Exploring the Physical Manifestation of Humanity's Subconscious Desires

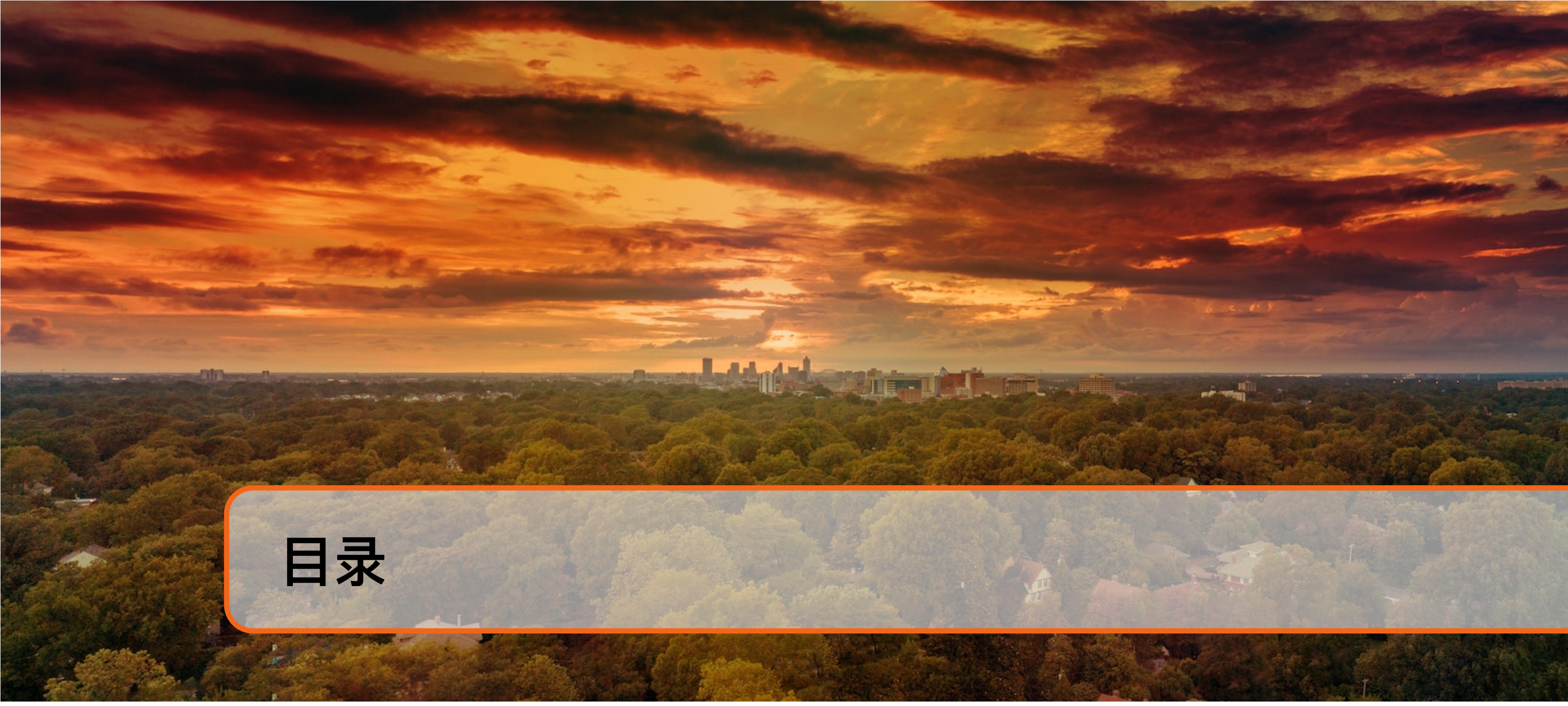
A Practical Guide

Goro Akechi

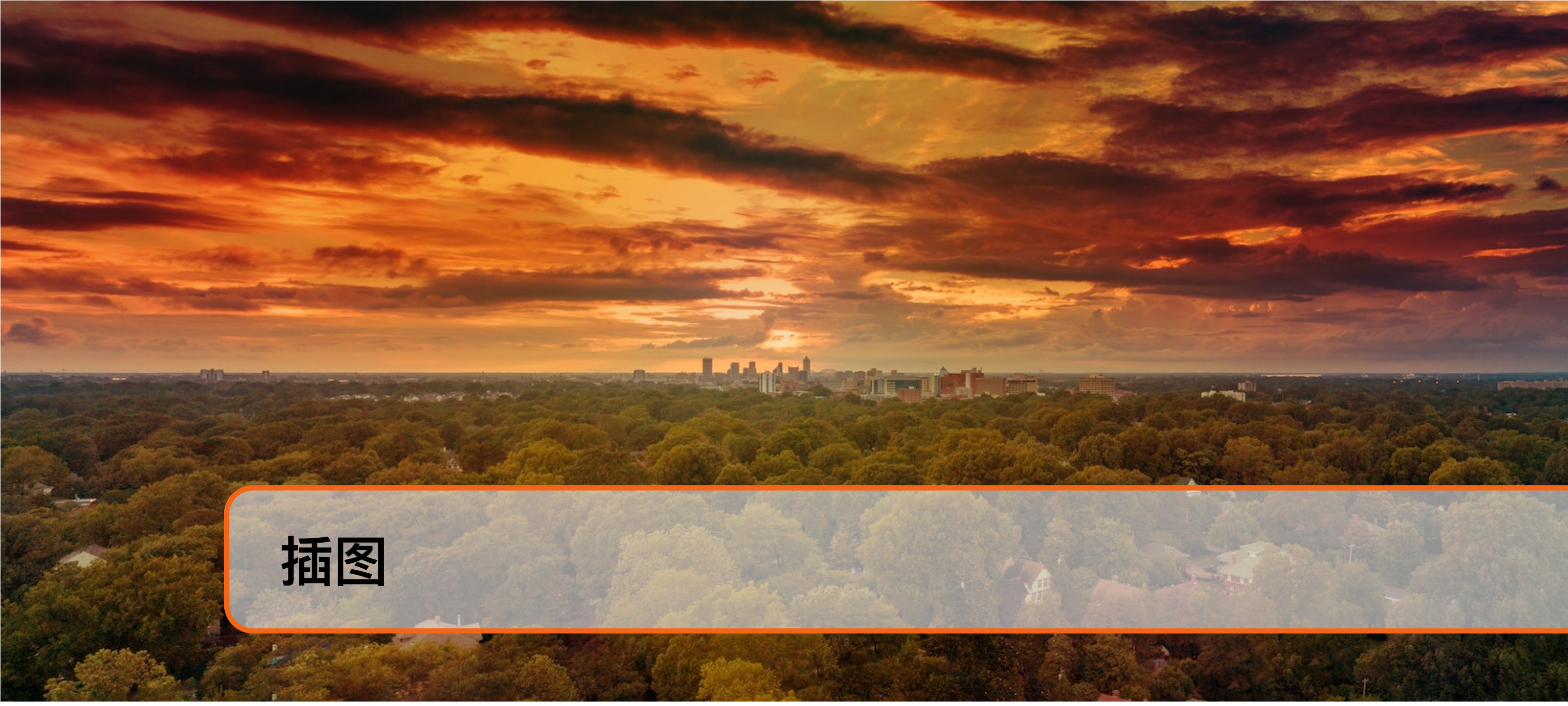
Published by Publisher

book-website.com

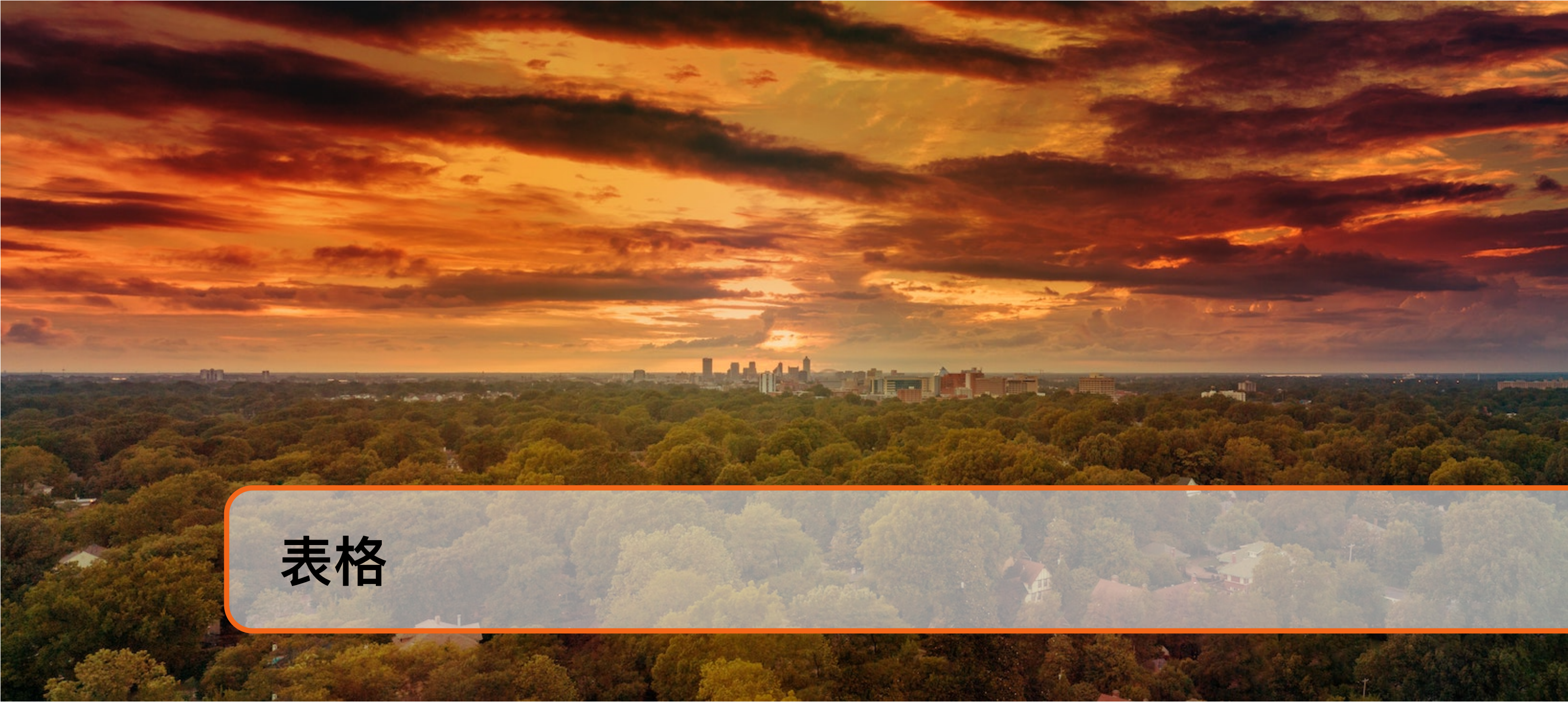
First printing, March 2022



目录



插图



表格

Part One Title

1. Pre-requisite knowledge:Basic Conception

1.1 Explanation of symbols

在抽象代数的学习中，会使用到集合中的知识，当然也会使用到集合中的各种符号，在这一小节中，对这些符号进行一遍复习。

1.1.1 不同数的符号表示

- $\mathbb{R}$ 全体实数 (有理数和无理数) 的集合
- $\mathbb{N}$ 全体自然数集合
- $\mathbb{N}^*$ 全体非负整数排除 0 的集合
- $\mathbb{Q}$ 全体有理数 (整数和分数) 的集合
- $\mathbb{Z}$ 全体整数的集合
- $\mathbb{C}$ 全体复数的集合

1.1.2 集合中的常见概念符号

- 集合 A,B,C
- 元素 a,b,c
- 空集 $\emptyset$
- 元素与集合之间的从属关系:$\in$,$\notin$
- 集合与集合之间的从属关系:$\subset$,$\subseteq$,$\not\subset$
- 交集，补集，并集：$A\cup B$ $A\cap B$,$A^{\complement}$

1.1.3 集合中的常见概念

要证明两个集合相等，只需要证明这两个集合相互包含即可，这是一个非常常见的证明集合相等的手段。

Theorem 1.1 定理一：两个集合 A,B 相等的充要条件:$A = B \Longleftrightarrow A \subset B \Longleftrightarrow B \subset A$

在抽象代数中,我们将使用集合的笛卡尔积来定义映射,这是一个非常重要的概念。

Theorem 1.2 我们称:$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n)|a_i \in A_i\}$ 为 n 个集合 $A_1, A_2, ...A_n$ 的笛卡尔积。

() 内表示的是有序数组，而 a_1 则表示的是 A_1 里的元素。

■ **Example 1.1**

$$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}, A \times B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$$

■

根据上面这个例题，我们可以推断出一个结论。

Theorem 1.3 一般地，如果 $|A| = m, |B| = n$ 那么 $|A \times B| = mn$

R 一般，我们使用 $|A|$ 来表示 A 集合中元素的个数。比如上面的 $A \times B$ 表示的就是 AB 笛卡尔积所构成的集合的元素的个数。

1.2 mapping

Theorem 1.4 映射的定义

设 $\emptyset$ 是从笛卡尔积 $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ 到集合 D 的一个法则，如果 $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ 中的每一个元素 $(a_1, a_2, ...a_n)$ 都有 D 中唯一的元素 d 与之对应，那么我们称 $\emptyset$ 是从 $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ 到 D 的一个映射。

