#### ამოცანა 1: დიფერენციალური განტოლება განცალებულ ცვალდებში

**მითითება:** განტოლების ყოველი წევრიდან ამოიღეთ ინტეგრალი.

გაითვალისწინეთ, 0-ის ინტეგრალი არის c მუდმივა.

1) 
$$\frac{dx}{1+x^2} - \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = c$$

$$\operatorname{arctg} x - \arcsin y = c$$

2) 
$$y dy - 3\cos x dx = 0$$

$$\int y dy - \int 3\cos x dx = c$$

$$\frac{y^2}{2} - 3\sin x = c$$

3) 
$$e^{-x} dx - \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$$

$$\int e^{-x} dx - \int \frac{dy}{\cos^2 y} = c$$

$$-e^{-x} - \operatorname{tg} y = c$$

4) 
$$\frac{dx}{\sin^2 x} - (y^2 + 1) dy = 0$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int (y^2 + 1) dy = c$$

$$-\cot y - \left(\frac{y^3}{3} + y\right) = c$$

5) 
$$\frac{dy}{1+y^2} - \cos x \, dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} - \int \cos x \, dx = c$$

$$\operatorname{arctg} y - \sin x = c$$

## ამოცანა 2: მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

დისკრიმინანტის გამოყენებით იპოვეთ k-ს მნიშვნელობები.

$$1)$$
 თუ დისკრიმინანტი მეტია ნულზე  $D>0$ , მაშინ მას აქვს ორი განსხვავებული ამონახსნი  $k_1$  და  $k_2$  ( $k_1 \neq k_2$ ). ამიტომ, ზოგადი ამონახსნი იქნება: 
$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$$

ამონანსნი იქნება: 
$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$
 2) თუ დისკრიმინანტი უდრის ნულს  $D = 0$ , მაშინ მას აქვს ერთი ამონახსნი  $k$  ( $k_1 = k_2 = k$ ) და ზოგადი ამონახსნი იქნება:

ამონახსნი 
$$k$$
 ( $k_1=k_2=k$ ) და ზოგადი ამონახსნი იქნება: 
$$y=c_1e^{kx}+c_2xe^{kx}$$
 1)  $y''-7y'+12y=0$  
$$k^2-7k+12=0$$

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}$$
1)  $y'' - 7y' + 12y = 0$ 

$$k^2 - 7k + 12 = 0$$

$$D = 49 - 48 = 1$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

$$k_1 = \frac{7 - 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$D = 49 - 48 = 1$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

$$k_1 = \frac{7 - 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$k_2 = \frac{7 + 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

	$\sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$
	$k_1 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$
	$k_2 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$
	$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$
2) $y'' + 6y' + 9y = 0$	
	$k^2 + 6k + 9 = 0$
	D = 36 - 36 = 0
	$k = -\frac{6}{2} = -3$
	$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3} x$

	$k_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 4$
	$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$
2) $y'' + 6y' + 9y = 0$	
	$k^2 + 6k + 9 = 0$
	D = 36 - 36 = 0
	$k = -\frac{6}{2} = -3$
	$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3} x$
3) $y'' - 8y' + 16y = 0$	
	$k^2 - 8k + 16 = 0$
	D = 64 - 6y = 0
	$k = \frac{8}{2} = 4$
	$x = a \cdot a^4x + a \cdot a \cdot a^4x$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$
2)  $y'' + 6y' + 9y = 0$ 

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

$$D = 36 - 36 = 0$$

$$k = -\frac{6}{2} = -3$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3} x$$
3)  $y'' - 8y' + 16y = 0$ 

$$k^2 - 8k + 16 = 0$$

$$D = 64 - 6y = 0$$

$$k = \frac{8}{2} = 4$$

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$$

 $k^2 - 9 = 0$ 

4) y'' - 9y = 0

(k-3)(k+3) = 0 $k_1 = -3$ 

 $k_2 = 3$ 

 $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$ 

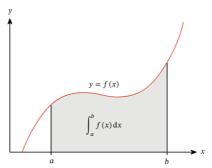
5) 2y'' - 6y' = 0

 $2k^2 - 6k = 0$ 2k(k-3) = 0

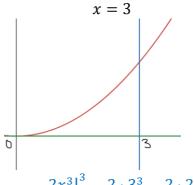
$$k_1 = 0$$
  
 $k_2 = 3$   
 $y = c_1 e^0 + c_2 e^{3x} = c_1 + c_2 e^{3x}$ 

#### ამოცანა 3: ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა

**მითითება:** ააგეთ ნახაზი და გამოიყენეთ ფორმულა  $S = \int_a^b f(x) \, dx$ 



1. 
$$y = 2x^2$$

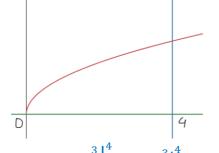


y = 0

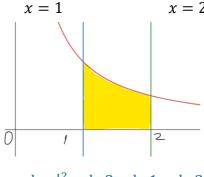
v = 0

$$S = \int_0^3 2x^2 \, dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{2 \cdot 3^3}{3} = \frac{2 \cdot 27}{3} = 18$$

