

第五章 不确定知识表示及推理

- * 确定推理和不确定推理
- * 可信度模型（C-F模型）及改进
- * 主观贝叶斯方法
- * 证据理论。
- * 模糊集合理论证

记忆随时间而淡忘形成的印象



随着时间的推移，印象中的爱因斯坦只剩下一双深邃的眼睛，而印象中萨达姆也只剩下那浓密的胡子。

为什么要有不确定推理方法？

- (1) 基于一阶谓词逻辑的归结推理方法所依据的证据是确定性的，即谓词所表示的知识要么为“真”，要么为“假”，其推理过程也是以数理逻辑为基础，推理过程是严密的，所推出的结论要么成立，要么不成立。所以基于一阶谓词逻辑的归结推理方法是一种确定性的推理方法。
- (2) 在日常生活中，人们通常所遇到的情况是信息不够完善、不够精确，即所掌握的知识具有不确定性。人们正是利用这种不确定性的知识进行思维、推理，进而求解问题，所以，为了解决实际问题，必须对不确定知识的表示、推理过程等进行研究。
- (3) 对不确定性知识的表示、推理方法有多种，著名的有：可信度方法、主观 Bayes 方法、证据理论方法。

什么是不确定性推理

- * 不确定性推理实际上是一种从不确定的初始证据出发，通过运用不确定性知识，最终推出具有一定不确定性但却又是合理或基本合理的结论的思维过程。

不确定推理要解决的问题

1. 不确定性的表示
2. 不确定性的匹配
3. 组合证据的不确定性的计算
4. 不确定性的更新
5. 不确定性结论的合成

1. 不确定性的表示

(1) 知识的不确定性的表示

考虑因素：问题的描述能力

推理中不确定性的计算

含义：知识的确定性程度，或动态强度

表示：用概率， $[0,1]$ ，0接近于假，1接近于真

用可信度， $[-1,1]$ ，大于0接近于真

小于0接近于假

(2) 证据的不确定性的表示

证据来源：初始证据，中间结论

表示：用概率或可信度

2. 不确定性的匹配

含义

不确定的前提条件与不确定的事实匹配

问题

前提是不确定的，事实也是不确定的

方法

设计一个计算相似程度的算法

判断标准

相似度落在规定限度内为匹配，否则为不匹配

3. 组合证据不确定性的计算

含义

知识的前提条件是多个证据的组合

方法

最大最小方法，如合取取最小、析取取最大
概率方法

4. 不确定性的更新

主要问题

- * 如何在推理中把初始证据的不确定性传递给最终结论

5. 结论的合成

含义：多个不同知识推出同一结论，且不确定性程度不同

方法：视不同推理方法而定

常用的不确定知识处理方法

- * 确定性方法(可信度方法)
- * Bayes方法
- * 证据理论。
- * 模糊集合理论

5.2 确定性方法(可信度方法)

- * 在确定性理论的基础上，结合概率论提出的一种不确定性推理方法
- * E. H. Shortliffe，斯坦福大学，1975
- * 在血液病诊断专家系统MYCIN中得到了成功应用
- * 直观、简单且有效

什么是可信度？

- * 人们根据以往经验对某个事物或现象为真的程度的判断，或者说是人们对某个事物或现象为真的相信程度。

- * 例：

沈强昨天没来上课，理由是头疼。

- * 可信度具有较大的主观性和经验性，准确性难以把握。但由于领域专家具有丰富的专业知识及实践经验，给出该领域知识的可信度还是可行的。

确定性因子

- * 证据为真时，对推出结论给出一个确认程度，用确定性因子 (Cetainty Factor)表示.
- * 方法特点：使用确定性因子表示不确定性知识和进行推理的方法称为确定性方法，或可信度方法，或C—F模型

C-F模型

- * 基于可信度表示的不确定性推理基本方法。
- * 知识不确定性的表示

if E Then H (CF (H,E))

产生式表示

可信度(Certainty Factor)

↑
[-1, 1]

● 例：

IF 发烧 AND 流鼻涕 THEN 感冒 (0.8)

确定性方法要解决的问题

- * 规则表示
- * 证据的表示
- * 计算推理方法

规则表示

- * 规则形式: IF E THEN H (CF(H,E))
 - * E是知识的前提条件,H是结论
 - * CF(H,E)是该条知识的确定性因子(可信度因子)
- * 确定性因子(Certainty Factor)
 - * 取值范围: $[-1,1]$
 - * 含义:
 - * $CF(H, E) > 0$ 表示的证据E为真时, 它对结论为真的支持程度。
 - * $CF(H, E) < 0$ 表示的证据E为真时, 它对结论为真的不支持程度

