)=x$，虚部 $\operatorname{Im}(z)=y$

  全体复数 z 的集合记为 $\mathbb{C}$

  当 $x=0,y\neq 0$ 时，z 称为纯虚数

  复数域 $\mathbb{C}$ 0 元为 0，1 元为 1，逆元 $z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$
- 复数域 $\mathbb{C}$ 几何解释

  把 $z=x+iy$ 与有序数组 (x,y)

  复数域与笛卡尔平面 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 相对应，称为复平面
- 名词解释

  x 轴为实轴，y 为虚轴

  模 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，即点 $P(x,y)$ 到原点距离，$|0|=0$，幅角为任意角度

  幅角 $\operatorname{Arg}z$ 为 OP 与 x 轴正方向夹角

  范围在 $(-\pi,\pi]$ 之间的幅角叫主幅角，或幅角的主值，记为 $\arg z$，$\operatorname{Arg}z=\arg z+2k\pi,k=\pm 0,\pm 1,\cdots$

  共轭复数 $\bar{z}=x-iy$

  - 复数不能比较大小，但模有大有小，可以比较
  - 两复数相等 $\Longleftrightarrow$ 它们的实部,虚部对应相等
- 复数的几种表示法

  代数表示法 $z=x+iy$

  复平面上的点表示 $P(x,y)$ 或 $z(x,y)$

  复平面上的向量 $\overrightarrow{OP}=(x,y)$

  三角表示法 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

  指数表示法 $z=re^{i\theta}$

  - $r=|z|,\theta=\arg z+2k\pi$
  - $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
  - $|e^{i\theta}|=1$
    $e^{i2k\pi}=1$
    $i=e^{(2k\pi+\frac{\pi}{2})i}$
- 复数运算的基本性质
  - $\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x} & z\text{在第一象限}\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & z\text{在第二象限}\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi & z\text{在第三象限}\\ \arctan\frac{y}{x} & z\text{在第四象限}\end{cases}$

    $y=0$ 时，z 在实轴上，$\arg z=0$ 或 π

    $x=0$ 时，z 在虚轴上，$\arg z=\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$
  - $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$
  - $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)=r_1r_2e^{i(\theta_1\theta_2)}$

    $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
  - $\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2$

    $\operatorname{Arg}(\frac{z_1}{z_2})=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2$
  - $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$，$z_2\neq 0$
    $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$

- $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\frac{z-\bar{z}}{2}$
- $\bar{\bar{z}}=z$
- $z\bar{z}=|z|^2=|z^2|$
- $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

  $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- $|z_1\pm z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

  $|z_1\pm z_2|\geq||z_1|-|z_2||$

  $|x|\leq|z|,|y|\leq|z|,|z|\leq|x|+|y|$

  $|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 和 z_2 的距离
- $z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

  $|z^n|=|z|^n$，$\mathrm{Arg}z^n=n\mathrm{Arg}z$

  $z^{-n}=\frac{1}{z^n}=r^{-n}e^{i(-n\theta)}$

  $z^0=1$

  De Moivre 公式：$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$
- z 的 n 次方根 ω 满足 $\omega^n=z$，记为 $\sqrt[n]{z}$

- 几何应用
- 复球面与无穷远点

  复球面与复平面一一对应

  复球面的北极点 N 对应复平面上的无穷远点，记作 ∞
  - 复数 ∞ 的实部、虚部、幅角均无意义
  - $z\to\infty\Leftrightarrow|z|=+\infty$
  - 包含无穷远点的复平面称为扩充复平面

复变函数的极限与连续

- **复平面上的区域**

  邻域：$U(z_0,\delta)=\{z\mid|z-z_0|<\delta,z\in\mathbb{C}\}$

  去心邻域：$\mathring{U}(z_0,\delta)=\{z\mid|z-z_0|<\delta,z\in\mathbb{C}\}$

  复平面上的曲线：$z=z(t)=x(t)+iy(t)$
- **复变函数**

  设复数集 $G\subseteq C$，如果存在一个确定的法则 f，使得对每一个 $z\in G$，按该法则总有唯一的复数 w 与之对应，则称 f 为定义在 G 上的一个单值函数，记作 $w=f(z)(z\in G)$

