概率统计 19-20-2(A)标准答案及评分标准

一、选择题

1)D 2) A 3)D, 4) D, 5) A

二、填空题

1) 3/4=0.75;

2)2/3

3) 16

4)0.8413

5)-0.4

6) 2.8

7) 0.5

8) $\chi^2(10)$

9) $F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0.4 & 1\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$

10) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3-y}{2} & 1<y<3\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

11) 1/2=0.5

12) 0.95

13) $\sqrt{17/5}=1.844$.

三、 (1) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1;$..................2'

$a\int_0^1\int_0^{1-y} x(x+y)dxdy = 1;$......................2'

$a = 8$..1'

(2) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$.........................2'

当0<y<1时 $f_Y(y) = \int_0^{1-y} ax(x+y)dx = \frac{4}{3}(y^3 - 3y + 2)$.........2'

当$y \le 0$，或 $y \ge 1$时 $f_Y(y) = 0$.............................1'

(3) $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{6x(x+y)}{(y^3-3y+2)} & 0 < x < 1-y \\ 0 & 其它 \end{cases}$ $(0 < y < 1)$.............2'

$$f_{X|Y}(x|0.4) = \begin{cases} \frac{6x(x+0.4)}{(0.4^3 - 3\times 0.4 + 2)} & 0 < x < 0.6 \\ 0 & 其它 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{0.144}x(x+0.4) & 0 < x < 0.6 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$ ....2'

$P(X < 0.5 | Y = 0.4) = \int_{-\infty}^{0.5} f_{X|Y}(x|0.4)dx = \int_0^{0.5} \frac{1}{0.144}x(x+0.4)dx = 0.6366$ ....1'

四、A1,A2,A3 分别表示 灯管由甲、乙、丙厂家生产；
B 表示抽到的灯管为合格品。则

$P(A_1) = 0.6; P(A_2) = 0.3; P(A_3) = 0.1;$...1'

$P(B|A_1) = 0.95; P(B|A_2) = 0.9; P(B|A_3) = 0.85;$................................1'

(1) $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$..........2'

$= 0.6*0.95 + 0.3*0.9 + 0.1*0.85 = 0.925$..2'

(2)

$P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)P(B|A_3).}{P(B)}$. . . . . 2'

$= \frac{0.1*0.85}{0.925} = \approx 0.0919$................2'

五、 X和Y的概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases},\ f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y} & y>0\\ 0 & 其它\end{cases}\text{..........................}2'$$

X和Y的联合密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-x-2y} & x>0,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}\text{..}1'$$

Z的分布函数$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$........................1'

当 $z<0$时，$F_Z(z)=0$;

当 $z>0$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$. . . . . 2'

$=\int_0^z\int_0^{z-x}2e^{-x-2y}dydx$...1'

$=1-2e^{-z}+e^{-2z}$...2'

Z的概率密度为

$$f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\begin{cases}2e^{-z}-2e^{-2z} & z>0\\ 0 & z<0\end{cases}\text{...}1'$$

或者：

X和Y的概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases},\ f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y} & y>0\\ 0 & 其它\end{cases}\text{..........................}2'$$

当$z>0$时

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$ ....2'

$=\int_0^z e^{-x}\times 2e^{-2(z-z)}dx$............................3'

$=2e^{-2z}(e^z-1)$.......................................2'

当$z\le 0$时， $f_Z(z)=0$......................................1'

六、设甲厅需要m个座位。设听众选择甲厅的人数为X。

由题意可得：X~ b(n,p). n=100;p=0.5,..................................3'

m需要满足：

$P(X > m) < 2.5\%$..1'

$P(X > m) \approx 1-\Phi(\frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}}) = 1-\Phi(\frac{m-50}{5})$........................2'

由$1-\Phi(\frac{m-50}{5}) < 0.025$;得：$\Phi(\frac{m-50}{5}) > 0.975$

$\frac{m-50}{5} > 1.96$...2'

$m > 59.8$,故甲厅至少需要准备60个座位才能满足要求。. . . 1'

七、(1)似然函数为：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n} 2e^{-2(X_i-\theta)} = 2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n} X_i} e^{2n\theta}$.............2'

$\theta \le X_1,....,\theta \le X_n$;即：$\theta \le \min(X_1,....,X_n)$...1'

显然$L(\theta)$是θ的单调增函数，且$\theta \le \min(X_1,....,X_n)$,

所以当$\theta=\min(X_1,....,X_n)$时，$L(\theta)$取得最大值..2'

根据最大似然估计的定义，$\hat{\theta}=\min(X_1,....,X_n)$是参数$\theta$的最大似然估计。 . . . 1'

(2)$E\hat{\theta} = E\min(X_1,....,X_n)$..1'

因为$X_i \ge \theta$,所以$\min(X_1,....,X_n) \ge \theta$.；故$E\hat{\theta} = E\min(X_1,....,X_n). \ge \theta$.............2'

所以$\hat{\theta}$不是θ的无偏估计。. . . . . 1'

总体的分布函数；

$$F_X(x)=\begin{cases} 1-e^{-2(x-\theta)} & x \ge \theta \\ 0 & x < \theta \end{cases}$$

记Z=$\hat{\theta}$=min(X_1,..., X_n)的密度函数

$f_Z(z) = n[1-F_X(z)]^{n-1} f(z)$

$$=\begin{cases} 2ne^{-2n(z-\theta)} & z \ge \theta \\ 0 & z < \theta \end{cases}$$

$E\hat{\theta} = EZ = \int_{\theta}^{\infty} z2ne^{-2n(z-\theta)}dz$

$=\theta + \frac{1}{2n} \ne \theta$,所以，$\hat{\theta}$=min($X_1$,..., X_n)不是θ的无偏估计

八、(1) $n=25, \alpha=0.05,$

检验统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-16}{S_n}\sqrt{n} \mid H_0 \sim t(n-1)$

拒绝域：$D=\{|T|>t_{\alpha/2}(n-1)\}=\{|T|>2.064\}$..............................5'

$\bar{x}=15, s_n=3$

T的观测值：$T=\dfrac{15-16}{3}\sqrt{25}=-5/3$

$|-5/3|<2.064,$

所以，不能拒绝原假设。...1'

(2) σ^2的置信度为95%的置信区间为：$[\dfrac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{0.025}(24)}, \dfrac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{0.975}(24)}]$.....2'

$=[\dfrac{24\times 3^2}{39.36}, \dfrac{24\times 3^2}{12.4}]=[5.49,17.42]$...2'