ამოცანა 1: დიფერენციალური განტოლება განცალებულ ცვლადებში

მითითება: *განტოლების ყოველი წევრიდან ამოიღეთ ინტეგრალი. გაითვალისწინეთ, 0-ის ინტეგრალი არის c მუდმივა.*

1) $\frac{dx}{1+x^2} - \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = c$$

$$\operatorname{arctg} x - \arcsin y = c$$

2) $y\,dy - 3\cos x\,dx = 0$

$$\int y\,dy - \int 3\cos x\,dx = c$$

$$\frac{y^2}{2} - 3\sin x = c$$

3) $e^{-x}\,dx - \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$

$$\int e^{-x}\,dx - \int \frac{dy}{\cos^2 y} = c$$

$$-e^{-x} - \operatorname{tg} y = c$$

4) $\frac{dx}{\sin^2 x} - (y^2+1)\,dy = 0$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int (y^2+1)\,dy = c$$

$$-\operatorname{ctg}x - \left(\frac{y^3}{3} + y\right) = c$$

5) $\frac{dy}{1+y^2} - \cos x\,dx = 0$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} - \int \cos x\,dx = c$$

$$\operatorname{arctg} y - \sin x = c$$

ამოცანა 2: მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

მითითება: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ *სახის განტოლება არის ერთგვაროვანი.* y'' *ჩაანაცვლეთ* k^2*-ით,* y' *ჩაანაცვლეთ* k*-თი და* y *ჩაანაცვლეთ 1-ით.*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad \rightarrow \qquad k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

დისკრიმინანტის გამოყენებით იპოვეთ k-ს მნიშვნელობები.

1) თუ დისკრიმინანტი მეტია ნულზე $D > 0$, მაშინ მას აქვს ორი განსხვავებული ამონახსნი k_1 და k_2 $(k_1 \neq k_2)$. ამიტომ, ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}}$$

2) თუ დისკრიმინანტი უდრის ნულს $D = 0$, მაშინ მას აქვს ერთი ამონახსნი k $(k_1 = k_2 = k)$ და ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}}$$

---

1) $y'' - 7y' + 12y = 0$

$$k^2 - 7k + 12 = 0$$
$$D = 49 - 48 = 1$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$
$$k_1 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
$$k_2 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

---

2) $y'' + 6y' + 9y = 0$

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$
$$D = 36 - 36 = 0$$
$$k = -\frac{6}{2} = -3$$
$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3}x$$

---

3) $y'' - 8y' + 16y = 0$

$$k^2 - 8k + 16 = 0$$
$$D = 64 - 6y = 0$$
$$k = \frac{8}{2} = 4$$
$$y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$$

---

4) $y'' - 9y = 0$

$$k^2 - 9 = 0$$
$$(k-3)(k+3) = 0$$
$$k_1 = -3$$
$$k_2 = 3$$
$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$$

---

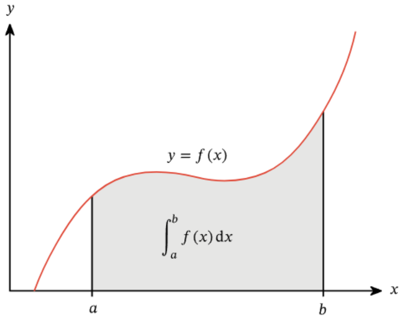
5) $2y'' - 6y' = 0$

$$2k^2 - 6k = 0$$
$$2k(k-3) = 0$$

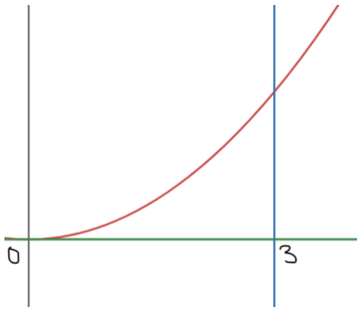
$$k_1 = 0$$
$$k_2 = 3$$
$$y = c_1 e^0 + c_2 e^{3x} = c_1 + c_2 e^{3x}$$

ამოცანა 3: ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა

მითითება: *ააგეთ ნახაზი და გამოიყენეთ ფორმულა* $\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\,dx}$