* 例：

* IF 头痛 AND 流鼻涕
THEN 感冒 (0.7)

* IF 该动物是有蹄类动物 AND 有长脖子
AND 有长腿 AND 身上有暗斑点
THEN 该动物是长颈鹿(0.9)

可信度因子的度量 (1)

$$CF(H, E) = \underline{MB(H, E)} - \underline{MD(H, E)}$$

信任增长度

不信任增长度

$$MB(H, E) = \begin{cases} 1, & \text{若 } P(H) = 1 \\ \frac{\max\{P(H/E), P(H)\} - P(H)}{1 - P(H)}, & \text{否则} \end{cases}$$

$$MD(H, E) = \begin{cases} 1, & \text{若 } P(H) = 0 \\ \frac{\min\{P(H/E), P(H)\} - P(H)}{-P(H)}, & \text{否则} \end{cases}$$

可信度因子的度量 (2)

$$CF(H,E)=\begin{cases} MB(H,E) - 0 = (P(H/E) - P(H)) / (1 - P(H)) , & \text{若 } P(H/E) > P(H) \\ 0 & , \text{若 } P(H/E) = P(H) \\ 0 - MD(H,E) = -(P(H) - P(H/E)) / P(H) & , \text{若 } P(H/E) < P(H) \end{cases}$$

1. $CF(H,E) > 0$, 则 $P(H/E) > P(H)$ 。

说明前提条件E的出现增加了H为真的概率, 即增加了H为真的可信度。极大值: $CF(H,E) = 1$

2. $CF(H,E) = 0$, 则 $P(H/E) = P(H)$

说明 E所对应的证据与H无关。

3. $CF(H,E) < 0$, 则 $P(H/E) < P(H)$ 。

说明由于前提条件E的出现减少H为真的概率, 即增加了H为假的可信度。极小值: $CF(H,E) = -1$

可信度与概率的区别(1)

- * $P(H | E) + P(\neg H | E) = 1$
- * $CF(H, E) + CF(\neg H, E) = 0$
- * 根据MB、MD的定义及概率的性质有:

$$\begin{aligned} MD(\neg H, E) &= \frac{P(\neg H | E) - P(\neg H)}{-P(\neg H)} = \frac{(1 - P(H | E)) - (1 - P(H))}{-(1 - P(H))} \\ &= \frac{-P(H | E) + P(H)}{-(1 - P(H))} = \frac{-(P(H | E) - P(H))}{-(1 - P(H))} \\ &= \frac{P(H | E) - P(H)}{1 - P(H)} = MB(H, E) \quad (\text{信任增长度}) \end{aligned}$$

可信度与概率的区别(2)

* 再根据CF的定义

$$\begin{aligned} CF(H,E) + CF(\neg H,E) \\ = (MB(H,E) - MD(H,E)) + (MB(\neg H,E) - MD(\neg H,E)) \end{aligned}$$

$$* \quad = MB(H,E) - MD(\neg H,E) + MB(\neg H,E) - MD(H,E)$$

$$* \quad = 0 + 0 = 0$$

它说明：

(1) 对H的信任增长度等于对非H的不信任增长度

(2) 对H的可信度与非H的可信度之和等于0

(3) 可信度不是概率，不满足

$$P(H) + P(\neg H) = 1 \quad 0 \leq P(H), P(\neg H) \leq 1$$

$$* \quad CF(H, E) + CF(\neg H | E) = 0 \quad -1 \leq CF(H, E) \leq 1$$

可信度给出的经验方法

1. E出现增加H为真的, 即 $P(H/E) > P(H)$

使 $CF(H,E) > 0$

证据越是支持H为真, 就使 $CF(H,E)$ 的值越大(>0)

E出现,H必为真, 即 $P(H/E)=1$ 使 $CF(H,E)=1$

2. E出现降低了H为真的概率,(增加H为假的可信度)

即 $P(H/E) < P(H)$ 使 $CF(H,E) < 0$

E越是支持H为假, 就使 $CF(H,E)$ 的值越小(<0)

E证据的出现,H必为假, 即 $P(H/E)=0$ 使 $CF(H,E)=-1$

3. E证据的出现与H无关, 使 $CF(H,E)=0$

证据的表示

- * 证据的可信度
 - * 证据的不确定性原因
 - * 证据不确定性的表示
例： $CF(E)=0.6$
- * 证据可信度的来源
 - * 用户给出
 - * 推理得出