  定义域：G

  值域：$R(f)=G^*$

  如果一个 $z\in G$ 对应于多个或无穷多个函数值 w，则称 f 是一个多值复变函数

  $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$
- **复变函数的极限**

  设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(z_0,\rho)$ 内有定义，若存在确定的复数 A，使得对 $\forall\varepsilon>0$，都 $\exists\delta>0(\delta\leq\rho)$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，总有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，则称 A 为当 $z\to z_0$ 时函数 $f(z)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{z\to z_0}f(Z)=A$
  - 若 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y),z_0=x_0+y_0,A=u_0+iv_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[u(x,y)+iv(x,y)]=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)+i\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=u_0+iv_0=A$
- **复变函数的连续性**

  设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 的某一邻域内有定义，若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，则称函数 $f(z)$ 在点 z_0 处连续
  - $f(z)$ 在 z_0 连续 $\Leftrightarrow u(x,y),v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 都连续.

    $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[u(x,y)+iv(x,y)]=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)=f(z_0)$

解析函数

解析函数的概念及判定

- **复变函数的导数和微分**
  - 若 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在，则称 f 在 z_0 处可导

    导数 $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

    也记作 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=z_0}$ 或 $w'|_{z=z_0}$

    若 f 在 D 内的每一点都可导，则称 f 在 D 内可导
  - 设复变函数 $w=f(z)$ 在 $U(z_0)$ 内有定义，$z_0=x_0+iy_0,\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，如果存在与 Δz 无关的复常数 A，使得对于 $\forall z=z_0+\Delta z\in U(z_0)$，总有 $\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\cdot\Delta z+o(|\Delta z|)$，其中 $|\Delta z|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则称 $w=f(z)$ 在 z_0 处可谓，$\mathrm{d}w=A\cdot\Delta z=f'(z_0)\mathrm{d}z$
  - $\text{可微}\iff\text{可导}\implies\text{连续}$
  - 可导的必要条件

    $f(z)=u(x,y)+iv(x,y),z_0=x_0+iy_0$

    C-R 条件：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$
  - 可导的充要条件

    u,v 在 (x_0,y_0) 处可微且满足 C-R 条件
  - $f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=v_y+iv_x$
- **复变函数的解析性**

  若 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的某邻域内均可导，则称 $f(z)$ 在点 z_0 解析，z_0 为解析点

  若 $f(z)$ 在区域 D 内的任一点处解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，$f(z)$ 为解析函数

  若 $f(z)$ 在 z_0 处不解析，则称 z_0 为奇点
  - $\text{解析}\iff\text{可导}$

复变函数的初等函数

- **指数函数**

  $f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$
  - $|e^z|=e^x,\mathrm{Arg}e^z=y+2k\pi$
  - $e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2},\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$
  - 周期性：$e^{z+2k\pi i}=e^z$
  - 处处解析，$(e^z)'=e^z$
  - $\lim\limits_{z\to\infty}e^z$ 不存在，为无界
  - 复变函数中无中值定理
- 对数函数

  $w=\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$
  - $\mathrm{Ln}z$ 为无穷多值函数，对于固定的 k，单值分支记为 $(\mathrm{Ln}z)_k$
  - $k=0$ 时，称为主值，记为 $\ln z$

    $\ln z=\ln|z|+i\arg z$
  - $\mathrm{Ln}0$ 无意义
  - $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2,\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2$
  - $\mathrm{Ln}z$ 在除原点与负实轴外的其他点处连续

    $\ln z$ 在除原点与负实轴外的其他点处解析，$(\ln z)'=\frac{1}{z}$

    $\mathrm{Ln}z$ 的各个分支在除原点与负实轴外的其他点处解析，与 $\ln z$ 导数值相同
- **幂函数**

  $w=z^\alpha=e^{\alpha\mathrm{Ln}z}=e^{\alpha(\ln z+2k\pi i)}$
  - 当 $\alpha=n$ 为整数时，$z^n=e^{n\ln z}$ 为单值

