ამოცანა 1: დიფერენციალური განტოლება განცალებულ ცვალდებში

მითითება: განტოლების ყოველი წევრიდან ამოიღეთ ინტეგრალი.

გაითვალისწინეთ, 0-ის ინტეგრალი არის c მუდმივა.

1)
$$\frac{dx}{1+x^2} - \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = c$$

$$\operatorname{arctg} x - \arcsin y = c$$

2)
$$y dy - 3\cos x dx = 0$$

$$\int y dy - \int 3\cos x dx = c$$

$$\frac{y^2}{2} - 3\sin x = c$$

3)
$$e^{-x} dx - \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$$

$$\int e^{-x} dx - \int \frac{dy}{\cos^2 y} = c$$

$$-e^{-x} - \operatorname{tg} y = c$$

4)
$$\frac{dx}{\sin^2 x} - (y^2 + 1) dy = 0$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int (y^2 + 1) dy = c$$

$$-\cot y - \left(\frac{y^3}{3} + y\right) = c$$

5)
$$\frac{dy}{1+y^2} - \cos x \, dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} - \int \cos x \, dx = c$$

$$\operatorname{arctg} y - \sin x = c$$

ამოცანა 2: მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

დისკრიმინანტის გამოყენებით იპოვეთ k-ს მნიშვნელობები.

$$1)$$
 თუ დისკრიმინანტი მეტია ნულზე $D>0$, მაშინ მას აქვს ორი განსხვავებული ამონახსნი k_1 და k_2 ($k_1 \neq k_2$). ამიტომ, ზოგადი ამონახსნი იქნება:
$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$$

ამონანსნი იქნება:
$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$
 2) თუ დისკრიმინანტი უდრის ნულს $D = 0$, მაშინ მას აქვს ერთი ამონახსნი k ($k_1 = k_2 = k$) და ზოგადი ამონახსნი იქნება:

ამონახსნი
$$k$$
 ($k_1=k_2=k$) და ზოგადი ამონახსნი იქნება:
$$y=c_1e^{kx}+c_2xe^{kx}$$
 1) $y''-7y'+12y=0$
$$k^2-7k+12=0$$

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}$$
1) $y'' - 7y' + 12y = 0$

$$k^2 - 7k + 12 = 0$$

$$D = 49 - 48 = 1$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

$$k_1 = \frac{7 - 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$D = 49 - 48 = 1$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

$$k_1 = \frac{7 - 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$k_2 = \frac{7 + 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

	$\sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$
	$k_1 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$
	$k_2 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$
	$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$
2) $y'' + 6y' + 9y = 0$	
	$k^2 + 6k + 9 = 0$
	D = 36 - 36 = 0
	$k = -\frac{6}{2} = -3$
	$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3} x$

	$k_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 4$
	$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$
2) $y'' + 6y' + 9y = 0$	
	$k^2 + 6k + 9 = 0$
	D = 36 - 36 = 0
	$k = -\frac{6}{2} = -3$
	$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3} x$
3) $y'' - 8y' + 16y = 0$	
	$k^2 - 8k + 16 = 0$
	D = 64 - 6y = 0
	$k = \frac{8}{2} = 4$
	$x = a \cdot a^4x + a \cdot a \cdot a^4x$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$
2) $y'' + 6y' + 9y = 0$

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

$$D = 36 - 36 = 0$$

$$k = -\frac{6}{2} = -3$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3} x$$
3) $y'' - 8y' + 16y = 0$

$$k^2 - 8k + 16 = 0$$

$$D = 64 - 6y = 0$$

$$k = \frac{8}{2} = 4$$

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$$

 $k^2 - 9 = 0$

4) y'' - 9y = 0

(k-3)(k+3) = 0 $k_1 = -3$

 $k_2 = 3$

 $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$

5) 2y'' - 6y' = 0

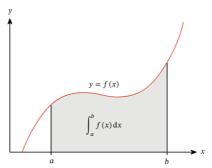
 $2k^2 - 6k = 0$ 2k(k-3) = 0

$$k_1 = 0$$

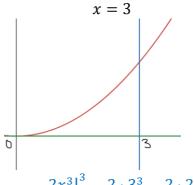
 $k_2 = 3$
 $y = c_1 e^0 + c_2 e^{3x} = c_1 + c_2 e^{3x}$

