

ამოცანა 1: განაწილების კანონის შედგენა

მითითება: ააგეთ x , P ცხრილი, სადაც x -ის მნიშვნელობები განისაზღვრება ამოცანის პირობით (მაგალითად, თუ ვეძებთ კამათლის 4-ჯერ გაგორებისას 2-იანის მოსვლის განაწილების კანონს, x -ის მნიშვნელობები იქნება ყველა ის რიცხვი, თუ რამდენჯერ შეიძლება 2-იანი მოვიდეს, ანუ 0, 1, 2, 3 და 4), ხოლო P -ის შესაბამისი მნიშვნელობები, ზოგადად, გამოითვლება ბერნულის ფორმულით:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

სადაც

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

p არის ხელსაყრელი ხდომილობის ალბათობა (ანუ ზემოთხსენებულ კამათლის მაგალითში 2-იანის მოსვლის ალბათობა, რაც ტოლია $\frac{1}{6}$ -სა), ხოლო q არის ხელის შემშლელი ხდომილობის ალბათობა: $q = 1 - p$ (ჩვენს მაგალითში $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$).

n არის დამოუკიდებელ ცდათა რაოდენობა (ჩვენს მაგალითში 4, ვინაიდან კამათელს ოთხჯერ ვაგორებთ), ხოლო k არის x -ის შესაბამისი მნიშვნელობა.

გაითვალისწინეთ, რომ P -ს ყველა მიღებული მნიშვნელობის ჯამი უნდა იყოს 1-ის ტოლი.

1. კამათელს ვაგორებთ სამჯერ. შეადგინეთ ორიანის მოსვლის განაწილების კანონი.

$$n=3; \quad p=\frac{1}{6}; \quad q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

X	0	1	2	3
P	$P_3(0)$	$P_3(1)$	$P_3(2)$	$P_3(3)$

$$P_3(0) = C_3^0 p^0 q^{3-0} = \frac{3!}{0!(3-0)!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 =$$

$$= \frac{3!}{1 \cdot 3!} \cdot 1 \cdot \frac{5^3}{6^3} = 1 \cdot \frac{125}{216} = \frac{125}{216}$$

$$P_3(1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 =$$

$$= \frac{3!}{1 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5^2}{6^2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{36} = \frac{75}{216}$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q^{3-2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 =$$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1!} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

$$P_3(3) = C_3^3 p^3 q^{3-3} = \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$

$$= \frac{1}{0!} \cdot \frac{1}{216} \cdot 1 = \frac{1}{216}$$

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

შეამოწმო: $\frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = \frac{216}{216} = 1$ (✓)

2. მონეტას ვაგდებთ ოთხჯერ. შეადგინეთ საფასურის მოსვლის განაწილების კანონი.

$$n=4; \quad p=\frac{1}{2}; \quad q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

X	0	1	2	3	4
P	$P_4(0)$	$P_4(1)$	$P_4(2)$	$P_4(3)$	$P_4(4)$

$$P_4(0) = C_n^0 p^0 q^{n-0} = \frac{4!}{0!(4-0)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P_4(1) = C_n^1 p^1 q^{n-1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16}$$

$$P_4(2) = C_n^2 p^2 q^{n-2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$$

$$P_4(3) = C_n^3 p^3 q^{n-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16}$$

$$P_4(4) = C_n^4 p^4 q^{n-4} = \frac{4!}{4!(4-4)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

შეგვამოვნა: $\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{16}{16} = 1$ (✓)

3. მიზანში ისვრიან პირველ მოხვედრამდე. შევადგინოთ დახარჯულ ვაზნათა განაწილების კანონი, თუ მსროლელს აქვს სამი ვაზნა და მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0.7.

$$n=3; \quad p=0,7; \quad q=1-0,7=0,3$$

- (1) როცა $X=1$, მიზანს წაიხველიერა ყველა მოხვედა
 (2) როცა $X=2$, მიზანს წაიხვედა ყველა ახლა, მეორე მოხვედა
 (3) როცა $X=3$, მიზანს წაიხვედა და მეორე ყველა ახლა და მესამე მოხვედა, 5 საბოლოო ახლა.

