11. გამოსახეთ კოორდინატთა ღერძების $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ მგეზავებით a, b, c ვექტორების ჯამი, თუ

$$\vec{a} = \vec{a}(1; 2; 3)$$
$$\vec{b} = \vec{b}(0; -1; -2)$$
$$\vec{c} = \vec{c}(2; 2; 2)$$

მითითება. გამოიყენეთ ფორმულა

$$(a_1 + b_1 + c_1)\vec{i} + (a_2 + b_2 + c_2)\vec{j} + (a_3 + b_3 + c_3)\vec{k}$$

$$(1 + 0 + 2)\vec{i} + (2 + (-1) + 2)\vec{j} + (3 + (-2) + 2)\vec{k} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

---

12. გამოსახეთ კოორდინატთა ღერძების $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ მგეზავებით a, b, c ვექტორების ჯამი, თუ

$$\vec{a} = \vec{a}(3; 1; 1)$$
$$\vec{b} = \vec{b}(1; 1; 1)$$
$$\vec{c} = \vec{c}(-2; 0; 2)$$

მითითება. გამოიყენეთ ფორმულა

$$(a_1 + b_1 + c_1)\vec{i} + (a_2 + b_2 + c_2)\vec{j} + (a_3 + b_3 + c_3)\vec{k}$$

$$(3 + 1 + (-2))\vec{i} + (1 + 1 + 0)\vec{j} + (1 + 1 + 2)\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

---

13. იპოვეთ a და b ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ

$$\vec{a} = \vec{a}(1; 2; 3), \qquad \vec{b} = \vec{b}(3; 1; 2)$$

მითითება. გამოიყენეთ ფორმულა

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 3 + 2 + 6 = 11$$

---

14. იპოვეთ a და b ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ

$$\vec{a} = \vec{a}(1; 1; 4), \qquad \vec{b} = \vec{b}(1; 1; 2)$$

მითითება. გამოიყენეთ ფორმულა

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 1 + 1 + 8 = 10$$

---

23. რას უდრის $5 + 2i$ და $3 + 4i$ კომპლექსური რიცხვების ჯამი?

$$5 + 2i + 3 + 4i = 5 + 3 + 2i + 4i = 8 + 6i$$

---

24. რას უდრის $1 + 2i$ და $3 + 2i$ კომპლექსური რიცხვების ნამრავლი?

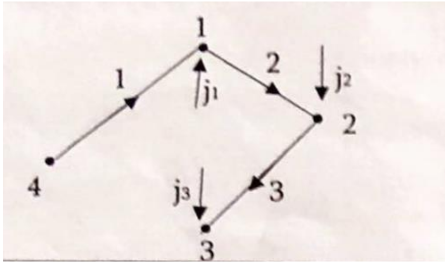
$$(1 + 2i)(3 + 2i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2i + 2i \cdot 3 + 2i \cdot 2i = 3 + 2i + 6i + 4i^2 = 3 + 8i + 4 \cdot (-1) = 3 - 4 + 8i$$
$$= -1 + 8i = 8i - 1$$

---

25. მოცემული სქემისათვის იპოვეთ შტოებში დენების განაწილების კოეფიციენტთა (C) მატრიცა.

მითითება. (C) მატრიცის საპოვნელად ვაკვირდებით შტოების ისრების მიმართულებას: ის შტოები, რომლებიც მიმართულია მე-4 წერტილისკენ (ანუ შედიან მე-4 წერტილში), არიან დადებითი ნიშნის, ხოლო რომლებიც გამოდიან მე-4 წერტილიდან, არიან უარყოფითი ნიშნის. მატრიცის ასაგებად განვიხილავთ 1, 2 და 3 წერტილებისა და შტოების დამოკიდებულებას. თუკი შტო ეხება განსახილველ წერტილს, მაშინ მისი მნიშვნელობა იქნება 1 ან -1 (როგორც ზემოთ ვახსენეთ, ნიშანი დამოკიდებულია იმაზე, შედის თუ გამოდის მე-4 წერტილიდან). ამავდროულად, თუკი შტოს მეოთხე წერტილთან შემაერთებელ გზა განსახილველ წერტილზე გადის, კვლავ დაიწერება 1 ან -1. ხოლო თუკი შტო არ ეხება განსახილველ წერტილს და ამ შტოს მეოთხე წერტილთან დამაკავშირებელ გზაზე განსახილველი წერტილი არ მდებარეობს, დაიწერება 0.

