ამოცანა 1: განაწილების კანონის შედგენა

მითითება: *ააგეთ x, P ცხრილი, სადაც x-ის მნიშვნელობები განისაზღვრება ამოცანის პირობით (მაგალითად, თუ ვეძებთ კამათლის 4-ჯერ გაგორებისას 2-იანის მოსვლის განაწილების კანონს, x-ის მნიშვნელობები იქნება ყველა ის რიცხვი, თუ რამდენჯერ შეიძლება 2-იანი მოვიდეს, ანუ $0, 1, 2, 3$ და 4), ხოლო P შესაბამისი მნიშვნელობები გამოითვლება ბერნულის ფორმულით:*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

სადაც

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

p არის ხელსაყრელი ხდომილობის ალბათობა (ანუ ზემოთხსენებულ კამათლის მაგალითში 2-იანის მოსვლის ალბათობა, რაც ტოლია $\frac{1}{6}$-სა), $q = 1 - p$ (ჩვენს მაგალითში $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$).

n არის დამოუკიდებელ ცდათა რაოდენობა (ჩვენს მაგალითში 4, ვინაიდან კამათელს ოთხჯერ ვაგორებთ), ხოლო k არის x-ის შესაბამისი მნიშვნელობა.

გაითვალისწინეთ, რომ P-ს ყველა მიღებული მნიშვნელობის ჯამი უნდა იყოს 1-ის ტოლი.

1. კამათელს ვაგორებთ სამჯერ. შეადგინეთ ორიანის მოსვლის განაწილების კანონი.

$n=3; \quad p=\frac{1}{6}; \quad q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

X	0	1	2	3
P	$P_3(0)$	$P_3(1)$	$P_3(2)$	$P_3(3)$

$$P_3(0)=C_3^0 p^0 q^{3-0}=\frac{3!}{0!(3-0)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=$$
$$=\frac{3!}{1\cdot 3!}\cdot 1\cdot\frac{5^3}{6^3}=1\cdot\frac{125}{216}=\frac{125}{216}$$

$$P_3(1)=C_3^1 p^1 q^{3-1}=\frac{3!}{1!(3-1)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=$$
$$=\frac{3!}{1\cdot 2!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5^2}{6^2}=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{25}{36}=\frac{75}{216}$$

$$P_3(2)=C_3^2 p^2 q^{3-2}=\frac{3!}{2!(3-2)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1=$$
$$=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1!}\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{216}$$

$$P_3(3)=C_3^3 p^3 q^{3-3}=\frac{3!}{3!(3-3)!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0=$$
$$=\frac{1}{0!}\cdot\frac{1}{216}\cdot 1=\frac{1}{216}$$

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

შემოწმება: $\frac{125}{216}+\frac{75}{216}+\frac{15}{216}+\frac{1}{216}=\frac{216}{216}=1$ V

2. მონეტას ვაგდებთ ოთხჯერ. შეადგინეთ საფასურის მოსვლის განაწილების კანონი.

$$n=4;\quad p=\frac{1}{2};\quad q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

X	0	1	2	3	4
P	$P_4(0)$	$P_4(1)$	$P_4(2)$	$P_4(3)$	$P_4(4)$

$$P_4(0)=C_4^0p^0q^{4-0}=\frac{4!}{0!(4-0)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

$$P_4(1)=C_4^1p^1q^{4-1}=\frac{4!}{1!(4-1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16}$$

$$P_4(2)=C_4^2p^2q^{4-2}=\frac{4!}{2!(4-2)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}$$

$$P_4(3)=C_4^3p^3q^{4-3}=\frac{4!}{3!(4-3)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16}$$

$$P_4(4)=C_4^4p^4q^{4-4}=\frac{4!}{4!(4-4)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$$

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

შემოწმება: $\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{16}{16}=1$ ✓

3. მიზანში ისვრიან პირველ მოხვედრამდე. შევადგინოთ **დახარჯულ ვაზნათა** განაწილების კანონი, თუ მსროლელს აქვს სამი ვაზნა და მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0.7.

$n=3$; $p=0{,}7$; $q=1-0{,}7=0{,}3$

(1) როცა $X=1$, მიზანს პირველივე ტყვია მოხვდა

(2) როცა $X=2$, მიზანს პირველი ტყვია აცდა, მეორე მოხვდა

(3) როცა $X=3$, მიზანს პირველი და მეორე ტყვიები აცდა და მესამე მოხვდა, ან სამივე აცდა.

ვიპოვოთ შესაბამისი ალბათობები.

(1) → $P=p=0{,}7$

(2) → $P=q\cdot p=0{,}3\cdot 0{,}7=0{,}21$

(3) → $P=q\cdot q\cdot p+q\cdot q\cdot q=0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7+0{,}3^3=$

$=0{,}3^2(0{,}7+0{,}3)=0{,}3^2\cdot 1=0{,}09$

X	1	2	3
P	0,7	0,21	0,09

შემოწმება: $0{,}7+0{,}21+0{,}09=1$ ✓

4. მსროლელს აქვს ოთხი ვაზნა და მიზანში ისვრის პირველ მოხვედრამდე. მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0.7. შეადგინეთ **დაუხარჯავ ვაზნათა** განაწილების კანონი.

$n=4$; $p=0{,}7$; $q=1-0{,}7=0{,}3$

(1) $X=0$, როცა სამიზნეს ასცდა პირველ სამ გასროლა და მოხვდა მხოლოდ მეოთხე (დაუხარჯავი ვაზნები არ დარჩა), ან ასცდა ოთხივე.

(2) $X=1$, როცა სამიზნეს ასცდა პირველ ორ გასროლა და მოხვდა მესამე (დაუხარჯავი დარჩა 1 ვაზნა)

(3) $X=2$, როცა სამიზნეს ასცდა პირველ გასროლა და მოხვდა მეორე (დაუხარჯავი დარჩა 2 ვაზნა)

(4) $X=3$ როცა სამიზნეს მოხვდა პირველივე ვაზნა.

ვიპოვოთ შესაბამისი ალბათობები.

(1) $\rightarrow$ $P=q\cdot q\cdot q\cdot p+q\cdot q\cdot q\cdot q=q^3(p+q)=$
$=0{,}3^3(0{,}3+0{,}7)=0{,}027$

(2) $\rightarrow$ $P=q\cdot q\cdot p=0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7=0{,}063$

(3) $\rightarrow$ $P=q\cdot p=0{,}3\cdot 0{,}7=0{,}21$

(4) $\rightarrow$ $P=p=0{,}7$

X	0	1	2	3
P	0,027	0,063	0,21	0,7

შემოწმება: $0{,}027+0{,}063+0{,}21+0{,}7=1$ ✓

ამოცანა 2: შემთხვევით სიდიდეთა კომბინაცია (ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი)

მითითება:

ამოცანა 3: დისპერსია

მითითება:

ამოცანა 4: შუალედში მოხვედრის ალბათობა

მითითება:

ამოცანა 5: k კოეფიციენტის პოვნა

მითითება:

ამოცანა 6: მოცემული განაწილების კანონიდან დისპერსიის პოვნა

მითითება:

ამოცანა 7: განაწილების კანონის შედგენა და დისპერსიი პოვნა

მითითება:

ამოცანა 8: მოცემული ვარიაციული მწკრივიდან შერჩევითი დისპერსიის პოვნა

მითითება:

ამოცანა 9: თეორიული 1

ამოცანა 10: თეორიული 2