ამოცანა 1: განაწილების კანონის შედგენა

მითითება: *ააგეთ* x, P *ცხრილი, სადაც* x *-ის მნიშვნელობები განისაზღვრება ამოცანის პირობით (მაგალითად, თუ ვეძებთ კამათლის 4-ჯერ გაგორებისას 2-იანის მოსვლის განაწილების კანონს,* x *-ის მნიშვნელობები იქნება ყველა ის რიცხვი, თუ რამდენჯერ შეიძლება 2-იანი მოვიდეს, ანუ* $0, 1, 2, 3$ *და* 4*), ხოლო* P *-ის შესაბამისი მნიშვნელობები, ზოგადად, გამოითვლება ბერნულის ფორმულით:*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

სადაც

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

p *არის ხელსაყრელი ხდომილობის ალბათობა (ანუ ზემოთხსენებულ კამათლის მაგალითში 2-იანის მოსვლის ალბათობა, რაც ტოლია* $\frac{1}{6}$*-სა), ხოლო* q *არის ხელის შემშლელი ხდომილობის ალბათობა:* $q = 1 - p$ *(ჩვენს მაგალითში* $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$*).*

n *არის დამოუკიდებელ ცდათა რაოდენობა (ჩვენს მაგალითში 4, ვინაიდან კამათელს ოთხჯერ ვაგორებთ), ხოლო* k *არის* x *-ის შესაბამისი მნიშვნელობა.*

გაითვალისწინეთ, რომ P *-ს ყველა მიღებული მნიშვნელობის ჯამი უნდა იყოს 1-ის ტოლი.*

1. კამათელს ვაგორებთ სამჯერ. შეადგინეთ ორიანის მოსვლის განაწილების კანონი.

$n=3;\quad p=\frac{1}{6};\quad q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

X	0	1	2	3
P	$P_3(0)$	$P_3(1)$	$P_3(2)$	$P_3(3)$

$$P_3(0)=C_3^0\,p^0\,q^{3-0}=\frac{3!}{0!\,(3-0)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=$$
$$=\frac{3!}{1\cdot 3!}\cdot 1\cdot\frac{5^3}{6^3}=1\cdot\frac{125}{216}=\frac{125}{216}$$

$$P_3(1)=C_3^1\,p^1\,q^{3-1}=\frac{3!}{1!\,(3-1)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=$$
$$=\frac{3!}{1\cdot 2!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5^2}{6^2}=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{25}{36}=\frac{75}{216}$$

$$P_3(2)=C_3^2\,p^2\,q^{3-2}=\frac{3!}{2!\,(3-2)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1=$$
$$=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1!}\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{216}$$

$$P_3(3)=C_3^3\,p^3\,q^{3-3}=\frac{3!}{3!\,(3-3)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0=$$
$$=\frac{1}{0!}\cdot\frac{1}{216}\cdot 1=\frac{1}{216}$$

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

შემოწმება: $\frac{125}{216}+\frac{75}{216}+\frac{15}{216}+\frac{1}{216}=\frac{216}{216}=1$ ✓

2. მონეტას ვაგდებთ ოთხჯერ. შეადგინეთ საფასურის მოსვლის განაწილების კანონი.

$n=4; \quad p=\frac{1}{2}; \quad q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

X	0	1	2	3	4
P	$P_4(0)$	$P_4(1)$	$P_4(2)$	$P_4(3)$	$P_4(4)$

$$P_4(0)=C_4^0 p^0 q^{4-0}=\frac{4!}{0!(4-0)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

$$P_4(1)=C_4^1 p^1 q^{4-1}=\frac{4!}{1!(4-1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16}$$

$$P_4(2)=C_4^2 p^2 q^{4-2}=\frac{4!}{2!(4-2)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}$$

$$P_4(3)=C_4^3 p^3 q^{4-3}=\frac{4!}{3!(4-3)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16}$$

$$P_4(4)=C_4^4 p^4 q^{4-4}=\frac{4!}{4!(4-4)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$$

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

შემოწმება: $\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{16}{16}=1$ ✓

3. მიზანში ისვრიან პირველ მოხვედრამდე. შევადგინოთ **დახარჯულ ვაზნათა** განაწილების კანონი, თუ მსროლელს აქვს სამი ვაზნა და მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0.7.