განვიხილოთ მოცემული ნახაზი.

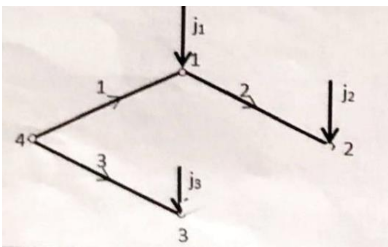


პირველ რიგში განვსაზღვროთ, შტოთა ნიშნები; სამივე შტო გამოდის მეოთხე წერტილიდან, ამიტომაც სამივე უარყოფითია.
საპოვნელი (C) მატრიცის პირველი სტრიქონი შეესაბამება პირველ წერტილს (j_1). პირველი და მეორე შტოები მას უშუალოდ ეხება, ამიტომაც ისინი 0 არ არის. აგრეთვე, მესამე შტოსა და მეოთხე წერტილის შემაერთებელი გზა გადის პირველ წერტილზე (j_1), ამიტომაც ისიც 0 არ არის. განვსაზღვროთ ნიშნები. მივიღეთ, რომ მატრიცის პირველი სტრიქონია $-1, -1, -1$.
განვიხილოთ მეორე წერტილი (j_2). პირველი შტო მას არ ეხება, თანაც პირველი შტო მეოთხე წერტილს პირდაპირ უკავშირდება მეორე წერტილის (j_2) გარეშე, ამიტომაც იგი 0-ია. მეორე და მესამე შტოები მეორე წერტილს (j_2) უშუალოდ ეხებიან, ამიტომაც ისინი 0-ის ტოლი არ არიან. ამრიგად მატრიცის მეორე სტრიქონია $0, -1, -1$.
განვიხილოთ მესამე წერტილი (j_3). პირველი და მეორე შტოები მას არ ეხებიან, თანაც პირველი და მეორე შტოები მეოთხე წერტილს ისე უკავშირდებიან, რომ მესამე წერტილის (j_3) გავლა არ უწევთ, ამიტომაც ორივე ნულის ტოლია, ხოლო მესამე შტო უშუალოდ ეხება მესამე წერტილს (j_3), ამიტომაც იგი არანულოვანია და როგორც უკვე ვაჩვენეთ, -1-ის ტოლია. შესაბამისად, მესამე სტრიქონი ტოლია $0, 0, -1$.
შევადგინოთ მატრიცა:

$$(C) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

26. მოცემული სქემისათვის იპოვეთ შტოებში დენების განაწილების კოეფიციენტთა (C) მატრიცა.

*იხილეთ წინა ამოცანის **მითითება.***



პირველ რიგში განვსაზღვროთ, შტოთა ნიშნები; სამივე შტო გამოდის მეოთხე წერტილიდან, ამიტომაც სამივე უარყოფითია.

პირველ წერტილს (j_1) უშუალოდ ეხება პირველი და მეორე შტოები, ამიტომაც ისინი არანულოვანია. მესამე შტო პირველ წერტილს (j_1) არ ეხება, თანაც ამ შტოს მეოთხე წერტილთან შემაერთებელი გზა არ გადის პირველ წერტილზე, შესაბამისად იგი ნულის ტოლია. მივიღეთ, რომ მატრიცის პირველი სტრიქონია $-1, -1, 0$.

მეორე წერტილს (j_2) ეხება მხოლოდ მეორე შტო, ამიტომაც იგი არანულოვანია. პირველი და მესამე შტოები მას არ ეხება, თანაც მეოთხე წერტილს ისე უკავშირდებიან, რომ არ გადიან მეორე წერტილზე, ამიტომაც ისინი ნულის ტოლია. მივიღეთ, რომ მატრიცის მეორე სტრიქონია $0, -1, 0$.

