2020 寒假笔记

贺官羽铭

2020 年 2 月 7 日

献词

谨以此笔记献给计算机科学家Donald E. Knuth

没有他开发的TeX排版软件我今天写的笔记就不会这么漂亮。

目录

前言

寒假正好遇上新型冠状病毒疫情，学校提前开学的计划就被取消了。

学校搞了个网课，然而里面的内容参次不齐，以及有的确实太无聊，我想自己总结下一些知识点吧，这些知识点基本上都是我自己从网课和各种地方筛选出来的，有的根本就不是网课的内容。所以本笔记和网课关系不是太大。只是有的地方按照它的顺序做了下。

笔记用什么记呢？笔和纸又累又难看，OneNote...也不太好。最终我选择了LaTeX帮助我记笔记，以达到最大化的视觉享受，顺便还能提高我的LaTeX水平。本文使用 LaTeX排版，用PGF/TikZ生成插入的矢量图，用BibTeX生成参考文献。

笔记里包含了一些学科的一些基础知识，我对一些有趣高中问题的解法和某种类型问题的思考，网课里的一些有趣内容，以及网课里没有的一些内容。

致谢

没有人能十全十美。感谢在我成长过程中能够帮助我以及包容我的同学和朋友们，他们使我的生活更美好。尤其是感谢那些曾经见过我的不当行为或是被我伤害过的而能够包容我并仍然愿意和我成为朋友的人，他们给了我力量。

第一部分 寒假数学：数学思想与方法

“学数学唯一的方式是做数学。”

‘‘The only way to learn mathematics is to do mathematics.’’

--- Paul Halmos

“数学就像尼罗河一样，从微不可察到浩瀚博大。”

‘‘The study of mathematics, like the Nile, begins in minuteness but ends in magnificence.’’

--- Charles Caleb Colton

1 课程：数学思想方法 – 1 函数与方程

1.1 转化为方程

网课中提到了这样一个有趣的题目:已知

$$\frac{\sqrt{5}b-c}{5a}=1$$

, a, b, $c\in\mathbb{R}$, 则b^2与$4ac$的大小关系为?

要考虑b^2与$4ac$的大小关系，可考察b^2-4ac的正负。这不是别的，正是一元二次方程的判别式的形式。故考虑把题目中的等式转化为一元二次方程的形式。我们有:

$$(a\neq 0)$$

$$\sqrt{5}b-c=5a$$

$$\sqrt{5}^2a-\sqrt{5}b+c=0 \tag{1}$$

即一元二次方程$ax^2+bx+c=0$在$\mathbb{R}$上至少有一个解$-\sqrt{5}$。且由于我们的每一步转化都有必要且充分的关系，故$b^2\geq 4ac$

1.2 更换自变量

在一些带有参变量的一元二次不等式里，可以更换自变量，把一元二次不等式转化为线性函数来求解。比如网课中提到的已知$7x-2>(x^2-1)m$对$m\in[-2,2]$恒成立，求实数x的取值范围。把m作为自变量，就可以

得到关于m的线性函数。具体做法不是我们讨论的重点，今转而证明其必要充分性。

证明. 首先题目的意思是对$\forall m \in [-2,2]$，求x的集合，使其中的x都满足$7x-2>(x^2-1)m$. 我们通过更换自变量的做法得出的结果是一个x的集合，其中的x都满足了对$\forall m \in [-2,2]$，$0>(x^2-1)m-7x+2$。由于$7x-2>(x^2-1)m$与$0>(x^2-1)m-7x+2$互为必要且充分的条件，故这种方法做出来的就是解。 □

1.3 数列最值

对于一个数列，考察其最值的方法也可以参照考察函数最值的方法，因为数列也可以被看成定义在整数集的某个子集上的函数，和一般的函数来说区别只是定义域不连续。比如网课中的某道题的一部分：求

$$\sigma_n = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$$

的下确界.[1]

讨论函数最值时有时我们使用单调性判断，而单调性可通过取x_1, x_2做差判断，我们把这个方法运用到这题上。令$d=\sigma_{n+1}-\sigma_n$，考察d的正负。我们有

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1} \\ &> \frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1}=0 \end{aligned} \tag{2}$$

就明白σ_n递增，于是其下确界是$\sigma_1=\frac{1}{2}$.

2 课程：数学思想方法 – 2 函数与方程在几何中的应用

课程中提到了这样一道题：已知正方体的棱长为a，平面α与每条棱所在直线成角都相等，$\cdots$。课程里直接给出了一个特例平面，并说把这个平面平移，而没有讲α是怎么被求出来的。现在我们来做一下。

[1] 界的概念虽然未涉及，但比较基础，我们就直接用了。这里简单介绍下，如果某个数集 $\mathbb{S}$中的所有元素$\leq$ ($\geq$)某个数$m(n)$则$m(n)$是$\mathbb{S}$的上界（下界）。上界（下界）中如果存在最小（最大）的数$M(N)$则数$M(N)$是$\mathbb{S}$的上（下）确界。

首先，让正方体一个顶点上的三条棱都放在坐标轴上，这样，显然，每条棱所在直线都和坐标轴的其中一条平行。这样只要找到α与三条坐标轴成的角相等就好了。这即是让它的法向量$\vec{n_\alpha}$与 $(0,0,1)$，$(0,1,0)$，$(1,0,0)$成的角都相等。设

$$\vec{n_\alpha}=(x,y,z)$$

则$x=y=z$，便取$\vec{n_\alpha}=(1,1,1)$就好了。

3 课程：数学思想方法 – 3 构造

3.1 构造向量解题

可能会遇到这种题目，给出了如下条件：

$$\begin{cases}\sin\alpha_0+\cdots+\sin\alpha_n=a\\ \cos\alpha_0+\cdots+\cos\alpha_n=b\end{cases}$$

这时可构造向量$\vec{v_0}=(\sin\alpha_0,\cos\alpha_0),\cdots,\vec{v_n}=(\sin\alpha_n,\cos\alpha_n)$并做和 $\vec{n}=\vec{v_0}+\cdots+\vec{v_n}$来研究。此时$\vec{n}=(a,b)$。

例：若

$$\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0\\ \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0\end{cases}\tag{3}$$

且$0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$,求$\beta-\alpha$。

解：令$\vec{\varphi}_\alpha=(\sin\alpha,\cos\alpha),\cdots,\vec{\varphi}_\gamma=(\sin\gamma,\cos\gamma)$, $\vec{s}=\vec{\varphi}_\alpha+\vec{\varphi}_\beta+\vec{\varphi}_\gamma$ 则由3得，$\vec{s}=\vec{0}$，或表示为 $\vec{\varphi}_\gamma=-(\vec{\varphi}_\alpha+\vec{\varphi}_\beta)$。现在由这个关系推导角的关系。首先考虑一个特殊情况，当$\gamma=\frac{3}{2}\pi$时，如图 1，参见各个向量的情况。

这时很易看出$\beta-\alpha=\frac{\pi}{3}$。随后改变$\vec{\varphi}_\gamma$，另外两向量的位置唯一确定，且相对位置不变，相当于原图旋转了一些。故无论如何 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{3}$。

3.2 构造对偶式

我们在网课里看到了一个有趣的解法，背后的原理暂时没有弄明白，先把做法记下。

例：试求$\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ$。

解：

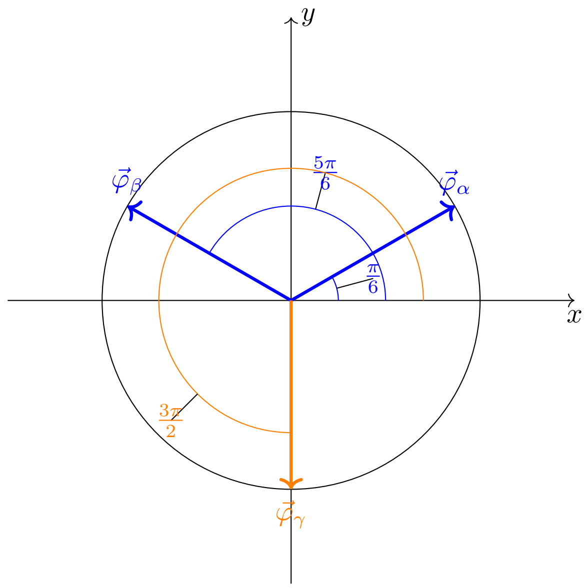


图 1: $\vec{\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma}$的关系当$\gamma=\frac{3}{2}\pi$时

令$\alpha=\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ$, 把$\alpha$中的sin换成cos，cos换成sin，就得到了所谓的对偶式$\beta=\cos^2 20^\circ+\sin^2 50^\circ+\cos 20^\circ\sin 50^\circ$.