$n=3;\quad p=0{,}7;\quad q=1-0{,}7=0{,}3$

(1) როცა $X=1$, მიზანს პირველივე ცდით მოხვდა

(2) როცა $X=2$, მიზანს პირველი ცდით აცდა, მეორეთი მოხვდა

(3) როცა $X=3$, მიზანს პირველი და მეორე ცდებით აცდა და მესამე მოხვდა, ან სამივე აცდა.

ვიპოვოთ შესაბამისი ალბათობები.

(1) → $P=p=0{,}7$

(2) → $P=q\cdot p=0{,}3\cdot 0{,}7=0{,}21$

(3) → $P=q\cdot q\cdot p+q\cdot q\cdot q=0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7+0{,}3^3=$

$=0{,}3^2(0{,}7+0{,}3)=0{,}3^2\cdot 1=0{,}09$

X	1	2	3
P	0,7	0,21	0,09

შემოწმება: $0{,}7+0{,}21+0{,}09=1$ ✓

4. მსროლელს აქვს ოთხი ვაზნა და მიზანში ისვრის პირველ მოხვედრამდე. მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0.7. შეადგინეთ **დაუხარჯავ ვაზნათა** განაწილების კანონი.

$n=4$; $p=0,7$; $q=1-0,7=0,3$

(1) $X=0$, თუ სამიზნეს ასცდა პირველ სამ გასროლას და მოხვდა მხოლოდ მეოთხეს (დაუხარჯავი ვაზნები არ დარჩა), ან ასცდა ოთხივე.

(2) $X=1$, თუ სამიზნეს ასცდა პირველ ორ გასროლას და მოხვდა მესამეს (დაუხარჯავი დარჩა 1 ვაზნა)

(3) $X=2$, თუ სამიზნეს ასცდა პირველ გასროლას და მოხვდა მეორეს (დაუხარჯავი დარჩა 2 ვაზნა)

(4) $X=3$, თუ სამიზნეს მოხვდა პირველივე ვაზნა.

ვიპოვოთ შესაბამისი ალბათობები

(1) → $P=q\cdot q\cdot q\cdot p+q\cdot q\cdot q\cdot q=q^3(p+q)=$
$=0,3^3(0,3+0,7)=0,027$

(2) → $P=q\cdot q\cdot p=0,3\cdot 0,3\cdot 0,7=0,063$

(3) → $P=q\cdot p=0,3\cdot 0,7=0,21$

(4) → $P=p=0,7$

X	0	1	2	3
P	0,027	0,063	0,21	0,7

შემოწმება: $0,027+0,063+0,21+0,7=1$ ✓

ამოცანა 2: შემთხვევით სიდიდეთა კომბინაცია (ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი)

მითითება: *პირობაში მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის (x და y) განაწილების კანონი (ცხრილი).*

x	x_1	x_2	x_3
P_x	P_{x1}	P_{x2}	P_{x3}

y	y_1	y_2	y_3
P_y	P_{y1}	P_{y2}	P_{y3}

მათი გამოყენებით უნდა ააგოთ სამი ახალი ცხრილი, $x + y$, $x - y$ და xy. მათ ასაგებად, x-ის პირველი წევრისთვის y-ის ყველა წევრზე შეასრულეთ შესაბამისი მოქმედება (შეკრება, გამოკლება და ბოლოს გამრავლება), შემდეგ x-ის მეორე წევრისთვის შეასრულეთ იგივე მოქმედება და ა.შ. x-ის ყოველი წევრისთვის. სამივე ცხრილს ექნება P-ს ერთი და იგივე მნიშვნელობები, რომლებიც მიიღება შესაბამისი P_x-სა და P_y-ს ***გამრავლებით.***

$x+y$	x_1+y_1	x_1+y_2	x_1+y_3	x_2+y_1	x_2+y_2	x_2+y_3	x_3+y_1	x_3+y_2	x_3+y_2
P	$P_{x1}P_{y1}$	$P_{x1}P_{y2}$	$P_{x1}P_{y3}$	$P_{x2}P_{y1}$	$P_{x2}P_{y2}$	$P_{x2}P_{y3}$	$P_{x3}P_{y1}$	$P_{x3}P_{y2}$	$P_{x3}P_{y3}$

