东 南 大 学 考 试 卷 (A)

课程名称 复变函数　考试学期 20-21-1　得分 ________

适用专业 选学复变函数各专业　考试形式 闭 卷　考试时间长度 120 分钟

自觉遵守考场纪律　如考试作弊　此答卷无效

学号________　姓名________

密 …… 封 …… 线

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							
评阅人							

一、 选择题（本题共6小题，每小题4分，满分24分）

1. 满足 $z^2=|z|^2$的复数 z 是 ________.

$A.$ 不存在的　$B.$ 唯一的　$C.$ 纯虚数　$D.$ 实数

2. 函数 $f(z)=\bar{z}z^2$ 在点 $z=0$ 处 ________.

$A.$ 解析　$B.$ 可导　$C.$ 不可导　$D.$ 不解析也不可导

3. 下列命题中正确的是 ________.

$A.$ 若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 解析.

$B.$ 若 z_0 是 $f(z)$ 的奇点, 则 $f(z)$ 在 z_0 不可导.

$C.$ 若 $f(z)$在区域 D内解析, 则对 D内任一简单闭曲线 C, $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$.

$D.$ 若 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析, 且 u 为实常数, 则 $f(z)$ 在 D 内是常数.

4. 函数 $f(z)$ 在 z_0 解析是 $f(z)$ 能在 z_0 处展开成幂级数的 ________.

$A.$ 充分非必要条件　$B.$ 必要非充分条件　$C.$ 充要条件　$D.$ 既非充分也非必要

5. 下列积分中, 积分值不为零的是 ________.

$A.$ $\oint_{|z|=2}\frac{z}{z-3}\mathrm{d}z$　$B.$ $\oint_{|z|=1}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$　$C.$ $\int_{-1}^{1}\sin z\mathrm{d}z$　$D.$ $\oint_{|z|=1}e^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z$

6. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(in)}{2^n}$ ________.

$A.$ 绝对收敛　$B.$ 条件收敛　$C.$ 发散　$D.$ 敛散性不确定

二、 填空题(本题共7小题，每小题4分，满分28分)

1. 设复数 $z=i^6-3i^{19}+i$, 则 $z=$ ________________.

2. $(1+i)^i=$ ________________________.

3. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2+i)^n z^n$ 的收敛半径是 ____________________.

4. $\int_C \mathrm{Re} z \mathrm{d}z =$ ______________________, 其中 C 为从 0 到 $2+i$的直线段.

5. $\mathrm{Res}[z^2 \sin \frac{1}{z},\ 0] =$ __________________.

6. 函数 $w = z^2 + 2z$ 在 $z = i$处的转动角为 ____________.

7. $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^5} \mathrm{d}z =$ __________________.

三、（本题满分8分） 证明 $u = x^2 - y^2 - y$是调和函数, 并求相应的解析函数 $f(z) = u + iv$, 满足 $f(0) = i$.

四、（本题满分8分） 将函数 $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}$ 在圆环域: (1) $1 < |z| < +\infty$; (2) $0 < |z-1| < 1$ 内分别展开成洛朗级数.

五、 （本题满分12分）设 $f(z)=\dfrac{z^2(z-1)}{z+1},\ g(z)=e^z.$

(1) 求 $\dfrac{f(z)}{[g(z)-1]^2}$ 在扩充复平面上的所有奇点, 并判别它们的类型. 如果是极点, 指出它的级.

(2) 求$\mathrm{Res}\Big[\dfrac{f(z)}{g(z)},\ \infty\Big]$.

六、 计算下列积分（本题共2小题，每小题7分，满分14分）

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x.$

2. $\oint_C \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$, 其中 C 是不经过点 1 与 -1 的任意正向简单闭曲线.

七、（本题满分6分） 证明：若 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的 m 级零点, 则 z_0 是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一级极点, 且 $\mathrm{Res}\Big[\dfrac{f'(z)}{f(z)}, z_0\Big] = m$.