- 同样考虑的是如下两点边值问题：

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

- 把区间$[a, b]$离散化为$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$. 虽然不需要是均匀分布，但为了简化形式，后面假设

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n+1$$

- 导数的近似计算公式为

$$y'(x) = \frac{1}{2h}(y(x+h) - y(x-h)) - \frac{1}{6}h^2 y'''(\xi)$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}(y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)) - \frac{1}{12}h^2 y^{(4)}(\tau)$$

离散形式

- 用y_i表示$y(x_i)$的近似值。把边值问题中的导数用前面的数值公式代替，则有如下离散形式

$$
\begin{cases}
y_0 = \alpha \\
\dfrac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = f\big(x_, y_i, (y_{i+1} - y_{i-1})/(2h)\big), \\
\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n \\
y_{n+1} = \beta
\end{cases}
$$

- 未知数为$y_1, \ldots, y_n$，方程个数为n. 若f为y_i的非线性形式，那么这些方程是非线性的，求解将变得非常困难。

- 现在假定f关于y和y'是线性的，即

$$f(x,y,y') = u(x) + v(x)y + w(x)y'$$

则上述方程组成为线性方程组，形式为

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \\ \left(-1 - \frac{1}{2}hw_i\right)y_{i-1} + (2 + h^2 v_i)y_i \\ \quad + \left(-1 + \frac{1}{2}hw_i\right)y_{i+1} = -h^2 u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ y_{n+1} = \beta \end{cases}$$

其中$u_i = u(x_i)$, $v_i = v(x_i)$, $w_i = w(x_i)$

- 引进缩写

$$a_i=-1-\frac{1}{2}hw_{i+1}, d_i=2+h^2v_i, c_i=-1+\frac{1}{2}hw_i, b_i=-h^2u_i$$

则方程组的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & & & & \\ a_1 & d_2 & c_2 & & & \\ & a_2 & d_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-2} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1-a_0\alpha \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n-c_n\beta \end{pmatrix}$$

- 系数矩阵为三对角的，所以可用特殊的Gauss消去法求解。
- 特别地，当h足够小，而且$v_i > 0$时，矩阵是对角占优的，因为
$$|2 + h^2 v_i| > \left|1 + \frac{1}{2}hw_i\right| + \left|1 - \frac{1}{2}hw_i\right| = 2$$
- 在后面的收敛性分析中需要下面这个等式：
$$\begin{aligned} |d_i| - |c_i| - |a_{i-1}| &= 2 + h^2 v_i - \left(1 - \frac{1}{2}hw_i\right) - \left(1 + \frac{1}{2}hw_i\right) \\ &= h^2 v_i \end{aligned}$$

中国科学技术大学

- 下面证明当$h \to 0$时，离散解收敛于边值问题的解。为了知道边值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

是否有唯一解，引用下面Keller给出的一个定理。

Theorem

边值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ c_{11}y(a) + c_{12}y'(a) = c_{13} \\ c_{21}y(b) + c_{22}y'(b) = c_{23} \end{cases}$$

若满足下列条件，则在$[a, b]$上有唯一解

1. f及其一阶偏导数f_x, f_y, $f_{y'}$在域$D = [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$上连续；
2. 在D上$f_y > 0$, $|f_y| \leqslant M$, $|f_{y'}| \leqslant M$；
3. $|c_{11}| + |c_{12}| > 0$, $|c_{21}| + |c_{22}| > 0$, $|c_{11}| + |c_{21}| > 0$, $c_{11}c_{12} \leqslant 0 \leqslant c_{21}c_{22}$

- 因此在线性问题中我们假设$u, v, w \in C[a,b]$, $v > 0$. 这样我们所考虑的两点边值问题有唯一解。
- 用$y(x)$表示问题的真解，y_i表示离散问题的解。这里y_i与h有关。我们将估计$|y(x_i) - y_i|$，并指出当$h \to 0$时它也趋向于零。
- $y(x)$满足下列方程组

$$\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{12}h^2 y^{(4)}(\tau_i)$$
$$= u_i + v_i y + w_i\left[\frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) - \frac{1}{6}h^2 y'''(\xi_i)\right]$$

- 另外一方面，离散解满足下述方程

$$\frac{1}{h^2}(y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})) = u_i + v_i y(x_i) + \frac{1}{2h} w_i(y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))$$

- 两式相减，并记$e_i = y(x_i) - y_i$，则有

$$\frac{1}{h^2}(e_{i-1} - 2e_i + e_{i+1}) = v_i e_i + \frac{1}{2h} w_i (e_{i+1} - e_{i-1}) + h^2 g_i$$

其中

$$g_i = \frac{1}{12} y^{(4)}(\tau_i) - \frac{1}{6} y'''(\xi_i)$$

- 合并同类项，并且两边同乘以$-h^2$后，得到

$$\left(-1 - \frac{1}{2} h w_i\right) e_{i-1} + (2 + h^2 v_i) e_i + \left(-1 + \frac{1}{2} h w_i\right) e_{i+1} = -h^4 g_i$$