$x-y$	x_1-y_1	x_1-y_2	x_1-y_3	x_2-y_1	x_2-y_2	x_2-y_3	x_3-y_1	x_3-y_2	x_3-y_2
P	$P_{x1}P_{y1}$	$P_{x1}P_{y2}$	$P_{x1}P_{y3}$	$P_{x2}P_{y1}$	$P_{x2}P_{y2}$	$P_{x2}P_{y3}$	$P_{x3}P_{y1}$	$P_{x3}P_{y2}$	$P_{x3}P_{y3}$

xy	x_1y_1	x_1y_2	x_1y_3	x_2y_1	x_2y_2	x_2y_3	x_3y_1	x_3y_2	x_3y_2
P	$P_{x1}P_{y1}$	$P_{x1}P_{y2}$	$P_{x1}P_{y3}$	$P_{x2}P_{y1}$	$P_{x2}P_{y2}$	$P_{x2}P_{y3}$	$P_{x3}P_{y1}$	$P_{x3}P_{y2}$	$P_{x3}P_{y3}$

მაგალითი:

X	-1	2	3
P	0,2	0,5	0,3

Y	-2	0	4
P	0,5	0,1	0,4

X+Y	-1+(-2)	-1+0	-1+4	2+(-2)	2+0	2+4	3+(-2)	3+0	3+4
P	0,2·0,5	0,2·0,1	0,2·0,4	0,5·0,5	0,5·0,1	0,5·0,4	0,3·0,5	0,3·0,1	0,3·0,4

⇓

X+Y	-3	-1	3	0	2	6	1	3	7
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12

რიგის P უჯრები ერთი და იგივეა, რაც მიმდევრობის ცხრილში

X-Y	-1-(-2)	-1-0	-1-4	2-(-2)	2-0	2-4	3-(-2)	3-0	3-4
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12

⇓

X-Y	1	-1	-5	4	2	-2	5	3	-1
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12

XY	-1·(-2)	-1·0	-1·4	2·(-2)	2·0	2·4	3·(-2)	3·0	3·4
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12

⇓

XY	2	0	-4	-4	0	8	-6	0	12
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12

ამოცანა 3: დისპერსია

მითითება: *გამოიყენეთ დისპერსიის შემდეგი თვისებები (c აღნიშნავს რაიმე რიცხვს):*

1. $D(c) = 0$ *(რიცხვის დისპერსია ნულის ტოლია)*
2. $D(cx) = c^2 D(x)$ *(რიცხვი დისპერსიიდან გასვლისას კვადრატში ადის)*
3. $D(x \pm y) = D(x) + D(y)$ *(ორი შემთხვევის ჯამის ან სხვაობის დისპერსია ყოველთვის დისპერსიათა* **ჯამის** *ტოლია)*

---

1. $D(x) = 2; \quad D(y) = 5; \quad z = 3x - 4y; \quad D(z) = ?$

$$D(z) = D(3x - 4y) = D(3x) + D(4y) = 3^2 D(x) + 4^2 D(y) = 9 \cdot 2 + 16 \cdot 5 = 18 + 80 = 98$$

---

2. $D(x) = 5; \quad D(y) = 3; \quad z = 5x - 4y; \quad D(z) = ?$

$$D(z) = D(5x - 4y) = D(5x) + D(4y) = 5^2 D(x) + 4^2 D(y) = 25 \cdot 5 + 16 \cdot 3 = 125 + 48 = 173$$

ამოცანა 4: შუალედში მოხვედრის ალბათობა

მითითება: *გამოიყენეთ ფორმულა*

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

1. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ იპოვეთ $P\left(\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right)$

$$P\left(\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{9-4}{36} = \frac{5}{36}$$

2. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}, & 0 < x \le \frac{7}{3} \\ 1, & x > \frac{7}{3} \end{cases}$ *იპოვეთ* $P\left(\frac{3}{2} < x < 2\right)$

$$P\left(\frac{3}{2} < x < 2\right) = F(2) - F\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{6}{4} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{9}{8} - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - \left(\frac{9}{8} - \frac{6}{8}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{6}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

ამოცანა 5: k კოეფიციენტის პოვნა

მითითება: გამოიყენეთ ფორმულა

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

ზღვრები $-\infty$ და $+\infty$ ამოხსნისას ჩანაცვლდება იმ ზღვრებით, რომლებშიც არის მთავარი ფუნქცია განსაზღვრული.