ამოცანა 3: ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა

მითითება: ააგეთ ნახაზი და გამოიყენეთ ფორმულა $S = \int_a^b f(x) \, dx$



1.
$$y = 2x^2$$

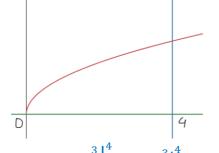


y = 0

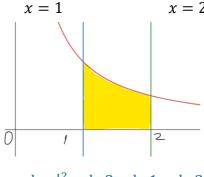
v = 0

$$S = \int_0^3 2x^2 \, dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{2 \cdot 3^3}{3} = \frac{2 \cdot 27}{3} = 18$$

$$2. \quad y = \sqrt{x}$$

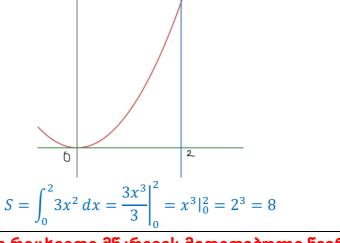


$$S = \int_0^4 \sqrt{x} \, dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_0^4 = \frac{2\sqrt{x}^3}{3} \bigg|_0^4 = \frac{2\sqrt{4}^3}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{16}{3}$$



$$S = \int_{-\pi}^{2} \frac{1}{x} dx = \ln x |_{1}^{2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$$

$$\frac{\int_{1}^{2} x^{4x^{2}} dx^{2}}{4. \ y = 3x^{2}} \qquad x = 2 \qquad y = 0$$



ამოცანა 4: იპოვეთ რიცხვითი მწკრივის მითითებული წევრი მითითება: პირობაში მოცემული ფორმულიდან $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ ამოწერეთ მხოლოდ ფუნქცია U_n და მითითებული წევრის რიცხვით ჩაანაცვლეთ n.

ა მხოლოდ ფუხქვია
$$U_n$$
 და მითითებული წევრის რიცხვით ჩაახაცვლეთ n .
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-2}{3n+7} \qquad \qquad U_3=?$$

$$U_n=\frac{5n^2-2}{3n+7}$$

$$U_3=\frac{5\cdot 3^2-2}{3\cdot 3+7}=\frac{5\cdot 9-2}{9+7}=\frac{45-2}{16}=\frac{43}{16}$$

ამოცანა 5 (ან 6): გამოიკვლიეთ რიცხვითი მწკრივი კრებადობაზე (კოშის რადიკალური ნიშნის გამოყენებით)

дითითება: პიროგაში მოცემული ფორმულიდან $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ ამოწერეთ მხოლოდ ფუნქცია U_n და იპოვეთ ზღვარი ამ ფუნქციის n-ური ფესვისა

 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}$. თუ მიღებული შედეგი ნაკლებია ნულზე, ფუნქცია კრებადია,

ხოლო თუ მეტია წულზე, ფუნქცია განშლადია. $1. \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^m$

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n$$

$$U_n = \left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{\left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3n-1}{7n+4} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3n}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{7n}{n} + \frac{4}{n}} = \frac{3-0}{7+0} = \frac{3}{7}$$

რადგან $\frac{3}{7}$ < 1, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

$$2. \ \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 4}{3n^2 - 4n} \right)^n$$

$$U_n = \left(\frac{n^2 + 4}{3n^2 - 4n}\right)^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{\left(\frac{n^2 + 4}{3n^2 - 4n}\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 4}{3n^2 - 4n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2} - \frac{4n}{n^2}} = \frac{1 + 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

რადგან $\frac{1}{3}$ < 1, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

$$3. \quad \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

$$U_n = \left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{n}{2}}$$
 $\lim_{n \to \infty} \sqrt{\left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{2n-3}{7n+5}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{\frac{2n-3}{n}}{\frac{7n}{n}+\frac{5}{n}}}$ $= \sqrt{\frac{2-0}{7+0}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$ რადგან $\sqrt{\frac{2}{7}} < 1$, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

ამოცანა 6 (ან 5): გამოიკვლიეთ რიცხვითი მწკრივი კრებადობაზე (დალამბერის რადიკალური ნიშნის გამოყენებით)

მითითება: პირობაში მოცემული ფორმულიდან $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ ამოწერეთ მხოლოდ ფუნქცია U_n და იპოვეთ U_{n+1} , რისთვისაც n ჩაანაცვლეთ n+1-ით. ამის შემდეგ იპოვეთ ზღვარი $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. თუ მიღებული შედეგი ნაკლებია ნულზე, ფუნქცია კრებადია, ხოლო თუ მეტია ნულზე, ფუნქცია განშლადია.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^n}{5^n}$$

$$U_n=rac{n\cdot 3^n}{5^n}$$

$$U_{n+1}=rac{n\cdot 3^{n+1}}{5^{n+1}}$$

$$\lim_{n o\infty}rac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n o\infty}\left(rac{n\cdot 3^{n+1}}{5^{n+1}}\cdotrac{5^n}{n\cdot 3^n}
ight)=\lim_{n o\infty}\left(rac{n\cdot 3^n\cdot 3}{5^n\cdot 5}\cdotrac{5^n}{n\cdot 3^n}
ight)$$

