ამოცანა 1: განაწილების კანონის შედგენა

მითითება: *ააგეთ* x, P *ცხრილი, სადაც* x *-ის მნიშვნელობები განისაზღვრება ამოცანის პირობით (მაგალითად, თუ ვეძებთ კამათლის 4-ჯერ გაგორებისას 2-იანის მოსვლის განაწილების კანონს,* x *-ის მნიშვნელობები იქნება ყველა ის რიცხვი, თუ რამდენჯერ შეიძლება 2-იანი მოვიდეს, ანუ* $0, 1, 2, 3$ *და* 4*), ხოლო* P *-ის შესაბამისი მნიშვნელობები, ზოგადად, გამოითვლება ბერნულის ფორმულით:*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

სადაც

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

p *არის ხელსაყრელი ხდომილობის ალბათობა (ანუ ზემოთხსენებულ კამათლის მაგალითში 2-იანის მოსვლის ალბათობა, რაც ტოლია* $\frac{1}{6}$*-სა), ხოლო* q *არის ხელის შემშლელი ხდომილობის ალბათობა:* $q = 1 - p$ *(ჩვენს მაგალითში* $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$*).*

n *არის დამოუკიდებელ ცდათა რაოდენობა (ჩვენს მაგალითში 4, ვინაიდან კამათელს ოთხჯერ ვაგორებთ), ხოლო* k *არის* x *-ის შესაბამისი მნიშვნელობა.*

გაითვალისწინეთ, რომ P *-ს ყველა მიღებული მნიშვნელობის ჯამი უნდა იყოს 1-ის ტოლი.*

1. კამათელს ვაგორებთ სამჯერ. შეადგინეთ ორიანის მოსვლის განაწილების კანონი.

$n=3; \quad p=\frac{1}{6}; \quad q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

X	0	1	2	3
P	$P_3(0)$	$P_3(1)$	$P_3(2)$	$P_3(3)$

$$P_3(0)=C_3^0 p^0 q^{3-0}=\frac{3!}{0!(3-0)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=$$
$$=\frac{3!}{1\cdot 3!}\cdot 1\cdot\frac{5^3}{6^3}=1\cdot\frac{125}{216}=\frac{125}{216}$$

$$P_3(1)=C_3^1 p^1 q^{3-1}=\frac{3!}{1!(3-1)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=$$
$$=\frac{3!}{1\cdot 2!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5^2}{6^2}=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{25}{36}=\frac{75}{216}$$

$$P_3(2)=C_3^2 p^2 q^{3-2}=\frac{3!}{2!(3-2)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1=$$
$$=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1!}\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{216}$$

$$P_3(3)=C_3^3 p^3 q^{3-3}=\frac{3!}{3!(3-3)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0=$$
$$=\frac{1}{0!}\cdot\frac{1}{216}\cdot 1=\frac{1}{216}$$

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

შემოწმება: $\frac{125}{216}+\frac{75}{216}+\frac{15}{216}+\frac{1}{216}=\frac{216}{216}=1$ ✓

2. მონეტას ვაგდებთ ოთხჯერ. შეადგინეთ საფასურის მოსვლის განაწილების კანონი.

$n=4$; $p=\frac{1}{2}$; $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

X	0	1	2	3	4
P	$P_4(0)$	$P_4(1)$	$P_4(2)$	$P_4(3)$	$P_4(4)$

$$P_4(0)=C_4^0\,p^0q^{4-0}=\frac{4!}{0!(4-0)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

$$P_4(1)=C_4^1\,p^1q^{4-1}=\frac{4!}{1!(4-1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16}$$

$$P_4(2)=C_4^2\,p^2q^{4-2}=\frac{4!}{2!(4-2)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}$$

$$P_4(3)=C_4^3\,p^3q^{4-3}=\frac{4!}{3!(4-3)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16}$$

$$P_4(4)=C_4^4\,p^4q^{4-4}=\frac{4!}{4!(4-4)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$$

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

შემოწმება: $\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{16}{16}=1$ ✓

3. მიზანში ისვრიან პირველ მოხვედრამდე. შევადგინოთ **დახარჯულ ვაზნათა** განაწილების კანონი, თუ მსროლელს აქვს სამი ვაზნა და მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0.7.

$n=3;\quad p=0,7;\quad q=1-0,7=0,3$

(1) როცა $X=1$, მიზანს პირველივე ცდაზე მოხვდა

(2) როცა $X=2$, მიზანს პირველი ცდაზე აცდა, მეორე მოხვდა

(3) როცა $X=3$, მიზანს პირველ და მეორე ცდაზე აცდა და მესამე მოხვდა, ან სამივე აცდა.

ვპოულობთ შესაბამის ალბათობებს.

