《数值分析》之

数值微分和数值积分

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

http://staff.ustc.edu.cn/~yxu/

Bernoulli多项式

- Bernoulli多项式是由下列等式定义

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(t) = (n+1)t^n$$

- 最初的几个Bernoulli多项式是

$$B_0(t) = 1$$
$$B_1(t) = t - \frac{1}{2}$$
$$B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$
$$B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$$

Bernoulli多项式性质

1. $B_n' = nB_{n-1}, \ (n \geqslant 1).$
2. $B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}, \ (n \geqslant 2).$
3. $B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B_k(0) t^{n-k}.$
4. $B_n(1-t) = (-1)^n B_n(t).$

Theorem

函数$G(t) = B_{2n}(t) - B_{2n}(0)$在开区间$(0,1)$中没有零点。

证明：有性质2和4，令$t = 0$得到

$$B_n(0) = B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$$

从而有$B_3(0) = B_5(0) = B_7(0) = \cdots = 0.$
反证法。假设$G(t)$在开区间$(0,1)$中有一个零点。
由$G(0) = G(1) = 0$,由Rolle中值定理知$G'(t)$在(0,1)中有2个零点.
$\because G'(t) = B'_{2n}(t) = 2nB_{2n-1}(t), \Longrightarrow B_{2n-1}(t)$在(0,1)中有2个零点.
又$\because B_{2n-1}(0) = B_{2n-1}(1) = 0,$
$\Longrightarrow B'_{2n-1}(t) = (2n-1)B_{2n-2}(t)$在(0,1)中有3个零点.
由此可知,对所有奇数指标$k < 2n$, B_k在(0,1)中至少有2个零点.
因此, B_3除0,1两个零点外,在(0,1)中还有2个零点. 而B_3为三次多项式, 这显然是不可能的.

Theorem

对于$f \in C^{2m}[0,1]$,

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{b_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1)] + R$$

其中

$$b_k = B_k(0)$$
$$R = -\frac{b_{2m}}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi),\ (0 < \xi < 1).$$

- $C[a, b]$上的正线性算子L是指它满足
  1. 线性性：$L(af + bg) = aLf + bLg$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in C[a, b]$
  2. 正性：若$f \geqslant 0$, 则$Lf \geqslant 0$
- 正线性算子的著名例子来自于Serge Bernstein在1912年定义的如下算子: 在$C[0, 1]$中，

$$(B_n f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_k^n(x), \qquad B_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

这里的$\{B_k^n(x)\}$称为Bernstein基函数。

Theorem

设$L_n(n \geqslant 1)$是定义在$C[a,b]$上的一个正线性算子序列，其中每个算子在相同的空间中取值。若对于函数$f(x) = 1, x, x^2$，$\|L_n f - f\|_\infty \to 0$成立，则对所有的$f \in C[a,b]$此结论也成立。

证明：若L为正线性算子，则由$f \geqslant g$可知$Lf \geqslant Lg$，进一步有$L(|f|) \geqslant |Lf|$. 记$h_k(x) = x^k$, $k = 0,1,2$. 再定义α_n, β_n, γ_n如下：

$$\alpha_n = L_n h_0 - h_0, \quad \beta_n = L_n h_1 - h_1, \quad \gamma_n = L_n h_2 - h_2$$

由定理的假设可知

$$\|\alpha_n\|_\infty \to 0, \quad \|\beta_n\|_\infty \to 0, \quad \|\gamma_n\|_\infty \to 0$$

下面证明对于任意$f \in C[a,b]$以及任意的$\varepsilon > 0$, 存在m使得当$n > m$时$\|L_n f - f\|_\infty < 3\varepsilon$.

由于f在紧区间上连续，从而一致连续，所以存在$\delta > 0$，使得对于区间$[a, b]$中所有的x和y，当$|x - y| < \delta$时，$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
令$c = 2\|f\|_\infty/\delta^2$，则有当$|x - y| \geqslant \delta$时，

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2\|f\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty \frac{(x-y)^2}{\delta^2} = c(x-y)^2$$

从而对于$[a, b]$内的任意x, y有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + c(x-y)^2$$

上述不等式重写为：

$$|f - f(y)h_0| \leqslant \varepsilon h_0 + c[h_2 - 2yh_1 + y^2 h_0]$$

从而根据正线性算子的定义有：

$$|L_n f - f(y)L_n h_0| \leqslant \varepsilon L_n h_0 + c[L_n h_2 - 2yL_n h_1 + y^2 L_n h_0]$$

进一步用y代替x,

$$
\begin{aligned}
&|(L_n f)(y) - f(y)(L_n h_0)(y)| \\
&\leqslant \varepsilon(L_n h_0)(y) + c[(L_n h_2)(y) - 2y(L_n h_1)(y) + y^2(L_n h_0)(y)] \\
&= \varepsilon[1+\alpha_n(y)] + c[y^2 + \gamma_n(y) - 2y(y+\beta_n(y)) + y^2(1+\alpha_n(y))] \\
&= \varepsilon + \varepsilon\alpha_n(y) + c\gamma_n(y) - 2cy\beta_n(y) + cy^2\alpha_n(y) \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon\|\alpha_n\|_\infty + c\|\gamma\|_\infty + 2c\|h_1\|_\infty\|\beta_n\|_\infty + c\|h_2\|_\infty\|\alpha_n\|_\infty
\end{aligned}
$$

因此存在m, 当$n \geqslant m$时, $\|L_n f - f \cdot L_n h_0\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$. 因此必要时再增大$m$有

$$
\begin{aligned}
\|L_n f - f\|_\infty \leqslant &\|L_n f - f \cdot L_n h_0\|_\infty + \|f \cdot L_n h_0 - f \cdot h_0\|_\infty \\
\leqslant &2\varepsilon + \|f\|_\infty\|\alpha_n\|_\infty \leqslant 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

Bernstein算子的情形

- h_0: $(B_n h_0)(x) = \sum_{k=0}^n B_k^n(x) = 1$
- h_1:
$$(B_n h_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x$$
- h_2:
$$(B_n h_2)(x) = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} \to x^2$$

从而Bohman-Korovkin定理此时给出了Weierstrass定理：即有界闭区间上的连续函数可以被多项式一致逼近。