$$=\lim_{n o\infty}\left(rac{n\cdot 3^n\cdot 3}{5^n\cdot 5}\cdotrac{5^n}{n\cdot 3^n}
ight)=rac{3}{5}$$
 რადგან $rac{3}{5}<1$, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 3^n}{7^n}$$
$$U_n = \frac{n^2 \cdot 3^n}{7^n}$$

$$U_{n+1} = \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{7^{n+1}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{7^{n+1}} \cdot \frac{7^n}{n^2 \cdot 3^n} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1)^2 \cdot 3^n \cdot 3}{7^n \cdot 7} \cdot \frac{7^n}{n^2 \cdot 3^n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3(n+1)^2}{7n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3(n^2 + 2n + 1)}{7n^2} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n^2 + 6n + 3}{7n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{6n}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{7n^2}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{3 + 0 + 0}{7} = \frac{3}{7}$$

რადგან $\frac{3}{7} < 1$, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

ამოცანა 7: იპოვეთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი

მითითება: პირობაში მოცემული ფორმულიდან $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ ამოწერეთ მხოლოდ a_n , იპოვეთ a_{n+1} და ამოხსენით ზღვარი $R=\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$. კრებადობის შუალედი არის (-R;R) შუალედი.

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{7^n}$$

$$a_n = \frac{n}{7^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{7^{n+1}}$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{7^n} \cdot \frac{7^{n+1}}{n+1}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{7^n} \cdot \frac{7^n \cdot 7}{n+1}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{7n}{n+1}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{7n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = 7$$
 ვრებადობის შუალედია $(-7; 7)$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n} \cdot x^{n}}{n \cdot 5^{n}}$$

$$a_{n} = \frac{2^{n+1}}{n \cdot 5^{n}}$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1) \cdot 5^{n+1}}$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n}}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^{n}}{n \cdot 5^{n}} \cdot \frac{(n+1) \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1}} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{2^{n}}{n \cdot 5^{n}}}{n \cdot 5^{n}} \cdot \frac{(n+1) \cdot 5^{n} \cdot 5}{2^{n} \cdot 2} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{5(n+1)}{2n} = \lim_{n \to \infty} \frac{5n+5}{2n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{5n}{n} + \frac{5}{n}}{\frac{2n}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}$$
 კრებადობის შუალედია $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right)$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{1} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + 0 + 0}{1} = 1$$

კრებადობის შუალედია (-1;1)

ამოცანა 8: ამოხსენით მეორე რიგის წრფივი

არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

дითითება: $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ სახის განტოლება არის

არაერთგვაროვანი. მისი ამონახსნია $y = \bar{y} + y^*$. \bar{y} -ის საპოვნელად, განტოლება გაუტოლეთ ნულს $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ და იპოვეთ მისი ამონახსნი (იხილეთ <u>ამოცანა 2</u>). აქვე დავიმახსოვროთ k-k რამდენი ამონახსნი არის k-ის ტოლი (ნული, ერთი, ან ორი). ეს იქნება შიმთაომში k-ის მნიშინილობა

რამდენი ამონახსნი არის 0-ის ტოლი (ნული, ერთი, ან ორი). ეს იქნება შემდგომში \propto -ის მნიშვნელობა. y^* -ის საპოვნელად, პირველ რიგში უნდა დავადგინოთ f(x)-ის რიგი, იგივე x-ის უდიდესი ხარისხი; თუ რიგი 1-ის ტოლია, $y^* = (Ax + B)x^{\propto}$, ხოლო თუ რიგი 2-ის ტოლია, $y^* = (Ax^2 + Bx + C)x^{\propto}$. ამის შემდეგ სა2-ირთა A, B, C-ის მნიშვნელობათა პოვნა, რისთვისაც გაწარმოებთ y^*

იგივე x-ის უდიდესი ხარისხი; თუ რიგი 1-ის ტოლია, $y^* = (Ax + B)x^{\infty}$, ხოლო თუ რიგი 2-ის ტოლია, $y^* = (Ax^2 + Bx + C)x^{\infty}$. ამის შემდეგ საჭიროა A, B, C-ის მნიშვნელობათა პოვნა, რისთვისაც ვაწარმოებთ y^* ორჯერ და შედეგად ვპოულობთ $(y^*)'$ -სა და $(y^*)''$. ეს შედეგები $(y^*, (y^*)^{''}, (y^*)^{''})$ შეგვაქვს საწყის განტოლებაში (y, y', y''-ის ადგილზე) და ვხსნით A, B, C-ის მნიშვნელობებს. შემდგომში ეს მნიშვნელობები შეგვყავს y^* -ის ტოლობაში, და საბოლოდ ვპოულობთ განტოლების ამონახსნს:

