ამოცანა 1: დიფერენციალური განტოლება განცალებულ ცვალდებში

მითითება: *განტოლების ყოველი წევრიდან ამოიღეთ ინტეგრალი. გაითვალისწინეთ, 0-ის ინტეგრალი არის c მუდმივა.*

1) $\frac{dx}{1+x^2} - \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = c$$

$$\operatorname{arctg} x - \arcsin y = c$$

2) $y\,dy - 3\cos x\,dx = 0$

$$\int y\,dy - \int 3\cos x\,dx = c$$

$$\frac{y^2}{2} - 3\sin x = c$$

3) $e^{-x}\,dx - \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$

$$\int e^{-x}\,dx - \int \frac{dy}{\cos^2 y} = c$$

$$-e^{-x} - \operatorname{tg} y = c$$

4) $\frac{dx}{\sin^2 x} - (y^2+1)\,dy = 0$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int (y^2+1)\,dy = c$$

$$-\operatorname{ctg} x - \left(\frac{y^3}{3} + y\right) = c$$

5) $\frac{dy}{1+y^2} - \cos x\,dx = 0$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} - \int \cos x\,dx = c$$

$$\operatorname{arctg} y - \sin x = c$$

ამოცანა 2: მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

მითითება: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ *სახის განტოლება არის ერთგვაროვანი. y'' ჩაანაცვლეთ k^2-ით, y' ჩაანაცვლეთ k-თი და y ჩაანაცვლეთ 1-ით.*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad \rightarrow \quad k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

დისკრიმინანტის გამოყენებით იპოვეთ k-ს მნიშვნელობები.

1) თუ დისკრიმინანტი მეტია ნულზე $D > 0$, მაშინ მას აქვს ორი განსხვავებული ამონახსნი k_1 და k_2 ($k_1 \neq k_2$). ამიტომ, ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}}$$

2) თუ დისკრიმინანტი უდრის ნულს $D = 0$, მაშინ მას აქვს ერთი ამონახსნი k ($k_1 = k_2 = k$) და ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}}$$

---

1) $y'' - 7y' + 12y = 0$

$$k^2 - 7k + 12 = 0$$
$$D = 49 - 48 = 1$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$
$$k_1 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
$$k_2 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

---

2) $y'' + 6y' + 9y = 0$

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$
$$D = 36 - 36 = 0$$
$$k = -\frac{6}{2} = -3$$
$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3} x$$

---

3) $y'' - 8y' + 16y = 0$

$$k^2 - 8k + 16 = 0$$
$$D = 64 - 6y = 0$$
$$k = \frac{8}{2} = 4$$
$$y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$$

---

4) $y'' - 9y = 0$

$$k^2 - 9 = 0$$
$$(k-3)(k+3) = 0$$
$$k_1 = -3$$
$$k_2 = 3$$
$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$$

---

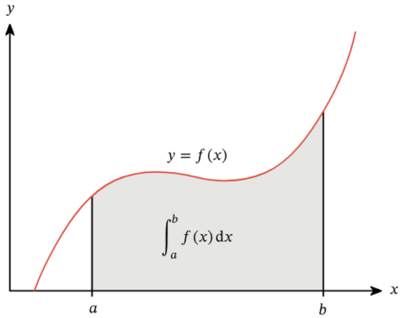
5) $2y'' - 6y' = 0$

$$2k^2 - 6k = 0$$
$$2k(k-3) = 0$$

$$k_1 = 0$$
$$k_2 = 3$$
$$y = c_1 e^0 + c_2 e^{3x} = c_1 + c_2 e^{3x}$$

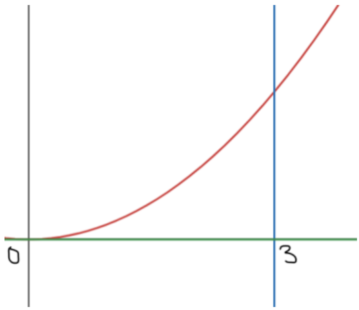
ამოცანა 3: ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა

მითითება: *ააგეთ ნახაზი და გამოიყენეთ ფორმულა* $\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\, dx}$



---

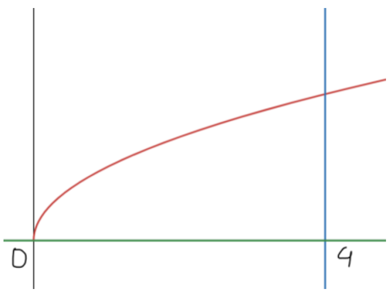
1. $y = 2x^2$ $\qquad x = 3$ $\qquad y = 0$



$$S = \int_0^3 2x^2\, dx = \frac{2x^3}{3}\bigg|_0^3 = \frac{2 \cdot 3^3}{3} = \frac{2 \cdot 27}{3} = 18$$