---

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ kx^2, & 0 < x \le 2 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$

$$\int_0^2 kx^2\,dx = 1$$

$$\left.\frac{kx^3}{3}\right|_0^2 = 1$$

$$\frac{8k}{3} = 1$$

$$k = \frac{3}{8}$$

---

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ k\sin x, & 0 < x \le \frac{\pi}{3} \\ 0, & x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} k\sin x = 1$$

$$-k\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 1$$

$$-k\left[\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right] = 1$$

$$-k\left[\frac{1}{2} - 1\right] = 1$$

$$k = 2$$

ამოცანა 6: მოცემული განაწილების კანონიდან დისპერსიის პოვნა

მითითება: *დისპერსია გამოითვლება ფორმულით*

$$D(x) = M(x^2) - \big(M(x)\big)^2$$

სადაც $M(x) = x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots$, *ხოლო* $M(x^2) = x_1^2P_1 + x_2^2P_2 + \cdots$

მაგალითი:

x	-2	3	5
P	0.2	0.3	0.5

$$M(x) = -2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.5 = -0.4 + 0.9 + 2.5 = 3$$

$$M(x^2) = (-2)^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.3 + 5^2 \cdot 0.5 = 4 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.3 + 25 \cdot 0.5$$

$$= 0.8 + 2.7 + 12.5 = 3.5 + 12.5 = 16$$

$$D(x) = M(x^2) - \big(M(x)\big)^2 = 16 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

ამოცანა 7: განაწილების კანონის შედგენა და დისპერსიის პოვნა

მითითება: ეს ამოცანა იდენტურია 1-ლი და მე-6 ამოცანებისა. განაწილების კანონი (ცხრილის სახით) იპოვეთ 1-ლი ამოცანის მეთოდით, ხოლო დისპერსია მე-6 ამოცანის მიხედვით.

მაგალითი 1: *შეადგინეთ ერთი კამათლის გაგორებისას მოსულ ქულათა განაწილების კანონი და იპოვეთ მისი დისპერსია.*

ამოხსნა: კამათლის გაგორებისას შეიძლება მოვიდეს $1, 2, 3, 4, 5$ ან 6. თითოეულ შემთხვევას აქვს ერთი და იგივე ალბათობა: $P = \frac{1}{6}$. შესაბამისად, განაწილების კანონს ექნება შემდეგი სახე:

x	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$M(x) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{21}{6}$$

$$M(x^2) = 1^2\cdot\frac{1}{6} + 2^2\cdot\frac{1}{6} + 3^2\cdot\frac{1}{6} + 4^2\cdot\frac{1}{6} + 5^2\cdot\frac{1}{6} + 6^2\cdot\frac{1}{6}$$
$$= 1\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 9\cdot\frac{1}{6} + 16\cdot\frac{1}{6} + 25\cdot\frac{1}{6} + 36\cdot\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$D(x) = M(x^2) - \left(M(x)\right)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{546-441}{36} = \frac{105}{36}$$
$$= \frac{35}{12}$$

მაგალითი 2: *შეადგინეთ ერთი მონეტის სამჯერ აგდებისას მოსული საფასურის რაოდენობის განაწილების კანონი და იპოვეთ მისი დისპერსია.*

ამოხსნა: $n = 3$; მონეტის აგდებისას საფასური შეიძლება მოვიდეს: 0, 1, 2 ან 3-ჯერ. თითოეულ აგდებაზე, საფასურის მოსვლის ალბათობაა $p = \frac{1}{2}$, ხოლო $q = \frac{1}{2}$.

x	0	1	2	3
P	$P_3(0)$	$P_3(1)$	$P_3(2)$	$P_3(3)$

$$P_3(0) = C_3^0 p^0 q^{3-0} = \frac{3!}{0! \cdot (3-0)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P_3(1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = \frac{3!}{1! \cdot (3-1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q^{3-2} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

$$P_3(3) = C_3^3 p^3 q^{3-3} = \frac{3!}{3! \cdot (3-3)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$$

x	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$M(x) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8}$$

$$M(x^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$D(x) = M(x^2) - \left(M(x)\right)^2 = 3 - \left(\frac{12}{8}\right)^2 = 3 - \frac{144}{64} = \frac{192-144}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$$

