
内容简介

初值问题

$$\begin{cases} y' = \frac{x-e^{-x}}{y+e^y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

该方程的真解由等式

$$y^2 - x^2 + 2e^y - 2e^{-x} = 0 \quad (2)$$

隐式给出。

- 当 $x = 1$ 时，数值求解等式

$$y^2 - x^2 + 2e^y - 2e^{-x} = 0$$

将这一数值解作为参考的准确解。

- 利用五阶 Adams-Bashforth 公式计算方程在 $x = 1$ 的数值解。用五阶 Runge-Kutta 格式得到初值，取节点 x_i , $i = 0, \dots, N$, N 为 2^k , $k = 3, \dots, 8$, 给出误差表格, 其中阶为

$$\frac{\ln(Error_{old}/Error_{now})}{\ln(N_{now}/N_{old})} \quad (3)$$

工作环境

程序所用语言: **python**

软件: **JupyterLab**

使用的包: **numpy, scipy.optimize, mpmath**

输出结果

EQN:

```
f(x, y) = (x - e^(-x)) / (y + e^y)
```

```
y(0) = 0
```

```
Real : y1(1.000000) = -1.00000000000000
```

Adams-Bashforth :

```
[k = 3] y(1.000000) = -1.00000000000000, Error = 4.463096558993e-14, Order = -inf
```

```
[k = 4] y(1.000000) = -1.00000000000000, Error = 0.000000000000e+00 // Max precision reached
```

```
[k = 5] y(1.000000) = -1.00000000000000, Error = 0.000000000000e+00 // Max precision reached
```

```
[k = 6] y(1.000000) = -1.00000000000000, Error = 0.000000000000e+00 // Max precision reached
```

```
[k = 7] y(1.000000) = -1.00000000000000, Error = 0.000000000000e+00 // Max precision reached
```

```
[k = 8] y(1.000000) = -1.00000000000000, Error = 0.000000000000e+00 // Max precision reached
```

因 $k = 4$ 以后在该浮点数精度下已与准确解相等，打印精度检验表是没有意义的。

分析

一、Adams-Bashforth 公式

Adams-Bashforth 公式（下简记为 A-B 公式）的形式为

$$y_{n+1} = y_n + a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \cdots \quad (4)$$

其中 f_i 表示 $f(x_i, y_i)$ 。

基于等距结点的五阶 A-B 公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720} [1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}] \quad (5)$$

定义线性泛函

$$\begin{aligned} L(y) &= \sum_{i=0}^5 [a_i y_i - h b_i y'_i] \\ &= y_5 + \left[-y_4 - \frac{1901}{720} h f_4 \right] + \left[\frac{1387}{720} h f_3 \right] + \left[-\frac{77}{90} h f_2 \right] + \left[\frac{637}{360} h f_1 \right] + \left[-\frac{251}{720} h f_0 \right] \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0 \\ a_4 = -1, \quad a_5 = 1 \\ b_0 = -\frac{251}{720}, \quad b_1 = \frac{637}{360} \\ b_2 = -\frac{77}{90}, \quad b_3 = \frac{1387}{720} \\ b_4 = \frac{1901}{720}, \quad b_5 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

利用 Taylor 级数, $L(y)$ 也可表示为

$$L(y) = d_0 y_0 + d_1 h y'_1 + d_2 h^2 y''_2 + \cdots \quad (7)$$

比较两式, 从而计算出

$$\begin{cases} d_0 = \sum_{i=0}^5 a_i = 0 \\ d_1 = \sum_{i=0}^5 (i a_i - b_i) = 0 \\ \dots \\ d_5 = \sum_{i=0}^5 \left(\frac{i^5}{120} a_i - \frac{i^4}{24} b_i \right) = 0 \\ d_6 = \sum_{i=0}^5 \left(\frac{i^6}{720} a_i - \frac{i^5}{120} b_i \right) \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

根据 [1, p447] 多步法局部截断误差定理, 五阶 A-B 方法的局部截断误差为 $O(h^6)$ 。再由 [1, p448] 整体误差截断定理知五阶 A-B 方法的整体截断误差为 $O(h^5)$ 。

与该方法稳定性和相容性相关的两个多项式为

$$\begin{cases} p(z) = z^5 - z^4 \\ q(z) = \frac{1}{720} [1901z^4 - 2774z^3 + 2616z^2 - 1274z + 251] \end{cases} \quad (9)$$