$$2. \quad y = \sqrt{x}$$

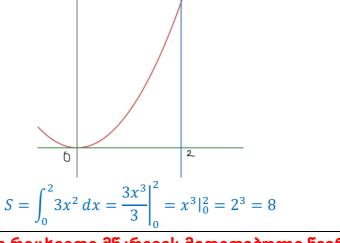


$$S = \int_0^4 \sqrt{x} \, dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_0^4 = \frac{2\sqrt{x}^3}{3} \bigg|_0^4 = \frac{2\sqrt{4}^3}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{16}{3}$$



$$S = \int_{-\pi}^{2} \frac{1}{x} dx = \ln x |_{1}^{2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$$

$$\frac{\int_{1}^{2} x^{4x^{2}} dx^{2}}{4. \ y = 3x^{2}} \qquad x = 2 \qquad y = 0$$



ამოცანა 4: იპოვეთ რიცხვითი მწკრივის მითითებული წევრი მითითება: პირობაში მოცემული ფორმულიდან  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  ამოწერეთ მხოლოდ ფუნქცია  $U_n$  და მითითებული წევრის რიცხვით ჩაანაცვლეთ n.

ა მხოლოდ ფუხქვია 
$$U_n$$
 და მითითებული წევრის რიცხვით ჩაახაცვლეთ  $n$ . 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-2}{3n+7} \qquad \qquad U_3=?$$
 
$$U_n=\frac{5n^2-2}{3n+7}$$
 
$$U_3=\frac{5\cdot 3^2-2}{3\cdot 3+7}=\frac{5\cdot 9-2}{9+7}=\frac{45-2}{16}=\frac{43}{16}$$

ამოცანა 5 (ან 6): გამოიკვლიეთ რიცხვითი მწკრივი კრებადობაზე (კოშის რადიკალური ნიშნის გამოყენებით)

**дითითება:** პიროგაში მოცემული ფორმულიდან  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  ამოწერეთ მხოლოდ ფუნქცია  $U_n$  და იპოვეთ ზღვარი ამ ფუნქციის n-ური ფესვისა

 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}$ . თუ მიღებული შედეგი ნაკლებია ნულზე, ფუნქცია კრებადია,

ხოლო თუ მეტია წულზე, ფუნქცია განშლადია.  $1. \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^m$ 

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n$$

$$U_n = \left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{\left(\frac{3n-1}{7n+4}\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3n-1}{7n+4} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3n}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{7n}{n} + \frac{4}{n}} = \frac{3-0}{7+0} = \frac{3}{7}$$

რადგან $\frac{3}{7}$  < 1, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

$$2. \ \ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 + 4}{3n^2 - 4n} \right)^n$$

$$U_n = \left(\frac{n^2 + 4}{3n^2 - 4n}\right)^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{\left(\frac{n^2 + 4}{3n^2 - 4n}\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 4}{3n^2 - 4n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2} - \frac{4n}{n^2}} = \frac{1 + 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

რადგან  $\frac{1}{3}$  < 1, რიცხვითი მწკრივი კრებადია

$$3. \quad \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

$$U_n = \left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{n}{2}}$$
  $\lim_{n \to \infty} \sqrt{\left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n-3}{7n+5}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{2n-3}{7n+5}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{\frac{2n-3}{n}}{\frac{7n}{n}+\frac{5}{n}}}$   $= \sqrt{\frac{2-0}{7+0}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$  რადგან  $\sqrt{\frac{2}{7}} < 1$ , რიცხვითი მწკრივი კრებადია

ამოცანა 6 (ან 5): გამოიკვლიეთ რიცხვითი მწკრივი კრებადობაზე (დალამბერის რადიკალური ნიშნის გამოყენებით)

**მითითება:** პირობაში მოცემული ფორმულიდან  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  ამოწერეთ მხოლოდ ფუნქცია  $U_n$  და იპოვეთ  $U_{n+1}$ , რისთვისაც n ჩაანაცვლეთ n+1-ით. ამის შემდეგ იპოვეთ ზღვარი  $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ . თუ მიღებული შედეგი ნაკლებია ნულზე, ფუნქცია კრებადია, ხოლო თუ მეტია ნულზე, ფუნქცია განშლადია.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^n}{5^n}$$

$$U_n=rac{n\cdot 3^n}{5^n}$$
 
$$U_{n+1}=rac{n\cdot 3^{n+1}}{5^{n+1}}$$
 
$$\lim_{n o\infty}rac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n o\infty}\left(rac{n\cdot 3^{n+1}}{5^{n+1}}\cdotrac{5^n}{n\cdot 3^n}
ight)=\lim_{n o\infty}\left(rac{n\cdot 3^n\cdot 3}{5^n\cdot 5}\cdotrac{5^n}{n\cdot 3^n}
ight)$$
 
$$=\lim_{n o\infty}\left(rac{n\cdot 3^n\cdot 3}{5^n\cdot 5}\cdotrac{5^n}{n\cdot 3^n}
ight)=rac{3}{5}$$
 რადგან  $rac{3}{5}<1$ , რიცხვითი მწკრივი კრებადია