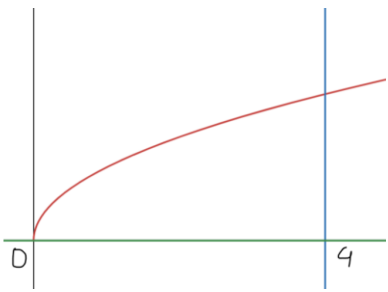


1. $y = 2x^2$ $\quad x = 3$ $\quad y = 0$



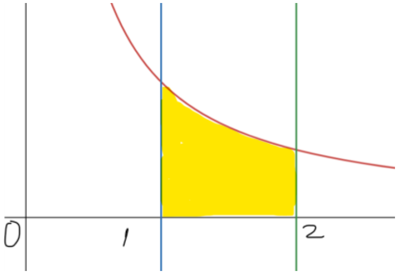
$$S = \int_0^3 2x^2\,dx = \frac{2x^3}{3}\bigg|_0^3 = \frac{2\cdot 3^3}{3} = \frac{2\cdot 27}{3} = 18$$

2. $y = \sqrt{x}$ $\quad x = 4$ $\quad y = 0$



$$S = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{2\sqrt{x}^3}{3}\bigg|_0^4 = \frac{2\sqrt{4}^3}{3} = \frac{2\cdot 8}{3} = \frac{16}{3}$$

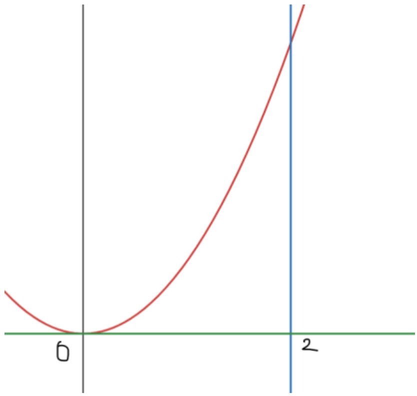
3. $y = \frac{1}{x}$ $\qquad x = 1 \qquad x = 2 \qquad y = 0$



$$S = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$$

---

4. $y = 3x^2$ $\qquad x = 2 \qquad y = 0$



$$S = \int_0^2 3x^2\, dx = \frac{3x^3}{3}\bigg|_0^2 = x^3|_0^2 = 2^3 = 8$$

ამოცანა 4: იპოვეთ რიცხვითი მწკრივის მითითებული წევრი

მითითება: *პირობაში მოცემული ფორმულიდან $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ ამოწერეთ მხოლოდ ფუნქცია U_n და მითითებული წევრის რიცხვით ჩაანაცვლეთ n.*

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-2}{3n+7}$ $\qquad U_3 = ?$

$$U_n = \frac{5n^2 - 2}{3n + 7}$$

$$U_3 = \frac{5 \cdot 3^2 - 2}{3 \cdot 3 + 7} = \frac{5 \cdot 9 - 2}{9 + 7} = \frac{45 - 2}{16} = \frac{43}{16}$$

ამოცანა 5 (ან 6): გამოიკვლიეთ რიცხვითი მწკრივი კრებადობაზე (კოშის რადიკალური ნიშნის გამოყენებით)

მითითება: *პირობაში მოცემული ფორმულიდან $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ ამოწერეთ მხოლოდ ფუნქცია U_n და იპოვეთ ზღვარი ამ ფუნქციის n-ური ფესვისა*

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}$. თუ მიღებული შედეგი ნაკლებია ერთზე, ფუნქცია კრებადია, ხოლო თუ მეტია ერთზე, ფუნქცია განშლადია.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n$

$$U_n=\left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{7n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{7n}{n}+\frac{4}{n}}=\frac{3-0}{7+0}=\frac{3}{7}$$

რადგან $\frac{3}{7}<1$, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+4}{3n^2-4n}\right)^n$

$$U_n=\left(\frac{n^2+4}{3n^2-4n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+4}{3n^2-4n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4}{3n^2-4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{4n}{n^2}}=\frac{1+0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

რადგან $\frac{1}{3}<1$, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{n}{2}}$

$$U_n=\left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n-3}{7n+5}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{2n}{n}-\frac{3}{n}}{\frac{7n}{n}+\frac{5}{n}}}$$

$$=\sqrt{\frac{2-0}{7+0}}=\sqrt{\frac{2}{7}}$$

რადგან $\sqrt{\frac{2}{7}}<1$, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

ამოცანა 6 (ან 5): გამოიკვლიეთ რიცხვითი მწკრივი კრებადობაზე (დალამბერის რადიკალური ნიშნის გამოყენებით)

მითითება: *პირობაში მოცემული ფორმულიდან $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ ამოწერეთ მხოლოდ ფუნქცია U_n და იპოვეთ U_{n+1}, რისთვისაც n ჩაანაცვლეთ $n+1$-ით. ამის შემდეგ იპოვეთ ზღვარი $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$. თუ მიღებული შედეგი ნაკლებია ერთზე, ფუნქცია კრებადია, ხოლო თუ მეტია ერთზე, ფუნქცია განშლადია.*