我们有

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= (\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ)+(\sin^2 50^\circ+\cos^2 50^\circ)\\&\quad+(\sin 20^\circ\cos 50^\circ+\cos 20^\circ\sin 50^\circ)\\&=2+\sin 70^\circ\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}\alpha-\beta &= (\sin^2 20^\circ-\cos^2 20^\circ)+(\sin^2 50^\circ-\cos^2 50^\circ)\\&\quad+(\sin 20^\circ\cos 50^\circ-\cos 20^\circ\sin 50^\circ)\\&=-\cos 40^\circ+\cos 100^\circ-\sin 30^\circ\end{aligned}\tag{5}$$

注意到

$$\begin{aligned}\cos 40^\circ &= \cos(70^\circ-30^\circ)\\ \cos 100^\circ &= \cos(70^\circ+30^\circ)\end{aligned}$$

故

$$\alpha-\beta=-2\sin 70^\circ\sin 30^\circ-\frac{1}{2} \tag{6}$$

则

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\alpha-\beta)\\&=\frac{3}{4}\end{aligned} \tag{7}$$

我们很好奇这是不是一个特殊的例子才成立。于是我们把30°，50°换成一般角A，B，并令

$$\begin{aligned}m&=\sin^2\alpha+\cos^2\beta+\sin\alpha\cos\beta\\n&=\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

则，很易通过之前的推导看出，

$$\begin{aligned}m+n&=2+\sin(\alpha+\beta)\\m-n&=2\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

这样，只有$2\sin(\alpha-\beta)=-1$是，m才能被求出，或者当$\sin(\alpha-\beta)$，$\sin(\alpha+\beta)$都可被求出时也行。

3.3 构造几何图形

课程里提到了一个比较经典的题：给出一个三角形的一角和其对边，求它的面积的最大值。课程中给了构造其外接圆的方法。首先由正弦定理，确定其一角和对边的话，其外接圆的半径便是常数了。图 2展示了当定角为$\frac{\pi}{3}$，对边为2时的情况。显然， $S_{\triangle ABC}$最大仅当C在最上面。

不过构造要注意的一点，课程里没有提，就是，构造的东西是否和它唯一对应。首先，圆上这样的每一个三角形都满足题目条件，只因弦对的圆周角相等。另一方面，任意的这样三角形都可被这样放在圆上，这比较显然。故构造出来的东西与题目唯一对应。

这做法比较简单易懂，然而我们想转而考察纯代数求其最大值。首先，无论如何，$S_{\triangle ABC}=\frac{ab\sin C}{2}$，而$\sin C$是常数，故只要考察$ab$即可。依正弦定理,

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A} \tag{8}$$

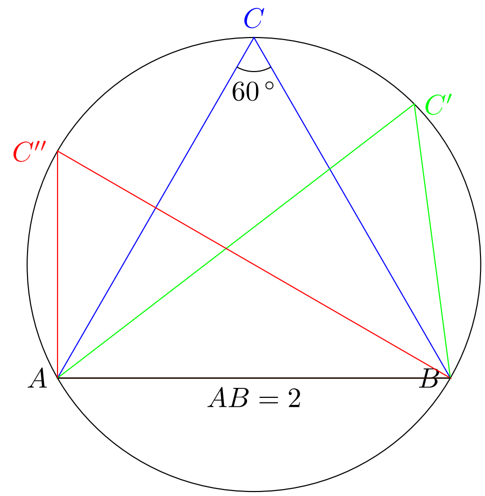


图 2: 构造外接圆

则

$$\frac{ab}{\sin A\sin B}=\frac{16}{3}$$
$$ab=\frac{16}{3}\sin A\sin B$$

又

$$A=\frac{2\pi}{3}-B$$

则

$$ab=\frac{16}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\sin B \tag{9}$$

剩下求最大值就很好求了，只需注意下B的范围即可。

让我们看一下另一个例题。试求

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{2}\sin x}{4-\sqrt{2}\cos x}$$

的最值。我们发现$\sin x$和$\cos x$前面的系数相等，这意味着对任意的x,它们组合起来可表示在一个圆的某个点，而反过来，圆上的任意一点与$(\sqrt{2}\cos x,\sqrt{2}\sin x)$对应。于是考虑构造圆$x^2+y^2=2$。而 $f(x)$不是别的，正是圆上一点P与点(4, 1)所确定直线的斜率。故可从几何关系上考虑此问题。图 3展示了构造出的图形。

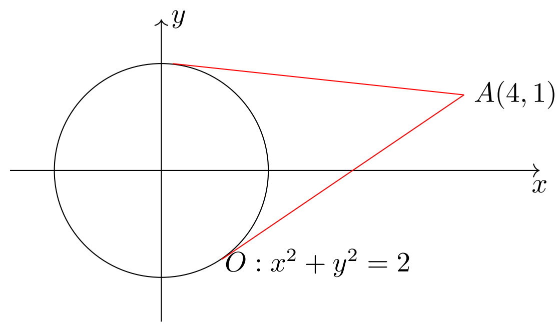


图 3: 构造圆与直线转化为斜率问题

很易求出切线的斜率

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{30}}{14}$$

故$f(x)$的最值分别为$\frac{4-\sqrt{30}}{14}$，$\frac{4+\sqrt{30}}{14}$.

3.4 构造二项式

一些关于求组合数的题目也挺有趣的，有些是构造二项式求解。比如：求

$$\sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i$$

便可通过构造$(1+x)^n$并令$x=1$来求解。

然而课程中没有给上式，可能是觉得它太简单，转而给了一个这样的式子:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{9} \mathrm{C}_{10}^i \mathrm{C}_{10}^{i+1}$$

在构造之前，先使用了组合数的性质把σ改写为

$$\sigma = \sum_{i=0}^{9} \mathrm{C}_{10}^i \mathrm{C}_{10}^{9-i}$$

这使得每一个乘积的上标之和都是9。随后构造$(x+1)^{10}(x+1)^{10}$，依二项式定理展开，得

$$(\sum_{i=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^i x^i)(\sum_{i=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^i x^i)$$

这让我们很易看出，在上标之和等于9得时候，x的次数也是9。而σ不是别的，正是x^9的系数。现在把$(x+1)^{10}(x+1)^{10}$合并为$(x+1)^{20}$，并求其中x^9的系数就是 σ了。显然，这系数是C_{20}^{9}.

4 课程：数学思想方法 – 4 转化

吐槽下，网课里说是转化与化归，竟然好多是转化成特殊值[2]做的，我们不喜欢这样，我们觉得这样不是在做数学，只是为了得分。既然你这样做，那我们就用超纲知识解了，请看网课里这道题：

设函数$f(x)=\ln x+\frac{m}{x}$，$m\in\mathbb{R}$，若

$$\forall b>a>0,\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$$

恒成立，则m的取值范围是？

解：显然$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)上可微，依拉格朗日中值定理，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\ c\in(a,b) \tag{10}$$

另外，由于$f'(x)$也是连续的（$x>0$），这使得对任意定义域上的t，可找到这样的 $b>a>0,\ t\in(a,b)$，使得 $f'(t)$与$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$任意接近。上面的讨论是在说明

- 对$\forall b>a>0$,都可找到$c>0$，使$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$与$f'(c)$任意接近（我们得到的是更严格的相等）。
- 对$\forall c>0$，都能找到$b>a>0$，使$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$与$f'(c)$任意接近。

于是很易看出$f'(x)$的确界（如果有）与$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$的确界（如果有）相等。而

