内容简介

初值问题

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^{y}} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

该方程的真解由等式

$$y^2 - x^2 + 2e^y - 2e^{-x} = 0 \tag{2}$$

隐式给出。

- 当 $x = 1$ 时，数值求解等式

  $$y^2 - x^2 + 2e^y - 2e^{-x} = 0$$

  将这一数值解作为参考的准确解。

- 利用五阶 Adams-Bashforth 公式计算方程在 $x = 1$ 的数值解。用五阶 Runge-Kutta 格式得到初值，取节点 x_i，$i = 0, \cdots, N$，N 为 2^k，$k = 3, \cdots, 8$，给出误差表格, 其中阶为

  $$\frac{\ln(Error_{old}/Error_{now})}{\ln(N_{now}/N_{old})} \tag{3}$$

工作环境

程序所用语言：**python**
软件：**JupyterLab**
使用的包：**numpy，scipy.optimize，mpmath**

输出结果

```
EQN:
f(x, y) = (x - e^(-x)) / (y + e^y)
y(0) = 0
Real : y1(1.000000) = -1.000000000000

Adams-Bashforth :
[k = 3]  y(1.000000) = -1.000000000000, Error = 4.463096558993e-14, Order = -inf
[k = 4]  y(1.000000) = -1.000000000000, Error = 0.000000000000e+00 // Max precision reached
[k = 5]  y(1.000000) = -1.000000000000, Error = 0.000000000000e+00 // Max precision reached
[k = 6]  y(1.000000) = -1.000000000000, Error = 0.000000000000e+00 // Max precision reached
[k = 7]  y(1.000000) = -1.000000000000, Error = 0.000000000000e+00 // Max precision reached
[k = 8]  y(1.000000) = -1.000000000000, Error = 0.000000000000e+00 // Max precision reached
```

因 $k = 4$ 以后在该浮点数精度下已与准确解相等，打印精度检验表是没有意义的。

分析

一、Adams-Bashforth 公式

Adams-Bashforth 公式（下简记为 A-B 公式）的形式为

$$y_{n+1} = y_n + a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \cdots \tag{4}$$

其中 f_i 表示 $f(x_i, y_i)$。

基于等距结点的五阶 A-B 公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}\left[1901 f_n - 2774 f_{n-1} + 2616 f_{n-2} - 1274 f_{n-3} + 251 f_{n-4}\right] \tag{5}$$

定义线性泛函

$$\begin{aligned} L(y) &= \sum_{i=0}^{5} \left[a_i y_i - h b_i y_i'\right] \\ &= y_5 + \left[-y_4 - \frac{1901}{720} h f_4\right] + \left[\frac{1387}{720} h f_3\right] + \left[-\frac{77}{90} h f_2\right] + \left[\frac{637}{360} h f_1\right] + \left[-\frac{251}{720} h f_0\right] \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0 \\ a_4 = -1, \quad a_5 = 1 \\ b_0 = -\frac{251}{720}, \quad b_1 = \frac{637}{360} \\ b_2 = -\frac{77}{90}, \quad b_3 = \frac{1387}{720} \\ b_4 = \frac{1901}{720}, \quad b_5 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

利用 Taylor 级数，$L(y)$ 也可表示为

$$L(y) = d_0 y_0 + d_1 h y_1' + d_2 h^2 y_2'' + \cdots \tag{7}$$

比较两式，从而计算出

$$\begin{cases} d_0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{5} a_i = 0 \\ d_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{5} (i a_i - b_i) = 0 \\ \quad \cdots \\ d_5 = \displaystyle\sum_{i=0}^{5} \left(\frac{i^5}{120} a_i - \frac{i^4}{24} b_i\right) = 0 \\ d_6 = \displaystyle\sum_{i=0}^{6} \left(\frac{i^6}{720} a_i - \frac{i^5}{120} b_i\right) \neq 0 \end{cases} \tag{8}$$

根据 [1, p447] 多步法局部截断误差定理，五阶 A-B 方法的局部截断误差为 $O(h^6)$。再由 [1, p448] 整体误差截断定理知五阶 A-B 方法的整体截断误差为 $O(h^5)$。

与该方法稳定性和相容性相关的两个多项式为

$$\begin{cases} p(z) = z^5 - z^4 \\ q(z) = \dfrac{1}{720}\left[1901 z^4 - 2774 z^3 + 2616 z^2 - 1274 z + 251\right] \end{cases} \tag{9}$$

多项式 p 的根为 1，0(四重)，因此是稳定的；$q(1)=\dfrac{1}{720}(1901-2774+2616-1274+251)=1$，$p(1)=0$，$p'(1)=1$，因此也是相容的。根据 [1, p446] 多步法稳定性和相容性定理，五阶 A-B 方法是收敛的。

二、得到原方程精确解的原因

事实上对于原问题，凡是满足形式 $y(x_0)=-x_0$ 的初值条件，根据方程：

$$y'=f(x,\,y)=\frac{x-e^{-x}}{y+e^{y}} \tag{10}$$

使用五阶 Runge-Kutta 方法计算启动点时，将发生如下现象：从直线 $y=-x$ 上一点 $(x_n,\,y_n)$ 开始计算的下一点

$$\begin{aligned}
F_i &= -h\\
y_{n+1} &= y(x_n+h)=y(x)+\sum_{i=0}^{6}c_iF_i\\
&= -(x_n+h)=x_{n+1}
\end{aligned}$$

