内容简介

利用四阶 Runge-Kutta 方法和各种 λ 的值，譬如 5，-5 或 10，数值求解下列初值问题：

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y + \cos x - \lambda \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

在区间 [0, 5] 上比较数值解和解析解。利用步长 $h = 0.01$。试问 λ 对数值准确性有什么影响？

工作环境

程序所用语言：**python**
软件：**JupyterLab**
使用的包：**numpy, matplotlib**

输出结果

```
Input lambda = -10
Solving Equation...
Runge-Kutta Method ended successfully
Max Error = 1.087949252909E-08
Reached at 1.640000000000

Input lambda = -5
...
Max Error = 2.606221793933E-09
Reached at 1.700000000000

Input lambda = 3
...
Max Error = 5.811843613440E-04
Reached at 5.000000000000

Input lambda = 4
...
Max Error = 1.202738038629E-01
Reached at 5.000000000000

Input lambda = 5
...
Max Error = 2.267302864243E+01
Reached at 5.000000000000
```

```
Input lambda = 10
...
Max Error = 3.217088796366E+12
Reached at 5.000000000000
```

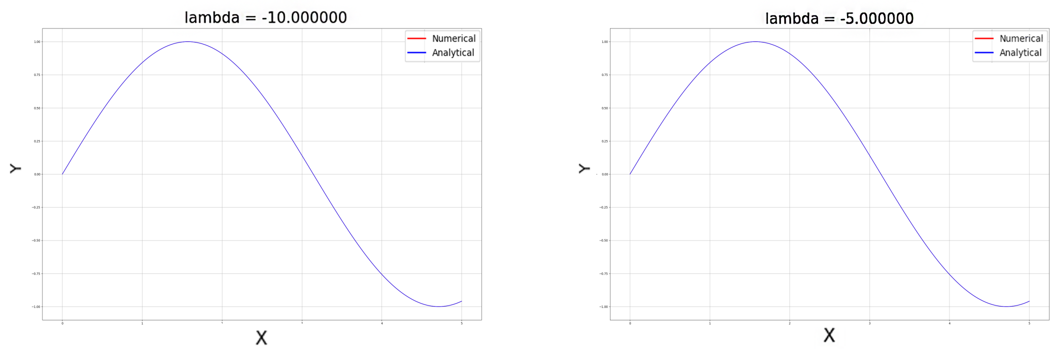

图 1: 数值解与解析解比较，$\lambda = -10, -5$

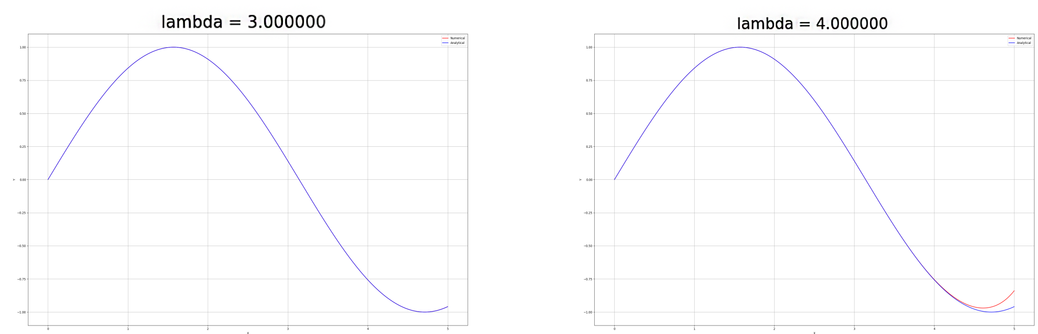

图 2: 数值解与解析解比较，$\lambda = 3, 4$

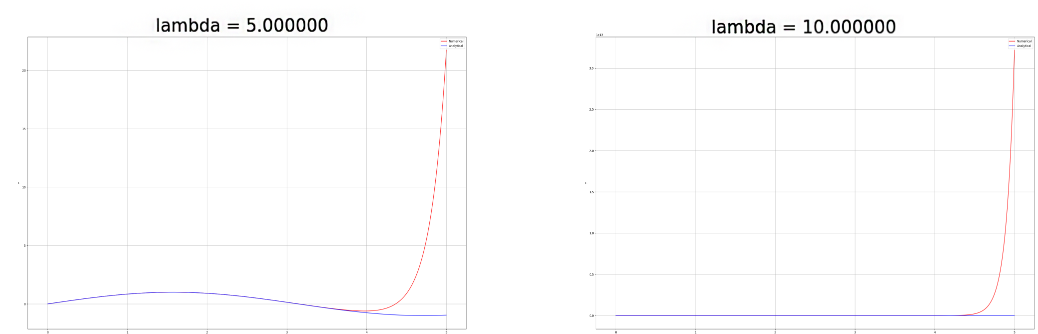

图 3: 数值解与解析解比较，$\lambda = 5, 10$

分析

容易算出该初值问题的解析解为

$$y(x) = \sin x \tag{2}$$

图像表明 Runge-Kutta 方法在指定区间上的准确性受 λ 影响。直观上，λ 越大，准确性越低。且由于误差积累，越往 x 轴正向移动误差越大。下面对此现象进行简单分析。本实验中采用的经典的四阶 Runge-Kutta 方法为：

$$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F4) \tag{3}$$

其中

$$\begin{cases} F1 = hf(x, y) \\ F2 = hf(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}F_1) \\ F3 = hf(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}F_2) \\ F4 = hf(x + h, y + F_3) \end{cases}$$

考虑该步进方法中的一阶误差项：

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + y'(x)h + O(h^2) \\ &= y(x) + (\lambda hy + h\cos x - \lambda h \sin x) + O(h^2) \end{aligned}$$

因此，若令 $y_0 = y(0)$，$y_i = y(ih)$，则上式意味着