$\frac{y = \bar{y} + y^*.}{1. \quad \mathbf{v}'' + 2\mathbf{y}' = 2\mathbf{x} + 1}$

$$y'' + 2y' = 0$$
 $k^2 + 2k = 0$ ვიპოვოთ k -ს მწიშვნელობები:

$$\kappa^2 + 2\kappa = 0$$
ვიპოვოთ k -ს მნიშვნელობები
 $D = 2^2 - 4 \cdot 0 = 4$
 $\sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$

$$k_1 = \frac{-2 - 2}{2} = 2$$

$$k_2 = \frac{-2 + 2}{2} = 0$$

ვიპოვოთ \bar{y} :

 $\bar{y} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{0x} = c_1 e^{-2x} + c_2$

რადგან k-ს ამონახსნებიდან <u>ერთი</u> მათგანი ტოლია 0-ის, ამიტომაც $\propto = 1$, ხოლო მოცემული განტოლების მარჯვენა მხარე (2x+1) არის პირველი რიგის მრავალწევრი, შესაბამისად, $y^* = (Ax+B)x^1 = (Ax+B)x = Ax^2 + Bx$

Bx განტოლების ამოსახსნელად, გვჭირდება y^* -ის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები, ვინაიდან მოცემული განტოლების მარცხენა მხარე ამ წარმოებულებს შეიცავს:

$$(y^*)' = (Ax^2 + Bx)' = 2Ax + B$$

 $(y^*)'' = (2Ax + B)' = 2A$

________________განტოლებაში:

$$2A + 2Ax + B = 2x + 3$$

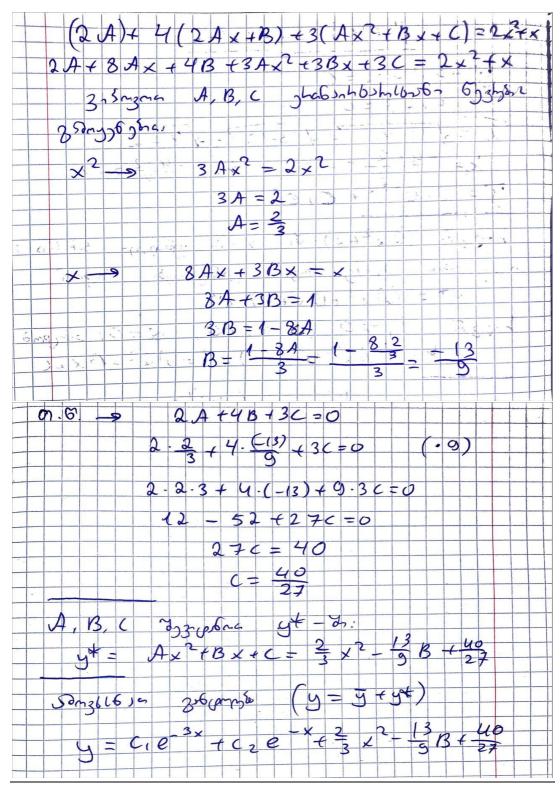
ვინაიდან ერთნაირხარისხიანი წევრები ერთმანეთის ტოლია, 2Ax = 2x, ანუ $A = \frac{2x}{2x} = 1$. ანალოგიურად, თავისუფალი წევრების გამოყენებით ვიპოვით B-b: 2A + B = 3; $2 \cdot 1 + B = 3$; B = 3 - 2 = 1.

ვიპოვოთ
$$y^*$$
:
$$y^* = Ax^2 + Bx = x^2 + x$$

საზოლოოდ, ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი (
$$y = \bar{y} + y^*$$
):

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 + x^2 + x$$

2. $y'' + 4y' + 3y = 2x^2 + x$



3. y'' - 3y' = 7x - 4

41-341=7X-14 411 - 39 =0 k2 - 34 = 0 4(k-3)=0; 4=0; 62=3 y= c,e+c2e3x=c,+c2e3x 1026 (7x-4) - 3 x-1 2mm h 6-hllm 1, 161 Jhu I hogy 26 parms, 32h 35e. hoezo k, = 0 es ki 70, dangap skin k shil pma, 50,000 d=1 K = (AX+B) X1 = Ax2+BX 3-9-3mg (gt) 1 e (gt) 11. (y+) = (Ax2+Bx) = 2Ax+B 4+ 11 = 2A 3 3 6 6m 159-1 3660 moran