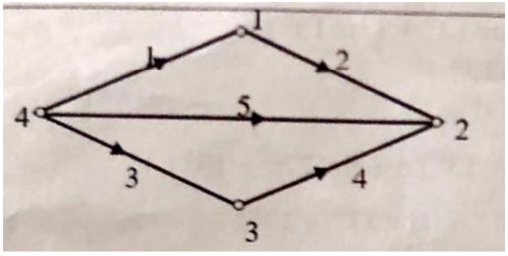
მესამე წერტილს (j_3) არ ეხება პირველი და მეორე შტოები, თანაც მათი მეოთხე წერტილთან შემაერთებელი გზა არ გადის მესამე წერტილზე, ამიტომაც ისინი ნულოვანია. მესამე შტო ეხება მესამე წერტილს, ამიტომაც იგი არანულოვანია. შესაბამისად, მატრიცის მესამე სტრიქონია $0,0,-1$.

ამრიგად, მატრიცა ტოლია:

$$(C) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

28. მოცემული ორიენტირებული სქემისთვის, შეადგინეთ შეერთების მატრიცა.

მითითება. ($M_{სრ}$) შეერთების მატრიცის საპოვნელად, განვიხილავთ წერტილებისა და შტოების ურთიერთკავშირს. მატრიცის თითოეული სტრიქონი შეესაბამება თითოეულ წერტილს, ხოლო თითოეული სვეტი — შტოს. თუკი შტო არ ეხება განსახილველ წერტილს, მატრიცაში შესაბამის ადგილზე მისი მნიშვნელობა ნულის ტოლია, ხოლო თუ ეხება იგი ტოლია 1-ის ან -1-ის. დადებითია ის შტო, რომელიც **გამოდის** განსახილველი წერტილიდან, ხოლო **უარყოფითია** ის შტო, რომელიც შედის განსახილველ წერტილში.



განვიხილოთ ნახაზი.

პირველ წერტილს ეხება მხოლოდ პირველი და მეორე შტოები, ამიტომაც დანარჩენები ნულის ტოლია. პირველი შტო პირველ წერტილში შედის, ამიტომაც იგი -1-ია, ხოლო მეორე შტო მისგან გამოდის, ამიტომაც იგი 1-ია. შესაბამისად, მატრიცის პირველი სტრიქონი ტოლია: $-1, 1, 0, 0, 0$.

მეორე წერტილს ეხება მხოლოდ მეორე, მეოთხე და მეხუთე შტოები, შესაბამისად დანარჩენი შტოები ნულის ტოლია. მეორე, მეოთხე და მეხუთე შტო შედის მეორე წერტილში, ამიტომაც სამივე უარყოფითი ერთის ტოლია. ამრიგად, მატრიცის მეორე სტრიქონი ტოლია: $0, -1, 0, -1, -1$.

მესამე წერტილს ეხება მხოლოდ მესამე და მეოთხე შტოები, ამიტომაც დანარჩენი შტოები ნულის ტოლია. მესამე შტო შედის მესამე წერტილში, ამიტომაც იგი უარყოფითი ერთის ტოლია, ხოლო მეოთხე შტო გამოდის მესამე წერტილიდან, ამიტომაც იგი დადებითი ერთის ტოლია. მივიღეთ მესამე სტრიქონიც: $0, 0, -1, 1, 0$.

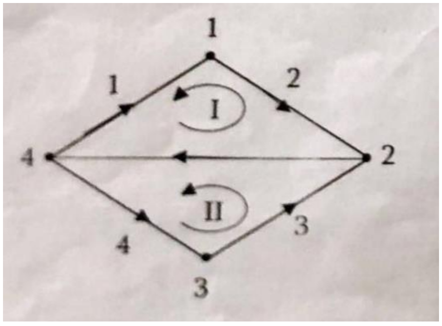
მეოთხე წერტილს ეხება მხოლოდ პირველი, მესამე და მეხუთე შტოები, ამიტომაც დანარჩენი შტოები ნულის ტოლია. პირველი, მესამე და მეხუთე შტოები გამოდიან მეოთხე წერტილიდან, ამიტომაც ისინი დადებითი ერთის ტოლია. შედეგად, მატრიცის მეოთხე სტრიქონი იქნება: $1, 0, 1, 0, 1$.