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2} \tag{11}$$

有上确界$\frac{1}{4m}$当$m>0$时，于是$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$的上确界也是这个。现在考察它能不能达到这个。事实上，这是不可能的，因为对某个 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，总能找到

$$f'(c')>f'(c),\ \frac{f(b')-f(a')}{b'-a'}=f'(c') \tag{12}$$

于是接下来只要让$\frac{1}{4m}\leq 1,\ m>0$就好了。

[2]这里的特殊值的意思是，不严谨的特殊值，比如符合这个条件的情况中只取了一种，用这一种情况解答。

4.1 转化为裂项相消

这里说一下一个不是网课内容里的东西。对形如$(an+b)c^n$的数列的求和，我们往往使用错位相减法。然而，在还未放假的时候，我们的数学老师转而介绍了这样一种方法：用裂项相消求和。首先我们想一下裂项相消的条件。首先要求$\sum_{i=1}^n a_n$的话，裂项一般是把a_n裂成$b_{n+1}-b_n$的形式。这样a_n+a_{n+1}就能消去b_{n+1}。于是问题就成为了求b_n使$(an+b)c^n=b_{n+1}-b_n$。首先考虑的是，b_n是不是也可以被写成$(an+b)c^n$的形式。原理上来看，这是可以的。如果令$b_n=(a'n+b')c'^n$，那么

$$b_{n+1}-b_n=c'^n[a'(c'-1)n+c'a'+c'b'-b']$$

令

$$\begin{cases} c'=c \\ a'(c'-1)=a \\ c'a'+c'b'-b'=b \end{cases} \tag{13}$$

就得出了一个符合条件的b_n。可能还有其他符合条件的，不过我们这里不需要求出其它的，只要保证充分性就足够了。

这样，

$$\sum_{i=1}^n a_n=b_{n+1}-b_1 \tag{14}$$

5 课程：数学思想方法 – 5 分类讨论

5.1 排列组合中的分类讨论

课程里大部分的分类讨论没什么好说的...分类几乎是只要基础扎实就很易看出的。我们一般在分类讨论上遇到问题最多的地方就是在排列组合题上。经过一段时间的思考，我们总结出了一种方法能比较稳定地确定做排列组合题的正确性。

大多数排列组合题的要求都是从一个给定集合中按某种题目要求的*选法*，取出一些元素，按照一定的顺序，把它们排列起来。如果把这样一种排列叫做一种*情况*，题目一般是让我们求所有情况的个数。然而经常出现根据题目要求的选法很难直接求出个数，于是我们常常构建一个和题目等价的选法，用这个选法求情况的个数。然而我们发现，光要求这个选法和

题目的选法等价还是不够的，这可能会导致求出的情况个数变多。我们对于两个选法等价的定义是：

- 给定的选法1得出的每一种情况都可以通过选法2得出，且
- 选法2得出的每一种情况都可以通过选法1得出

为什么在实际中会导致求出的情况个数变多呢？以及，最奇怪的问题是，为什么当求出的情况个数不同时，为何只会变多不会变少呢？毕竟这个选法等价关系和顺序无关啊[3]。为了回答这两个问题，我们思考了挺长的一段时间才发现了如下问题：首先题目的选法很特殊，一般是给出了情况的限制条件 — 既是，定义了什么样的情况满足题目要求。然而我们想出的选法却一般有这样的特点：先分类[4]，再在每个分出的类别下按某种选法选出满足题目要求的情况。这导致了可能出现在不同的分类下的选法选出了一样的情况，然而这并不和选法等价冲突；而另一方面，题目给出的定义式选法不可能导致这种后果（或者说，定义本身就使得确定情况的唯一性是我们的责任而不是题目的）于是这导致了我们的问题。

意识到这两个问题和它们的诱因后，我们又在想出的选法后加了一个条件，不仅要和题目选法等价，还要保证选出的情况是唯一的，即不可能在两种不同的情况下，使用该选法选出同样的情况。或者即使该选法出现了重复的情况，也可以很易通过一些方式在情况的数目中去掉它们。

让我们来看一些例子：

网课中的一道题是这样的：有8张卡片分别标有数字$1, 2, \cdots, 8$，今从中取出6张排成3行2列，且只有第二行的两张卡片数字之和为 5，则不同的排法有？种？

很易看出这题目给了我们满足条件的情况的定义，让我们求情况数。现在我们来找一种选法。找到的选法为：

1. 先根据第二行的两张卡片数字之和为5，得出第二行要么是1,4要么是2,3，这情况有 $2! \times 2 = 4$种，
2. 之后我们有6张卡片要被填进4个空里，然而这里绝不是选4个填进去这么简单，因为题目中的“只有” 暗示了我们如果如果第二行是1,4，2,3就不能在另一行出现，反过来也一样。于是我们这里再分一次类，

[3]选法A等价于选法B与选法B等价于选法A没区别

[4]这也是为什么我们把这一部分放到分类讨论里面的原因。

不妨以第二行是2,3为例。则分1,4都被用到;1,4中只有一个被用到;1,4都没有被用到这3种情况。

3. 当1,4都被用到时，它们不能在一行。可以从所有求得的结果中删去它们在一行的结果，这做法比较好理解。于是先从剩的4个数5,6,7,8中选2个出来有$C_4^2 = 6$种结果，之后得到了要用的4个数做全排列$4! = 24$，再删去1,4在一行的情况$2! \times 2! \times 2 = 8$，其中一个2!是1,4 的行排列，另一个是另外两个数的行的排列，最后的2是行上下颠倒。即选出的4个数的情况只有 $24 - 8 = 16$种。一乘得到$16 \times 6 = 96$种，

4. 当1,4中只有一个被用到时，从剩的4个数中选3个有$C_4^3 = 4$种，再对4个数做全排列，然后一乘得$24 \times 4 = 96$种，再×2（因为1，4各一次）得结果192，

5. 当1,4一个都没有被用到时，直接做全排列$4! = 24$就是最后的结果。

现在我们考察这选法是否满足我们的要求。首先证明它和题目的选法等价。首先题目得出的每一种情况都能被这选法得出，因为我们第一分类包含了所有的情况，第二分类里面的情况都被排列/组合完全包含了。然后我们这选法得出的每一种情况显然都符合题目。

下面来看它是否能使选出的情况唯一。这是比较明显的。因为首先我们分的情况是互斥的，比如当1,4都被用到时就不可能是1,4中只有一个被用到。然后在各个情况之中，排列/组合保证了得出情况的唯一性。

于是根据这选法来求情况数，是$4 \times (24 + 192 + 96) = 1248$种。

在这个考察过程中，发现了两点，第一：排列组合使各个分类下的细节计算得出情况的唯一性被保证，我们这里详细提及，以后用到只要心里记得就好了。第二：如果分类是互斥的，分类的情况的唯一性就变得显然了，但这可能并不会使问题更简单，因为有时我们改变分类使分类唯一时分类里面会变得复杂，这样本质上我们并没有消灭问题而是把它推到了下一层，应该根据具体情况来定怎么分类。

6 课程：数学思想方法 – 6 放缩

一些放缩用到的知识都比较基础，比如在分式中放大/缩小分母，在和式中放大/缩小每一项。这些的原理没什么好说的，不过在应用中往往需要大量的尝试和经验来明白放缩到什么地步，这就很难能被总结出来。

在这一节，我们转而记载一些不是网课上，而是一些很经典的运用放缩法的证明，希望我们能从这些例子中总结出一些有用的东西。

6.1 伯努利不等式

我们来看一下一个数学中很有名的被以*Jacob Bernoulli*之名命名的伯努利不等式。

6.1.1 严格形式证明

伯努利不等式的严格形式[5] 是讲对一切整数$r \geq 2$，实数$x > -1$, $x \neq 0$，有

$$(1+x)^r > 1 + rx \tag{15}$$

它的证明本身也用到了一些放缩法。

证明. 把不等式左边依二项式定理展开，我们有

$$(1+x)^r = 1 + rx + \cdots \tag{16}$$

由于未写出的都是正的，这样当$x > 0$时不等式成立。

现在考察$-1 < x < 0$时。做替换$t = -x$，则$0 < t < 1$，那么要被证明的成为

$$(1-t)^r > 1 - rt$$

下面的证明就有一些技巧，请注意看：

$$\begin{aligned} r &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{r\text{个}} \\ &> 1 + (1-t)^1 + \cdots + (1-t)^{r-1} = \frac{1-(1-t)^r}{1-(1-t)} \end{aligned} \tag{17}$$

即是

$$r > \frac{1-(1-t)^r}{t}$$

运用不等式的基本性质整理，就得到了我们想要的结果。 □

[5]严格形式意味着严格的不等号（没有等号）

6.1.2 不严格形式证明

接下来我们使用数学归纳法从另一个角度证明其不严格形式 (这里整数$r \geq 0$，实数$x \geq -2$)：

$$(1+x)^r \geq 1+rx$$

证明. 首先我们证明对$r \in \{0,1\}$时不等式成立，之后证明如果对某个$r = k$已成立，则对$k+2$也成立，这样数学归纳法原理就能保证我们的命题成立了。

