内容简介

一、对函数

$$f(x) = e^x \qquad x \in [-5, 5] \tag{1}$$

对以下两种类型的样条函数：

1. 三次自然样条
2. 满足 $S'(0) = 1, S'(1) = e$ 的样条

构造等距节点的三次样条插值函数，并计算如下误差

$$\max_i \left\{ \left| f(x_{i-\frac{1}{2}}) - S(x_{i-\frac{1}{2}}) \right|, \quad i = 0, 1, \cdots, N \right\} \tag{2}$$

这里 $x_{i-\frac{1}{2}}$ 为每个小区间的中点。对 $N = 10, 20, 40, 80$ 比较以上两组结点的结果。讨论结果。利用公式计算算法的收敛阶。

二、证明公式

$$\int_{t_i}^{t_i+1} S_i(x)dx = \frac{h_i}{2}(y_i + y_{i+1}) - \frac{h_i^3}{24}(z_i + z_{i+1}) \tag{3}$$

然后编写测试一个程序用于计算

$$\int_{t_0}^{t_n} S(x)dx \tag{4}$$

工作环境

程序所用语言：**python**

软件：**JupyterLab**

使用的包：**numpy, matplotlib, bisect**

输出结果

```
N = 10
Method (1) Error = 0.001241988377
Integrate[S1(x), {t_n, t_0}] = 1.718370963763

Method (2) Error = 0.000005743028
Integrate[S2(x), {t_n, t_0}] = 1.718281589866



N = 20
Method (1) Error = 0.000310817170 Order = 1.998513566872
Integrate[S1(x), {t_n, t_0}] = 1.718292992222

Method (2) Error = 0.000000378048 Order = 3.925168949767
Integrate[S2(x), {t_n, t_0}] = 1.718281813544
```

```
N = 40
Method (1) Error = 0.000077724487 Order = 1.999625103723
Integrate[S1(x), {t_n, t_0}] = 1.718283225079

Method (2) Error = 0.000000024249 Order = 3.962568282435
Integrate[S2(x), {t_n, t_0}] = 1.718281827527


N = 80
Method (1) Error = 0.000019432392 Order = 1.999905714701
Integrate[S1(x), {t_n, t_0}] = 1.718282003102

Method (2) Error = 0.000000001535 Order = 3.981281459724
Integrate[S2(x), {t_n, t_0}] = 1.718281828401
```

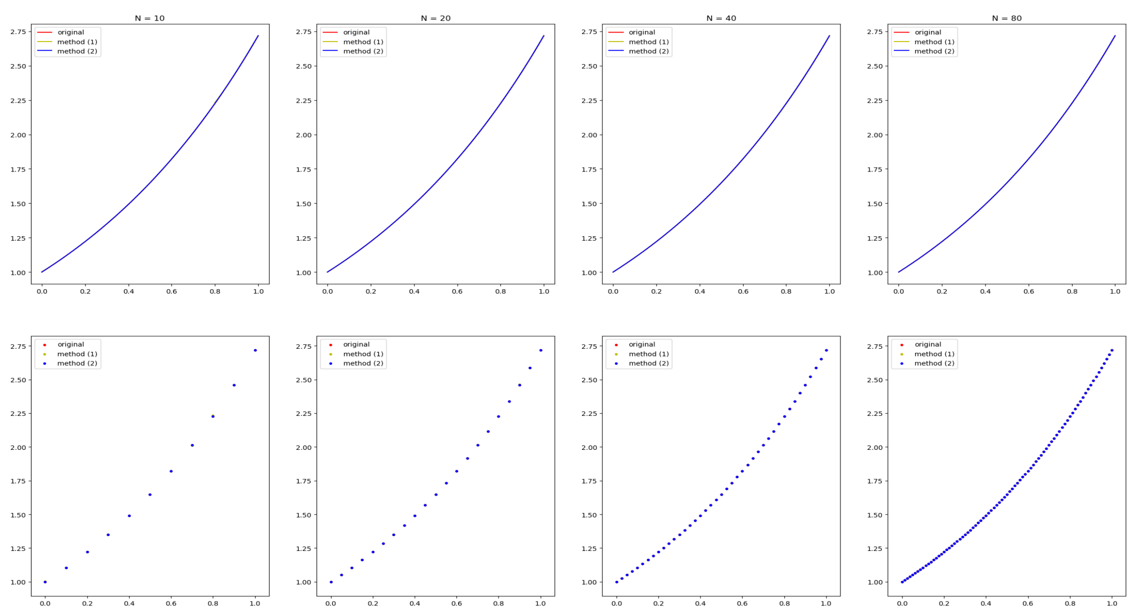

图 1: 两种不同的三次样条插值结果比较

n	Method (1) Error	order	Method (2) Error	order
10	1.242E-03	–	5.743E-06	–
20	3.108E-04	1.9985	3.780E-07	3.9252
40	7.772E-05	1.9996	2.425E-08	3.9626
80	1.943E-05	1.9999	1.535E-09	3.9813

表 1: L_∞ 范数意义下的精度检验

现象描述

一、由图像可见三次样条函数在指定区间上拟合得非常好。而随着插值点数目的增加，样条与原函数的偏差也愈来愈小。计算出方法 1 自然样条的收敛阶约为 2 阶，而方法 2 的收敛阶约为 4 阶。
二、积分准确值应为 1.718281828459，由题中公式确实给出了较精确的计算结果。

公式证明

$$\begin{aligned}
&\int_{t_i}^{t_i+1} S_i(x)dx \\
&= \int_{t_i}^{t_i+1} \left[\frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1}-x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x-t_i)^3 + (\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6})(x-t_i) + (\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6})(t_{i+1}-x) \right] dx \\
&= \frac{z_i}{24h_i}(t_{i+1}-t_i)^4 + \frac{z_{i+1}}{24h_i}(t_{i+1}-t_i)^4 + (\frac{y_{i+1}}{2h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{12})(t_{i+1}-t_i)^2 + (\frac{y_i}{2h_i} - \frac{z_i h_i}{12})(t_{i+1}-t_i)^2 \\
&= \frac{h_i^3}{24}(z_i + z_{i+1}) + \frac{h_i}{2}(y_i + y_{i+1}) - \frac{h_i^3}{12}(z_i + z_{i+1}) \\
&= \frac{h_i}{2}(y_i + y_{i+1}) - \frac{h_i^3}{24}(z_i + z_{i+1})
\end{aligned}$$

于是 (二) 中公式得证。

参考资料

[1] David R. Kincaid & E. Ward Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific of Computing Third Edition*, Brooks/Cole, 2002.