仍落在直线 $y=-x$ 上。因此用于启动五阶 A-B 方法的五个初始点将全部位于这条直线上。

使用 A-B 方法计算时，每次步进 y_n 都将随 x_n 以斜率 -1 线性增长，后续点的数值解都将落在直线 $y=-x$ 上，并最终准确地到达 $(1,\,-1)$，即方程的隐式解在 $x=1$ 处对应的一个解。可参考下面绘制的向量场。

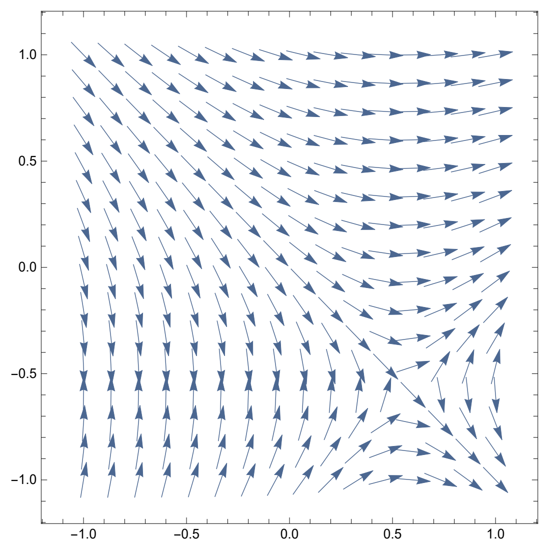

图 1: 微分方程向量场

进而，$k=3$ 时误差产生原因可能是由于二进制数不能有限表示某些十进制数、e 指数运算精度有限和一些舍入误差所导致的，并不是方法带来的。

三、重新尝试

重新选取初值条件后做相同的工作。

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^{y}} \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{11}$$

记 $g(x,\, y) = y^2 - x^2 + 2e^y - 2e^{-x}$。该方程的真解为

$$g(x,\, y) = g(0,\, 1) \tag{12}$$

另外尝试对另一个初值问题作相同的工作。选取第 10 次程序作业中的微分方程：

$$\begin{cases} y' = \lambda y + \cos x - \lambda \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

该方程的真解为

$$y(x) = \sin x \tag{14}$$

对这两个方程，在第二个方程中取 $\lambda = 1$，利用五阶 Adams-Bashforth 公式计算方程在 $x = 1$ 的数值解，用五阶 Runge-Kutta 格式得到初值，节点选取与原题相同。最后得到如下输出结果与误差表格。

```
EQN:
f(x, y) = (x - e^(-x)) / (y + e^y)
y(0) = 0
Real : y1(1.000000) = 0.963818477129

Adams-Bashforth :
[k = 3]  y(1.000000) = 0.963807795628, Error = 1.068150139516e-05, Order = -inf
[k = 4]  y(1.000000) = 0.963818037888, Error = 4.392407346732e-07, Order = 4.6040
[k = 5]  y(1.000000) = 0.963818462452, Error = 1.467741572725e-08, Order = 4.9033
[k = 6]  y(1.000000) = 0.963818476661, Error = 4.680933418655e-10, Order = 4.9707
[k = 7]  y(1.000000) = 0.963818477114, Error = 1.473499100513e-11, Order = 4.9895
[k = 8]  y(1.000000) = 0.963818477129, Error = 4.618527782441e-13, Order = 4.9957
```

k	Error	Order
3	1.0682E-06	–
4	4.3924E-07	4.6040
5	1.4677E-09	4.9033
6	4.6809E-10	4.9707
7	1.4735E-12	4.9895
8	4.6185E-13	4.9957

表 1: 精度检验

```
EQN:
f(x, y) = y + cos(x) - sin(x)
y(0) = 0
Real : y2(1.000000) = 0.841470984808

Adams-Bashforth :
[k = 3]  y(1.000000) = 0.841473918590, Error = 2.933781801051e-06, Order = -inf
[k = 4]  y(1.000000) = 0.841471134292, Error = 1.494840289329e-07, Order = 4.2947
[k = 5]  y(1.000000) = 0.841470990425, Error = 5.617588283435e-09, Order = 4.7339
[k = 6]  y(1.000000) = 0.841470984998, Error = 1.904448820866e-10, Order = 4.8825
[k = 7]  y(1.000000) = 0.841470984814, Error = 6.183387135650e-12, Order = 4.9448
[k = 8]  y(1.000000) = 0.841470984808, Error = 1.959543638463e-13, Order = 4.9798
```

k	Error	Order
3	2.9338E-06	–
4	1.4948E-07	4.2947
5	5.6176E-09	4.7339
6	1.9044E-10	4.8825
7	6.1834E-12	4.9448
8	1.9595E-13	4.9798

表 2: 精度检验

依照两次试验的结果，五阶 Adams-Bashforth 公式 $O(h^5)$ 的整体截断误差得到了证实。

参考资料

[1] David R. Kincaid & E. Ward Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific of Computing Third Edition*, Brooks/Cole, 2002.