内容简介

对函数

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in [-5,\, 5] \tag{1}$$

构造 Lagrange 插值多项式 $p_L(x)$，插值结点取为：

1. $x_i = 5 - \frac{10}{N} i \qquad i = 0, 1, \cdots, N$
2. $x_i = -5\cos\left(\frac{2i+1}{2N+2}\pi\right) \qquad i = 0, 1, \cdots, N$

并计算如下误差

$$\max_i \left\{ \Big| f(y_i) - p(y_i) \Big|, \quad y_i = \frac{i}{10} - 5,\ i = 0, 1, \cdots, 100 \right\} \tag{2}$$

对 $N = 5, 10, 20, 40$ 比较以上两组结点的结果。

工作环境

程序所用语言：**python**

软件：**JupyterLab**

使用的包：**numpy，matplotlib**

主要方法

Lagrange 插值多项式，比较法

输出结果

```
N = 5
Max Error of grid (1) : 0.432692307692
Max Error of grid (2) : 0.555911338812
N = 10
Max Error of grid (1) : 1.915643050219
Max Error of grid (2) : 0.108929039892
N = 20
Max Error of grid (1) : 58.278125107739
Max Error of grid (2) : 0.015325088544
N = 40
Max Error of grid (1) : 78689.037485547073
Max Error of grid (2) : 0.000273859790
```

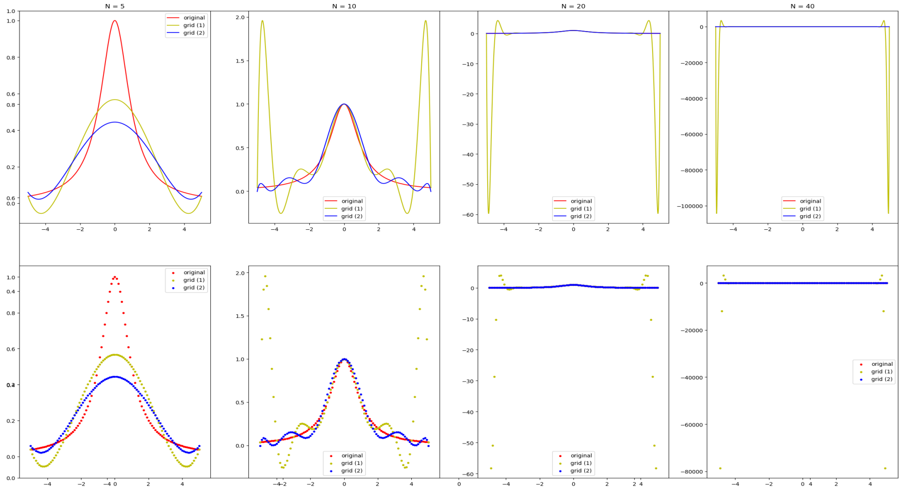

图 1: 整体性质

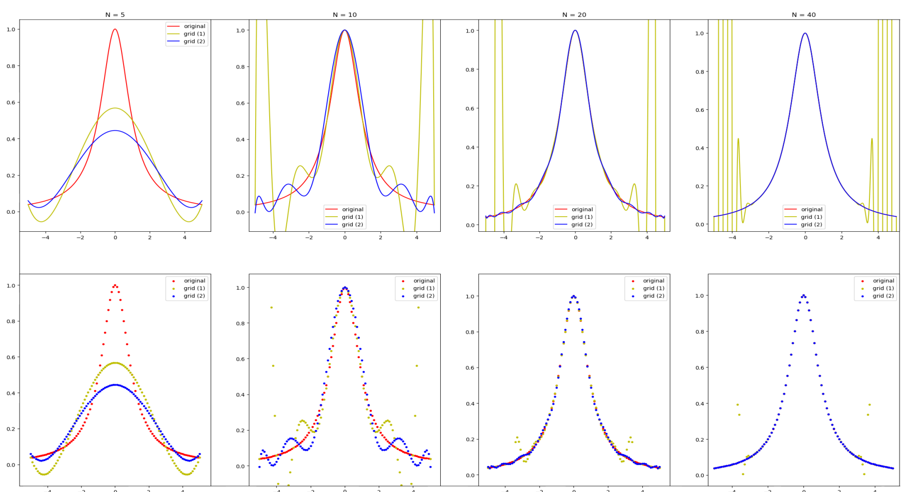

图 2: 局部性质

现象分析

现象 随着结点数增加，两种区间划分方式得到的插值多项式在区间中部愈来愈接近目标函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$，但在区间边缘，选取等距结点所得的插值多项式突然开始随结点数增加而振荡得越剧烈，振幅也越来越大，而选取 Chebyshev 结点所得插值多项式仍能很好的逼近目标函数。

分析　下面粗略估计 $|f(x)-p(x)|$ 在靠近 -5 处的取值范围。由多项式插值逼近定理得

$$f(x)-p(x)=\frac{1}{(N+1)!}f^{(N+1)}(\xi_x)\prod_{i=0}^{N}(x-x_i) \qquad \xi_x\in[-5,\,5] \tag{3}$$

设 $h=\dfrac{10}{N}$，取点 $-5+\varepsilon$。那么

$$\omega(\varepsilon)=|f(\varepsilon-5)-p(\varepsilon-5)|=\prod_{i=0}^{N}(x-x_i)=\prod_{i=0}^{N}(ih-\varepsilon) \tag{4}$$

$|\omega(\varepsilon)|$ 的上确界难以确定。令 $\varepsilon=\dfrac{h}{2}$，得

$$\omega\left(\frac{h}{2}\right)=-(2N-1)!!\left(\frac{h}{2}\right)^{N+1}=-\frac{h^{N+1}(2N)!}{2^{2N+1}N!} \tag{5}$$