ვანდოთ შესაძლო ალბათობები.

$$(1) \rightarrow P = p = 0,7$$

$$(2) \rightarrow P = q \cdot p = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$$

$$(3) \rightarrow P = q \cdot q \cdot p + q \cdot q \cdot q = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 + 0,3^3 = 0,3^2(0,7 + 0,3) = 0,3^2 \cdot 1 = 0,09$$

X	1	2	3
P	0,7	0,21	0,09

შეამოწმებ: $0,7 + 0,21 + 0,09 = 1$ ✓

4. მსროლელს აქვს ოთხი ვაზნა და მიზანში ისვრის პირველ მოხვედრამდე. მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0.7. შეადგინეთ დაუხარჯავ ვაზნათა განაწილების კანონი.

$$n=4; \quad p=0,7; \quad q=1-0,7=0,3$$

- (1) $X=0$, თუ საშინეს ასეა ნივთი სა ვსსო და მოხვდა შეოოო გოხე (დაუხევი ვაზნა ან დახე), ან ასეა ოახე.
- (2) $X=1$, თუ საშინეს ასეა ნივთი ოო ვსსო და მოხვდა გოხე (დაუხევი დახე 1 ვაზნა)
- (3) $X=2$, თუ საშინეს ასეა ნივთი ვსსო და მოხვდა გოხე (დაუხევი დახე 2 ვაზნა)
- (4) $X=3$ თუ საშინეს მოხვდა ნივთივე ვაზნა.

ვაზნა გუნდის აღმოჩენა

$$(1) \rightarrow P = q \cdot q \cdot q \cdot p + \underline{q \cdot q \cdot q \cdot q} = q^3(p+q) = 0,3^3(0,3+0,7) = 0,027$$

$$(2) \rightarrow P = q \cdot q \cdot p = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,063$$

$$(3) \rightarrow P = q \cdot p = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$$

$$(4) \rightarrow P = p = 0,7$$

X	0	1	2	3
P	0,027	0,063	0,21	0,7

$$\text{შეამოწმა: } 0,027 + 0,063 + 0,21 + 0,7 = 1$$



ამოცანა 2: შემთხვევითი სიდიდეთა კომბინაცია (ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი)

მითითება: პირობაში მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის (x და y) განაწილების კანონი (ცხრილი).

x	x_1	x_2	x_3
P_x	P_{x1}	P_{x2}	P_{x3}

y	y_1	y_2	y_3
P_y	P_{y1}	P_{y2}	P_{y3}

მათი გამოყენებით უნდა ააგოთ სამი ახალი ცხრილი, $x + y$, $x - y$ და xy . მათ ასაგებად, x -ის პირველი წევრისთვის y -ის ყველა წევრზე შეასრულეთ შესაბამისი მოქმედება (შეკრება, გამოკლება და ბოლოს გამრავლება), შემდეგ x -ის მეორე წევრისთვის შეასრულეთ იგივე მოქმედება და ა.შ. x -ის ყოველი წევრისთვის. სამივე ცხრილს ექნება P -ს ერთი და იგივე მნიშვნელობები, რომლებიც მიიღება შესაბამისი P_x -სა და P_y -ს გამრავლებით.

$x + y$	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$x_1 + y_3$	$x_2 + y_1$	$x_2 + y_2$	$x_2 + y_3$	$x_3 + y_1$	$x_3 + y_2$	$x_3 + y_3$
P	$P_{x1}P_{y1}$	$P_{x1}P_{y2}$	$P_{x1}P_{y3}$	$P_{x2}P_{y1}$	$P_{x2}P_{y2}$	$P_{x2}P_{y3}$	$P_{x3}P_{y1}$	$P_{x3}P_{y2}$	$P_{x3}P_{y3}$

$x - y$	$x_1 - y_1$	$x_1 - y_2$	$x_1 - y_3$	$x_2 - y_1$	$x_2 - y_2$	$x_2 - y_3$	$x_3 - y_1$	$x_3 - y_2$	$x_3 - y_3$
P	$P_{x1}P_{y1}$	$P_{x1}P_{y2}$	$P_{x1}P_{y3}$	$P_{x2}P_{y1}$	$P_{x2}P_{y2}$	$P_{x2}P_{y3}$	$P_{x3}P_{y1}$	$P_{x3}P_{y2}$	$P_{x3}P_{y3}$

xy	x_1y_1	x_1y_2	x_1y_3	x_2y_1	x_2y_2	x_2y_3	x_3y_1	x_3y_2	x_3y_3
P	$P_{x1}P_{y1}$	$P_{x1}P_{y2}$	$P_{x1}P_{y3}$	$P_{x2}P_{y1}$	$P_{x2}P_{y2}$	$P_{x2}P_{y3}$	$P_{x3}P_{y1}$	$P_{x3}P_{y2}$	$P_{x3}P_{y3}$

მაგალითი:

X	-1	2	3
P	0,2	0,5	0,3

Y	-2	0	4
P	0,5	0,1	0,4

X+Y	-1+(-2)	-1+0	-1+4	2+(-2)	2+0	2+4	3+(-2)	3+0	3+4
P	0,2·0,5	0,2·0,1	0,2·0,4	0,5·0,5	0,5·0,1	0,5·0,4	0,3·0,5	0,3·0,1	0,3·0,4