ავაგოთ მატრიცა:

$$(M_{სრ}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

32. მოცემული ორიენტირებული სქემისთვის შეადგინეთ კონტურთა მატრიცა მითითებული ორიენტაციების გათვალისწინებით:

მითითება. (N) კონტურთა მატრიცის შესადგენად ორივე კონტურს ცალ-ცალკე განვიხილავთ. შტოები, რომლებიც კონტურში არ მონაწილეობენ, ნულის ტოლია, ხოლო რომლებიც მონაწილეობენ, დადებითი ან უარყოფითი ერთის ტოლია. ნიშანი დამოკიდებულია იმ ფაქტზე, ემთხვევა თუ არა შტოს ისრის მიმართულება კონტურის წრიული ისრის მიმართულებას.



განვიხილოთ ნახაზი. პირველი კონტური შედგება შტოებისგან 1, 2, და 5 (ამ ნახაზზე მეხუთე შტოს ციფრი ბეჭდური შეცდომის გამო არ აწერა), შესაბამისად, დანარჩენი შტოები ნულის ტოლია. ასევე ვხედავთ, რომ პირველი კონტურის დადებით მიმართულებად მიღებულია საათის ისრის საპირისპირო მიმართულება. 1, 2, და 5 შტოები მოძრაობენ საათის ისრის მიმართულებით, ანუ სამივე ეწინააღდმეგება აღებულ დადებით მიმართულებას. შესაბამისად, ეს სამი შტო (1, 2, 5) უარყოფითი ერთის ტოლია. ამრიგად, მატრიცის პირველი სტრიქონია: $-1, -1, 0, 0, -1$.

მეორე კონტური შედგება შტოებისგან 3, 4 და 5. შესაბამისად, დანარჩენი შტოები ნულის ტოლია. აგრეთვე, მეორე კონტურშიც დადებით მიმართულებად აღებულია საათის ისრის საპირისპირო მიმართულება. 3, 4 და 5 შტოები მოძრაობენ საათის ისრის მიმართულების საპირისპიროდ, ესე იგი ემთხვევიან მეორე კონტურის დადებით მიმართულებას, ამიტომაც სამივე დადებითი ერთის ტოლია. მივიღეთ, რომ მატრიცის მეორე სტრიქონია: $0, 0, 1, 1, 1$.

შევადგინოთ მატრიცა:

$$(N) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

31. გადაამრავლეთ კომპლექსური რიცხვები:

$$\alpha_1 = 4(\cos 77° + i \sin 77°)$$
$$\alpha_2 = 2(\cos 13° + i \sin 13°)$$

მითითება. გამრავლებისას ყურადღება მიაქციეთ წარმოსახვით რიცხვ i-ს და გაითვალისწინეთ, რომ $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot \alpha_2 &= 4(cos\,77° + i\,sin\,77°) \cdot 2(cos\,13° + i\,sin\,13°) = 8[(cos\,77° + i\,sin\,77°) \cdot (cos\,13° + i\,sin\,13°)] \\ &= 8[cos\,77° \cdot cos13° + i\,cos77°sin13° + isin77°cos13° + i^2sin77°sin13°] \\ &= 8[cos\,77° \cdot cos13° + i\,cos77°sin13° + isin77°cos13° - sin77°sin13°] = \cdots \end{aligned}$$

გამოთვლების გასაგრძელებლად, გამოვიყენოთ შემდეგი ცხრილი:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$cos\,\alpha\,sin\,\beta = \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta) - sin(\alpha-\beta)]$$

$$cos\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

ვინაიდან ყოველი შემთხვევა შეიცავს $\frac{1}{2}$-ს, უმჯობესია, თუ მას თავიდანვე ფრჩხილებიდან გავიტანთ:

$$\begin{aligned} \dots = 8\cdot\frac{1}{2}&[(\cos(77^\circ+13^\circ)+\cos(77^\circ-13^\circ))+i(\sin(77^\circ+13^\circ)-\sin(77^\circ-13^\circ)) \\ &+i(\sin(77^\circ+13^\circ)+\sin(77^\circ-13^\circ))-(-(\cos(77^\circ+13^\circ)-\cos(77^\circ-13^\circ)))] \\ &=4[\cos 90^\circ+\cos 64^\circ+i(\sin 90^\circ-\sin 64^\circ)+i(\sin 90^\circ+\sin 64^\circ)+\cos 90^\circ-\cos 64^\circ] \\ &=4[\cos 90^\circ+\cos 64^\circ+i\sin 90^\circ-i\sin 64^\circ+i\sin 90^\circ+i\sin 64^\circ+\cos 90^\circ-\cos 64^\circ] \\ &=4[2\cos 90^\circ+2i\sin 90^\circ]=4[2\cdot 0+2\cdot i\cdot 1]=8i \end{aligned}$$