■ **Example 1.2** 设 $A_1 = \{$东, 西$\}, A_2 = \{$南$\}, D = \{$高，低$\}$, 则 $\emptyset_1$(西，南)= 高不是 $A_1 \times A_2$ 到 D 的映射，因为只定义了一种情况，总共有两种情况，没有进行一一对应。如果改为 $\emptyset_2$(西，南)= 高,$\emptyset_2$(东，南)= 低, 符合定义，所以是 $A_1 \times A_2$ 到 D 的映射。 ■

■ **Example 1.3** 设 $A_1 = D = \mathbb{R}$,

$\emptyset(a) = a, a \neq 1$

$\emptyset(1) = b, b^2 = 1$

不是 A_1 到 D 的映射。

虽然这个映射对每一个定义域内的变量都进行了映射，但是在自变量为 1 的时候 b 可以等于 +1 也可以等于–1, 不符合一一对应的条件，所以不是映射。 ■

■ **Example 1.4** 设 $A_1 = D = \mathbb{Z}_+$, 则

$\emptyset(a) = a - 1$

不是 A_1 到 D 的映射。

由于 A 和 D 都是属于正整数集合，所以当 a=1 的时候映射结果不在 D 集合内，所以不是。 ■

Theorem 1.5 映射相等

设 $\emptyset_1,\emptyset_2$ 都是从笛卡尔积 $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ 到集合 D 的映射，如果对于 $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ 中的每一个元素 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 都有

$$\emptyset_1(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\emptyset_2(a_1,a_2,\ldots,a_n),$$

则称这两个映射 $\emptyset_1,\emptyset_2$ 是相等的。

R 特别注意：两个映射相等，实际上的要求是:
- 它们的定义域相等
- 它们的作用效果是相通的

■ **Example 1.5** 设 A=D 都表示正整数的集合,$\emptyset_1:A\to D$ 定义为:$\emptyset_1(a)=1,\emptyset_2:A\to$ 定义为:$\emptyset_2(a)=a^0$，则 $\emptyset_1=\emptyset_2$

由于前提条件是正整数的集合，而不是自然数，元素自然不可能是 0，所以定义域一样，而作用效果也一样，映射的结果都是 1，所以映射是相等的，但是如果将本例改为自然数，则是错误的。 ■

1.3 algebraic operation

1.3.1 Basic Algebraic Operation

本节的目标任务就是重新定义代数运算，打破之前对代数运算的认知，从映射与集合的观点来重新定义。

Theorem 1.6 一个从 $A\times B$ 到 D 的映射叫做一个 $A\times B$ 到 D 的代数运算。

映射运算 $\emptyset{:}A\times B\to D,(a,b)\to d=\emptyset(a,b)$

代数运算 ∘: $A\times B\to D,(a,b)\to d=a\circ b$

■ **Example 1.6** 设 $A=\mathbb{Z},B=\mathbb{Z}-\{0\},D=\mathbb{Q}$, 则

$$\circ:(a,b)\to\tfrac{a}{b}=a\circ b$$

是一个 $A\times B$ 到 D 的代数运算，也就是普通的除法。

对于被除数是整数，除数是不为 0 的整数来说，除法的运算结果既有可能是分数，也有可能是不为 0 的整数，所以综合来看映射自然是有理数集。

■

■ **Example 1.7** 设 A={1,2},B={1,2},D={奇，偶}, 则

$$\circ:(1,1)\to \text{奇},\ (1,2)\to \text{奇},\ (2,1)\to \text{偶},\ (2,2)\to \text{偶}$$

