《数值分析》之

函数逼近

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

http://staff.ustc.edu.cn/~yxu/

- 多项式插值误差定理
  设$f \in C^{n+1}[a,b]$，多项式p是f在不同结点$x_0, x_1, \ldots, x_n$上的插值多项式，$\deg p \leqslant n$。则对$[a,b]$中每个x，都有$\xi_x \in (a,b)$使得

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

- 即如何选取结点x_i，使得$w(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n)$ 在$[a,b]$上的绝对值最大值最小?
- 为了简单起见，不妨令$[a,b] = [-1,1]$. 转而考虑一般的首一n次多项式$p(x)$使得它在$[-1,1]$上的绝对值最大值最小。
- 需要用到(第一类)Tchebyshev多项式*。

---

*Tchebyshev (1821.5.16–1894.12.8)，俄罗斯数学家。1850年证明了Bertrand猜测，即n与$2n$之间必有至少一个素数，也接近证明了素数定理[illegible]时他在概率论、正交函数和积分理论方面有重要贡献。其英文名有时也写作Chebyshev

有两种等价的定义方式

- 递归定义：

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1.$$

- 解析形式定义：

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Tchebyshev多项式性质

- $|T_n(x)| \leqslant 1,\ -1 \leqslant x \leqslant 1$
- $T_n\left(\cos\frac{j\pi}{n}\right) = (-1)^j,\ j = 0, \ldots, n$
- $T_n\left(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right) = 0,\ j = 1, \ldots, n$
- $2^{1-n}T_n$是一个首一多项式

Theorem

设$p(x)$为一个n次首一多项式，则

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |p(x)| \geqslant 2^{1-n}$$

证明：反证法。设对任意$x\in[-1,1]$, $|p(x)|<2^{1-n}$.
令$q(x)=2^{1-n}T_n$, $x_i=\cos(i\pi/n)$,

$$(-1)^i p(x_i)\leqslant |p(x_i)| < (-1)^i q(x_i)$$

即$(-1)^i\big(q(x_i)-p(x_i)\big)>0$, $i=0,\ldots,n$. 这说明在区间$[-1,1]$上，多项式$q-p$的符号在正负之间变动了$n+1$次，即它在$(-1,1)$之间至少有n个根，而这是不可能的，因为$q-p$的次数至多是$n-1$.

最佳结点选取

- Tchebyshev结点：结点x_i是Tchebyshev多项式$T_{n+1}(x)$的根
- 插值误差

$$|f(x)-p(x)| \leqslant \frac{1}{2^n(n+1)!}\max_{|t|\leqslant 1}|f^{(n+1)}(t)|$$

Theorem (Faber's定理)

对任意给定的结点组

$$a \leqslant x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \leqslant b, \quad n \geqslant 0 \tag{1}$$

在区间$[a,b]$上存在一个连续函数f使得f在这组结点上的插值多项式不能一致收敛于f.

Theorem

若$f \in C[a,b]$，则存在(1)式中那样的一组结点，使得f在这组结点上的插值多项式p_n满足

$$\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$$

- 考虑定义在给定拓扑空间X上的全体实值连续函数形成的空间$C(X)$，这里X为紧的Hausdorff空间
- 定义范数为

$$\|f\| = \max_{x\in X} |f(x)|$$

则$C(X)$成为一个赋范空间(从而是Banach空间)

- $C(X)$中的最佳逼近问题为：给定$f \in C(X)$以及$C(X)$的一个有限维子空间G, 计算$g \in G$使得

$$\|f - g\| = \mathrm{dist}(f, G) := \inf_{\bar{g}\in G} \|f - \bar{g}\|$$

- 由上节“最佳逼近存在性定理”可知g是存在的