მაგალითი 3: *ორი მსროლელი ისვრის მიზანში.* $p_1 = 0.6,\quad p_2 = 0.7.$ *შეადგინეთ მიზანში მოხვედრათა განაწილების კანონი და იპოვეთ დისპერსია.*

ამოხსნა: ვიპოვოთ მიზანში აცდენის ალბათობა ორივე მსროლელისთვის: $q_1 = 1 - 0.6 = 0.4,\quad q_2 = 1 - 0.7 = 0.3.$
გვაქვს სამი შემთხვევა:
$x = 0$, როცა მიზანს ორივე მსროლელი ააცილებს, შესაბამისად,

$$P = q_1 \cdot q_2 = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$$

$x = 1$, როცა მიზანს ან პირველი მოახვედრებს და მეორე ააცილებს, ან მეორე მოახვედრებს და პირველი ააცილებს, შესაბამისად,

$$P = p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1 = 0.6 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.4 = 0.18 + 0.28 = 0.46$$

$x = 2$, როცა მიზანს ორივე მსროლელი მოახვედრებს, შესაბამისად,

$$P = p_1 \cdot p_2 = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42$$

(შემოწმება: $0.12 + 0.46 + 0.42 = 0.58 + 0.42 = 1$*)*

შევადგინოთ განაწილების კანონი:

x	0	1	2
P	0.12	0.46	0.42

$$M(x) = 0 \cdot 0.12 + 1 \cdot 0.46 + 2 \cdot 0.42 = 1.3$$
$$M(x^2) = 0 \cdot 0.12 + 1^2 \cdot 0.46 + 2^2 \cdot 0.42 = 2.14$$
$$D(x) = M(x^2) - \left(M(x)\right)^2 = 2.14 - 1.3^2 = 2.14 - 1.69 = 0.45$$

ამოცანა 8: მოცემული ვარიაციული მწკრივიდან შერჩევითი დისპერსიის პოვნა

მითითება: *შერჩევითი დისპერსია გამოითვლება ფორმულით*

$$S^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2$$

სადაც

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots}{n_1 + n_2 + \cdots}$$

ხოლო

$$\bar{x}^2 = \frac{x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \cdots}{n_1 + n_2 + \cdots}$$

მაგალითი:

x_i	2	3	5
n_i	3	2	5

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 5}{2 + 3 + 5} = \frac{6 + 6 + 25}{10} = \frac{37}{10} = 3.7$$

$$\bar{x}^2 = \frac{2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 5}{2 + 3 + 5} = \frac{4 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 25 \cdot 5}{10} = \frac{12 + 18 + 125}{10} = \frac{155}{10} = 15.5$$

$$S^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = 15.5 - (3.7)^2 = 15.5 - 13.69 = 1.81$$

ამოცანა 9: თეორიული 1

1. განაწილების ფუნქციის ცნება

ვთქვათ გვაქვს რაიმე ელემენტალურ ხდომილობათა Ω სივრცე და მის ყოველ ელემენტარულ ხდოიმლობას შევუსაბამოთ ნამდვილი რიცხვი $X(\varpi)$ და მას უწოდოთ შემთხვევითი სიდიდე. ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის გამონათქვამები $(X(\varpi)<x)$, $(X(\varpi)=x)$ და $(X(\varpi)\geq x)$ ხდომილობებს წარმოადგენენ. ამის გამო ბუნებრივია მასზე განვსაზღვროთ ალბათობა და შევნიშნოთ, რომ ეს ალბათობა დამოკიდებული იქნება x ნამდვილ რიცხვზე და

$$F(x)=P(X<x)$$

$F(x)$ ფუნქციას უწოდებენ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას.

2. შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და მისი თვისებები

განსაზღვრება. შემთხვევითი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობას მის მათემატიკურ ლოდინს უწოდებენ.

ვთქვათ მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე განაწილების კანონით

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_1	...	p_n	...

განმარტებით მათემატიკური ლოდინი

$$M(x)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n=\sum_{n=1}^{\infty}x_np_n$$

თუკი შემთხვევითი სიდიდე უწყვეტი ტიპისაა, რომლის განაწილების სიმკვრივე არის $f(x)$, მაშინ მათემატიკური ლოდინი $M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

განვიხილოთ მათემატიკური ლოდინის თვისებები:

1. $M(c)=c$
2. $M(cx)=cM(x)$
3. $M(x\pm y)=M(x)\pm M(y)$
4. $M(xy)=M(x)M(y)$ თუ x და y ურთიერთდამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.

3. შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია და მისი თვისებები

განვიხილოთ რაიმე ორი შემთხვევითი სიდიდე განაწილების კანონებით

X	-1	1
P	0,5	0,5

Y	-100	100
P	0,5	0,5

ადვილი შესამჩნევია რომ $M(x)=M(y)=0$

მიუხედავად იმისა რომ შემთხვევით სიდიდეთა შესაძლო მნიშვნელობები აშკარად განსხვავდება ერთმანეთისაგან მათი მათემატიკური ლოდინი არის ერთმანეთის ტოლი. ეს მიგვანიშნებს რომ მათემატიკური ლოდინი როგორც რიცხვითი მახასიათებელი ვერ ახასიათებს შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების გაბნევას ნამდვილ ღერძზე. შემოვიღოთ ახალი მახასათებელი, რომელიც დაახასიათებს შემთხვევითი სიდიდის მისი მათემატიკური ლოდინიდან გადახრას და მას ვუწოდოთ დისპერსია $D(x)=M(x-M(x))^2$.

თუ გამოვიყენებთ მათემატიკური ლოდინის თვისებებს შეგვიძლია მივიღოთ დისპერსიის გამოსათვლელი მეორე ფორმულა. მართლაც

$$D(x)=M(x-M(x))^2=M\left(x^2-2xM(x)+M^2(x)\right)=M\left(x^2\right)-2M(x)\cdot M(x)+M^2(x)=$$
$$=M\left(x^2\right)-M^2(x)$$

განვიხილოთ დისპერსიის თვისებები

1. $D(c)=0$
2. $D(cx)=c^2D(x)$
3. $D(x\pm y)=D(x)+D(y)$ თუ x და y ურთიერთდამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.

4. $D(xy)=D(x)D(y)+D(x)M^2(y)+D(y)M^2(x)$ თუ x და y ურთიერთდამოუკი-დებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.

5. $D(xy)=D(x)D(y)$ თუ x და y ურთიერთდამოუკიდებელი და ცენტრირებული შემთხვევითი სიდიდეებია.

ამოცანა 10: თეორიული 2

1. ბინომიალური განაწილების კანონი

დისკრეტული ტიპის x შემთხვევით სიდიდეს უწოდებენ განაწილებულს ბინომალური განაწილების კანონით თუ მის განაწილების კანონს აქვს სახე:

X	0	1	2	...	K	...	n
P	P_0	P_1	P_2	...	P_k	...	P_n

სადაც $P_k = C_n^k p^k q^{n-k}$

აღნიშნული x შემთხვევითი სიდიდე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ n ურთიერთდამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის სახით:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

სადაც თვითოეული X_k შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულის შემთხვევითი სახით:

X_k	0	1
p	q	P

$$M(x_k) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$D(x_k) = M(x_k^2) - M^2(x_k) = p - p^2 = p(1-p) - pq$$

$$M(x) = np$$

$$D(x) = npq$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{npq}$$

2. თანაბარი განაწილების კანონი და მისი რიცხვითი მახასიათებლები

უწყვეტი ტიპის შემთხვევით სიდიდეს უწოდებენ განაწილებულ თანაბრად თუ მის განაწილენბის სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x\in[a;b]\\ 0 & x\notin[a;b]\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$$

ვიპოვოთ რიცხვითი მახასიათებლები

$$M(x)==\frac{b+a}{2}$$

$$D(x)=M(x^2)-M^2(x)$$

$$D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(x)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

3. მაჩვენებლიანი განაწილების კანონი და მისი რიცხვითი მახასიათებლები

უწყვეტი ტიპის შემთხვევით სიდიდეს უწოდებენ განაწილებულს მაჩვენებლიანი განაწილების კანონით თუ შესაბამის განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0 \quad (\lambda>0)\\ 0 & x<0\end{cases}$$

ავაგოთ განაწილების ფუნქცია

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

ვიპოვოთ რიცხვითი მახასიათებლები

$$M(x)=\frac{1}{\lambda}$$

$$M(x)=\frac{1}{\lambda}$$

$$D(x)=M(x^2)-M^2(x)$$

$$D(x)=M(x^2)-M^2(x)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma(x)=\frac{1}{\lambda}$$