$(1) \rightarrow \quad P=p=0,7$

$(2) \rightarrow \quad P=q\cdot p=0,3\cdot 0,7=0,21$

$(3) \rightarrow \quad P=q\cdot q\cdot p+q\cdot q\cdot q=0,3\cdot 0,3\cdot 0,7+0,3^3=$

$=0,3^2(0,7+0,3)=0,3^2\cdot 1=0,09$

X	1	2	3
P	0,7	0,21	0,09

შემოწმება: $0,7+0,21+0,09=1$ ✓

4. მსროლელს აქვს ოთხი ვაზნა და მიზანში ისვრის პირველ მოხვედრამდე. მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0.7. შეადგინეთ **დაუხარჯავ ვაზნათა** განაწილების კანონი.

$n=4; \quad p=0,7; \quad q=1-0,7=0,3$

(1) $X=0$, თუ სამიზნეს აცდა პირველ სამ გასროლას და მოხვდა მეოთხე ცდაზე (დაუხარჯავი ვაზნები არ დარჩა), ან აცდა ოთხივე.

(2) $X=1$, თუ სამიზნეს აცდა პირველ ორ გასროლას და მოხვდა მესამე (დაუხარჯავი დარჩა 1 ვაზნა)

(3) $X=2$, თუ სამიზნეს აცდა პირველ გასროლას და მოხვდა მეორე (დაუხარჯავი დარჩა 2 ვაზნა)

(4) $X=3$, თუ სამიზნეს მოხვდა პირველივე ვაზნა.

ვიპოვოთ შესაბამისი ალბათობები

(1) $\rightarrow \quad P = q\cdot q\cdot q\cdot p + q\cdot q\cdot q\cdot q = q^3(p+q) =$
$= 0,3^3(0,3+0,7) = 0,027$

(2) $\rightarrow \quad P = q\cdot q\cdot p = 0,3\cdot 0,3\cdot 0,7 = 0,063$

(3) $\rightarrow \quad P = q\cdot p = 0,3\cdot 0,7 = 0,21$

(4) $\rightarrow \quad P = p = 0,7$

X	0	1	2	3
P	0,027	0,063	0,21	0,7

შემოწმება: $0,027+0,063+0,21+0,7=1$ ✓

ამოცანა 2: შემთხვევით სიდიდეთა კომბინაცია (ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი)

მითითება: *პირობაში მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის (x და y) განაწილების კანონი (ცხრილი).*

x	x_1	x_2	x_3
P_x	P_{x1}	P_{x2}	P_{x3}

y	y_1	y_2	y_3
P_y	P_{y1}	P_{y2}	P_{y3}

მათი გამოყენებით უნდა ააგოთ სამი ახალი ცხრილი, $x+y$, $x-y$ და xy. მათ ასაგებად, x-ის პირველი წევრისთვის y-ის ყველა წევრზე შეასრულეთ შესაბამისი მოქმედება (შეკრება, გამოკლება და ბოლოს გამრავლება), შემდეგ x-ის მეორე წევრისთვის შეასრულეთ იგივე მოქმედება და ა.შ. x-ის ყოველი წევრისთვის. სამივე ცხრილს ექნება P-ს ერთი და იგივე მნიშვნელობები, რომლებიც მიიღება შესაბამისი P_x-სა და P_y-ს ***გამრავლებით.***

$x+y$	x_1+y_1	x_1+y_2	x_1+y_3	x_2+y_1	x_2+y_2	x_2+y_3	x_3+y_1	x_3+y_2	x_3+y_2
P	$P_{x1}P_{y1}$	$P_{x1}P_{y2}$	$P_{x1}P_{y3}$	$P_{x2}P_{y1}$	$P_{x2}P_{y2}$	$P_{x2}P_{y3}$	$P_{x3}P_{y1}$	$P_{x3}P_{y2}$	$P_{x3}P_{y3}$

$x-y$	x_1-y_1	x_1-y_2	x_1-y_3	x_2-y_1	x_2-y_2	x_2-y_3	x_3-y_1	x_3-y_2	x_3-y_2
P	$P_{x1}P_{y1}$	$P_{x1}P_{y2}$	$P_{x1}P_{y3}$	$P_{x2}P_{y1}$	$P_{x2}P_{y2}$	$P_{x2}P_{y3}$	$P_{x3}P_{y1}$	$P_{x3}P_{y2}$	$P_{x3}P_{y3}$

xy	x_1y_1	x_1y_2	x_1y_3	x_2y_1	x_2y_2	x_2y_3	x_3y_1	x_3y_2	x_3y_2
P	$P_{x1}P_{y1}$	$P_{x1}P_{y2}$	$P_{x1}P_{y3}$	$P_{x2}P_{y1}$	$P_{x2}P_{y2}$	$P_{x2}P_{y3}$	$P_{x3}P_{y1}$	$P_{x3}P_{y2}$	$P_{x3}P_{y3}$