---

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 3^n}{5^n}$

$$U_n = \frac{n\cdot 3^n}{5^n}$$

$$U_{n+1} = \frac{n\cdot 3^{n+1}}{5^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot 3^{n+1}}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n\cdot 3^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot 3^n\cdot 3}{5^n\cdot 5}\cdot\frac{5^n}{n\cdot 3^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}\cdot\cancel{3^n}\cdot 3}{\cancel{5^n}\cdot 5}\cdot\frac{\cancel{5^n}}{\cancel{n}\cdot\cancel{3^n}}\right) = \frac{3}{5}$$

რადგან $\frac{3}{5} < 1$, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

---

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\cdot 3^n}{7^n}$

$$U_n = \frac{n^2\cdot 3^n}{7^n}$$

$$U_{n+1} = \frac{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}}{7^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}}{7^{n+1}}\cdot\frac{7^n}{n^2\cdot 3^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2\cdot\cancel{3^n}\cdot 3}{\cancel{7^n}\cdot 7}\cdot\frac{\cancel{7^n}}{n^2\cdot\cancel{3^n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(n+1)^2}{7n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(n^2+2n+1)}{7n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+6n+3}{7n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{6n}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{7n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+0+0}{7} = \frac{3}{7}$$

რადგან $\frac{3}{7} < 1$, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

ამოცანა 7: იპოვეთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი

მითითება: *პირობაში მოცემული ფორმულიდან* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *ამოწერეთ მხოლოდ* a_n. *თუ* a_n *არის ფუნქცია აყვანილი* n*-ურ ხარისხში (მაგალითად,* $a_n = \left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n$*), იპოვეთ ზღვარი* $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$*. სხვა შემთხვევაში, იპოვეთ* a_{n+1} *და ამოხსენით ზღვარი* $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$*. კრებადობის შუალედი არის (-R; R) შუალედი.*

---

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n$

$$a_n = \left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{3n-1}{7n+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n+4}{3n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7n}{n}+\frac{4}{n}}{\frac{3n}{n}-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7+0}{3-0} = \frac{7}{3}$$

კრებადობის შუალედია $\left(-\frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right)$

---

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{7^n}$

$$a_n = \frac{n}{7^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{7^{n+1}}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{7^n} \cdot \frac{7^{n+1}}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\cancel{7^n}} \cdot \frac{\cancel{7^n} \cdot 7}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{7n}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = 7$$

კრებადობის შუალედია $(-7; 7)$

---

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n \cdot 5^n}$

$$a_n = \frac{2^n}{n \cdot 5^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{n\cdot 5^n}\cdot\frac{(n+1)\cdot 5^{n+1}}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{2^n}}{n\cdot\cancel{5^n}}\cdot\frac{(n+1)\cdot\cancel{5^n}\cdot 5}{\cancel{2^n}\cdot 2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n+5}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n}{n}+\frac{5}{n}}{\frac{2n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}$$

კრებადობის შუალედია $\left(-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$

---

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+0+0}{1} = 1$$

კრებადობის შუალედია $(-1;1)$

ამოცანა 8: ამოხსენით მეორე რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

მითითება: *$y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ სახის განტოლება არის არაერთგვაროვანი. მისი ამონახსნია $y=\bar{y}+y^*$.*

$\bar{y}$-ის საპოვნელად, განტოლება გაუტოლეთ ნულს $y''+a_1y'+a_2y=0$ და იპოვეთ მისი ამონახსნი (იხილეთ ამოცანა 2). აქვე დავიმახსოვროთ k-ს რამდენი ამონახსნი არის 0-ის ტოლი (ნული, ერთი, ან ორი). ეს იქნება შემდგომში $\propto$-ის მნიშვნელობა.

y^*-ის საპოვნელად, პირველ რიგში უნდა დავადგინოთ $f(x)$-ის რიგი, იგივე x-ის უდიდესი ხარისხი; თუ რიგი 1-ის ტოლია, $y^*=(Ax+B)x^{\propto}$, ხოლო თუ რიგი 2-ის ტოლია, $y^*=(Ax^2+Bx+C)x^{\propto}$. ამის შემდეგ საჭიროა A, B, C-ის მნიშვნელობათა პოვნა, რისთვისაც ვაწარმოებთ y^* ორჯერ და შედეგად ვპოულობთ $(y^*)'$-სა და $(y^*)''$. ეს შედეგები $(y^*, (y^*)', (y^*)'')$ შევვაქვს საწყის განტოლებაში (y, y', y''-ის ადგილზე) და

ვხსნით A, B, C -ის მნიშვნელობებს. შემდგომში ეს მნიშვნელობები შეგვყავს y^* -ის ტოლობაში, და საბოლოოდ ვპოულობთ განტოლების ამონახსნს: $y = \bar{y} + y^*$.