当$r=0$时，显然，

$$(1+x)^0 = 1 = 1+0x$$

，不等式已成立。当$r=1$时，显然，

$$(1+x)^1 = 1+x = 1+1x$$

，不等式已成立。

现在假设不等式对某个$r=k,\ k \geq 0$已成立，则

$$\begin{aligned}
(1+x)^{k+2} &= (1+x)^k(1+x)^2 \\
&\geq (1+kx)(1+x)^2 \text{ 这里运用了不等式成立和}(1+x)^2 \geq 0\text{的事实} \\
&= 1+2x+x^2+kx+2kx^2+kx^3 \\
&= 1+(k+2)x+x^2(1+k(x+2)) \\
&\geq 1+(k+2)x \qquad (18)
\end{aligned}$$

数学归纳法原理保证我们的命题成立。 □

6.2 关于某个知名式子的放缩

下面我们考察一个有名的式子，数列

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n$$

在这一小节，我们将尝试放缩证明它的单调性和（上）有界性。

证明. 依二项式定理展开，

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i \frac{1}{n^i} \\ &= 1 + n\frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{1}{n^i} \\ &= 2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}\frac{1}{n^i} \end{aligned} \tag{19}$$

注意到和式里面的C_n^i展开后的分式上面是$(n-0)$乘到$(n-(i-1))$共i项，而$\frac{1}{n^i}$可以看成i个$\frac{1}{n}$相乘，故继续把x_n写成

$$\begin{aligned} x_n &= 2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}\frac{n-j}{n} \\ &= 2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}(1-\frac{j}{n}) \end{aligned} \tag{20}$$

[6] 现在比较x_{n+1}与x_n的大小，我们发现在上式中把n变为$n+1$后，首先，和式又多了一项，而这项显然是正的；其次，在和式里已有的项中，乘式中的分母由n变为了$n+1$，然而这分式前面是$-$号，于是整个式子变大。这就证明了x_n是递增的。

现在证明它上有界。很易看出，和式里面的乘式小于1。把它换成1使整个式子变大了一些，即

$$x_n < 2 + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i!}$$

而在$i \geq 2$时，

$$\begin{aligned} \frac{1}{i!} &= \frac{1}{1\times 2\times\cdots\times i} \\ &< \frac{1}{1\times\underbrace{2\times\cdots\times 2}_{i-1\text{个}}} = \frac{1}{2^{i-1}} \end{aligned}$$

即

$$x_n < 2 + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}$$

[6] $\prod_{j=0}^{i-1} f(j)$的意思是$f(j)$从$j=0$乘到$j=i-1$，和和式$\sum$表达形式差不多，以后我们把它叫做乘式。

又

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} < 1$$

则很易看出$x_n < 3$。这就完成了证明。 □

证明完后，我们额外地说一下它的重要性。由于x_n递增而又上有界，于是它有一个有穷极限。这极限，不是别的，数学家*Leonhard Euler*（欧拉）把它记为e。虽然，这式子的极限最早不是欧拉，而是伯努利研究的，但伯努利当时并未指出这就是e。而数e本身，在更早之前，被数学家*John Napier*（纳皮尔）在他的关于对数的著作中提到过，不过当时他并未求出这是什么。数e和$0, 1, \pi, i$一样，在数学中起着重要的作用。它不仅作为自然对数的底，而且在很多领域都可能甚至意想不到地出现。

7 用导数证明不等式

7.1 用导数证明不等式的原理

用导数证明不等式原理上比较简单。

7.1.1 用导数与单调性的关系证明不等式

我们知道，函数在某区间上（在区间内可导）具有（严格）单调性的一个必要且充分的条件是：

1. 在区间内$f'(x) \geq 0$
2. $f'(x)$不在任意区间上恒等于0

，注意我们说的是函数在某区间上有定义，但只需要它在区间内可导并且导数满足这些条件就好。严格的证明在中学阶段还无法被做到，但这不影响这一事实在考试中被大量的应用。

那么给出函数$f(x)$在某区间上有定义且可导，之后对该区间上某点x_0有$\forall x > x_0$，$f'(x) > (<) 0$，或者只有在不连续的点上$f'(x) = 0$，我们就有$f(x) > f(x_0)$对$\forall x > (<) x_0$。

事实上，甚至只要给定$f'(x_0) > (<) 0$就可以得到在x_0的足够小的邻域[7]上有这样的结论。这事实以后还要用到，我们先提一下。

[7]对某个点c，给定任意的$\delta > 0$，$(c-\delta, c+\delta)$就是它的一个邻域。

这种证明不等式的方法需要的计算量比较小，只需求导，判断正负，最后求临界处的$f(x)$值便好，很多题目中我们需要采取下一小小节的方法。

7.1.2 用导数与函数极值点的关系证明不等式

或者用到这样的方法证明不等式：用导数判断某函数在某区间上的最值，并发现这最值都比某个数大/小，就得到了一个不等式。要采用这种方法，就要明白导数与函数极值点的关系。

对于极值点与导数零点的关系，很多地方说的不清楚，仅仅是指出"函数在某一点上存在极值并不是这一点导数为0的必要且充分的条件"这样的事实。事实上，这两者的关系被费马定理确定了。另外，课本上也没有严格定义极值点是个什么东西，这里说明一下。

如果在函数定义域内存在这样一个点x_0，使得在它的一个被包含在定义域内的邻域内，都有 $f(x) > (<) f(x_0)$那么x_0是函数$f(x)$的一个极小（大）值点。

费马定理： *设函数在某一区间上有定义，且在该区间的内点x_0上有某个极值。那么，如果$f'(x_0)$存在，则 $f'(x_0) = 0$.*

这意味着在某一点处取得极值与导数值为0既不是必要关系，也不是充分关系。

为了得到函数取得极值的更进一步的关系，我们还需要加更多的限制。下面我们将进一步考察函数的性质。

首先要被说明的是最值的存在性。如果函数$f(x)$在某个闭区间上有定义且可导，那么它在这个区间上就连续。既然它在这个区间上连续，根据**魏尔斯特拉斯**(*Karl T. W. Weierstrass*) **第二定理**，它在这个区间上必能达到最大值和最小值。魏尔斯特拉斯第二定理是怎么来的我们暂时不需要知道，只需要知道函数最值存在的事实就好了。

既然最值存在，我们只要找到这函数所有的极值点，最值点就在它们之中了（注意区间两端点也可能是极值点）。

首先既然函数已经可导了，那么根据费马定理，$f'(x) = 0$就成为了极值点存在的必要条件。下面我们来看充分条件是个什么东西。首先对所有$f'(x) = 0$的点，极值点一定在他们里面，我们现在筛选就可以了。如果至少在这样的一点的一个邻域中，$f'(x)$在两边分别保持着不同的符号，那么这个点就是一个极值点，极大值和极小值由两边符号决定，如果左边$-$右边$+$，那么就是极小值，反过来，就是极大值。证明是很易被看出的。

然而现实情况中，导函数在两边的符号情况难以被直接看出，这就使我们不得不寻找别的方法来确定符号。我们可以考虑求二阶导数。根据我们在上一个小小节提到的那个事实，假定二阶导数在这个点处不是0，我们的条件就被满足了。$f''(x) > 0$时，这个点是极小值，反之，是极大值。

然而可能遇到这种情况，二阶导数在这一点上也是0，或者更糟，不仅是二阶导数，一直到n阶导数在这一点上都是0。在这里，我们不加证明地给出如下结论（因为现阶段无法证明）：

若第一个不为0的导数是奇数阶的（比如1阶导数，3阶导数），函数在这一点没有极值，如果是偶数阶的，则有极值，如果这第一个不为0的偶数阶导数在这是正的，则是极小值，是负的就是极大值。

即使是这样，也可能遇到在某函数的一点处任意阶导数为0。在这情况下是没有一般的法则判断的，因为能够找出函数使得在一点处一切阶导数为0但这点不是极值点，同时也能找出函数使得在一点处一切阶导数为0但这点是极值点。

7.2 例子

让我们来看一些例子：

(1) 求证$x \in (0, \frac{\pi}{2})$时$x < \tan x$.