---

32. იპოვეთ მოცემული ელექტრული სისტემიდან $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ და I_I, I_{II}, I_{III} მნიშვნელობები.

$$\begin{cases} E_1 = I_{II}r_4 + I_I(r_1+r_3-r_4) + I_{III}r_2 \\ E_2 = I_Ir_3 + I_{III}r_5 + I_{II}(r_4+r_2-r_3) \\ E_3 = I_{III}(r_2+r_3-r_5) + I_Ir_5 + I_{II}r_4 \end{cases}$$

მითითება. გადაწერეთ სისტემა ისე, რომ დენები თანმიმდევრულად განლაგდნენ (I_I, I_{II}, I_{III}):

$$\begin{cases} E_1 = I_I(r_1+r_3-r_4) + I_{II}r_4 + I_{III}r_2 \\ E_2 = I_Ir_3 + I_{II}(r_4+r_2-r_3) + I_{III}r_5 \\ E_3 = I_Ir_5 + I_{II}r_4 + I_{III}(r_2+r_3-r_5) \end{cases}$$

Δ-ს საპოვნელად, შეადგინეთ მატრიცა წინაღობების შესაბამის ადგილზე გადაწერით. გაითვალისწინეთ, რომ სადაც დენი მინუს ნიშნითაა, შესაბამის წინაღობებს მინუსები გადაჰყვებათ (აქ ასეთი შემთხვევა არაა). თუკი წინაღობების მნიშვნელობები $(r_1, r_2, \dots r_5)$ მოცემულია, ჩასვით რიცხვები და იპოვეთ დეტერმინანტი, წინააღმდეგ შემთხვევაში, დატოვეთ შემდეგი სახით.

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_1+r_3-r_4 & r_4 & r_2 \\ r_3 & r_4+r_2-r_3 & r_5 \\ r_5 & r_4 & r_2+r_3-r_5 \end{vmatrix}$$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$-ის საპოვნელად, ზემოთ ნაპოვნი Δ მატრიცის შესაბამისი სვეტი (პირველი, მეორე ან მესამე) ჩაანაცვლეთ თავდაპირველ სისტემის მარცხენა მხარეს მოცემული მნიშვნელობებით. გაითვალისწინეთ, რომ გამოცდაზე სავარაუდოდ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$-თაგან მხოლოდ ერთ-ერთი იქნება საპოვნელი შეზღუდული დროის გამო.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E_1 & r_4 & r_2 \\ E_2 & r_4+r_2-r_3 & r_5 \\ E_3 & r_4 & r_2+r_3-r_5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} r_1+r_3-r_4 & E_1 & r_2 \\ r_3 & E_2 & r_5 \\ r_5 & E_3 & r_2+r_3-r_5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} r_1+r_3-r_4 & r_4 & E_1 \\ r_3 & r_4+r_2-r_3 & E_2 \\ r_5 & r_4 & E_3 \end{vmatrix}$$

გაითვალისწინეთ, რომ თუკი სისტემის მარცხენა მხარეს რომელიმე ხაზზე ეწერა $E_2 - E_3$ ან მსგავსი მოქმედება ნაცვლად მხოლოდ ერთი წევრისა, მატრიცაში იგი უცვლელად გადავიდოდა. აქაც, თუკი პირობაში E_1, E_2, E_3-ის მნიშვნელობები მოცემულია, ჩასვით რიცხვები და იპოვეთ დეტერმინანტი, წინააღმდეგ შემთხვევაში დატოვეთ ზემოთ მოცემული სახით.

და ბოლოს, I_I, I_{II}, I_{III}-ის გამოსათვლელად გამოიყენეთ ფორმულები:

$$I_I = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$
$$I_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$
$$I_{III} = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

აქაც ანალოგიურად, თუკი რიცხვები მოცემული არ არის, პასუხი დატოვეთ ზემოთ მოცემულ ფორმაში, წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩასვით მიღებული რიცხვები.