მაგალითი:

X	-1	2	3
P	0,2	0,5	0,3

Y	-2	0	4
P	0,5	0,1	0,4

X+Y	-1+(-2)	-1+0	-1+4	2+(-2)	2+0	2+4	3+(-2)	3+0	3+4
P	0,2·0,5	0,2·0,1	0,2·0,4	0,5·0,5	0,5·0,1	0,5·0,4	0,3·0,5	0,3·0,1	0,3·0,4

⇓

X+Y	-3	-1	3	0	2	6	1	3	7
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12

ხედავ P უცვლელია ესეც და იგივეა, რაც მიმატების ცხრილში

X−Y	-1-(-2)	-1-0	-1-4	2-(-2)	2-0	2-4	3-(-2)	3-0	3-4
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12

⇓

X−Y	1	-1	-5	4	2	-2	5	3	-1
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12

XY	-1·(-2)	-1·0	-1·4	2·(-2)	2·0	2·4	3·(-2)	3·0	3·4
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12

⇓

XY	2	0	-4	-4	0	8	-6	0	12
P	0,1	0,02	0,08	0,25	0,05	0,2	0,15	0,03	0,12

ამოცანა 3: დისპერსია

მითითება: *გამოიყენეთ დისპერსიის შემდეგი თვისებები (c აღნიშნავს რაიმე რიცხვს):*

1. $D(c) = 0$ *(რიცხვის დისპერსია ნულის ტოლია)*
2. $D(cx) = c^2 D(x)$ *(რიცხვი დისპერსიიდან გასვლისას კვადრატში ადის)*
3. $D(x \pm y) = D(x) + D(y)$ *(ორი შემთხვევის ჯამის ან სხვაობის დისპერსია ყოველთვის დისპერსიათა* **ჯამის** *ტოლია)*

---

1. $D(x) = 2; \quad D(y) = 5; \quad z = 3x - 4y; \quad D(z) = ?$

$$D(z) = D(3x - 4y) = D(3x) + D(4y) = 3^2 D(x) + 4^2 D(y) = 9 \cdot 2 + 16 \cdot 5 = 18 + 80 = 98$$

---

2. $D(x) = 5; \quad D(y) = 3; \quad z = 5x - 4y; \quad D(z) = ?$

$$D(z) = D(5x - 4y) = D(5x) + D(4y) = 5^2 D(x) + 4^2 D(y) = 25 \cdot 5 + 16 \cdot 3 = 125 + 48 = 173$$

ამოცანა 4: შუალედში მოხვედრის ალბათობა

მითითება: *გამოიყენეთ ფორმულა*

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

---

1. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ იპოვეთ $P\left(\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right)$

$$P\left(\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{9-4}{36} = \frac{5}{36}$$

---

2. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}, & 0 < x \le \frac{7}{3} \\ 1, & x > \frac{7}{3} \end{cases}$ *იპოვეთ* $P\left(\frac{3}{2} < x < 2\right)$

$$P\left(\frac{3}{2} < x < 2\right) = F(2) - F\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}\cdot 2 - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{6}{4} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{9}{8} - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - \left(\frac{9}{8} - \frac{6}{8}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{6}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

ამოცანა 5: k კოეფიციენტის პოვნა

მითითება: *გამოიყენეთ ფორმულა*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

ზღვრები $-\infty$ და $+\infty$ ამოხსნისას ჩანაცვლდება იმ ზღვრებით, რომლებშიც არის მთავარი ფუნქცია განსაზღვრული.

---

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ kx^2, & 0 < x \le 2 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$

$$\int_0^2 kx^2\,dx = 1$$

$$\left.\frac{kx^3}{3}\right|_0^2 = 1$$

$$\frac{8k}{3} = 1$$

$$k = \frac{3}{8}$$

---

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ k\sin x, & 0 < x \le \frac{\pi}{3} \\ 0, & x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} k\sin x = 1$$

$$-k\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 1$$

$$-k\left[\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right] = 1$$

$$-k\left[\frac{1}{2} - 1\right] = 1$$

$$k = 2$$

ამოცანა 6: მოცემული განაწილების კანონიდან დისპერსიის პოვნა

მითითება:

ამოცანა 7: განაწილების კანონის შედგენა და დისპერსიის პოვნა

მითითება:

ამოცანა 8: მოცემული ვარიაციული მწკრივიდან შერჩევითი დისპერსიის პოვნა

მითითება:

ამოცანა 9: თეორიული 1

ამოცანა 10: თეორიული 2