---

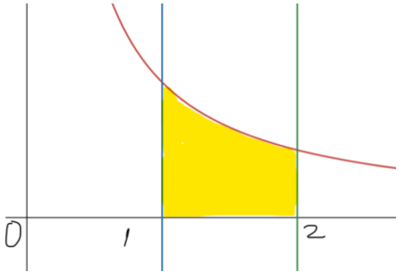
2. $y = \sqrt{x}$ $\qquad x = 4$ $\qquad y = 0$



$$S = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{2\sqrt{x}^3}{3}\bigg|_0^4 = \frac{2\sqrt{4}^3}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{16}{3}$$

---

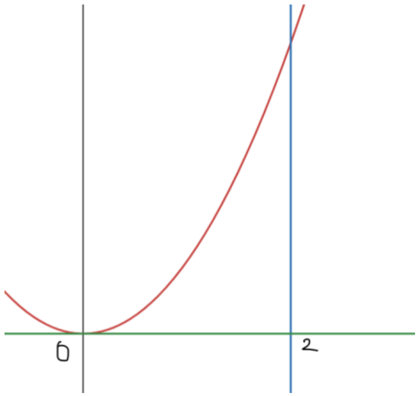
3. $y = \frac{1}{x}$ $\qquad x = 1 \qquad x = 2 \qquad y = 0$



$$S = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$$

---

4. $y = 3x^2$ $\qquad x = 2 \qquad y = 0$



$$S = \int_0^2 3x^2\, dx = \left.\frac{3x^3}{3}\right|_0^2 = x^3|_0^2 = 2^3 = 8$$

ამოცანა 4: იპოვეთ რიცხვითი მწკრივის მითითებული წევრი

მითითება: *პირობაში მოცემული ფორმულიდან* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ *ამოწერეთ მხოლოდ ფუნქცია* U_n *და მითითებული წევრის რიცხვით ჩაანაცვლეთ* n.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-2}{3n+7}$ $\qquad U_3 = ?$

$$U_n = \frac{5n^2 - 2}{3n + 7}$$

$$U_3 = \frac{5 \cdot 3^2 - 2}{3 \cdot 3 + 7} = \frac{5 \cdot 9 - 2}{9 + 7} = \frac{45 - 2}{16} = \frac{43}{16}$$

ამოცანა 5 (ან 6): გამოიკვლიეთ რიცხვითი მწკრივი კრებადობაზე (კოშის რადიკალური ნიშნის გამოყენებით)

მითითება: *პირობაში მოცემული ფორმულიდან $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ ამოწერეთ მხოლოდ ფუნქცია U_n და იპოვეთ ზღვარი ამ ფუნქციის n-ური ფესვისა $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$. თუ მიღებული შედეგი ნაკლებია ნულზე, ფუნქცია კრებადია, ხოლო თუ მეტია ნულზე, ფუნქცია განშლადია.*

---

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n$

$$U_n = \left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{7n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{7n}{n} + \frac{4}{n}} = \frac{3-0}{7+0} = \frac{3}{7}$$

რადგან $\frac{3}{7} < 1$, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

---

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+4}{3n^2-4n}\right)^n$

$$U_n = \left(\frac{n^2+4}{3n^2-4n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+4}{3n^2-4n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4}{3n^2-4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2} - \frac{4n}{n^2}} = \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

რადგან $\frac{1}{3} < 1$, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

---

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{n}{2}}$

$$U_n = \left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n-3}{7n+5}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{2n}{n} - \frac{3}{n}}{\frac{7n}{n} + \frac{5}{n}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-0}{7+0}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

რადგან $\sqrt{\frac{2}{7}} < 1$, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

ამოცანა 6 (ან 5): გამოიკვლიეთ რიცხვითი მწკრივი კრებადობაზე (დალამბერის რადიკალური ნიშნის გამოყენებით)

მითითება: *პირობაში მოცემული ფორმულიდან $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ ამოწერეთ მხოლოდ ფუნქცია U_n და იპოვეთ U_{n+1}, რისთვისაც n ჩაანაცვლეთ $n+1$-ით. ამის შემდეგ იპოვეთ ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$. თუ მიღებული შედეგი ნაკლებია ნულზე, ფუნქცია კრებადია, ხოლო თუ მეტია ნულზე, ფუნქცია განშლადია.*

---

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{5^n}$

$$U_n=\frac{n\cdot 3^n}{5^n}$$

$$U_{n+1}=\frac{n\cdot 3^{n+1}}{5^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot 3^{n+1}}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n\cdot 3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot 3^n\cdot 3}{5^n\cdot 5}\cdot\frac{5^n}{n\cdot 3^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}\cdot\cancel{3^n}\cdot 3}{\cancel{5^n}\cdot 5}\cdot\frac{\cancel{5^n}}{\cancel{n}\cdot\cancel{3^n}}\right)=\frac{3}{5}$$

რადგან $\frac{3}{5}<1$, *რიცხვითი მწკრივი კრებადია*

---

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 3^n}{7^n}$

$$U_n=\frac{n^2\cdot 3^n}{7^n}$$

$$U_{n+1}=\frac{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}}{7^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}}{7^{n+1}}\cdot\frac{7^n}{n^2\cdot 3^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2\cdot\cancel{3^n}\cdot 3}{\cancel{7^n}\cdot 7}\cdot\frac{\cancel{7^n}}{n^2\cdot\cancel{3^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(n+1)^2}{7n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(n^2+2n+1)}{7n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+6n+3}{7n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{6n}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{7n^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+0+0}{7}=\frac{3}{7}$$