是一个 $A\times B$ 到 D 的代数运算。

对于 $A\times$B 笛卡尔积的每一个有序数组都规定了映射的结果，并且结果都在 D 集合中存在，所以自然符合代数运算的含义。 ■

Theorem 1.7 我们称 $A\times A$ 的代数运算 $\circ$ 为 A 上的代数运算，或者 A 上的二元运算。$\circ$ 具有封闭性。

■ **Example 1.8** 设 $A=\mathbb{Z}$, 则普通数的加法，减法，乘法，都是集合 A 上的代数运算。

结论当然是成立的，任意一个整数 + 整数，整数–整数，整数 * 整数，结果都是整数。

■

1.3.2 operational rule

1.3.2.1 associative law &commutative law

Theorem 1.8 设 $circ$ 是集合 A 上的一个代数运算。

- 如果对于 $\forall a,b,c\in A$，都有 $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$, 则称 $\circ$ 适合结合律。
- 如果对于 $\forall a,b\in A$，都有 $a\circ b=b\circ a$, 则称 $\circ$ 适合交换律。

■ **Example 1.9** 在有理数集 $\mathbb{Q}$ 上规定代数运算 $\circ$ 为普通加法 +, 那么显然 $\circ$ 适合结合律和交换律，并且显然有:

$$[(1\circ 2)\circ(-1)]\circ(-2)=0,$$
$$1\circ\{[2\circ(-1)]\circ(-2)\}=0,$$
$$\{[(-2)\circ 2]\circ 1\}\circ(-1)=0.$$

从这个例子可以看出，当 $\circ$ 适合结合律和交换律的时候，任意方式加括号不改变若干个元素的乘积，任意改变元素的顺序也不改变若干元素的乘积。 ■

Theorem 1.9 如果集合 A 上的代数运算适合结合律，那么任意加括号都不改变若干元素的运算结果。

Theorem 1.10 如果集合 A 上的代数运算适合结合律和交换律，那么任意加括号，任意改变元素的顺序，都不改变若干元素的运算结果。

■ **Example 1.10** 设 A={所有不为零的实数},$\circ$ 是普通数的除法 $a\circ b=\frac{a}{b}$, 判断 $\circ$ 是否适合结合律。

不适合。反例:$(36\circ 12)\circ 3=3\circ 3=1$, 而 $36\circ(12\circ 3)=36\circ 4=9$

■

R 证明结论中，要证明一个结论是错误的，只需要举出一个反例即可。而要证明一个结论是对的，需要证明所有情况都是正确的。

■ **Example 1.11** 设 A={a,b,c}，规定:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

这道题的结论是所有情况都是正确的，但是我们要证明这个结论正确，我们需要证明每一个结论都是正确的。但是如果挨个证明，总共有 27 个等式。我们观察 a 发现这是一种特殊情况，$a \circ any = any, any\circ = any$, 所以 a 是类似于乘法中 1 的作用，我们根据这个特性，将情况分为 x,y,z 中有 a 和 x,y,z 中不存在 a 的情况。

证明. 对于任意的 x,y,z$\in A$,

1. 当 x,y,z 中至少有一个为 a 的时候，结合律成立:

a. 当 x=a 的时候，$(x \circ y) \circ z = y \circ z, x \circ (y \circ z) = y \circ z$

b. 当 y=a 的时候,$(x \circ y) \circ z = x \circ z, x \circ (y \circ z) = x \circ z$

c. 当 z=a 的时候，$(x \circ y) \circ z = x \circ y, x \circ (y \circ z) = x \circ y$

2. 当 x,y,z 中任何一个都不为 a 的时候，结合律成立，这个时候情况只有 $2^3 = 8$，只需要证明每一种情况均成立，则结合律成立。

a.$(b \circ b) \circ b = c \circ b = a, b \circ (b \circ b) = b \circ c = a$

b.$(b \circ b) \circ c = c \circ c = b, b \circ (b \circ c) = b \circ a = b$

c.$(b \circ c) \circ b = a \circ b = b, b \circ (c \circ b) = b \circ a = b$

d.$(b \circ c) \circ c = a \circ c = c, b \circ (c \circ c) = (b \circ b = c)$

e.$(c \circ b) \circ b = a \circ b = b, c \circ (b \circ b) = c \circ c = b$

f.$(c \circ b) \circ c = a \circ c = c, c \circ (b \circ c) = c \circ a = c$

g.$(c \circ c) \circ b = b \circ b = c, c \circ (c \circ b) = c \circ a = c$

h.$(c \circ c) \circ c = b \circ c = a, c \circ (c \circ c) = c \circ b = a$ ■

■

■ **Example 1.12** 设 A={a,b,c,d}, 规定:

∘	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	b	d
d	d	c	a	b

判断 ∘ 是否适合交换律。已知有限集 A 上的代数运算 ∘ 的运算表，你能判断 ∘ 是否适合交换律吗？得到的规律是什么？

不合适,$c \circ d = d$, 而 $d \circ c = a$，结论: 代数运算 ∘ 适合交换律当且仅当其运算表中元素关于主对角线对称。 ■

1.3.2.2 cancellation law

Theorem 1.11 设 ∘ 是集合 A 上的一个代数运算,$\forall a,b,c \in A.$,

1. 若 $a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c$，则称 ∘ 适合左消去律

2. 若 $b \circ a = c \circ a \Rightarrow b = c$, 则称 ∘ 适合右消去律。3. 若 ∘ 既适合右消去律又适合左消去律，则称 ∘ 适合消去律。

■ **Example 1.13** 设 A={a,b,c,d}, 规定:

$\circ_3$	a	b	c	d
a	a	b	c	b
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$\circ_4$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

判断上述代数运算是否适合左消去律或右消去律。已知有限集 A 上的代数运算 ∘ 的运算表，你能得到判断 ∘ 是否适合左消去律或右消去律的规律吗?

由于集合中元素具有互异性，每一个方格中的元素都不能相等，这也就说明如果对于一行某一个元素对应每一列的元素结果为相等的，说明不符合左消去律，而某列一个元素对应每一行的元素结果为相等的，则说明不符合右消去律。举个例子: 以第一个表格中第二行 a 为例，对应第三列和第五列的元素都是 b,$a \circ b = b, a \circ d = b \Rightarrow b = d$, 由于集合元素中的互异性，$b \neq d$，所以左消去律不符合，同理右消去律也不符合。对于第二个表格，既符合左消去律，也符合右消去律，所以符合消去律。 ■

1.3.3 distributive law

特别注意，分配律是对于两种代数运算而言的，和之前的运算律不一样。

Theorem 1.12 设 $\otimes, \oplus$ 是集合 A 上的两个代数运算，$\forall a_1, a_2, b \in A.$

1. 若 $b \otimes (a_1 \oplus a_2) = (b \otimes a_1) \oplus (b \otimes a_2)$, 则称 $\otimes$ 对于 $\oplus$ 适合左分配律;

2. 若 $(a_1 \oplus a_2) \otimes b = (a_1 \otimes b) \oplus (a_2 \otimes b)$, 则称 $\otimes$ 对于 $\oplus$ 适合右分配律，或者第二分配律。

3. 若 $\otimes, \oplus$ 既适合左分配律，又适合右分配律，则称 $\otimes, \oplus$ 适合分配律。

1.4 Mapping and transformations

Theorem 1.13 设 $\phi: A \to \bar{A}$ 是一个映射，对于任意的 $a,b \in \bar{A}$, 如果 $a \neq b \Rightarrow \phi(a) \neq \phi(b)$, 则称 ϕ 是从 A 到 $\bar{A}$ 的单射。