- * 证据的可信度取值原则（初始证据）

- * 取值范围 $[-1,1]$

- * 在现有的条件下观察可以肯定证据为真,则使 $CF(E)=1$

- * 在现有的条件下观察可以肯定证据为假,则使 $CF(E)= -1$

- * 若证据在某种程度为真，则使 $0<CF(E)<1$

- * 若证据在某种程度为假，则使 $-1<CF(E)<0$

- * 若证据未获得任何相关的观察，则使 $CF(E)=0$

- * 组合证据不确定性的计算

- * 多个证据“与”关系： $E=E_1 \text{ and } E_2 \text{ and } \dots \text{ and } E_n$

- $CF(E)=\min\{CF(E_1),CF(E_2)\dots CF(E_n)\}$

- * 多个证据“或”关系： $E=E_1 \text{ or } E_2 \text{ or } \dots E_n$

- $CF(E)=\max\{CF(E_1),CF(E_2)\dots CF(E_n)\}$

计算推理方法

- * 不确定性的传播算法
- * 应用实例
- * 存在问题

(1)一条规则中的不确定性值的传播

由 $E, E \rightarrow H (CF(H,E))$, 求 $CF(H)$

$$CF(H) = CF(H,E) \times \max\{0, CF(E)\}$$

(2)两条规则中的不确定性值的传播(合成方法)

IF E_1 THEN $H (CF(H,E_1))$

IF E_2 THEN $H (CF(H,E_2))$

* 对每条规则求出 $CF_1(H), CF_2(H)$,

$$CF_1(H) = CF(H,E_1) \times \max\{0, CF(E_1)\}$$

$$CF_2(H) = CF(H,E_2) \times \max\{0, CF(E_2)\}$$

* E_1, E_2 对 H 的共同影响 $CF_{1,2}(H)$

$$CF(H) = \begin{cases} CF_1(H) + CF_2(H) - CF_1(H) \times CF_2(H) & \text{若 } CF_1(H) \geq 0 \\ & \text{且 } CF_2(H) \geq 0 \\ CF_1(H) + CF_2(H) + CF_1(H) \times CF_2(H) & \text{若 } CF_1(H) < 0 \\ & \text{且 } CF_2(H) < 0 \\ \frac{CF_1(H) + CF_2(H)}{1 - \min\{|CF_1(H)|, |CF_2(H)|\}} & \text{若 } CF_1(H) \text{ 与 } CF_2(H) \text{ 异号} \end{cases}$$

例：设有如下一组知识：

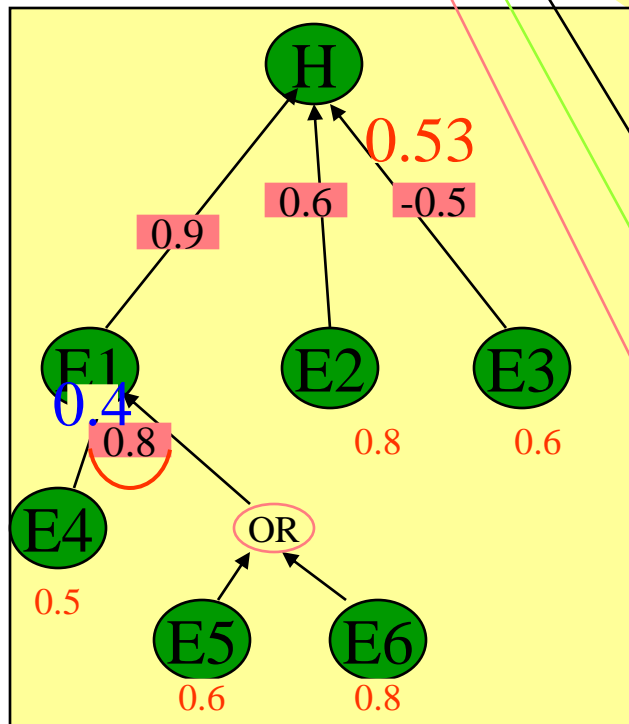
r1: IF E₁ THEN H (0.9)

r2: IF E₂ THEN H (0.6)

r3: IF E₃ THEN H (-0.5)

r4: IF E₄ AND (E₅ OR E₆) THEN E₁ (0.8)

已知：CF (E₂) = 0.8, CF (E₃) = 0.6, CF (E₄) = 0.5, CF (E₅) = 0.6, CF (E₆) = 0.8 **求：**CF (H) = ?