X+Y	-3	-1	3	0	2	6	1	3	7
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12

უპრატო P ყველაზე უფრო ახლოსაა, ამიტომ უფრო მეტად გავაძლიერებთ

X-Y	-1-(-2)	-1-0	-1-4	2-(-2)	2-0	2-4	3-(-2)	3-0	3-4
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12



X-Y	1	-1	-5	4	2	-2	5	3	-1
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12

XY	-1·(-2)	-1·0	-1·4	2·(-2)	2·0	2·4	3·(-2)	3·0	3·4
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12



XY	2	0	-4	-4	0	8	-6	0	12
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12

ამოცანა 3: დისპერსია

მითითება: გამოიყენეთ დისპერსიის შემდეგი თვისებები (c აღნიშნავს რაიმე რიცხვს):

1. $D(c) = 0$ (რიცხვის დისპერსია ნულის ტოლია)
 2. $D(cx) = c^2 D(x)$ (რიცხვი დისპერსიიდან გასვლისას კვადრატში ადის)
 3. $D(x \pm y) = D(x) + D(y)$ (ორი შემთხვევის ჯამის ან სხვაობის დისპერსია ყოველთვის დისპერსიათა ჯამის ტოლია)
-

1. $D(x) = 2$; $D(y) = 5$; $z = 3x - 4y$; $D(z) = ?$

$$\begin{aligned} D(z) &= D(3x - 4y) = D(3x) + D(4y) = 3^2 D(x) + 4^2 D(y) \\ &= 9 \cdot 2 + 16 \cdot 5 = 18 + 80 = 98 \end{aligned}$$

2. $D(x) = 5$; $D(y) = 3$; $z = 5x - 4y$; $D(z) = ?$

$$\begin{aligned} D(z) &= D(5x - 4y) = D(5x) + D(4y) = 5^2 D(x) + 4^2 D(y) \\ &= 25 \cdot 5 + 16 \cdot 3 = 125 + 48 = 173 \end{aligned}$$

ამოცანა 4: შუალედში მოხვედრის ალბათობა

მითითება: გამოიყენეთ ფორმულა

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

$$1. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad \text{იპოვეთ } P\left(\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{9-4}{36} = \frac{5}{36}$$

$$2. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}, & 0 < x \leq \frac{7}{3} \\ 1, & x > \frac{7}{3} \end{cases} \quad \text{იპოვეთ } P\left(\frac{3}{2} < x < 2\right)$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{3}{2} < x < 2\right) &= F(2) - F\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right) \\ &= \left(\frac{6}{4} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{9}{8} - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - \left(\frac{9}{8} - \frac{6}{8}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{6}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

ამოცანა 5: k კოეფიციენტის პოვნა

მითითება: გამოიყენეთ ფორმულა

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

ზღვრები $-\infty$ და $+\infty$ ამოხსნისას ჩანაცვლდება იმ ზღვრებით, რომლებშიც არის მთავარი ფუნქცია განსაზღვრული.

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ kx^2, & 0 < x \leq 2 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

$$\int_0^2 kx^2 dx = 1$$

$$\left. \frac{kx^3}{3} \right|_0^2 = 1$$

$$\frac{8k}{3} = 1$$

$$k = \frac{3}{8}$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ k \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{3} \\ 0, & x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} k \sin x = 1$$

$$-k \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 1$$

$$-k \left[\cos \frac{\pi}{3} - \cos 0 \right] = 1$$

$$-k \left[\frac{1}{2} - 1 \right] = 1$$

$$k = 2$$

ამოცანა 6: მოცემული განაწილების კანონიდან დისპერსიის პოვნა

მითითება: დისპერსია გამოითვლება ფორმულით

$$D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$$

სადაც $M(x) = x_1P_1 + x_2P_2 + \dots$, ხოლო $M(x^2) = x_1^2P_1 + x_2^2P_2 + \dots$

მაგალითი:

x	-2	3	5
P	0.2	0.3	0.5

$$M(x) = -2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.5 = -0.4 + 0.9 + 2.5 = 3$$

$$\begin{aligned} M(x^2) &= (-2)^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.3 + 5^2 \cdot 0.5 = 4 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.3 + 25 \cdot 0.5 \\ &= 0.8 + 2.7 + 12.5 = 3.5 + 12.5 = 16 \end{aligned}$$

$$D(x) = M(x^2) - (M(x))^2 = 16 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

ამოცანა 7: განაწილების კანონის შედგენა და დისპერსიის პოვნა

მოთხოვნა:

ამოცანა 8: მოცემული ვარიაციული მწკრივიდან შერჩევითი დისპერსიის პოვნა

მითითება:

ამოცანა 9: თეორიული 1

ამოცანა 10: თეორიული 2