Theorem 1.14 $\phi: A \to \bar{A}$ 是单射当且仅当对于任意的 $a,b \in \bar{A}, \phi(a) = \phi(b) \Rightarrow = b$

Theorem 1.15 设 $\phi: A \to \bar{A}$ 是一个映射, 如果对于任意的 $b \in \bar{A}$, 都存在 $a \in A$, 有 $b = \phi(a)$, 则称 ϕ 是从 A 到 $\bar{A}$ 的满射。既是单射又是满射的映射称为一一映射 (双射)。

Theorem 1.16 设 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$ 是两个映射。规定 $g \circ f: A \to C$ 为对于任意的 $x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$，则称 $g \circ f$ 为 f 与 g 的复合映射。

■ **Example 1.14** 设 f(x)=sinx,g(x)=x^3，则 f 与 g 的复合函数为 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = sin^3 x$ ■

Theorem 1.17 单射的复合是单射；满射的复合是满射；双射的复合是双射。

为了方便理解，可以来看看这几幅图进行直观对比：

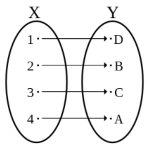


图 1.1: 双射

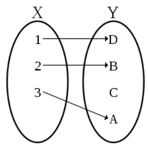


图 1.2: 单射但不满射

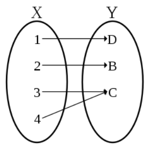


图 1.3: 满射但不单射

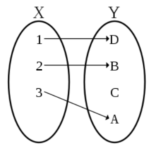


图 1.4: 单射但不满射

■ **Vocabulary 1.1 — 单射.** 指将不同的变量映射到不同的值的函数

■ **Vocabulary 1.2 — 满射.** 指陪域等于值域的函数。

■ **Vocabulary 1.3 — 双射.** 既是单射又是满射的函数

Theorem 1.18 设 $f: A \to B$ 和 $g: B \to A$ 是两个映射。如果 $f \circ g = id_B : B \to B$ 且 $g \circ f = id_A : A \Rightarrow A$, 则称 f 与 g 互为逆映射。

Theorem 1.19 双射存在唯一的逆映射，且这个逆映射也是双射

证明. 设 $f: A \to B$ 是一个双射.

我们规定 $f^{-1}: B \to A$ 为对于任意的 $y = f(x) \in B, f^{-1}(y) = x$, 即原像运算。由于 f 是满射，说明 B 集合中的每一个元素都可以对应 A 中唯一的元素，这符合映射的定义（详情可以看笛卡尔积定义映射的部分)，所以通过满射的条件，我们证明了双射存在逆映射

接下来我们应该证明逆映射是一个单射。任意取 $f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2) \in B$, 这个是根据 f 是单射可以得到的，所以 $f^{-1}(y_1) = x_1 \neq x_2 = f^{-1}(y_2)$, 根据 $x_1 \neq x_2$ 作为媒介，我们推出了 $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$, 从而可以证明 f^{-1} 是单射

接下来证明逆映射是满射的情况, 这个的证明和证明单射是非常像的，由于 f 是映射, 任取 $x \in A, f(x) = y \in B$。这说明了 x 在 f^{-1} 的原像是存在的，从而 f^{-1} 自然是满射。

然后需要证明 f^{-1} 是 f 的逆映射。对于任意的 $x \in A$, 如果令 $x_1 = (f^{-1} \circ f)(x)$, 则 $x_1 = f^{-1}(f(x))$, 从而 $f(x) = f(x_1)$。由于 f 是单射, 所以可以得到 $x_1 = x$, 于是 x=$(f^{-1} \circ f)(x)$ 对于任意的 $x \in A$ 都成立。这就证明了 $f^{-1} \circ f = id_A$，同理可证 $f \circ f^{-1} = id_B$

最后需要证明逆映射的唯一性, 设 g 也是 f 的一个逆映射，则由于逆映射的定义必然有 $g \circ f = id_A, f \circ g = id_B$，所以 $g = g \circ id_B = g \circ (f \circ f^{-1} = (g \circ f) \circ f^{-1}) = id_A \circ f^{-1} = f^{-1}$ ■

Definition 1.1 一个 A 到 A 得映射叫做 A 的一个变换。一个 A 到 A 的单射，满射，或 A 与 A 之间的一一映射（双射）叫做 A 的一个单射变换，满射变换或一一变换。

Theorem 1.20 变换的复合适合结合律。

证明. 设 T 表示集合 A 上所有的变换的集合，对于任意的 $f,g,h \in T$, 因为对于任意的 $x \in A$,:

$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))),$

$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$

最后根据映射相等的定义，立即推 $(f \circ g) \circ h = f(\circ(g \circ h))$ ■

■ **Example 1.15** 假定 ϕ 是 A 与 $\bar{A}$ 之间的一一映射,$a \in A$, 则 $\phi^{-1}[\phi(a)] = \phi[\phi^{-1}(a)] = ?$

若 phi 是 A 的一一变换，这两个问题的结果又是什么?

1. ϕ 是 A 与 $\bar{A}$ 之间的一一映射，$\phi^{-1}[\phi(a)] = a, \phi[\phi^{-1}(a)]$ 一般不存在，因为一一映射是从 A$\Rightarrow B$ 的一个映射，在 B 中不一定定义域包括 $\phi(a)$
2. ϕ 是 A 的一个一一变换的时候，两式都等于 a，对于第二条可以使用变换的结合律来得到结果 $\phi[\phi^{-1}(a)] = \phi^{-1}[\phi(a)] = a$, 关键在于此时 $\phi(a), a$ 都在 A 中，一定有定义。

■

1.5 同态

Definition 1.2 设 $(A, \circ), (\bar{A}, \bar{\circ})$ 是两个代数系统，$\phi : A \to \bar{A}$ 是一个映射，若对于任意的 $a, b \in A$, 都有 $\phi(a \circ b) = \phi(a) \bar{\circ} \phi(b)$，(乘积的像等于像的乘积)，则称 ϕ 是从 A 到 $\bar{A}$ 的同态映射。满的同态映射也称为同态满射，或者满同态。若 A 到 $\bar{A}$ 存在满同态，则称两个代数系统 $A, \bar{A}$ 是同态的，记为 $A \backsim \bar{A}$。

R 在下面的三个例子中，我们用到了两个代数系统 $(A, \circ), (\bar{A}, \circ)$。这里 A=$\mathbb{Z}, \circ$ 是普通数的加法，而 $\bar{A}$ ={-1,1},$\bar{\circ}$ 是普通数的乘法。

■ **Example 1.16** $\phi_1 : A \Rightarrow \bar{A}$ 定义为: 对于任意的 $a \in A, \phi_1(a) = 1$, 则 ϕ_1 是同态，但不是满同态。 ■

证明. 由于 $\bar{A}$ 中的集合元素有两个，而根据这个映射法则只能对应一个，所以肯定不会是满同态，接下来验证是否为同态，我们只需要根据定义 $\phi(a+b)$，由于 a+b 肯定为整数，所以为 1，而 $\phi(a) \times \phi(b) = 1 \times 1 = 1$，两式相等，所以同态。 ■

■ **Example 1.17** $\phi_2 : A \to \bar{A}$ 的定义为:$\phi_2(a) = \begin{cases} -1, & \text{a 为奇数} \\ 1 & \text{a 为偶数} \end{cases}$，则 ϕ_2 是满同态。 ■

证明. 首先证明同态，由于和奇偶性相关，我们需要分情况进行讨论: 假设第一个数为 a, 第二个数为 b

- a 为奇，b 为偶。$\phi(a+b) = -1, \phi(a) \times \phi(b) = -1$, 符合同态的定义
- a 为奇，b 为奇。$\phi(a+b) = 1, \phi(a) \times \phi(b) = 1$，符合同态的定义
- a 为偶，b 为奇,$\phi(a+b) = -1, \phi(a) \times \phi(b) = -1$，符合同态的定义
- a 为偶，b 为偶,$\phi(a+b) = 1, \phi(a) \times \phi(b) = 1$，符合同态的定义

由于 $\bar{A}$ 为 {–1,1}, 而映射的结果也是, 所以是满同态。 ■

■ **Example 1.18** $\phi_3 : A \to \bar{A}$ 定义为: 对于任意的 $a \in A, \phi_3(a) = -1, \phi_3$ 不是同态，也不是满射。 ■

