《数值分析》之

函数逼近

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

http://staff.ustc.edu.cn/~yxu/

Hermite插值指的是对一个函数在一组结点上的函数值和导数值进行插值。
给定函数f以及结点$x_0, \ldots, x_n$，求多项式p:

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad j = 0, 1, i = 0, \ldots, n$$

- 多项式插值空间的维数，
- 共有2(n+1)个条件
- 多项式最高次数为2n+1

$$H(x) = \sum_{i=0}^{n} h_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} g_i(x) f'(x_i)$$

问题变为求解插值基函数$\{h_i(x)\}_i^n$, $\{g_i(x)\}_i^n \in P^{2n+1}(x)$,满足

$$\begin{cases} h_i(x_j) = \delta_{ij} \\ h_i'(x_j) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} g_i(x_j) = 0 \\ g_i'(x_j) = \delta_{ij} \end{cases},$$

	h_0	$\cdots$	h_n	g_0	$\cdots$	g_n
x_0	1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	0	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0
x_0'	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n'	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	1

$$h_i(x) = \left(1 - 2(x - x_i)\sum_{i\neq j}\frac{1}{x_i - x_j}\right)\ell_i^2(x)$$

$$g_i(x) = (x - x_i)\ell_i^2(x)$$

当取2个节点时的Hermite插值多项式基函数为

$$h_0(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_0}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$h_1(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

$$g_0(x) = (x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$g_1(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

例 给定$f(-1)=0$, $f(1)=4$, $f'(-1)=2$, $f'(1)=0$,
求Hermite插值多项式，并计算$f(0.5)$

解：

$$H_3(x)=h_0(x)\cdot 0+h_1(x)\cdot 4+g_0(x)\cdot 2+g_1(x)\cdot 0$$

只需计算$h_1(x)$和$g_0(x)$

$$h_1(x)=\left(1-2\frac{x-1}{1+1}\right)\left(\frac{x+1}{1+1}\right)^2=\frac{1}{4}(2-x)(x+1)^2$$

$$g_0(x)=(x+1)\left(\frac{x-1}{-1-1}\right)^2=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)^2$$

$$H_3(x)=(2-x)(x+1)^2+\frac{1}{2}(x+1)(x-1)^2$$

$$H_3(0.5)=3.5625$$

Theorem (Hermite插值误差估计定理)

若$f \in C^{2n+2}[a,b]$，$[a,b]$内的插值结点为$x_0,\ldots,x_n$，$p(x)$为相应的Hermite插值多项式，$\deg p \leqslant 2n+1$，则对于任意$x \in [a,b]$，存在$\xi_x \in (a,b)$使得

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$$

证明方法与无重结点的多项式插值误差估计定理完全类似。

Hermite 插值问题推广

给定函数f以及结点$x_0, \ldots, x_n$，求多项式p:

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad j = 0, \ldots, k_i - 1, i = 0, \ldots, n$$

Theorem (Hermite插值定理)

存在唯一的次数不超过$m = k_0 + \cdots + k_n - 1$的多项式满足上述插值条件。

证明：通过在幂基$\{1, x, \ldots, x^m\}$下待定多项式的系数，得到一个线性方程组$Au = b$, 其中A为$(m+1) \times (m+1)$阶矩阵(称为广义Vandermonde矩阵). 为证其有唯一解，只要证$Au = 0$仅有零解，即满足$p^{(j)}(x_i) = 0$的次数不超过m的多项式只能是零多项式。这可以通过统计p的零点数得证。 □