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 3^n}{7^n}$$
$$U_n = \frac{n^2 \cdot 3^n}{7^n}$$

$$U_{n+1} = \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{7^{n+1}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \to \infty} \left( \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{7^{n+1}} \cdot \frac{7^n}{n^2 \cdot 3^n} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left( \frac{(n+1)^2 \cdot 3^n \cdot 3}{7^n \cdot 7} \cdot \frac{7^n}{n^2 \cdot 3^n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left( \frac{3(n+1)^2}{7n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left( \frac{3(n^2 + 2n + 1)}{7n^2} \right) = \lim_{n \to \infty} \left( \frac{3n^2 + 6n + 3}{7n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{6n}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{7n^2}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{3 + 0 + 0}{7} = \frac{3}{7}$$

რადგან  $\frac{3}{7} < 1$ , რიცხვითი მწკრივი კრებადია

ამოცანა 7: იპოვეთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი

# **მითითება:** პირობაში მოცემული ფორმულიდან $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ ამოწერეთ მხოლოდ $a_n$ , იპოვეთ $a_{n+1}$ და ამოხსენით ზღვარი $R=\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ . კრებადობის შუალედი არის (-R;R) შუალედი.

1. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{7^n}$$
 
$$a_n = \frac{n}{7^n}$$
 
$$a_{n+1} = \frac{n+1}{7^{n+1}}$$
 
$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{7^n} \cdot \frac{7^{n+1}}{n+1}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{7^n} \cdot \frac{7^n \cdot 7}{n+1}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{7n}{n+1}$$
 
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{7n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = 7$$
 ვრებადობის შუალედია  $(-7; 7)$ 

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n} \cdot x^{n}}{n \cdot 5^{n}}$$
 
$$a_{n} = \frac{2^{n+1}}{n \cdot 5^{n}}$$
 
$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1) \cdot 5^{n+1}}$$
 
$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n}}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \left( \frac{2^{n}}{n \cdot 5^{n}} \cdot \frac{(n+1) \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1}} \right) = \lim_{n \to \infty} \left( \frac{\frac{2^{n}}{n \cdot 5^{n}}}{n \cdot 5^{n}} \cdot \frac{(n+1) \cdot 5^{n} \cdot 5}{2^{n} \cdot 2} \right)$$
 
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{5(n+1)}{2n} = \lim_{n \to \infty} \frac{5n+5}{2n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{5n}{n} + \frac{5}{n}}{\frac{2n}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}$$
 კრებადობის შუალედია  $\left( -\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right)$ 

3. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \left( \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{1} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + 0 + 0}{1} = 1$$

კრებადობის შუალედია 
$$(-1;1)$$

ამოცანა 8: ამოხსენით მეორე რიგის წრფივი

### არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

მითითება:  $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$  სახის განტოლება არის

მითითება: 
$$y^+ + a_1 y^+ + a_2 y = f(x)$$
 სახის განტოლება არის არაერთგვაროვანი. მისი ამონახსნია  $y = \bar{y} + y^*$ .

 $\bar{y}$ -ის საპოვნელად, განტოლება გაუტოლეთ ნულს  $y''+a_1y'+a_2y=0$  და

იპოვეთ მისი ამონახსნი (იხილეთ <u>ამოცანა 2</u>). აქვე დავიმახსოვროთ k -ს

რამდენი ამონახსნი არის 0-ის ტოლი (წული, ერთი, ან ორი). ეს იქნეგა

შემდგომში  $\propto$ -ის მნიშვნელობა.  $y^*$  -ob საპოვნელად, პირველ რიგში უნდა დავადგინოთ f(x) -ob რიგი, იგივე x-ის უდიდესი ხარისხი; თუ რიგი 1-ის ტოლია,  $y^*=(Ax+B)x^{\alpha}$ ,

ხოლო თუ რიგი 2-ის ტოლია,  $y^* = (Ax^2 + Bx + C)^{\alpha}$ . ამის შემდეგ საჭიროა A, B, C -ob მნიშვნელობათა პოვნა, რისთვისაც ვაწარმოებთ  $y^*$  ორჯერ და

