内容简介

- 画出五阶 Adams-Bashforth 公式和五阶 Adams-Moulton 公式的绝对稳定性区域
- 使用 Mathematica 绘制, 使用 ImplicitPlot 函数

输出结果

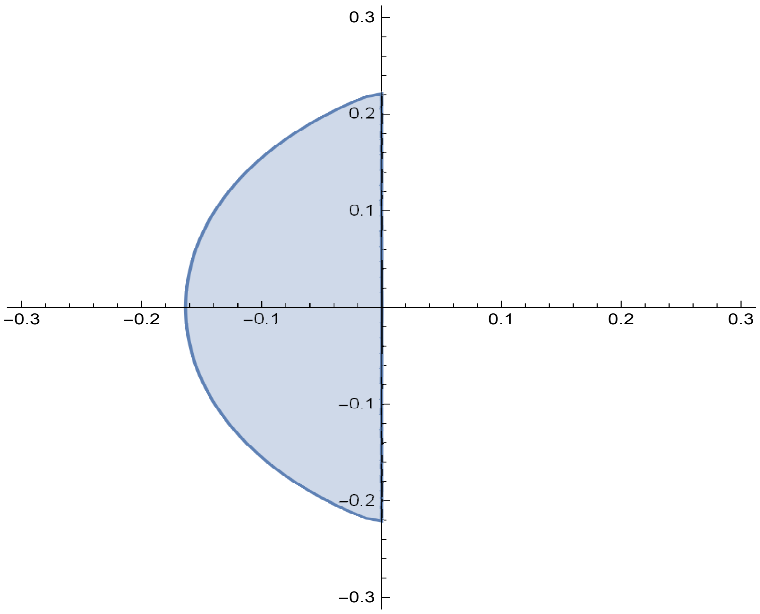

图 1: 五阶 Adams-Bashforth 公式的绝对稳定性区域

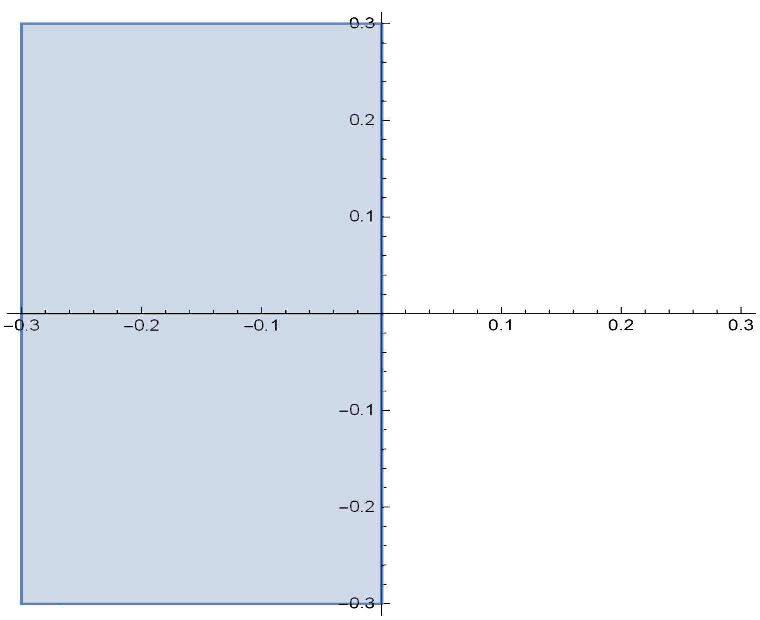

图 2: 五阶 Adams-Moulton 公式的绝对稳定性区域

分析

一般的线性多步法有下列性质：

$$a_k y_n + a_{k-1} y_{n-1} + \cdots + a_0 y_{n-k} = h\lambda(b_k f_n + b_{k-1} f_{n-1} + \cdots + a_0 f_{n-k}) \tag{1}$$

应用于试验方程

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = s \end{cases} \tag{2}$$

得到

$$a_k y_n + a_{k-1} y_{n-1} + \cdots + a_0 y_{n-k} = h\lambda(b_k y_n + b_{k-1} y_{n-1} + \cdots + a_0 y_{n-k}) \tag{3}$$

对应于求解齐次线性差分方程

$$(a_k - h\lambda b_k) y_n + (a_{k-1} - h\lambda b_{k-1}) y_{n-1} + \cdots + (a_0 - h\lambda b_0) y_{n-k} = 0 \tag{4}$$

其解为形如 $y_n = r^n$ 的一些基本解的线性组合，其中 r 是多项式 ϕ 的一个根。ϕ 具有性质：

$$\begin{aligned} \phi &= p - \lambda h q \\ p(z) &= a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\ q(z) &= b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \cdots + b_1 z + b_0 \end{aligned}$$

只有当所有根满足 $|r| < 1$，数值解才能保证具有衰减性质 ($y_n \to 0$，当 $n \to \infty$)。使得多项式 ϕ 的所有根均落在圆盘 $|z| < 1$ 中的 $\omega = \lambda h$ 的取值区域即**绝对稳定性区域**。

参考资料

[1] David R. Kincaid & E. Ward Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific of Computing Third Edition*, Brooks/Cole, 2002.