证明. 由于集合 A 是整数范围，而映射结果都是–1，肯定不是满射。$\phi(a+b) = -1 \neq \phi(a) \times \phi(b) = 1$，所以也不是同态 ■

Theorem 1.21 设 $(A,\circ),(\bar{A},\bar{\circ})$ 是两个代数系统，若 $A \backsim \bar{A}$，则

(1) 若 $\circ$ 适合结合律，那么 $\bar{\circ}$ 也适合结合律

(2) 若 $\circ$ 适合交换律，那么 $\bar{\circ}$ 也适合交换律

证明. 先证明结合律:

因为 $A \backsim \bar{A}$, 则说明代数系统 A 到 $\bar{A}$ 是满同态的。由于满射,$\forall \phi(a), \phi(b), \phi(c) \in \bar{A}$, 都存在对应的 $a,b,c \in A$。$(\phi(a) \circ \phi(b)) \circ \phi(c) = \phi(a \circ b) \circ \phi(c) = \phi(a \circ b \circ c)$，又由于 $\phi(a) \circ (\phi(b) \circ \phi(c)) = \phi(a) \circ \phi(b \circ c) = \phi(a \circ b \circ c)$, 所以结合律成立。

接着证明交换律成立:$\phi(a) \circ \phi(b) = \phi(a \circ b)$，而 $\phi(b) \circ \phi(a) = \phi(b \circ a)$, 由于 $a,b \in A$, 且 A 的代数系统遵循交换律，所以 $\phi(a) \circ \phi(b) = \phi(b) \circ \phi(a)$, 故交换律成立。 ■

类似地，我们可以得到下面的结论:

Theorem 1.22 设 $(A,\odot,\oplus),(\bar{A},\bar{\odot},\bar{\oplus})$ 是两个代数系统，$\phi : A \to \bar{A}$ 是满射，若对于任意的 $a,b \in A$, 有

$\phi(a \odot b) = \phi(a)\bar{\odot}\phi(b), \quad \phi(a \oplus b) = \phi(a)\bar{\oplus}\phi(b)$

则

(1) 若 $\odot,\oplus$ 适合第一分配律，那么 $\bar{\odot},\bar{\oplus}$ 也适合第一分配律。

(2) 若 $\odot,\oplus$ 适合第二分配律，那么 $\odot,\oplus$ 也适合第二分配律。

证明. 由于 $\phi : A \to \bar{A}$ 是满射，所以 $\forall \phi(a), \phi(b), \phi(c)$，都存在 $a,b,c \in A$，首先来证明左分配律:

$\phi(a)\bar{\odot}(\phi(b)\bar{\oplus}\phi(c)) = \phi(a)\bar{\odot}(\phi(b) \oplus \phi(c)) = \phi(a \odot (b \oplus c))$, 由于 A 中的代数系统符合第一分配律，$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$, 所以 $\phi(a \odot (b \oplus c)) = \phi((a \odot b) \oplus (a \odot c)) =$

$\phi(a\odot b)\bar{\oplus}\phi(a\odot c)=(\phi(a)\bar{\odot}\phi(b))\bar{\oplus}(\phi(a)\bar{\odot}\phi(c))$，从而得证，而第二分配律证法相同，省略。 ■

■ **Example 1.19** 设 $(A,\circ),(\bar{A},\bar{\circ}),(\bar{\bar{A}},\bar{\bar{\circ}})$ 是三个代数系统。证明: 若 $A\sim\bar{A},\bar{A}\sim\bar{\bar{A}}$，则 $A\sim\bar{\bar{A}}$

由于 $A\sim\bar{A},\bar{A}\sim\bar{\bar{A}}$, 所以存在满同态:$f:A\to\bar{A},g:\bar{A}\to\bar{\bar{A}}$, 因为 f,g 都是满射, 所以复合映射 $g\circ f:A\to\bar{\bar{A}}$ 也是满射。下面来证明 $g\circ f$ 是同态映射
对于任意的 $a,b\in A$
$(g\circ f)(a\circ b)=g(f(a\circ b))$
$=g(f(a)\bar{\circ}f(b))=g(f(a))\bar{\bar{\circ}}g(f(b))$
最后根据复合映射的定义:$=(g\circ f)(a)\bar{\bar{\circ}}(g\circ f)(b)$
所以 $g\circ f$ 是一个同态映射，因此 $A\circ\bar{\bar{A}}$ ■

Theorem 1.23 同态映射的复合映射必定是同态映射

类似的结果还有:
- 满同态的复合一定是满同态;
- 单同态的复合一定是单同态;
- 同构的复合一定是同构;

1.6 同构与自同构

Definition 1.3 — 同构与自同构.

设 $(A,\circ),(\bar{A},\bar{\circ})$ 是两个代数系统，$\phi:A\to\bar{A}$ 是两个系统间的一个映射。如果 ϕ 既是双射又是同态映射，则称 ϕ 是从 A 到 $\bar{A}$ 的同构映射。

若 A,$\bar{A}$ 之间存在同构映射，则称 A 与 $\bar{A}$ 同构，记为 $A\cong\bar{A}$。特别地，当 $\bar{A}=A,\bar{\circ}=\circ$ 的时候，我们也称同构映射 $\phi:A\to A$ 为 A 上的自同构。

■ **Example 1.20** 设 $A=\{1,2,3\},\bar{A}=\{4,5,6\}$，下面分别是这两个集合上定义的二元运算:

$\circ$	1	2	3
1	3	3	3
2	3	3	3
3	3	3	3

$\bar{\circ}$	4	5	6
4	6	6	6
5	6	6	6
6	6	6	6

则 $A\cong\bar{A}$ ■

证明. 我们需要找到一个同构映射。设 $\phi(1)=4,\phi(2)=5,\phi(3)=6$, 则 ϕ 是 A 到 $\bar{A}$ 的双射。然后需要证明同态:$\forall a,b\in A$，$\phi(a\circ b)=6,\phi(a)\bar{\circ}\phi(b)=6$, 这说明 ϕ 还是 A 到 $\bar{A}$ 的同态映射，还是同构映射。所以 $A\cong\bar{A}$ ■

■ **Example 1.21** 设 $A=\{0,1,2,3\},B=\{1,i,-1,-i\},C=$\{立，左，后，右\}，下面分别是这三个集合上定义的二元运算:

$\circ$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\bar{\circ}$	1	i	−1	−i
1	1	i	−1	−i
i	i	−1	−i	1
−1	−1	−i	1	i
−i	−i	1	i	−1

$\bar{\bar{\circ}}$	立	左	后	右
立	立	左	后	右
左	左	后	右	立
后	后	右	立	左
右	右	立	左	后

则 $A \cong B, A \cong C$ ■

证明. 首先证明第一项内容，我们先找双射符合条件的内容:

$\phi(0) = 1, \phi(1) = i, \phi(2) = -1, \phi(3) = -i$ 即符合，由于无法获取解析式，观察要验证的表达式:$\phi(a \circ b) = \phi(a)\bar{\circ}\phi(b)$, 对应表格的内容，就是我们需要验证每一个表格对应的位置中，第一个表格通过 ϕ 映射是否为第二个表格的内容，经过逐一验证符合，所以 $A \cong B$。

同理可证 $A \cong C$ ■

Theorem 1.24 同构具有下面的性质:

1. $A \cong A$
2. 若 $A \cong \bar{A}$, 则 $\bar{A} \cong A$
3. 若 $A \cong \bar{A}, \bar{A} \cong \bar{\bar{A}}$, 则 $\bar{A} \cong \bar{\bar{A}}$

证明. 1. $id_A : A \to A$ 是一一映射，并且 $id_A(a \circ b) = a \circ b = id_A(a) \circ id_A(b)$, 所以 id_A 是 A 上的同构映射。

2. 因为 $A \cong \bar{A}$，所以存在同构映射 $\phi : A \to \bar{A}$, 则其逆映射 $\phi^{-1} : \bar{A} \to A$ 是一一映射。$\forall a, b \in \bar{A}, \exists \phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b) \in A, \phi^{-1}(a \circ b) = \phi^{-1}(\phi(a)\bar{\circ}\phi(b)) = \phi^{-1}(\phi(a \circ b)) = a \circ b = \phi^{-1}(\bar{a} \circ \phi^{-1}\bar{b})$ ■

