复数练习题

复变函数及其解析性

1. 设 $e^z-1-\sqrt{3}i=0$，则 $z=$ $\ln 2+i(\frac{\pi}{3}+2k\pi)$ 。

2、设 $e^z-1-i\sqrt{3}=0$，则 $\mathrm{Im}(z)=$______。

3. 设 $z=i^{1-i}$，则 $\mathrm{Im}\,z=$ $e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ ；

4、若 $e^z-(1+i)^i=0$，则 $\mathrm{Im}(z)=$______。

5、已知调和函数 $u(x,y)=(x-1)^2-(y+1)^2$，求解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的表达式。

6、确定正常数 α，使得函数 $u(x,y)=e^{\alpha x}\sin 3y$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$（要求用复变量 z 表示）。

7、已知 $u-v=e^x(\cos y-\sin y)-x-y$，求解析函数 $f(z)=u+iv$（单独用 z 表示）

$u=e^x\cos y-y+C, v=e^x\sin y+x+C$　　$f(z)=e^z+C+i(z+C)$

8、已知解析函数 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)=2xy-y$，且 $f(0)=0$，求 $f(z)$ 的表达式，并用 z 表示. 并求 $f'(\mathrm{i})$。

$\boldsymbol{f(z)=x^2-y^2-x+C+i(2xy-y)}$　**令** $\boldsymbol{y=0}$，**得** $\boldsymbol{f(x)=x^2-x+C}$　**于是**
$\boldsymbol{f(z)=z^2-z+C}$　……2分　$\boldsymbol{f(0)=0}$ **得** $\boldsymbol{C=0}$　　$\boldsymbol{f(z)=z^2-z}$

9. 设调和函数 $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)+x$，求 $u(x,y)$ 的共轭调和函数 $v(x,y)$，并求解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$。（自变量单独用 z 表示）

$v=e^x(x\sin y+y\cos y)+y+C$，　$f(z)=ze^z+z+C$

10. 设 $f(z)=2xy-\mathrm{i}x^2$，那么　　[D]

(A) $f(z)$ 在原点解析　　(B) $f(z)$ 在复平面上处处不可导

(C) $f(z)$ 仅在原点可导　　(D) $f(z)$ 仅在实轴上可导

11、已知函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，且 $|f(z)|$ 在 D 内是常数，证明 $f(z)$ 在 D 内也是常数。

复变函数的 *Laurent* 级数，复积分、

1、设函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$，则

$f(z)$ 在圆环域 $0<|z-1|<1$ 内的罗伦级数为__________________。

$f(z)$ 在圆环域 $1<|z|<+\infty$ 内的罗伦级数为__________________。

2、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)}$ 分别在圆环域 $1<|z|<+\infty$，$0<|z-1|<1$，和 $1<|z-1|<+\infty$ 内展开为 Laurent 级数。

3. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ 在圆环域 $2<|z+i|<+\infty$ 内展成罗朗级数。

4. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4z+3}$ 在圆环域 $1<|z|<3$ 内展开为 Laurent 级数.

5、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ 在以 $z_0=2$ 为中心的各圆环域内展成为 Laurent 级数。

6、设 $f(z)=\dfrac{z}{e^{2z}-1}$，则（ C ）

（A） $z=0$ 是 $f(z)$ 的一级极点　　（B） $z=0$ 是 $f(z)$ 的二级极点

（C） $z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点　　（D） $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点

7、设 $f(z)=\dfrac{z}{1-\cos z^2}$，则（ A ）

（A） $z=0$ 是 $f(z)$ 的三级极点　　（B） $z=0$ 是 $f(z)$ 的二级极点

（C） $z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点　　（D） $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点

8、计算积分 $\oint_C \dfrac{\cos z}{z^3(z-1)}dz$，其中 C 为任一包含 $z=0, z=1$ 的正向简单闭曲线。

9、设 L：$|z|=2$ 取逆时针方向，则 $\oint_L \dfrac{dz}{z^2(z-1)}=$______________。

10、设 L：$|z|=3$ 取逆时针方向，则 $\oint_L \dfrac{dz}{(z-i)(z-2)}=$______________。

11、设 L：$|z|=2$ 取逆时针方向，计算 $\oint_L \dfrac{e^z}{z^2(z-1)}dz$

12、设 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2(z-1)}$，则留数 $\operatorname{Res}[f(z),0]=$______________。

13、设 L：$|z|=3$ 取正方向，计算 $\oint_L \frac{e^{2z}-1}{z^2(z-1)^2}dz$

14、设 $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=$______________。

15、计算 $\oint_{|z|=2}\frac{z}{(z^2+1)(z-1)^2}dz$

16. $\mathrm{Res}\left[\frac{z\sin z}{(z-\pi)^2},\pi\right]=$________。

17、设 C 是正向圆周 $|z|=2$，则积分 $\oint_C \frac{\cos z}{(1-z)^2}\mathrm{d}z=$ [ ]

(A) $2\pi i\cos 1$ (B) $-2\pi i\sin 1$ (C) $\frac{1}{2\pi i}\cos 1$ (D) $\frac{-1}{2\pi i}\sin 1$

18. $\oint_{|z|=2\pi}\frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^z-i}\mathrm{d}z$

19. 利用留数计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$.