    $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$

- 当 $\alpha=\frac{1}{n}$ 时，有 n 个不同的值

  当 $\alpha=\frac{p}{q}$ 时，取 $k=0,1,\cdots,q-1$ 的 q 个值

- 对其他的 α，有无穷多值

- $k=0$，即 $z^\alpha=e^{\alpha\ln z}$ 为主值

- z^α 的各个单值分支在除原点和负实轴外的其他点处解析，$(z^\alpha)'=\alpha z^{\alpha-1}$

- **三角函数**

  $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

  - 周期为 2π
  - $\cos z$ 为偶函数，$\sin z$ 为奇函数
  - 在复平面上处处解析，$(\sin z)'=\cos z,(\cos z)'=-\sin z$
  - $|\sin z|,|\cos z|$ 无界
  - $e^{iz}=\cos z+i\sin z$
  - $\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\cot z=\frac{\cos z}{\sin z},\sec z=\frac{1}{\cos z},\csc z=\frac{1}{\sin z}$

复变函数的积分

概念和性质

- 简单曲线 C 为有向曲线

  C^- 为与 C 方向相反的一条曲线

  简单闭曲线 C 的正向为逆时针方向

  C^- 为 C 的负方向，即顺时针方向

- 设 $w=f(x)$ 在以 A 为起点，B 为终点的分段光滑曲线 C 上有定义，沿曲线 C 从起点 $z=a$ 到终点 $z=b$ 的方向在 C 上任取分点 $a=z_0,z_1,\cdots,z_{n-1},z_n=b$，把 C 分成 n 个小弧段 $z_{k-1}z_k(k=1,2,\cdots,n)$。任取 $\xi_k\in z_{k-1}z_k$，记 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$，$\delta=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta z_k\text{的长度}\}$，$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\lim\limits_{\delta\to0}\sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k$

  C 称为积分路径

  若 C 为闭合曲线，则记为 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$

- **基本性质**

  - $\int_{C^-}f(z)\mathrm{d}z=-\int_C f(z)\mathrm{d}z$
  - $\int_C kf(z)\mathrm{d}z=k\int_C f(z)\mathrm{d}z$
  - $\int_C[f(z)\pm g(z)]\mathrm{d}z=\int_C f(z)\mathrm{d}z\pm\int_C g(z)\mathrm{d}z$
  - $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1}f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2}f(z)\mathrm{d}z$

    $C=C_1+C_2$
  - $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_C|f(z)||\mathrm{d}z|\le ML$

    L 为曲线长度，$|f(z)|<M$

- **存在性和基本算法**

  若 $f(z)$ 连续，则 $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C(u+iv)\mathrm{d}(x+iy)=\int_C(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+i\int_C(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y)$

  参数方程法

  $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta[u(x(t),y(t))x'(t)-v(x(t),y(t))y'(t)\mathrm{d}t]+i\int_\alpha^\beta[v(x(t),y(t))x'(t)+u(x(t),y(t))y'(t)\mathrm{d}t]$

柯西-古萨基本定理

- **柯西积分定理**

  设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上及其所围成的区域 D 内处处解析，则 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$

  设 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，C 为 D 内任一条分段光滑闭曲线，则 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$

  设 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，则 $F(z)=\int_{z_0}^z f(z)\mathrm{d}z$ 在 D 内解析，且 $F'(z)=f(z)$

- **复合闭路定理**

  $C,C_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为 $n+1$ 条逆时针方向的简单闭曲线，C_k 在 C 内，C_k 互不相交、互不包含，C,C_k 构成复连通域 D，$f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析，则 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum\limits_{k=1}^n\oint_{C_k}f(z)\mathrm{d}z$

$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z$

$\oint_C \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i, \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z = 0(n \neq 1)$

原函数与不定积分

- $\int f(z)\mathrm{d}z = F(z) + C$
- $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_0)$

柯西积分公式

- **Cauchy 积分公式**

  设 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，C 为 D 内任一条正向简单闭曲线，z_0 为曲线 C 内任一点，则 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$

- **高阶导数公式**

  $\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$

调和函数

- 若 $\varphi(x,y)$ 在 D 内有二姐连续偏导数，且满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$，则为调和函数
- 若 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 D 内解析，则 u 和 v 都是 D 内的调和函数，v 为 u 的共轭调和函数

复变函数项级数

复数项级数

- 复数列的极限

  $\{c_n\} = \{a_n + ib_n\}$ 收敛于 $c = a + ib$ 的充要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

- 复数项级数

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \cdots c_n + \cdots$

  部分和 $S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$

  若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ 存在，则称级数收敛，s 为级数的和，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = s$