შედეგად ვპოულობთ  $(y^*)'$ -სა და  $(y^*)''$ . ეს შედეგები  $(y^*,(y^*)^{'},(y^*)^{''})$ შეგვაქვს საწყის განტოლებაში (y,y',y'' -ის ადგილზე) და ვხსნით A,B,C -ის მნიშვნელობებს. შემდგომში ეს მნიშვნელობები შეგვყავს  $y^*$ -ის ტოლობაში, და საბოლოოდ ვპოულობთ განტოლების ამონახსნს:  $y=ar{y}$  +

 $\frac{y^*.}{1. \quad y'' + 2y' = 2x + 1}$ v'' + 2v' = 0

$$y'' + 2y' = 0$$
 $k^2 + 2k = 0$ 
ვიპოვოთ  $k$ -ს მწიშვნელობები:

 $D = 2^2 - 4 \cdot 0 = 4$  $\sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$ 

$$k_1 = \frac{-2 - 2}{2} = 2$$
 $k_2 = \frac{-2 + 2}{2} = 0$ 
 $3030300 \, \bar{y}$ :

 $\bar{v} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{0x} = c_1 e^{-2x} + c_2$ 

რადგან k-ს ამონახსნებიდან <u>ერთი</u> მათგანი ტოლია 0-ის, ამიტომაც  $\propto = 1$ , ხოლო მოცემული განტოლების მარჯვენა მხარე (2x+1) არის პირველი რიგის მრავალწევრი, შესაბამისად,  $y^* = (Ax+B)x^1 = (Ax+B)x = Ax^2 + Bx$ 

Bx განტოლების ამოსახსნელად, გვჭირდება  $y^*$ -ის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები, ვინაიდან მოცემული განტოლების მარცხენა მხარე ამ წარმოებულებს შეიცავს:

$$(y^*)' = (Ax^2 + Bx)' = 2Ax + B$$
  
 $(y^*)'' = (2Ax + B)' = 2A$ 

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_განტოლებაში:

$$2A + 2Ax + B = 2x + 3$$

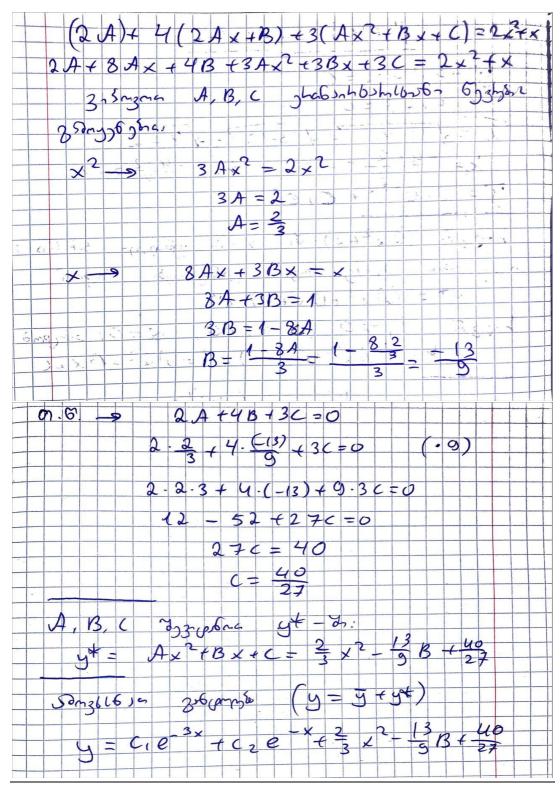
ვინაიდან ერთნაირხარისხიანი წევრები ერთმანეთის ტოლია, 2Ax = 2x, ანუ  $A = \frac{2x}{2x} = 1$ . ანალოგიურად, თავისუფალი წევრების გამოყენებით ვიპოვით B-b: 2A + B = 3;  $2 \cdot 1 + B = 3$ ; B = 3 - 2 = 1.

ვიპოვოთ 
$$y^*$$
: 
$$y^* = Ax^2 + Bx = x^2 + x$$

საზოლოოდ, ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი (
$$y = \bar{y} + y^*$$
):

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 + x^2 + x$$

2.  $y'' + 4y' + 3y = 2x^2 + x$ 



3. y'' - 3y' = 7x - 4

41-341=7X-14 411 - 39 =0 k2 - 34 = 0 4(k-3)=0; 4=0; 62=3 y= c,e+c2e3x=c,+c2e3x 1026 (7x-4) - 3 x-1 2mm h 6-hllm 1, 161 Jhu I hogy 26 parms, 32h 35e. hoezo k, = 0 es ki 70, dangap skin k shil pma, 50,000 d=1 K = (AX+B) X1 = Ax2+BX 3-9-3mg (gt ) 1 e (gt ) 11. (y+) = (Ax2+Bx) = 2Ax+B 4+ 11 = 2A 3 3 6 6m 159-1 3660 moran