---

1. $\boldsymbol{y'' + 2y' = 2x + 3}$

$$y'' + 2y' = 0$$
$$k^2 + 2k = 0$$

ვიპოვოთ k-ს მნიშვნელობები:

$$D = 2^2 - 4 \cdot 0 = 4$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$$
$$k_1 = \frac{-2-2}{2} = -2$$
$$k_2 = \frac{-2+2}{2} = 0$$

ვიპოვოთ $\bar{y}$:

$$\bar{y} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{0x} = c_1 e^{-2x} + c_2$$

რადგან k -ს ამონახსნებიდან ერთი მათგანი ტოლია 0-ის, ამიტომაც $\propto = 1$, ხოლო მოცემული განტოლების მარჯვენა მხარე $(2x + 3)$ არის პირველი რიგის მრავალწევრი, შესაბამისად, $y^* = (Ax + B)x^1 = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$

განტოლების ამოსახსნელად, გვჭირდება y^* -ის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები, ვინაიდან მოცემული განტოლების მარცხენა მხარე ამ წარმოებულებს შეიცავს:

$$(y^*)' = (Ax^2 + Bx)' = 2Ax + B$$
$$(y^*)'' = (2Ax + B)' = 2A$$

შევიტანოთ განტოლებაში:

$$2A + 2(2Ax + B) = 2x + 3$$
$$2A + 4Ax + 2B = 2x + 3$$

ვინაიდან ერთნაირხარისხიანი წევრები ერთმანეთის ტოლია, $4Ax = 2x$, ანუ $A = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$. ანალოგიურად, თავისუფალი წევრების გამოყენებით ვიპოვით B -ს: $2A + B = 3;\;\; 2 \cdot \frac{1}{2} + 2B = 3;\; 2B = 3 - 1 = 2;$ $B = 1$.

ვიპოვოთ y^*:

$$y^* = Ax^2 + Bx = \frac{1}{2}x^2 + x$$

საბოლოოდ, ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი $(y = \bar{y} + y^*)$:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 + \frac{1}{2}x^2 + x$$

---

2. $y'' + 4y' + 3y = 2x^2 + x$

$$y'' + 4y' + 3y = 2x^2 + x$$

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

$$k^2 + 4k + 3 = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{16 - 4 \cdot 3} = \sqrt{16 - 12} = \sqrt{4} = 2$$

$$k_1 = \frac{-4-2}{2} = -3; \quad k_2 = \frac{-4+2}{2} = -1$$

$$\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$$

რადგან $(2x^2+x)$-ში x-ის უმაღლესი ხარისხია 2, იგი არის მეორე რიგის პოლინომი, ამიტომ,

$$y^* = (Ax^2 + Bx + C)\, x^{\alpha}$$

რადგან $k_1 \neq 0$ და $k_2 \neq 0$, $\alpha = 0$, ამიტომ

$$y^* = (Ax^2 + Bx + C)\, x^0 = Ax^2 + Bx + C$$

ვიპოვოთ $(y^*)'$ და $(y^*)'' \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(y^*)' = (Ax^2 + Bx + C)' = 2Ax + B$

$$(y^*)'' = (2Ax + B)' = 2A$$

ჩავსვათ საწყის განტოლებაში:

$$y'' + 4y' + 3y = 2x^2 + x \longrightarrow (y^*)'' + (y^*)' + 3y^* = 2x^2 + x$$

$$(2A)+4(2Ax+B)+3(Ax^2+Bx+C)=2x^2+x$$

$$2A+8Ax+4B+3Ax^2+3Bx+3C=2x^2+x$$

ვიპოვოთ A, B, C კოეფიციენტები წევრების გამოყენებით.

$x^2 \longrightarrow \quad 3Ax^2=2x^2$

$$3A=2$$

$$A=\frac{2}{3}$$

$x \longrightarrow \quad 8Ax+3Bx=x$

$$8A+3B=1$$

$$3B=1-8A$$

$$B=\frac{1-8A}{3}=\frac{1-\frac{8\cdot 2}{3}}{3}=\frac{-13}{9}$$

თ.წ. $\longrightarrow \quad 2A+4B+3C=0$

$$2\cdot\frac{2}{3}+4\cdot\frac{(-13)}{9}+3C=0 \qquad (\cdot 9)$$

$$2\cdot 2\cdot 3+4\cdot(-13)+9\cdot 3C=0$$

$$12-52+27C=0$$

$$27C=40$$

$$C=\frac{40}{27}$$

A, B, C ჩავსვათ y^* - ში:

$$y^*=Ax^2+Bx+C=\frac{2}{3}x^2-\frac{13}{9}B+\frac{40}{27}$$

საბოლოო ამონახსნი $(y=\bar{y}+y^*)$

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}+\frac{2}{3}x^2-\frac{13}{9}B+\frac{40}{27}$$