证明. 首先，$x = 0$时，$x = \tan x$。其次，

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \geq x' = 1$$

，就完成了证明。 □

(2) 下面我们来看这个例子，我们用两种方法证明。求证$x \in (0, \frac{\pi}{2})$时$\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

第一种方法

证明. 首先，$x = \frac{\pi}{2}$时，$\sin x = \frac{2}{\pi}x$。其次，

$$\sin' x = \cos x > \frac{2}{\pi}$$

直到某个值使$\cos x = \frac{2}{\pi}$。这意味着$\sin x$最可能小于$\frac{2}{\pi}x$的地方是$\frac{\pi}{2}$，虽然取不到，但可以取极限，发现正好相等，就完成了证明。 □

这证明和用导数判断极值本质上没什么区别。

第二种方法：

证明. 在这方法里，我们用单调性来证明，然而就像上一种方法里提到过的，这两者导数并不总是一个比另一个大，于是我们尝试构造新函数 $\varphi(x)=\frac{\sin x}{x}$，注意这里$\varphi(x)$的定义域我们把$\frac{\pi}{2}$加上为了后面方便。而

$$\varphi'(x)=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}\ (0<x<\frac{\pi}{2}) \tag{21}$$

由于我们在(1)中证明的$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时$x<\tan x$，这导致了$\varphi'(x)$总是负的在$(0<x<\frac{\pi}{2})$时，于是 $\varphi(x)$在$(0,\frac{\pi}{2}]$上都是严格递减的，故

$$\varphi(x)>\varphi(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$$

运用不等式的基本性质整理便得到了我们的结果。 □

(3) 我们考察函数

$$f(x)=x^a-ax\ (0<a<1),(x\geq 0)$$

。我们有

$$f'(x)=a(x^{a-1}-1)\begin{cases}>0\ (0<x<1)\\<0\ (x>1)\end{cases}$$

于是$f(x)$有最大值$f(1)$ 这意味着

$$x^a-ax\leq 1-a \tag{22}$$

我们可以从这个不等式推出一个我们很熟悉的不等式。首先令$x=\frac{\alpha}{\beta},\alpha,\beta>0$，然后令$1-a=b$，于是原不等式可被写成

$$\alpha^a\beta^b\leq a\alpha+b\beta$$

， $a,b,\alpha,\beta>0,\ a+b=1.$ 之后引入正数$p,q>0$，令$a=\frac{p}{p+q},b=\frac{q}{p+q}$。我们有

$$(\alpha^p\beta^q)^{\frac{1}{p+q}}\leq\frac{p\alpha+q\beta}{p+q}$$

令$p=q=1$，我们得到了十分熟悉的老朋友

$$\sqrt{\alpha\beta}\leq\frac{\alpha+\beta}{2} \tag{23}$$

8 经典例题

让我们来看看一些经典例题。

8.1 2019 − 2020烟台期末T22

考虑函数

$$f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - ax)\ln x + 2ax - \frac{3}{4}x^2$$

, 其中$0 < a < e$.

1. 求函数$f(x)$的单调区间;
2. 讨论$f(x)$的零点个数;
3. 若$f(x)$存在两个不同的零点x_1, x_2, 求证$x_1x_2 < e^2$.

解:

8.1.1 (1)

很易求出

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-a)\ln x + \frac{1}{2}x - a + 2a - \frac{3}{2}x \\ &= (x-a)\ln x - x + a \\ &= (x-a)(\ln x - 1) \end{aligned} \tag{24}$$

当$0 < a < e$时,

x	$(0,\ a)$	a	$(a,\ e)$	e	$(e,\ +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

单调区间就很易看出了。

8.1.2 (2)

首先考察两端的趋势。[8] 然而$\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{2}x^2 - ax)\ln x$比较难求。首先证明：

$$\lim_{x\to 0^+} -ax\ln x = 0$$

[8]这里用到了一些越出了高中数学范围的极限的基本知识，然而高中数学对这一方面的态度十分暧昧，很多既要用到却不在学习的范围内，只能老师补充或自学，所以我们就用了。

证明. 要证这一点，只需做替换$t=\frac{1}{x}$得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}-ax\ln x &= \lim_{t\to+\infty}-a\cdot\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}\\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{a\ln t}{t}\\ &= 0\end{aligned}$$

□

所以显然$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}x^2\ln x=0$ 于是

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0 \tag{25}$$

.

而$\frac{1}{2}x^2\ln x$在$x\to+\infty$时是比$\frac{3}{4}x^2$更高阶的无穷大，故

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \tag{26}$$

当$0<a<e$时，有没有零点取决于$f(e)$的值。

$$\begin{aligned}f(e) &= -\frac{e^2}{4}+ae\\ &= e(-\frac{e}{4}+a)\end{aligned}$$

当$a>\frac{e}{4}$时，没有零点；$a=\frac{e}{4}$时有一个； $a<\frac{e}{4}$时有两个。

8.1.3 (3)

这时$0<a<\frac{e}{4}$ 有一个简单的做法。图4 展示了$f(x)$当 $a=\frac{e}{8}$时的图像。

证明. 考虑

$$\begin{aligned}f''(x) &= \ln x+1-\frac{a}{x}-1\\ &= \ln x-\frac{a}{x}\end{aligned} \tag{27}$$

以及

$$f'''(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2} \tag{28}$$

$a = \frac{e}{8},\ x \in (0.5, 5),\ f(x)$

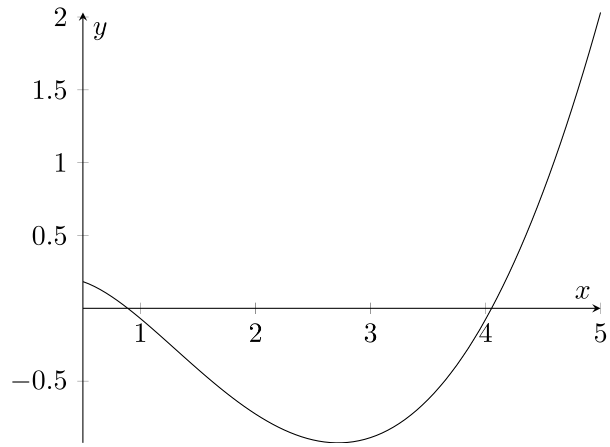


图 4: $f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - ax)\ln x + 2ax - \frac{3}{4}x^2$

$$
\begin{aligned}
&\because \forall x \in (c, +\infty), f'''(x) > 0 \\
&\therefore \forall x_1, x_2\ (x_1 > x_2) \in (c, +\infty), f''(x_1) > f''(x_2) \\
&\therefore \forall t < e - c, f''(e - t) < f''(e + t) \\
\text{又} &\because \forall x \in (c, +\infty), f''(x) > 0, f'(e) = 0 \\
&\therefore \forall t < e - c, |f'(e - t)| < |f'(e + t)|
\end{aligned}
$$

，其中$f''(c) = 0$。最后一步推理比较显然，因为$f'(x)$在e右侧比左侧增地快。不过这不怎么严谨。严格地证明的话可以构造一个新函数把右侧的$f'(x)$与左边的翻转后相加，比如令 $\varphi(x) = f'(e + x) + f'(e - x)$，易得$\varphi'(x) > 0$，详细过程就不写了。这样，$f(x)$在两零点间的极值点右侧比左侧增的快，这意味着设$x_1, x_2\ (x_2 > x_1)$为两零点，有$x_2 - e < e - x_1$,故

$$x_1 x_2 < [e + (x_2 - e)][e - (x_2 - e)] < e^2 \qquad \square$$

寒假数学到这里就结束了，网课里还有一些剩下的内容，不过我不打算写了，我要去做题了。

第二部分 Winter Vacation English: How to Write DuHouXuXie

```
‘‘We tell ourselves stories in order to live...
    We look for the sermon in the suicide, for the
social or moral lesson in the murder of five.  We
interpret what we see, select the most workable of
the multiple choices.  We live entirely, especially
if we are writers, by the imposition of narrative
line upon disparate images, by the "ideas" with which
we have learned to freeze the shifting phantasmagoria
which is our actual experience.’’
    --- Joan Didion[Did06]
    ‘‘The purpose of a storyteller is not to tell
you how to think, but to give you questions to think
upon.’’
    --- Brandon Sanderson
```

Writing has become more important in GaoKao recently as DuHouXuXie has been added. DuHouXuXie is essentially to continue small story, so it has the qualities of a story. On the other hand, it is so small many aspects are restricted. In this part, we will focus on the features of DuHouXuXie, and introduce some skills as well.

9 Features of DuHouXuXie

A typical story includes several main characters, as well as their relationships, characteristics and the world they live in. These components are usually introduced at the very beginning of a story. In DuHouXuXie, the beginning is already given.