Theorem 1.25 设 $(A, \circ), (\bar{A}, \bar{\circ})$ 是两个代数系统，如果 $A \cong \bar{A}$, 那么

1. $\circ$ 适合交换律当且仅当 $\bar{\circ}$ 也适合交换律。
2.$\circ$ 适合结合律当且仅当 $\bar{\circ}$ 也适合结合律。
3.$\circ$ 适合左（右）消去律当且仅当 $\bar{\circ}$ 也适合左 (右) 消去律。

证明. 1.$a \circ b = b \circ a \iff \phi(a \circ b) = \phi(b \circ a) \iff \phi(a)\bar{\circ}\phi(b) = \phi(b)\bar{\circ}\phi(a)$

2.$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \iff \phi((a \circ b) \circ c) = \phi(a \circ (b \circ c)) \iff \phi(a \circ b)\phi\bar{(}c) = \phi(a)\bar{\circ}\phi(b \circ c) \iff (\phi(a)\bar{\circ}\phi(b))\bar{\circ}\phi(c) = \phi(a)\bar{\circ}(\phi(b)\bar{\circ}\phi(c))$ 3. 只证明右消去律

- 设 $\circ$ 适合右消去律，往证 $\bar{\circ}$ 也适合消去律。已知 $a \circ c = b \circ c \Rightarrow a = b$, 这样 $\phi(a)\bar{\circ}\phi(c) = \phi(b)\bar{\circ}\phi(c) = \phi(b \circ c) \Rightarrow a \circ c = b \circ c \Rightarrow a = b \Rightarrow \phi(a) = \phi(b)$
- 设 $\bar{\circ}$ 适合右消去律，往证 $\circ$ 也适合消去律。已知 $\phi(a)\bar{\circ}\phi(c) = \phi(b)\bar{\circ} \Rightarrow \phi(a) = \phi(b)$, 这样 $a \circ c = b \circ c \Rightarrow \phi(a \circ c) = \phi(b \circ c) \Rightarrow \phi(a)\phi(c) = \phi(b)\phi(c) \Rightarrow \phi(a) = \phi(b) \Rightarrow a = b$

■

类似地，我们可以得到下面的结论

Theorem 1.26 设 $(A,\oplus,\odot),(\bar{A},\bar{\oplus},\bar{\odot})$ 是两个代数系统，如果 $A\cong\bar{A}$, 那么 $\odot,\oplus$ 适合左右分配律，当且仅当 $\bar{\odot},\bar{\oplus}$ 也适合左右分配律。

Theorem 1.27 推论 设 $(A,\circ),(\bar{A},\bar{\circ})$ 是两个代数系统，如果 $\circ$ 适合某种运算律 P, 而 $\bar{\circ}$ 却不适合运算律 P, 那么 A 与 $\bar{A}$ 不同构。

■ **Example 1.22** 设 $A=\mathbb{Q}$,A 的代数运算是普通加法。$\bar{A}$={所有非零有理数};$\bar{A}$ 的乘法是普通乘法，证明 $A\ncong\bar{A}$

本例使用反证法: 假设 $A\cong\bar{A}$，则存在同构映射 $\phi:A\to\bar{A}$, 设−1 的原像是 a, 则 $\phi(a)=-1$, 从而 $\phi^2(\frac{a}{2})=\phi(\frac{a}{2}+\frac{a}{2})=\phi(a)=-1$ ■

1.7 等价关系与集合的分类

Definition 1.4 设 A 是一个集合，D={对, 错}，则称映射 $R:A\times A\to D$ 为集合 A 上的一个关系。当 R(a,b)= 对的时候，称 a 与 b 有关系 R，记为 aRb; 当 R(a,b)= 错的时候，称 a 与 b 没有关系 R

■ **Example 1.23** 设 A={1,2}, 则 $A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$. 我们定义:

$R_1(1,1)=R_1(1,2)=R_1(2,1)=$ 对,$R_1(2,2)=$ 错;

$R_2(1,1)=R_2(1,2)=$ 对,$R_2(2,1)=R_2(2,2)=$ 错;

$R_3(a,b)=$ 对; $R_4(a,b)=$ 错;

则 R_1,R_2,R_3,R_4 都是 A 上的关系 ■

Definition 1.5 设 A 是一个非空集合，我们把 $A\times A$ 的一个子集 $\bar{R}$ 称为 A 上的一个关系。对于任意的 $(a,b)\in A\times A$，当 $(a,b)\in\bar{R}$ 的时候，称 a 与 b 有关系 $\bar{R}$, 记录为 $a\bar{R}b$; 当 $(a,b)\notin\bar{R}$ 的时候，称 a 与 b 没有关系 $\bar{R}$

■ **Example 1.24** 设 A={1,2}, 则

$A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$, 我们定义:

$R_1=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$;

$R_2=\{(1,1),(1,2)\}$;

$R_3=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$;

$R_4(a,b)=\emptyset$

则 R_1,R_2,R_3,R_4 都是 A 上的关系 ■

Theorem 1.28 关系的两个定义等价

证明. 设 A 是一个非空集合,D={对，错}

$\Rightarrow$ 已知 R:$A\times A\to D$ 是集合 A 上的一个关系，

令 $\bar{R}=R^{-1}$({对}), 则 $\bar{R}$ 是 $A\times A$ 的一个子集，它是第二个定义描述的一个关系

$\Leftarrow$ 已知 $\bar{R}\subset A\times A$ 第二个定义描述的一个关系

映射 R:$A\times A\to D$ 定义为:

如果 $(a,b) \in \bar{R}$, 那么 R(a,b)= 对

如果 $(a,b) \notin \bar{R}$, 那么 R(a,b)= 错

这样 $R: A \times A \to D$ 是一个关系

■

R 我们思考一下，集合 A={1,2} 上的关系共有多少个?那么更一般地呢?集合 A={1,2,3,4,....n} 上的关系有多少个?

集合 $A \times A$ 的元素个数有 4 个，子集个数为 $2^4 = 16$ 个。更一般的情况来说，由于数组无序，使用 C 来排列 $2^{C_n^1 \times C_n^1} = 2^{n^2}$

Definition 1.6 设是˜ 集合 A 上的一个关系，如果 还满足:

- 自反性: aã; (反射律)
- 对称性: 若 ab̃, 则 bã;（对称律)
- 传递性: 若 ab̃,bc̃, 则 ac̃（推移律)

则称为˜A 上的一个等价关系，若 ab̃, 则称 a 与 b 等价

R 数之间的”等于”关系是一个等价关系。而代数系统之间的同构关系也是一个等价关系。

2. In-text Element Examples

2.1 Lists

Lists are useful to present information in a concise and/or ordered way.

2.1.1 Numbered List

1. First numbered item
    a. First indented numbered item
    b. Second indented numbered item
        i. First second–level indented numbered item
2. Second numbered item
3. Third numbered item

2.1.2 Bullet Point List

- First bullet point item
    – First indented bullet point item
    – Second indented bullet point item
        ◦ First second–level indented bullet point item
- Second bullet point item
- Third bullet point item

2.1.3 Descriptions and Definitions

Name Description
Word Definition
Comment Elaboration

2.2 International Support

àáâäãåèéêëìíĩïòóôöõøùúûüÿýñçčšž
ÀÁÂÄÃÅÈÉÊËÌÍĨÏÒÓÔÖÕØÙÚÛÜŸÝÑ
ßÇŒÆČŠŽ

2.3 Ligatures

fi fj fl ffl ffi Ty

II

Part Two Title

3. Mathematics

3.1 Theorems

3.1.1 Several equations

This is a theorem consisting of several equations.

Theorem 3.1 — Name of the theorem. In $E=\mathbb{R}^n$ all norms are equivalent. It has the properties:

$$\big|\,||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}||\,\big| \leq ||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| \tag{3.1}$$

$$||\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^{n}||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \tag{3.2}$$

3.1.2 Single Line

This is a theorem consisting of just one line.

Theorem 3.2 A set $\mathscr{D}(G)$ in dense in $L^2(G)$, $|\cdot|_0$.

3.2 Definitions

A definition can be mathematical or it could define a concept.