3. $y'' - 3y' = 7x - 4$

$$y'' - 3y' = 7x - 4$$

$$y'' - 3y' = 0$$

$$k^2 - 3k = 0$$

$$k(k-3) = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 3$$

$$\bar{y} = C_1 e^0 + C_2 e^{3x} = C_1 + C_2 e^{3x}$$

რადგან $(7x-4)$-ში x-ის უმაღლესი ხარისხი 1, ანუ არის I რიგის პოლინომი, ამიტომ:

$$y^* = (Ax + B)\,x^\alpha$$

რადგან $k_1 = 0$ და $k_2 \neq 0$, მხოლოდ ერთი k არის ნულის ტოლი, ამიტომ $\alpha = 1$;

$$y^* = (Ax + B)\,x^1 = Ax^2 + Bx$$

ვიპოვოთ $(y^*)'$ და $(y^*)''$:

$$(y^*)' = (Ax^2 + Bx)' = 2Ax + B$$

$$(y^*)'' = 2A$$

შევიტანოთ საწყის განტოლებაში

$$y'' - 3y' = 7x - 4 \longrightarrow (y^*)'' - 3(y^*)' = 7x - 4$$

$$2A-3(2Ax+B)=7x-4$$

$$2A-6Ax+3B=7x-4.$$

ვიპოვოთ A და B:

$$x \longrightarrow \quad -6Ax=7x$$

$$-6A=7$$

$$A=-\frac{7}{6}$$

$$\text{თ.წ.} \longrightarrow \quad 2A+3B=-4$$

$$-\frac{14}{6}+3B=-4 \qquad (\cdot 6)$$

$$-14+18B=-24$$

$$18B=10$$

$$B=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

ჩავსვათ A და B:

$$y^*=Ax^2+Bx=-\frac{7}{6}x^2+\frac{5}{9}x$$

ვიპოვოთ ამონახსნი $(y=\bar{y}+y^*)$

$$y=C_1+C_2e^{3x}-\frac{7}{6}x^2+\frac{5}{9}x$$

ამოცანა 9: თეორიული 1

ა) დიფერენციალური განტოლების ცნება

განტოლებას რომელიც ამყარებს კავშირ დაუკიდებელ ცვლადს, ამ ცვლადზე დამოკიდებულ ფუნქციასა და ამ ფუნქციის სხვადასხვა რიგის წარმოებულებს ან დიფერენციალებს შორის, უწოდებენ დიფერენციალურ განტოლებას. განტოლებას აქვს სახე: $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$

ბ) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის ცნება (პირველი რიგისთვის)

ვთქვათ მოცემულია პირველი რიგის დიფ განტოლება $y' = f(x; y)$. ვიტყვით, რომ მოცემული დიფ. განტოლების ამონახსნია $y = \varphi(x)$, თუ იგი ჩასმული მოცემულ დიფ განტოლებაში, მას გადააქცევს იგივეობად.

გ) დიფერენციალური განტოლება განცალებად ცვლადებში

განტოლებას $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$ სადაც $M(x; y) = M_1(x) \cdot M_2(y)$ და $N(x; y) = N_1(x) \cdot N_2(y)$ უწოდებენ დიფ. განტოლებას განცალებად ცვლადებში

ამოცანა 10: თეორიული 2

ა) რიცხვითი მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა

ვთქვათ მოცემულია რიცხვითი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობაა $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$

ბ) რიცხვითი მწკრივის კრებადობის დალამბერის ნიშანი

განვიხილოთ დადებითწევრებიანი რიცხვითი მწკრივი

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots \qquad (u)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც არსებობს $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, დალამბერის ნიშანი შემდეგ მარტივ სახეს იღებს. მწკრივი კრებადია თუ $q < 1$, განშლადია თუ $q > 1$ და გვაქვს საეჭვო შემთხვევა თუ $q = 1$. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში, კი თუ კიდევ რაიმე დამატებით პირობას არ აქვს ადგილი, მწკრივის კრებადობის შესახებ ვერავითარ დასკვნას ვერ გავაკეთებთ.

გ) ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსის გამოსათვლელი ფორმულა

განვიხილოთ რიცხვითი მწკრივი

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$$

მწკრივი კრებადია შუალედზე $(-R; R)$