The DuHouXuXie is rather short. We need to finish the story in about 200 words and this could be a challange to the development of the story. We have no time and space to comprehensively describe everything but to concentrate on the story and characters.

As for the type of the story, things that are considered not suitable for students by the Chinese society, for example, romantic love, are not recommended to be conveyed in the story, despite the fact that most of them are highly effective at drawing readers attentions and are of the types of the most famous novels.[9]

10 How to Write a Good Story

10.1 Model and Structure

We can decide what structure to use in our story but the effect may not be good. It is better to use some model that is already successful and effective to struct our story, because we don't have much time to pratice our own model.

10.1.1 The Three-act structure Model

There is a classic model called the "Three-act structure" that is used in narrative fiction.[10]

The Three-act structure divides a story into three parts (acts) — the Setup, the Confrontation, and the Resolution. The Setup establishes main characters, introduces their relationships and presents the world they live in. Then somehow an incident called the first turning point occurs, and the attemps to deal with the incident lead to the first plot point. Contents before the first plot point are often included in the given story, so what we need to do on the Setup part is to give our own first plot point. The first plot point generally does three things:

1. signals the end of the first act,
2. ensures life will never be the same again for the protagonist and

[9] Affections to these things are natural to human beings, and I have always wonder why there is merely a country like China that uses the word "ZaoLian" to show disapproval to romantic love of adolescents.

[10] We will only introduce its basic concepts, for more information, see[Wik19]

3. raises a dramatic question that will be answered in the climax of the story.

Then the confrontation begins and our story goes around the problem initiated by the first turning point. The protagonists try to resolve the problem, and the following problems are described. Characters are developed in this act, but note that their characteristics may be implied in the given story. Along the way of trying to resolve the problem, the protagonists gradually realizes who they are, and the attempts to resolve the problem unexpectedly changes who they are.

Eventually the problems are resolved and the climax, where the main tensions of the story are brought to their most intense point and the dramatic question answered, leaving the protagonist and other characters with a new sense of who they really are.

The structure of our story can be slightly different from the Three-act structure. We don't need to fit in the format exactly, and we don't have to use only one structure.

Let's consider an example:

> It was summer, and my dad wanted to treat me to a vacation like never before. He decided to take me on a trip to the Wild West.
>
> We took a plane to Albuquerque, a big city in the state of New Mexico. We reached Albuquerque in the late afternoon. Uncle Paul, my dad's friend, picked us up from the airport and drove us up to his farm in Pecos.
>
> His wife Tina cooked us a delicious dinner and we got to know his sons Ryan and Kyle. My dad and I spent the night in the guestroom of the farm house listening to the frogs and water rolling down the river nearby. Very early in the morning, Uncle Paul woke us up to have breakfast. "The day starts at dawn on my farm," he said. After breakfast, I went to help Aunt Tina feed the chickens, while my dad went with Uncle Paul to take the sheep out to graze. I was impressed to see my dad and Uncle Paul riding horses. They looked really cool.

In the afternoon, I asked Uncle Paul if I could take a horse ride, and he said yes, as long as my dad went with me. I wasn't going to take a horse ride by myself anyway. So, my dad and I put on our new cowboy hats, got on our horses, and headed slowly towards the mountains. "Don't be late for supper," Uncle Paul cried, "and keep to the track so that you don't get lost!" "OK!" my dad cried back. After a while Uncle Paul and his farm house were out of sight. It was so peaceful and quiet and the colors of the brown rocks, the deep green pine trees, and the late afternoon sun mixed to create a magic scene. It looked like a beautiful woven blanket spread out upon the ground just for us.

Paragraph 1 Suddenly a little rabbit jumped out in front of my horse.

Paragraph 2 We had no idea where we were and it was getting dark.

Possible Version:

Paragraph 1 Suddenly a little rabbit jumped out in front of my horse. Dad and I found it was so cute that we decided to chase it. After a while, we were completely lost in the forest. There was nothing left in our sight but the trees. "We may not be able to make it back to the farm house in time for supper." I thought to myself. After a series of fruitless attempts to find a way out, we felt hungry and tired.

Paragraph 2 We had no idea where we were and it was getting dark. We got stuck in the forest. And an unexpected shower added to the difficulty of us in finding a way home, for all the tracks we had made disappeared because of the rain. I was almost on the edge of breaking down when my father said, "Don't worry, my son. I remember there is a river near the farm house. Find the river and we will be back home." Finally, we found the river and got back to

the house along it. Needless to say, we ate a late dinner.
— GaoKao ZheJiang, 2019

The text colored with blue is the first turning point; the text colored with red is the first plot point; the text colored with green is the difficulties and problems the protagonists met while trying to solve the problem.; and the text colored with orange is the climax of the story.

As we can see, there are some differences between the story and the Three-act structure. For example, the main characters' live has not been changed after the climax. It is another example that the we don't need to fit in the format exactly. Furthermore, the possible version is such a tight story that there is hardly something that develops the characters.

This successful structure ensures that *provided you follow this sturcture, your story will be attrative.* The result is quiet stable, but some people don't like making stories this way. They might want to develop their own structures, which is also a possible way, though it can be more difficult. We won't describe this way in this note. Further reading can be found at [Fra19], where Steph Fraser tells us how to create a novel structure and some available structures.

10.2 Conversation and Dialogue

Conversation is of vital importance in most stories, so we use a subsection to talk about it.

10.2.1 Rules

There are some rules that are useful when writing dialogue. Do remeber, **DIALOGUE MUST BE THERE FOR A REASON**. In other words, dialogue must be meaningful to our story. In fact, some pointless dialogue is good in a novel, but DuHouXuXie is a damn small story, so make sure you don't write pointless conversation.

The reasons why a dialogue is there can be:

- it attracts readers' attention, or
- it advances the story, or

- it deepens characters' personalities, or
- it supplies information.

To draw readers' attention, the most common technique is to include *conflicts* in conversation. The conflict can be the disagreement between several characters, or the contradiction between reality and fantasy. By using conflicts in dialogue, the story becomes intenser. This is different from our real life, in which we may spend weeks without exciting things. Here is an example:

> In this example, we have a dialogue between Estella and Pip in Charles Dickens' *Great Expectations*[Dic61], where Estella was insulting poor Pip.
>
> "Well?"
>
> "Well, miss?" I answered, almost falling over her and checking myself.
>
> "Am I pretty?"
>
> "Yes; I think you are very pretty."
>
> "Am I insulting?"
>
> "Not so much so as you were last time," said I.
>
> "Not so much so?"
>
> "No."
>
> She fired when she asked the last question, and she slapped my face with such force as she had, when I answered it.
>
> "Now?" said she. "You little coarse monster, what do you think of me now?"
>
> "I shall not tell you."

We can see the conflict between Estella and Pip, and we might be curious about the reason why Estella was so mean, which was finally turned out as a consequence of her breeding.

We can also provide questions in dialogue, especially yes or no questions like "Will the boy get that girl?"; "Will the characters survive the disease?". Questions make the story more dramatic.

Multiple ways are available to drive the story forward. It might increase the suspense for what is coming, give some hints to what the characters want, or change the situation the characters are in.

The following illustration shows a good conversation that advances the story from *Gone With The Wind*[Mit36].

> "Sir," she said, "you are no gentleman!"
>
> "An apt observation," he answered airily. "And, you, Miss, are no lady." He seemed to find her very amusing, for he laughed softly again. "No one can remain a lady after saying and doing what I have just overheard. However, ladies have seldom held any charms for me. I know what they are thinking, but they never have the courage or lack of breeding to say what they think. And that, in time, becomes a bore. But you, my dear Miss O'Hara, are a girl of rare spirit, very admirable spirit, and I take off my hat to you. I fail to understand what charms the elegant Mr. Wilkes can hold for a girl of your tempestuous nature. He should thank God on bended knee for a girl with your—how did he put it?—'passion for living,' but being a poor-spirited wretch —"
>
> "You aren't fit to wipe his boots!" she shouted in rage.
>
> "And you were going to hate him all your life!" He sank down on the sofa and she heard him laughing.

The remarks Rhett gave Scarlett such as "*But you, my dear Miss O'Hara, are a girl of rare spirit, very admirable spirit, and I take off my hat to you.*" shed some light to what might have happened to Rhett and Scarlett.

Dialogue can also further develop characters' personalities. However, as mentioned many times before, we probably haven't enought space for such dialogue to occur. Then comes the information providing, which is useful in writing DuHouXuXie. Some backgrounds will seem more natural if we put them into dialogue.