$$CF(E_1) = 0.8 * \max(0, \min(0.5, \max(0.6, 0.8))) = 0.4$$

$$CF_1(H) = 0.9 * 0.4 = 0.36$$

$$CF_2(H) = 0.6 * 0.8 = 0.48$$

$$CF_3(H) = -0.3$$

$$0.5 * 0.6 = 0.3$$

$$CF_{12}(H) = 0.36 + 0.48 - 0.36 * 0.48 = 0.67$$

$$CF_{123}(H) = (0.67 - 0.3) / (1 - \min(0.67, 0.3)) = 0.37 / 0.7 = 0.53$$

应用举例

* 例：某企业选择人员

* 规则(要求1)：

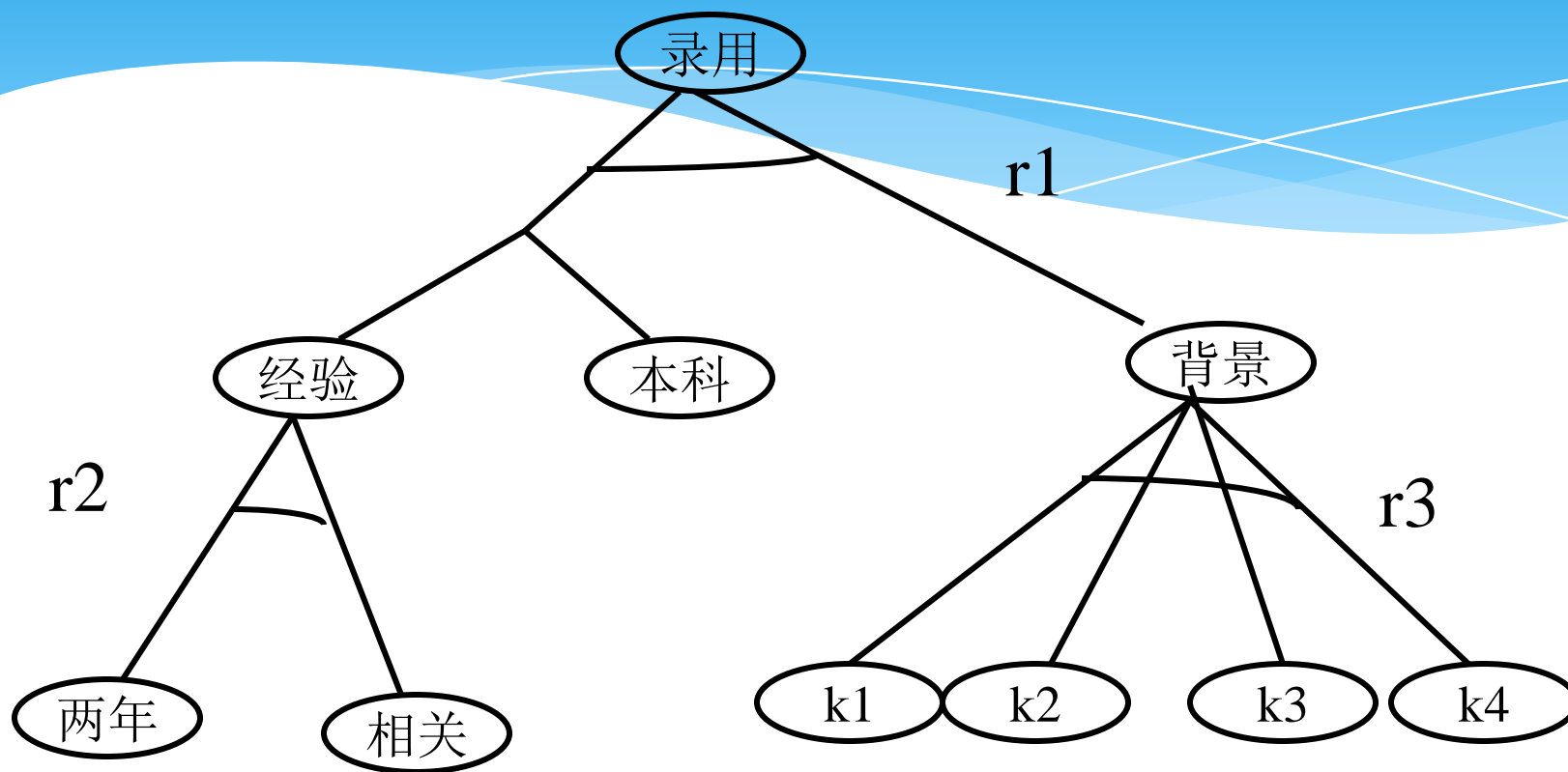
r1: IF (有工作经验 or 本科以上学历) and 有相关知识背景 then 录用 (0.9)