即

$$a_{i-1} e_{i-1} + d_i e_i + c_i e_{i+1} = -h^4 g_i$$

中国科学技术大学

- 设$\lambda = \|e\|_\infty$, 并且指标i满足

$$|e_i| = \|e\|_\infty = \lambda$$

这里e为向量$e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. 这样从上式我们有

$$|d_i||e_i| \leqslant h^4|g_i| + |c_i||e_{i+1}| + |a_{i-1}||e_{i-1}|$$

- 因此有

$$\begin{aligned} |d_i|\lambda &\leqslant h^4\|g\|_\infty + |c_i|\lambda + |a_{i-1}|\lambda \\ \lambda(|d_i| - |c_i| - |a_{i-1}|) &\leqslant h^4\|g\|_\infty \\ h^2 v_i \lambda &\leqslant h^4\|g\|_\infty \\ \|e\|_\infty &\leqslant h^2 \frac{\|g\|_\infty}{\inf v(x)} \end{aligned}$$

其中$\|g\|_\infty \leqslant \frac{1}{12}\|y^{(4)}\|_\infty + \frac{1}{6}\|y'''\|_\infty$。而$\|g\|_\infty / \inf v(x)$是一个与$h$无关的项，因此当$h \to 0$时$\|e\|_\infty$是$\mathcal{O}(h^2)$。

中国科学技术大学

配置法：基本想法

- 配置法所提供的思路可以用来解决应用数学中的许多问题。
- 假设给定一个线性算子L (例如，积分算子或者微分算子)，并且希望求解方程
$$Lu = w$$
其中w已知，u未知。
- 配置法求解此类问题的思路为：
  1. 选取某个基向量组$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，然后待定向量
  $$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$
  2. 为了尝试求解$Lu = w$，把u的待定形式代入，得到
  $$Lu = \sum_{j=1}^{n} c_j L v_j$$
  从而得到
  $$\sum_{j=1}^{n} c_j L v_j = w$$

中国科学技术大学

- 一般来说，无法从

$$\sum_{j=1}^{n} c_j L v_j = w$$

中解出系数$c_1, c_2, \dots, c_n$，但我们可以使之几乎成立。

- 在配置法中，向量u，w，v_j定义在相同的区域上。我们可以要求函数w与$\sum_{j=1}^{n} c_j L v_j$在n个给定点上的值相同，即

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (L v_j)(x_i) = w(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- 这是一个由n个方程，n个未知数构成的线性方程组。因此可以计算出所需要的系数。当然我们应该选择函数v_j和点x_i使得上述线性方程组对应的矩阵非奇异。

例：Sturm-Liouville边值问题

- 问题的描述为

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = w \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

其中p, q, w已知，并且在$[0,1]$上连续。未知函数u也定义在区间$[0,1]$上，但期望它是二阶连续的。

- 定义

$$Lu \equiv u'' + pu' + qu$$

- 定义向量空间：

$$V = \{u \in C^2[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}$$

我们的目标是在V中寻找$Lu = w$的一个解。

- 如果从V中取一组基函数$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 则齐次边界条件自然满足。一种选择是

$$v_{jk}(x) = x^j(1-x)^k, \quad j, k \geqslant 1$$

容易验证这组基函数满足

$$\begin{aligned} v'_{jk} &= jv_{j-1,k} - kv_{j,k-1}, \\ v''_{jk} &= j(j-1)v_{j-2,k} - 2jkv_{j-1,k-1} + k(k-1)v_{j,k-2} \end{aligned}$$

- 因此很容易写出Lv_{jk}的表达式。从而可以采用配置法求解前面的问题。

- 下面考虑稍微更一般的问题：

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = w \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \end{cases}$$

这时可能更好的基函数选择是B样条。

- 为了使基函数具有二阶连续导数，考虑三次B样条，并且为了简化记号，取$x_{i+1} - x_i = h$. 并且用样条结点作为配置点。
- 设n是采用的基函数个数。为了确定n个系数，需要n个条件。其中包括两个端点条件：

$$\sum_{j=1}^{n} c_j v_j(a) = \alpha, \quad \sum_{j=1}^{n} c_j v_j(b) = \beta$$

- 而由于维数为n的三次样条空间，有$n-2$个结点，因此恰好取这些内结点作为配置结点，从而得到另外的$n-2$个条件:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(Lv_j)(x_i) = w(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-2$$

其中

$$h = \frac{b-a}{n-3}, \quad x_i = a + (i-1)h$$

这样我们有$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} = b$. 另外，为了定义完全的B样条基函数，需要对这些结点进行扩充。

- 此时对应的系数矩阵是带状的，可以考虑如何充分利用这一稀疏性质以提高效率。