多项式 p 的根为 1, 0(四重), 因此是稳定的; $q(1) = \frac{1}{720}(1901 - 2774 + 2616 - 1274 + 251) = 1$, $p(1) = 0$, $p'(1) = 1$, 因此也是相容的。根据 [1, p446] 多步法稳定性和相容性定理, 五阶 A-B 方法是收敛的。

二、得到原方程精确解的原因

事实上对于原问题, 凡是满足形式 $y(x_0) = -x_0$ 的初值条件, 根据方程:

$$y' = f(x, y) = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y} \quad (10)$$

使用五阶 Runge-Kutta 方法计算启动点时, 将发生如下现象: 从直线 $y = -x$ 上一点 (x_n, y_n) 开始计算的下一点

$$\begin{aligned} F_i &= -h \\ y_{n+1} &= y(x_n + h) = y(x) + \sum_{i=0}^6 c_i F_i \\ &= -(x_n + h) = x_{n+1} \end{aligned}$$

仍落在直线 $y = -x$ 上。因此用于启动五阶 A-B 方法的五个初始点将全部位于这条直线上。

使用 A-B 方法计算时, 每次步进 y_n 都将随 x_n 以斜率 -1 线性增长, 后续点的数值解都将落在直线 $y = -x$ 上, 并最终准确地到达 $(1, -1)$, 即方程的隐式解在 $x = 1$ 处对应的一个解。可参考下面绘制的向量场。

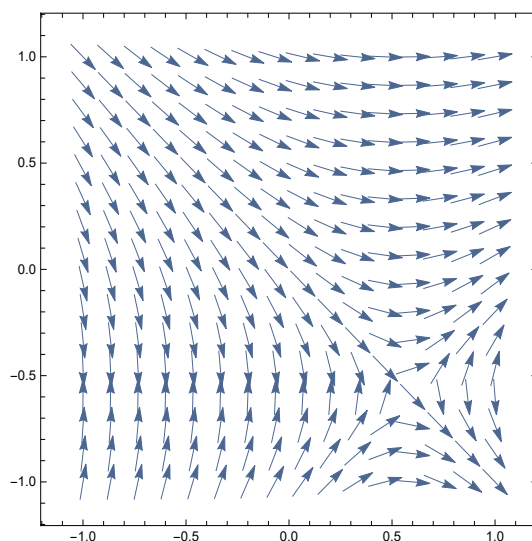


图 1: 微分方程向量场

进而, $k = 3$ 时误差产生原因可能是由于二进制数不能有限表示某些十进制数、 e 指数运算精度有限和一些舍入误差所导致的, 并不是方法带来的。

三、重新尝试

尝试对另一个初值问题作相同的工作。选取第 10 次程序作业中的微分方程：

$$\begin{cases} y' = \lambda y + \cos x - \lambda \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

该方程的真解为

$$y(x) = \sin x \quad (12)$$

取 $\lambda = 1$ ，此时利用五阶 Adams-Bashforth 公式计算方程在 $x = 1$ 的数值解，用五阶 Runge-Kutta 格式得到初值，节点选取与原题相同。得到如下结果与误差表格。

EQN:

$f(x, y) = y + \cos(x) - \sin(x)$

$y(0) = 0$

Real : $y_2(1.000000) = 0.841470984808$

Adams-Bashforth :

```
[k = 3]  y(1.000000) = 0.841473918590, Error = 2.933781801051e-06, Order = -inf
[k = 4]  y(1.000000) = 0.841471134292, Error = 1.494840289329e-07, Order = 4.2947
[k = 5]  y(1.000000) = 0.841470990425, Error = 5.617588283435e-09, Order = 4.7339
[k = 6]  y(1.000000) = 0.841470984998, Error = 1.904448820866e-10, Order = 4.8825
[k = 7]  y(1.000000) = 0.841470984814, Error = 6.183387135650e-12, Order = 4.9448
[k = 8]  y(1.000000) = 0.841470984808, Error = 1.959543638463e-13, Order = 4.9798
```

k	Error	Order
3	2.9338E-06	—
4	1.4948E-07	4.2947
5	5.6176E-09	4.7339
6	1.9044E-10	4.8825
7	6.1834E-12	4.9448
8	1.9595E-13	4.9798

表 1: 精度检验

五阶 Adams-Bashforth 公式 $O(h^5)$ 的整体截断误差得到了证实。

参考资料

[1] David R. Kincaid & E. Ward Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing Third Edition*, Brooks/Cole, 2002.