10.2.2 Tips

In dialogue novels, each speaker gets their own paragraph, and the paragraphs are indented, which makes the dialogue clear and brief. In DuHouXuXie, however, we don't have enough space, so we need to merge those paragraphs into one huge paragraph. As a consequence, it might become unclear about who is speaking, so please denote the speaker when necessary.

To save space, we can add additional information at the end of dialogue. For example,

> "There, there, Mrs. Meade" said the doctor, basking obviously in the praise.

Then avoid small talks in your dialogue. They might be useful in novels, but not here. And also, make the dialogue concise and brief. This not only because we have little space, but can also improves the dialogue quality.

You can cut out goodbyes and hellos to save space as well as to speed up your pace, as long as your readers understand the situation well.

Finally, try to give each speaker a unique voice, which greatly improves the story.

10.3 Character Development

We are probably not able to develop a character fully in DuHouXuXie, but I will nevertheless introduce it here briefly, as a reason of its importance in literature.

The character development is not just to show a imaginary person to your readers, you need to show them how this person changes and transforms throughout the story. Is is the process of creating a person AS WELL AS the changes he goes through.

The characters are already given in the given story, but their personalities may not be decided yet. You can develop them on your own, but ensure that you have identified your characters and their roles. And when your try to develop them, think things in their situation — What would you do if you were him?

Please refer to other resources for more information.

By now, our brief introduction about how to write a good DuHouXuXie comes to an end. But as Jesus said, “The end is not yet.” Our journey of learning never ends. And the process of learning English should be happening everyday.

Best wishes :) !

第三部分　寒假物理：光学和量子力学初步

"自然和自然的法则在黑夜中隐藏：上帝说，'让牛顿去吧！'于是一切都被照亮。"

``Nature and Nature's laws lay hid in night: God said, 'Let Newton be!' and all was light.''

--- Alexander Pope

"物理就像性一样，它的确能带来一些有用的结果，但那不是我们为什么做它的原因。"

``Physics is like sex: sure, it may give some practical results, but that's not why we do it.''

--- Richard Feynman

11　光学初步

11.1　光的折射定律 — Snell定律

先不谈网课上的内容，来看一个课本上的例子。课本上的光的折射定律大家应该很熟悉了，

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

这个定律既可以被从费马原理[dF62]推导出来，也可以从我们课本上介绍的惠更斯原理被推导出来[11]。

11.1.1　用费马原理推导Snell定律

我们先看一下用费马原理推导它。费马原理告诉我们，光线跑的路不是别的，而是用时最短的路。现在，如图 5，我们在线两侧有两个不同的介质区域A, B，其中分别存在点P, Q，现在有光要从P跑到Q，我们尝试用费马原理找到它的路径。

证明. 首先证明，光在两个介质内跑的不是别的，而是直线。首先，光无论怎么跑，都要经过分界线上的某一点M，于是连接PM, PN，显然，光跑别的路径要比它跑直线跑的更长，就得出了光要跑直线。得出路径后就

[11]事实上它还可以从麦克斯韦方程组，或是从能量守恒和动量守恒，或是从平移对称性原理等中被推导出来。然而这些推导无法被做到在中学阶段。

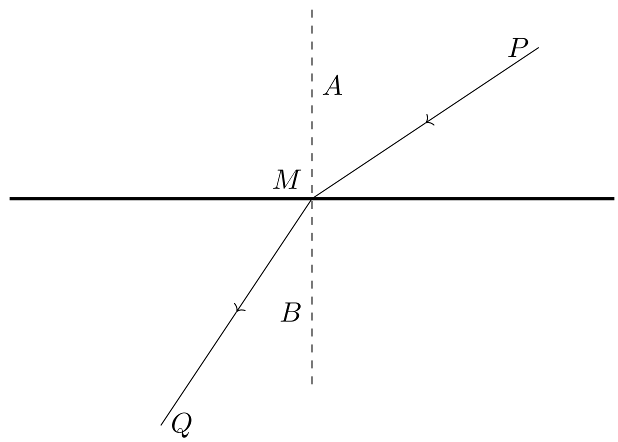


图 5: 用费马原理推导Snell定律

好算时间了。设P,Q到分界线的距离分别为a,b，它们之间的水平距离为l，设M,P间的水平距离为x，光在A,B 中的速度分别为v_1,v_2，则时间

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{v_1} \tag{29}$$

求导

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{-(l-x)}{v_2\sqrt{b^2+(l-x)^2}} \tag{30}$$

很易看出，导数零点就是极小值点。注意到，

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}=\sin\theta_1$$
$$\frac{(l-x)}{v_2\sqrt{b^2+(l-x)^2}}=\sin\theta_2$$

，其中θ_1,θ_2分别是PM,QM与法线成的角。这就完成了证明。 □

用惠更斯原理推导这里就不讲了。

第四部分　寒假化学：有机化学基础

“不是*Balard*发现了溴，而是溴发现了*Balard*。”

‘‘Balard did not discover bromine, rather bromine discovered Balard.’’

--- Justus von Liebig

“我们把有机化学定义为碳的化合物的化学。”

‘‘We define organic chemistry as the chemistry of carbon compounds.’’

--- August Kekule

‘‘Chem is try’’

--- Anonymous

12　怎么表示有机化合物？

当我们想谈论关于一个有机化合物时，我们要让别人明白我们指的是哪个，于是表示有机化合物的方式就很重要，它们就像名字一样。不过很多方式除了有名字的作用之外，还能直观的展示一些它们的特点。

12.1　用式子表示有机化合物

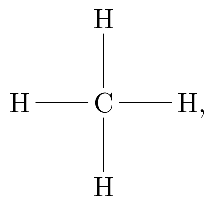
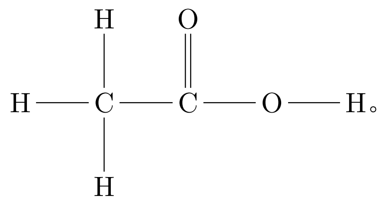
常用的几种用式子表示有机化合物的方法有：

1. 名称
2. 化学式
3. 结构式
4. 结构简式
5. 键线式

名称　名称没什么好说的，比如甲烷，乙酸，乙二酸，硝基苯。名称对应的化合物一般是唯一的，但是一个化合物却不一定只有一个名称。比如氢氧化钠($NaOH$)又叫烧碱，乙酸(CH_3COOH)又叫醋酸。

化学式 化学式展示了组成该化合物的所有原子及其数目（或比例），但无法体现化学键。只要按一定的顺序写出各个原子，并把它们的数目标在右下角就是化学式中的分子式，比如C_6H_6, C_2H_6O。写比例（最简整数比）的是实验式，在某些问题上很有用。可以有多种的化合物的化学式相同，这导致了同分异构体的出现，我们会在后来简要提及它。

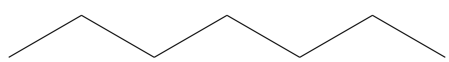
结构式 结构式是用短线(——)等表示化学键，连接起元素符号代表的元素的一种化学组成式。它能表示出化合物的化学键，元素组成，以及一定的空间结构。几个例子：

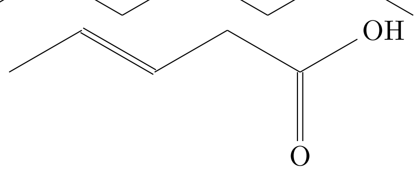
甲烷: , 乙酸: 。

结构简式 在结构式中的碳氢键常常很多，比较麻烦。于是人们常常使用结构简式 — 省去了碳氢键[12]的结构式来表示有机化合物。比如1-丙醇可被简化为

$$OH - CH_2 - CH_2 - CH_3$$

键线式 键线式进一步简化了结构式，把碳骨架上C, H的元素符号也省去了。注意书写键线式时只能省略碳骨架上的H。例子：

正己烷：

3-戊烯酸：

12.2 用模型表示有机化合物

模型能很好地展示有机化合物的各原子的相对大小，空间组成。常用的模型有球棍模型，填充模型等。球棍模型把原子做成小球，用棍子按空间组成插在一起。可以从中看出空间结构，原子相对大小，但是难以看出相对距离。填充模型是把整个分子按比例放大，其中的原子近似为球状，

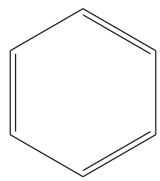
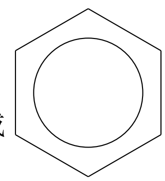
[12]有时也省去氧氢键等常用键。