  否则称级数发散

  - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛
  - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛 $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$
  - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 收敛 $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛且 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$

    若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛

    若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 发散，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 条件收敛

  - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛 $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛

幂级数

- 函数项级数

  $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots f_n(z) + \cdots$

  - 若对于点 z_0，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛，则称为收敛点

    收敛点的全体称为收敛域

- 设收敛域为 D，对于 $\forall z \in D$，和函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) = S(z)$

  记 $S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z)$，$R_n(z) = s(z) - s_n(z)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$，$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(z) = 0$

- 幂级数

  $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + \cdots c_n z^n + \cdots$

- 幂级数的收敛性
  - Abel 定理

    若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在点 $z_0(z_0 \neq 0)$ 收敛，则对满足 $|z| < |z_0|$ 的一切 z，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛

    若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在点 z_1 收敛，则对满足 $|z| < |z_1|$ 的一切 z，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 发散

    - 收敛圆 $|z| < R$，收敛半径 R
    - $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 的收敛范围是以 z_0 为中心的圆域
  - 设 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lambda$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \lambda$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径

    $R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & 0 < \lambda < +\infty \\ +\infty & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda = +\infty \end{cases}$

- 幂级数的运算及性质
  - 代数运算
  - $S(z)$ 在收敛圆内解析

    $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在收敛圆内可逐项求导和逐项积分，且不改变收敛半径，即 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (c_n z^n)'$，

    $\int_L \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) \mathrm{d}z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_L c_n z^n \mathrm{d}z$

Taylor 级数

- 若 $f(z)$ 在 D 内解析，$z_0 \in D$，则当 $|z - z_0| < R$ 时

  $f(z)$ 在 z_0 的 Taylor 级数：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

  $f(z)$ 在 $z_0 = 0$ 的 Maclaurin 级数：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

  - Taylor 级数的收敛半径 R 等于从 z_0 到 $f(z)$ 的距离 z_0 最近的一个奇点的距离
  - Taylor 系数 $C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\xi$
  - $f(z)$ 在 D 内解析 $\Longleftrightarrow$ 每一点都可展开为 $z - z_0$ 的 Taylor 级数
- 函数展开为幂级数

  $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n, \frac{1}{1+z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, |z| < 1$

  $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, |z| < +\infty$

  $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, |z| < +\infty$

  $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, |z| < +\infty$

  $\ln(1+z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n!}, |z| < 1$

  $(1+z)^m = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} z^n, |z| < 1$

Laurent 级数

- 双边幂级数

  $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$

正幂项部分 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n, |z-z_0| < R_2$

负幂项部分 $\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-z_0)^n, |z-z_0| > \frac{1}{R} = R_2$

- $R_1 > R_2$ 时，$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ 处处发散

  $R_1 < R_2$ 时，$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ 的收敛点集为圆环域

  收敛圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 域收敛圆有相同性质

- 函数展开为 Laurent 级数

  $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内解析，Laurent 系数 $C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$，$L$ 为圆环域内绕 z_0 的任一条逆时针方向的简单闭曲线

留数及其应用

解析函数中的孤立奇点

- 孤立奇点

  若 $f(z)$ 在 z_0 不解析，但在 z_0 的某一去心邻域 $0 < |z-z_0| < \delta$ 内解析，则称 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点

- 分类
  - 可去奇点：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ 中无负幂项 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有界
  - m 级极点：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ 中有 m 项负幂项 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$
  - 本性奇点：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ 中有项无穷多负幂项 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在且不为 ∞
    - 任意数列 a，存在趋向于 z_0 的点列 $\{z_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = a$

- 零点

  若 $f(z_0) = 0$，则称 z_0 为 $f(z)$ 的零点

  若 $f(z) = (z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0) \neq 0$，m 为正整数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点

  z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点 $\Longleftrightarrow f^{(n)}(z_0) = 0(n = 0, 1, \cdots, m-1), f^{(m)}(z_0) \neq 0$

  z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点 $\Longleftrightarrow z_0$ 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 级极点

- 极点判定

  设 z_0 为 $P(z)$ 的 m 级零点，$Q(z)$ 的 n 级零点，则
  - 若 $m \geq n$，z_0 为 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 的可去奇点
  - 若 $m < n$，z_0 为 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 的 $n-m$ 级极点
  - z_0 为 $g(z) = P(z)Q(z)$ 的 $n+m$ 级极点