现将 $\dfrac{h^{N+1}(2N)!}{2^{2N+1}N!}$ 作为 $|\omega(\varepsilon)|$ 上确界的一个估计（合理性有待验证）。那么

$$|f(x)-p(x)|\leqslant\frac{1}{(N+1)!}|f^{(N+1)}(\xi_x)|\frac{h^{N+1}(2N)!}{2^{2N+1}N!} \tag{6}$$

除 $|f^{(N+1)}(\xi_x)|$ 难以估计外，其他部分可用 Stirling 公式进行估计:

$$\frac{1}{(N+1)!}\frac{h^{N+1}(2N)!}{2^{2N+1}N!}\sim\frac{\sqrt{4\pi N}(\frac{2N}{e})^{2N}}{2^{2N+1}2\pi\sqrt{N(N+1)}(\frac{N}{e})^{N}(\frac{N+1}{e})^{N+1})} \tag{7}$$

$$\sim\frac{e}{2(N+!)\sqrt{\pi(N+1)}} \tag{8}$$

于是可认为

$$\max|f(x)-p(x)|\sim\frac{eh^{N+1}}{2(N+1)\sqrt{\pi(N+1)}}|f^{(N+1)}(\xi_x)| \tag{9}$$

这是一个并不好的估计，它需要 $|f^{(N+1)}(\xi_x)|$ 增长得非常快。才能说明龙格现象。可参考 [2]，其中描述了利用柯西积分定理和其它一些复分析知识来分析龙格现象的一种不同方法。

Chebyshev 结点则拥有更好的数值性态。令

$$g(x)=f(5x) \tag{10}$$

那么 $g(x)$ 是在 $[-1,\,1]$ 上取值的函数。利用 [1, p.317] 的结论便有

$$|g(x)-p(x)|\leqslant\frac{1}{2^n(n+1)!}\max_{|x|\leqslant1}|g^{(n+1)}(x)| \tag{11}$$

即

$$|f(x)-p(\frac{x}{5})|\leqslant\frac{5^{n+1}}{2^n(n+1)!}\max_{|x|\leqslant5}|f^{(n+1)}(x)| \tag{12}$$

当 $|f^{(n+1)}|$ 增长速度不太快时，插值多项式就能收敛到目标函数。需要注意的是，对于一般情况，即使选取 Chebyshev 结点，插值多项式仍有可能不收敛于目标函数。

探索阅读

龙格现象 [2]

“Runge 现象”是多项式插值逼近不收敛的一个典型样例。简言之, 若 $p_n(x)$ 由函数

$$f(x) = (1+x^2)^{-1}, \qquad x \in [-5, 5] \tag{13}$$

取等距结点 $x_j^{(n)} = -5 + 10(j/n) \quad (j = 0, 1, \cdots, n)$，作插值多项式得到，那么 p_n 一致收敛到 f，仅当 $|x| < x_c \approx 3.63$。若 $x_c < |x| < 5$，那么 $|p_n - f|$ 发散。

机器精度因素 [2]

考虑 Lagrange 插值多项式

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_j(x) \tag{14}$$

其中

$$l_j(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_k^{(n)}}{x_j^{(n)} - x_k^{(n)}} \right) \tag{15}$$

若为结点等距分布，那么

$$x_j^{(n)} = a + jh, \qquad h = \left(\frac{b-a}{n} \right) \tag{16}$$

假设计算 $f(x_j)$ 有一定舍入误差，于是

$$\hat{p}_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \hat{f}(x_j) l_j(x) \tag{17}$$

这里 $\hat{f}(x_j) = f(x_j) + \varepsilon_j$。那么舍入误差的总影响为

$$E_n = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) \varepsilon_j \tag{18}$$

令 $x = a + h/2$，为接近区间边缘的一点。那么

$$l_j\left(a + \frac{h}{2}\right) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \left(\frac{\frac{1}{2} - k}{j - k} \right) \tag{19}$$

$$= l_j\left(a + \frac{h}{2}\right) \tag{20}$$

$$= \left(\frac{-1}{2j-1} \right) \binom{n}{j} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right] \tag{21}$$

不妨考虑 m 为偶数，当组合数项取最大值，即 $n=2m$，$j=m$ 时，有：

$$l_m\left(a+\frac{h}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2j-1}\right)(2m)!(m!)^2\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right] \tag{22}$$

$$\sim\left(\frac{-1}{2j-1}\right)\frac{(\sqrt{4\pi m}(\frac{2m}{e})^{2m})}{2\pi m(\frac{m}{e})^{2m}}\left[\frac{\sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{2^{2n}(2\pi n(\frac{n}{e})^{2n})}\right] \tag{23}$$

$$=\left(\frac{-1}{2m-1}\right)\frac{2^{2m}}{\sqrt{2\pi m}} \tag{24}$$

$$=\left(\frac{-\sqrt{2}}{n-1}\right)\frac{2^n}{\pi n} \tag{25}$$

因此，舍入误差 ε_m 将会乘以一个指数增长速度的因子。除非巧合，否则被放大的误差会大大影响计算结果。

这种分析手段忽略了 f，指出发散现象也可能是由机器误差造成的，但事实上，机器误差并不总是起重要影响。另一方面，这个例子体现了即便是对解析函数，高阶插值多项式（采用等距结点）并不一定是种通用的良好逼近工具。

参考资料

[1] David R. Kincaid & E. Ward Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific of Computing Third Edition*, Brooks/Cole, 2002.

[2] James F. Epperson, *On the Runge Example*, Amer. Math. Monthly, 94(1987), 329-341.

[3] Elias M. Stein & Rami Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2013.