比较容易看出相对距离和分子相对大小，但是空间结构比较难看出来（相对球棍模型）。

13 链烃（脂肪烃）的性质

链烃中的C原子不连成环。比如甲烷(CH4),乙烯(CH2 ═ CH2)，丙炔(CH ≡ C — CH3)等都是链烃。

虽然这一节是讲链烃，但我们也同时提一下环烃，它们的C原子连成环。而环烃还可细分成芳香烃和脂环烃。**芳香烃是含有苯环的环烃，**

苯:  或 

本身也属于它。前者是苯的凯库勒式，凯库勒认为苯环是单双键交替的环。虽然现代化学已经证明了苯不是这样的，它的C之间有更复杂的化学键，但凯库勒富有创造力和想象力的凯库勒式极大地推进了该领域的发展。现在认为苯的C由单键和跨越整个环的大π键相连。

13.1 链烃的结构特点

烷烃是C原子间全部以饱和键（单键）相连的链烃或甲烷。

当C原子数n大于等于3时，中间的每个C要与2个C相连，每个C上只能有2个H，而两边的C上有3个H，故此时烷烃的化学式为C_nH_{2n+2}。

很易证明，当n=1,n=2时这化学式仍然成立。故烷烃的化学通式为C_nH_{2n+2}。

烯烃是C原子间有双键的链烃。

很易看出，单烯烃的通式为C_nH_{2n}。

炔烃是C原子间有三键的链烃。

很易看出，单炔烃的通式为C_nH_{2n-2}。

13.2 链烃的性质

由于不饱和键的存在，烯烃，炔烃与烷烃的化学性质有着较大的差别。前两者能发生很多后者不能的反应，比如加成反应等。而很多东西都能与

烯烃，炔烃加成，比如卤素单质，水等。这使得用类似溴水的东西区分它们成为可能。另外，酸性高锰酸钾能够氧化这样的不饱和键，所以也可以用酸性高锰酸钾来区分它们。

它们的化学性质区别还体现在很多不同的方面。甚至不止是化学性质，它们的一些物理性质（如熔沸点）也有显著的不同。表1 展示了烷烃和烯烃，炔烃的主要化学性质区别。

13.2.1 链烃的化学性质

<table>
<tr><th></th><th>烷烃</th><th>烯烃</th><th>炔烃</th></tr>
<tr><td>活动性</td><td>较稳定</td><td>比烷烃活泼</td><td>较活泼</td></tr>
<tr><td>取代反应</td><td>能够与卤素取代</td><td colspan="2">高中不涉及</td></tr>
<tr><td>加成反应</td><td>不能发生</td><td colspan="2">能与H_2, X_2, HX, H_2O, HCN等加成</td></tr>
<tr><td>燃烧</td><td>产生淡蓝色火焰</td><td>火焰明亮，有黑烟</td><td>火焰明亮，有浓烟</td></tr>
<tr><td>与酸性高锰酸钾</td><td>不反应</td><td colspan="2">使它退色</td></tr>
<tr><td>加聚反应</td><td>不能发生</td><td colspan="2">能发生</td></tr>
<tr><td>鉴别</td><td colspan="3">可用溴水，酸性高锰酸钾鉴别</td></tr>
</table>

表 1: 烷烃和烯烃，炔烃的主要化学性质区别

13.2.2 链烃的物理性质

链烃的物理性质随C原子数n的增加呈现规律性变化。 n小于5时，为气态，之后随它增加过渡到液态和固态。随n的增加**沸点**增加；**相对密度**增大。同分异构体中，支链数目越多，**沸点**越低。都难溶于水，易溶于有机溶剂。

13.3 涉及链烃的化学反应

13.3.1 涉及烷烃的化学反应

由于烷烃的化学键键能很高，导致其能发生的化学反应比较少。一般见得最多的是取代反应 (如甲烷与氯气)：

$$\mathrm{CH_4} \quad + \quad \mathrm{Cl_2} \xrightarrow{h\nu} \mathrm{CH_3Cl} \quad + \quad \mathrm{HCl}$$

要注意的是这化学反应方程式中只出现了一种主要产物，这是因为

$$\mathrm{CH_3Cl} \quad + \quad \mathrm{Cl_2} \xrightarrow{h\nu} \mathrm{CH_2Cl_2} \quad + \quad \mathrm{HCl}$$

事实上该反应产生很多种副产物，所以该反应一般不被用于工业生产。

烷烃的裂解在断裂碳碳键的同时，还要断裂碳氢键生成碳碳双键。网课中给的例子是：丁烷的裂解

$$\mathrm{C_4H_{10}} \xrightarrow{\text{高温}} \mathrm{CH_4} \quad + \quad \mathrm{CH_2{=}CH{-}CH_3}$$

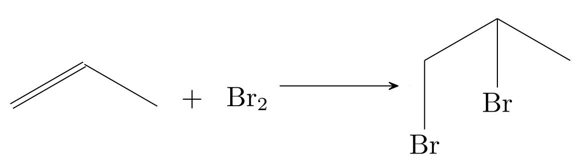
$$\mathrm{C_4H_{10}} \xrightarrow{\text{高温}} \mathrm{C_2H_6} \quad + \quad \mathrm{CH_2{=}CH_2}$$

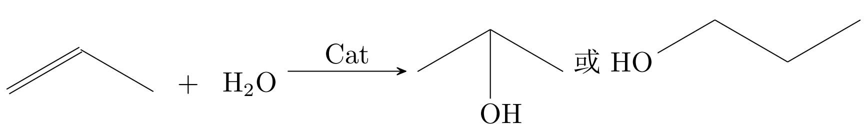
点燃时，通式为

$$\mathrm{C_nH_{2n+2}} \quad + \quad \tfrac{3n+1}{2}\mathrm{O_2} \xrightarrow{\text{点燃}} \mathrm{nCO_2} \quad + \quad \mathrm{(n+1)H_2O}$$

13.3.2 涉及烯烃的化学反应

烯烃中的碳碳双键可以发生加成反应，可以和卤素，水等物质加成。这两个反应方程式如下：





它还可以发生加聚反应，如:

$$\mathrm{nCH_2{=}CH_2} \xrightarrow{\text{引发剂}} \left[\!-\mathrm{CH_2}-\mathrm{CH_2}-\right]_n$$

碳碳双键与酸性高锰酸钾溶液反应生成的产物与两边的东西有关，这里暂不讨论，下面会有个表 2 详细介绍这些东西。

13.3.3 涉及炔烃的化学反应

加成和加聚反应方面，炔烃与烯烃很相似，这里就不提了。提一下与酸性高锰酸钾溶液反应，

$$\mathrm{CH{\equiv}CH} \xrightarrow{\mathrm{KMnO_4}} \mathrm{CO_2}$$

被氧化的部分	氧化产物
$\mathrm{CH_2{=}}$	$\mathrm{CO_2}$, $\mathrm{H_2O}$
$\mathrm{RCH{=}}$	$\mathrm{R{-}C({=}O){-}OH}$
$\mathrm{R'R''C{=}}$	$\mathrm{R'R''C{=}O}$
$\mathrm{HC{\equiv}}$	$\mathrm{CO_2}$
$\mathrm{R{-}C{\equiv}}$	$\mathrm{R{-}COOH}$

表 2: 炔烃和烯烃与酸性高锰酸钾溶液反应

化学到这暂时不写基础知识了，毕竟在课本上都能找到，写了意义不大。

第五部分　寒假生物

生物我感觉实在是没什么好写的，基本都是基础知识，课本上讲的很详细了。我就不写了。

所以不幸的是，生物壮烈牺牲!

第六部分　寒假语文：不幸牺牲

我觉得语文没什么好写的，所以不幸的是，语文壮烈牺牲！

参考文献

[dF62] Pierre de Fermat. Fermat's principle. Recorded on Wikipedia, 1662.

[Dic61] Charles Dickens. *Great Expectations*, volume 1. Chapman & Hall, July 1861.

[Did06] Joan Didion. *We Tell Ourselves Stories in Order to Live.* Knopf, first edition, 2006.

[Fra19] Steph Fraser. Novel structure: Create one that works [+checklist]. Squibler, March 2019.

[Mit36] Margaret Mitchell. *Gone With The Wind.* Macmillan Publishers (United States), first edition, June 1936.

[Wik19] Wikipedia. Three-act structure, December 2019.

插图

表格