- 无穷远点分类
  - 可去奇点：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$ 中无正幂项 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有界
  - m 级极点：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$ 中有 m 项负幂项 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$
  - 本性奇点：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$ 中有项无穷多正幂项 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在且不为 ∞

孤立奇点的留数

$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \mathrm{d}z = C_{-1}$

$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L-} \mathrm{d}z = -C_{-1}$

- 留数计算
  - 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = 0$
  - 若 z_0 为 $f(z)$ 的 1 级极点，则 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

- 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点，则 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}$
- 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$，则 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$
- $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]$

- 留数定理

  设 $f(z)$ 在 D 内除有限个孤立奇点 $z_1,\cdots,z_n$ 外处处解析，L 是 D 内包围诸奇点的一条逆时针方向简单闭曲线，则 $\oint_L f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$
- $\operatorname{Res}[f(z),\infty]+\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]=0$

留数定理计算实积分

- $\int_0^{2\pi}R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x\xlongequal{z=e^{ix}}\oint_{|z|=1}R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz}$，$R(\cos x,\sin x)$ 为 $\sin x,\cos x$ 的有理函数
- $\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\mathrm{d}x=2\pi i\sum\operatorname{Res}[R(z),z_k]$，$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n},n-m\geq 2,Q_n(z)\neq 0$，$z_k$ 为 $R(z)$ 在上半平面内的所有奇点
- $\int_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{iax}\mathrm{d}x=2\pi i\sum\operatorname{Res}\left[R(z)e^{iaz},z_k\right]$，$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n},n-m\geq 1,Q_n(z)\neq 0$
  $R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n},n-m\geq 2,Q_n(z)\neq 0$，$z_k$ 为 $R(z)$ 在上半平面内的所有奇点

共形映射

共形映射的概念

- 解析函数导数的几何意义
  - 有向曲线切向量

    曲线 $C:z=z(t)=x(t)+iy(t)$

    $z_0'=z_0'(t_0)=x_0'(t_0)+iy_0'(t_0)$

    C 在 z_0 处的切向量为 $\vec{T}=z_0'$，切向量倾角为 $\operatorname{Arg}z_0'(t_0)$
  - $\operatorname{Arg}f'(z_0)$

    曲线 C 经过 $w=f(z)$ 映射后在 z_0 处的转动角度

    转动角的不变性：转动角大小仅与 z_0 有关，与 C 无关

    保角性：设 C_1 与 C_2 的夹角为 α，经解析函数 $w=f(z)$ 映射后的像曲线为 Γ_1 和 Γ_2，则 Γ_1 和 Γ_2 的夹角也为 α
  - $|f'(z_0)|$

    在 $w=f(z)$ 映射下曲线 C 在点 z_0 处弧长的伸缩程度，称为伸缩率

    伸缩率不变性：伸缩率与 C 的形状和方向无关
- 共形映射与单叶函数的共形性
  - 设 $w=f(z)$ 在 z_0 的邻域内有定义，且在 z_0 处具有保角性和伸缩率不变性，则称 $w=f(z)$ 在 z_0 处是保角的

    若 $w=f(z)$ 在区域 D 内的每一点处都是保角的，则称 $w=f(z)$ 是 D 内的保角映射

    若 $w=f(z)$ 在区域 D 内单叶且保角，则称 $w=f(z)$ 为 D 内的共形（或保形）映射
  - 设 $w=f(z)$ 是区域 D 内的解析函数，$z_0\in D$，且 $f'(z_0)\neq 0$，则该映射在 z_0 处是保角的且伸缩率不变的

    若在 D 内 $f'(z)\neq 0$，则 $w=f(z)$ 是 D 内的保角映射
  - 设 $w=f(z)$ 是 D 内的单叶解析函数，则它将 z 平面上的区域 D 共形映射为 w 屏幕上的区域 $G=f(D)=\{w\mid w=f(z),z\in D\}$，它的反函数 $z=f^{-1}(w)$ 在 G 内也单叶解析，且 $\left[f^{-1}(w)\right]'=\frac{1}{f'(z)},z\in D,w\in G$，且 D 与 G 形状相同，方向相同