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \lambda h y_i + h\cos ih - \lambda h \sin ih + O(h^2) \\ &= (1+\lambda h)y_i + h\cos ih - \lambda h \sin ih + O(h^2) \end{aligned}$$

因此有

$$y_n = \sum_{i=0}^{n-1}(1+\lambda h)^{n-i}(h\cos ih - \lambda h \sin ih) + nO(h^2) \tag{4}$$

故当 $\lambda \in (-\frac{1}{h}, 0)$ 时，

$$\begin{aligned} |y_n| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(1+\lambda h)^{n-i}|1+\lambda|h + nO(h^2) \\ &= |1+\lambda|(1+\lambda h)h\frac{(1+\lambda h)^n - 1}{\lambda h} + nO(h^2) \\ &\leqslant (1+\lambda h)\left|\frac{1+\lambda}{\lambda}\right| + nO(h^2) \end{aligned}$$

因此 y_n 有界，从而方程解的准确性得以保证。

当 $\lambda \in (0, +\infty)$ 时，记 $\sum_{l=k}^{r} = \sum_{l=k}^{r}(1+\lambda h)^{n-i}\sqrt{1+\lambda^2}\cos(ih+\varphi)$

$(a-1)h + \varphi < \pi/4$，$ah + \varphi > \pi/4$；

$(b-1)h + \varphi < 0$，$bh + \varphi > 0$；

$(c-1)h + \varphi < 3\pi/4$，，$ah + \varphi > 3\pi/4$

由对称性不妨认为 $\sum_{i=a}^{b-1}+\sum_{i=b}^{c-1}>0$，故

$$
\begin{aligned}
y_n &> h\left(\sum_{i=0}^{a-1}+\sum_{i=c}^{n-1}\right)+nO(h^2) \\
&> \sqrt{\frac{1+\lambda^2}{2}}\left[\sum_{i=0}^{a-1}(1+\lambda h)^{n-i}-\sum_{i=c}^{n-1}(1+\lambda h)^{n-i}\right]+nO(h^2) \\
&= \sqrt{\frac{1+\lambda^2}{2}}(1+\lambda h)^{n-c}\left[\sum_{i=0}^{a-1}(1+\lambda h)^{c-i}-\sum_{i=c}^{n-1}(1+\lambda h)^{c-i}\right]+nO(h^2)
\end{aligned}
$$

因中括号内左端求和式发散而右端收敛,所以存在常数 Δ 使得对于足够大的 n,$\sum_{i=0}^{a-1}(1+\lambda h)^{c-i}-\sum_{i=c}^{n-1}(1+\lambda h)^{c-i}>\Delta$，故

$$
y_n > \sqrt{\frac{1+\lambda^2}{2}}(1+\lambda h)^{n-c}\Delta \tag{5}
$$

它是无界的。因此当 $\lambda>0$，时，方程的解在足够远的距离上将不能保证准确性。图示中也体现出了这一点。

参考资料

[1] David R. Kincaid & E. Ward Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific of Computing Third Edition*, Brooks/Cole, 2002.