Definition 3.1 — Definition name. Given a vector space E, a norm on E is an application, denoted $||\cdot||$, E in $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ such that:

$$||\mathbf{x}|| = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

$$||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda|\cdot||\mathbf{x}|| \tag{3.4}$$

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \tag{3.5}$$

3.3 Notations

■ **Notation 3.1** Given an open subset G of $\mathbb{R}^n$, the set of functions φ are:

1. Bounded support G;
2. Infinitely differentiable;

a vector space is denoted by $\mathscr{D}(G)$.

3.4 Remarks

This is an example of a remark.

R The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.5 Corollaries

Corollary 3.1 — Corollary name. The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.6 Propositions

3.6.1 Several equations

Proposition 3.1 — Proposition name. It has the properties:

$$\big| ||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \big| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \tag{3.6}$$

$$||\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \tag{3.7}$$

3.6.2 Single Line

Proposition 3.2 Let $f, g \in L^2(G)$; if $\forall \varphi \in \mathscr{D}(G)$, $(f, \varphi)_0 = (g, \varphi)_0$ then $f = g$.

3.7 Examples

3.7.1 Equation Example

■ **Example 3.1** Let $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 3\}$ and denoted by: $x^0 = (1, 1)$; consider the function:

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{si } |x - x^0| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |x - x^0| > 1/2 \end{cases} \tag{3.8}$$

The function f has bounded support, we can take $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x^0| \leq 1/2 + \varepsilon\}$ for all $\varepsilon \in]0; 5/2 - \sqrt{2}[$. ■

3.7.2 Text Example

■ **Example 3.2 — Example name.** Aliquam arcu turpis, ultrices sed luctus ac, vehicula id metus. Morbi eu feugiat velit, et tempus augue. Proin ac mattis tortor. Donec tincidunt, ante rhoncus luctus semper, arcu lorem lobortis justo, nec convallis ante quam quis lectus. Aenean tincidunt sodales massa, et hendrerit tellus mattis ac. Sed non pretium nibh. Donec cursus maximus luctus. Vivamus lobortis eros et massa porta porttitor. ■

3.8 Exercises

Exercise 3.1 This is a good place to ask a question to test learning progress or further cement ideas into students' minds. ■

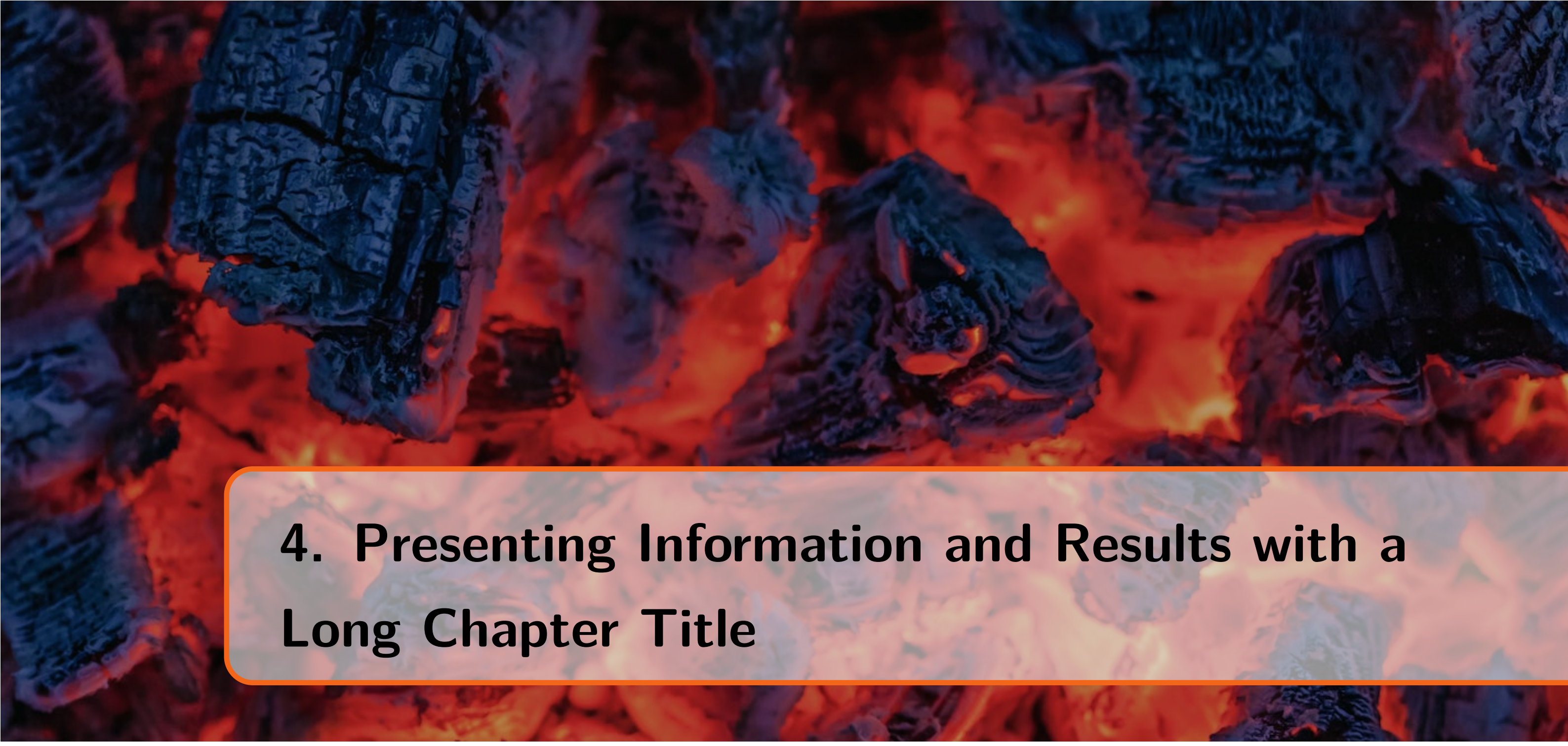
3.9 Problems

Problem 3.1 What is the average airspeed velocity of an unladen swallow?

3.10 Vocabulary

Define a word to improve a students' vocabulary.

■ **Vocabulary 3.1 — Word.** Definition of word.



4. Presenting Information and Results with a Long Chapter Title

4.1 Table

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Praesent porttitor arcu luctus, imperdiet urna iaculis, mattis eros. Pellentesque iaculis odio vel nisl ullam–corper, nec faucibus ipsum molestie. Sed dictum nisl non aliquet porttitor. Etiam vulputate arcu dignissim, finibus sem et, viverra nisl. Aenean luctus congue massa, ut laoreet metus ornare in. Nunc fermentum nisi imperdiet lectus tincidunt vestibulum at ac elit. Nulla mattis nisl eu malesuada suscipit.

Treatments	**Response 1**	**Response 2**
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

表 4.1: Table caption.

Referencing Table 4.1 in–text using its label.

4.2 Figure

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Praesent porttitor arcu luctus, imperdiet urna iaculis, mattis eros. Pellentesque iaculis odio vel nisl ullam–corper, nec faucibus ipsum molestie. Sed dictum nisl non aliquet porttitor. Etiam vulputate arcu dignissim, finibus sem et, viverra nisl. Aenean luctus congue massa, ut laoreet metus ornare in. Nunc fermentum nisi imperdiet lectus tincidunt vestibulum at ac elit. Nulla mattis nisl eu malesuada suscipit.

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

表 4.2: Floating table.

图 4.1: Figure caption.