რადგან $\frac{3}{7} < 1$, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

ამოცანა 7: იპოვეთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი

მითითება: *პირობაში მოცემული ფორმულიდან $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ ამოწერეთ მხოლოდ a_n, იპოვეთ a_{n+1} და ამოხსენით ზღვარი $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$. კრებადობის შუალედი არის (-R; R) შუალედი.*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{7^n}$

$$a_n = \frac{n}{7^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{7^{n+1}}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{7^n} \cdot \frac{7^{n+1}}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\cancel{7^n}} \cdot \frac{\cancel{7^n} \cdot 7}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{7n}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = 7$$

კრებადობის შუალედია $(-7; 7)$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n \cdot 5^n}$

$$a_n = \frac{2^n}{n \cdot 5^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1) \cdot 5^{n+1}}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{n \cdot 5^n} \cdot \frac{(n+1) \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{2^n}}{n \cdot \cancel{5^n}} \cdot \frac{(n+1) \cdot \cancel{5^n} \cdot 5}{\cancel{2^n} \cdot 2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+5}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n}{n} + \frac{5}{n}}{\frac{2n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}$$

კრებადობის შუალედია $\left(-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+0+0}{1} = 1$$

კრებადობის შუალედია $(-1; 1)$

ამოცანა 8: ამოხსენით მეორე რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

მითითება: *$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ სახის განტოლება არის არაერთგვაროვანი. მისი ამონახსნია $y = \bar{y} + y^*$.*

$\bar{y}$-ის საპოვნელად, განტოლება გაუტოლეთ ნულს $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ და იპოვეთ მისი ამონახსნი (იხილეთ ამოცანა 2). აქვე დავიმახსოვროთ k-ს რამდენი ამონახსნი არის 0-ის ტოლი (ნული, ერთი, ან ორი). ეს იქნება შემდგომში $\propto$-ის მნიშვნელობა.

y^*-ის საპოვნელად, პირველ რიგში უნდა დავადგინოთ $f(x)$-ის რიგი, იგივე x-ის უდიდესი ხარისხი; თუ რიგი 1-ის ტოლია, $y^* = (Ax+B)x^{\propto}$, ხოლო თუ რიგი 2-ის ტოლია, $y^* = (Ax^2+Bx+C)^{\propto}$. ამის შემდეგ საჭიროა A, B, C-ის მნიშვნელობათა პოვნა, რისთვისაც ვაწარმოებთ y^* ორჯერ და შედეგად ვპოულობთ $(y^*)'$-სა და $(y^*)''$. ეს შედეგები $(y^*, (y^*)', (y^*)'')$ შეგვაქვს საწყის განტოლებაში (y, y', y''-ის ადგილზე) და ვხსნით A, B, C-ის მნიშვნელობებს. შემდგომში ეს მნიშვნელობები შეგვყავს y^*-ის ტოლობაში, და საბოლოოდ ვპოულობთ განტოლების ამონახსნს: $y = \bar{y} + y^*$.

---

1. $\boldsymbol{y'' + 2y' = 2x + 1}$

$$y'' + 2y' = 0$$
$$k^2 + 2k = 0$$

ვიპოვოთ k-ს მნიშვნელობები:

$$D = 2^2 - 4 \cdot 0 = 4$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$$

$$k_1 = \frac{-2-2}{2} = 2$$

$$k_2 = \frac{-2+2}{2} = 0$$

ვიპოვოთ $\bar{y}$:

$$\bar{y} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{0x} = c_1 e^{-2x} + c_2$$

რადგან k -ს ამონახსნებიდან ერთი მათგანი ტოლია 0-ის, ამიტომაც $\propto = 1$, ხოლო მოცემული განტოლების მარჯვენა მხარე $(2x+1)$ არის პირველი რიგის მრავალწევრი, შესაბამისად, $y^* = (Ax+B)x^1 = (Ax+B)x = Ax^2 + Bx$

განტოლების ამოსახსნელად, გვჭირდება y^* -ის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები, ვინაიდან მოცემული განტოლების მარცხენა მხარე ამ წარმოებულებს შეიცავს:

$$(y^*)' = (Ax^2 + Bx)' = 2Ax + B$$

$$(y^*)'' = (2Ax + B)' = 2A$$

შევიტანოთ განტოლებაში:

$$2A + 2Ax + B = 2x + 3$$

ვინაიდან ერთნაირხარისხიანი წევრები ერთმანეთის ტოლია,
$2Ax = 2x$, ანუ $A = \frac{2x}{2x} = 1$. ხოლო B ვიპოვოთ დანარჩენი წევრების გამოყენებით: $2A + B = 3$; $2 \cdot 1 + B = 3$; $B = 3 - 2 = 1$.

ვიპოვოთ y^*:

$$y^* = Ax^2 + Bx = x^2 + x$$

საბოლოოდ, ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი ($y = \bar{y} + y^*$):

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 + x^2 + x$$