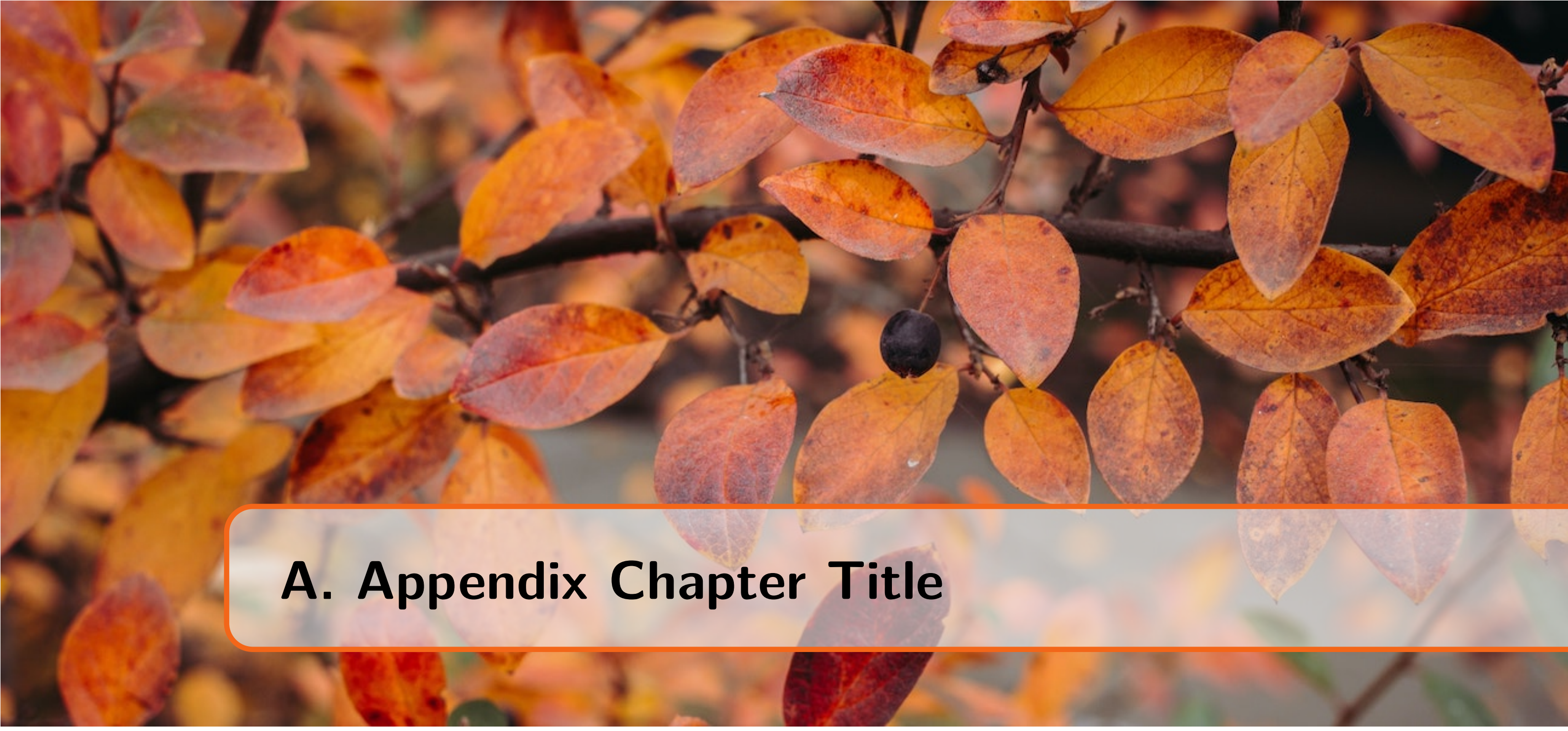
Referencing Figure 4.1 in-text using its label.

图 4.2: Floating figure.

Bibliography

Articles

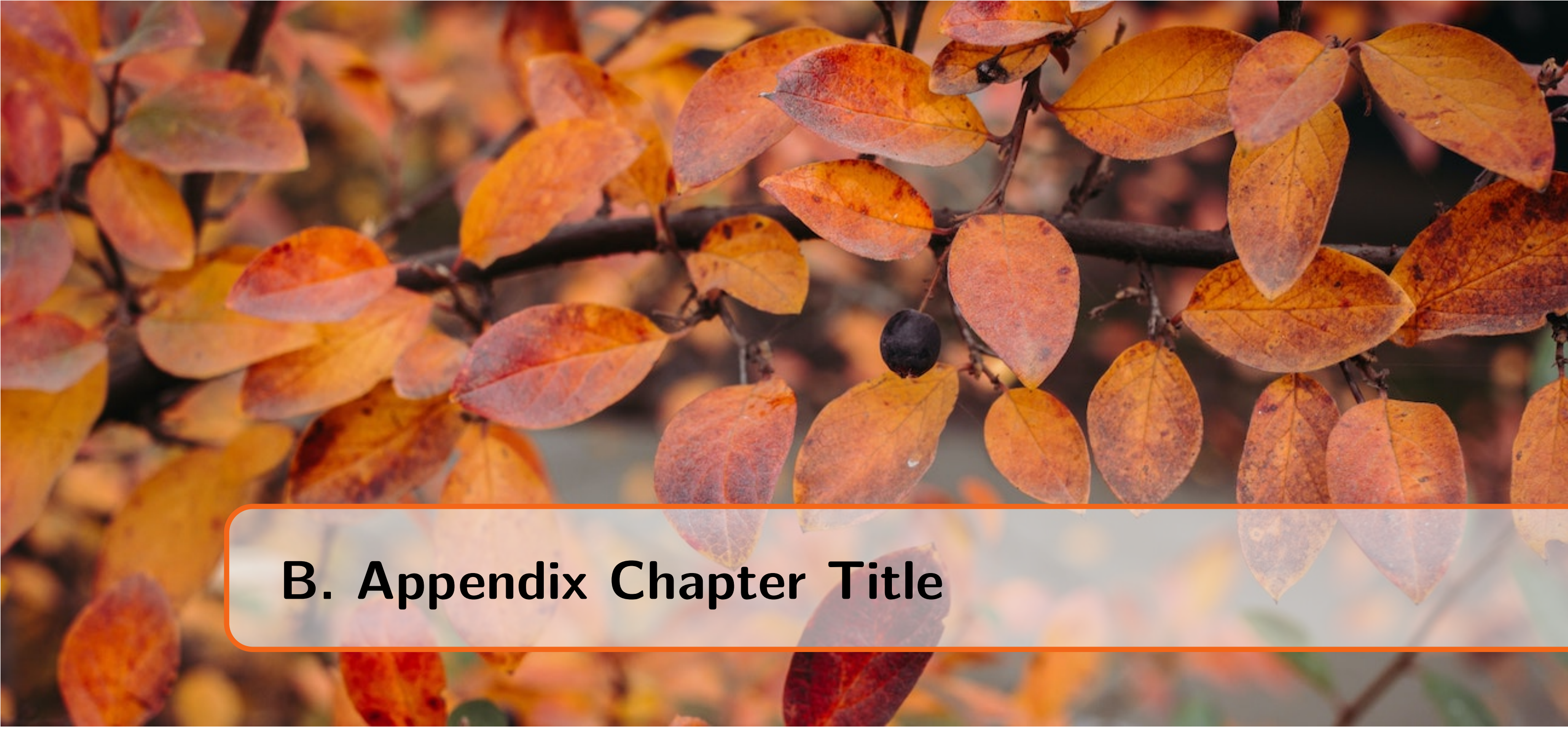
Books



A. Appendix Chapter Title

A.1 Appendix Section Title

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aliquam auctor mi risus, quis tempor libero hendrerit at. Duis hendrerit placerat quam et semper. Nam ultricies metus vehicula arcu viverra, vel ullamcorper justo elementum. Pellentesque vel mi ac lectus cursus posuere et nec ex. Fusce quis mauris egestas lacus commodo venenatis. Ut at arcu lectus. Donec et urna nunc. Morbi eu nisl cursus sapien eleifend tincidunt quis quis est. Donec ut orci ex. Praesent ligula enim, ullamcorper non lorem a, ultrices volutpat dolor. Nullam at imperdiet urna. Pellentesque nec velit eget est euismod pretium.



B. Appendix Chapter Title

B.1 Appendix Section Title

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aliquam auctor mi risus, quis tempor libero hendrerit at. Duis hendrerit placerat quam et semper. Nam ultricies metus vehicula arcu viverra, vel ullamcorper justo elementum. Pellentesque vel mi ac lectus cursus posuere et nec ex. Fusce quis mauris egestas lacus commodo venenatis. Ut at arcu lectus. Donec et urna nunc. Morbi eu nisl cursus sapien eleifend tincidunt quis quis est. Donec ut orci ex. Praesent ligula enim, ullamcorper non lorem a, ultrices volutpat dolor. Nullam at imperdiet urna. Pellentesque nec velit eget est euismod pretium.