r2: IF 工作两年以上 and 做过相关工作 then 有工作经验 (0.8)

r3: IF k1 and k2 and k3 and k4 then 有相关知识背景 (0.9)

k1,k2,k3,k4: 相关课程的成绩/100

* 规则关系图



- * 设有一本科毕业生，其相关课程的成绩为
 $k_1=60, k_2=80, k_3=40, k_4=90$
- * 推理过程： R_3, R_1
 - * $CF(\text{知识背景}) = 0.9 * \min\{0.6, 0.8, 0.4, 0.9\} = 0.36$
 - * $CF(\text{录用}) = 0.9 * \min\{0.36, 1\} = 0.32$
 - * 录用的可能性为 32%

方法评价

- * 系统的准确性
- * 存在问题

其他不确定的推理方法

- * 主观贝叶斯方法
- * 证据理论。
- * 模糊集合理论

证据理论

证据理论是由德普斯特(A.P.Dempster)首先提出, 并有沙佛(G.Shafer)进一步发展起来的用于处理不确定性的一种理论, 也称DS (Dempster-Shafer)理论。它将概率论中的单点赋值扩展为集合赋值, 可以处理由“不知道”所引起的不确定性, 比主观Bayes方法有着更大的灵活性。

在DS理论中, 可以分别用信任函数、似然函数及类概率函数来描述知识的精确信任度、不可驳斥信任度及估计信任度。

DS理论的形式描述

1. 概率分配函数 (1/3)

DS理论处理的是集合上的不确定性问题，为此需要先建立命题与集合之间的一一对应关系，以把命题的不确定性转化为集合的不确定性。

设 Ω 为样本空间，且 Ω 中的每个元素都相互独立，则由 Ω 的所有子集构成的幂集记为 2^Ω 。

当 Ω 中的元素个数为 N 时，则其幂集 2^Ω 的元素个数为 2^N ，且其中的每一个元素都对应于一个关于 x 取值情况的命题。

例6.4 设 $\Omega=\{\text{红}, \text{黄}, \text{白}\}$ ，求 Ω 的幂集 2^Ω 。

解： Ω 的幂集可包括如下子集：

$$A_0=\Phi, \quad A_1=\{\text{红}\}, \quad A_2=\{\text{黄}\}, \quad A_3=\{\text{白}\},$$

$$A_4=\{\text{红}, \text{黄}\}, \quad A_5=\{\text{红}, \text{白}\}, \quad A_6=\{\text{黄}, \text{白}\}, \quad A_7=\{\text{红}, \text{黄}, \text{白}\}$$

其中， Φ 表示空集，空集也可表示为 $\{\}$ 。上述子集的个数正好是 $2^3=8$

DS理论的形式描述

1. 概率分配函数 (2/3)

定义6.3 设函数 $m: 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$, 且满足

$$m(\Phi) = 0$$

$$\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1$$

则称 m 是 2^Ω 上的概率分配函数, $m(A)$ 称为 A 的基本概率数。

对例6.4, 若定义 2^Ω 上的一个基本函数 m :

$$\begin{aligned} &m(\{\}, \{\text{红}\}, \{\text{黄}\}, \{\text{白}\}, \{\text{红, 黄}\}, \{\text{红, 白}\}, \{\text{黄, 白}\}, \{\text{红, 黄, 白}\}) \\ &= (0, 0.3, 0, 0.1, 0.2, 0.2, 0, 0.2) \end{aligned}$$

其中, $(0, 0.3, 0, 0.1, 0.2, 0.2, 0, 0.2)$ 分别是幂集 2^Ω 中各个子集的基本概率数。

显然 m 满足概率分配函数的定义。

DS理论的形式描述

1. 概率分配函数 (3/3)

对概率分配函数的说明

(1) 概率分配函数的作用是把 Ω 的任一子集映射为 $[0, 1]$ 上的一个数 $m(A)$

当 $A \subset \Omega$ ，且 A 由单个元素组成时，则 $m(A)$ 表示对 A 的精确信任度；

当 $A \subset \Omega$ 、 $A \neq \Omega$ ，且 A 由多个元素组成时， $m(A)$ 也表示对 A 的精确信任度，但却不知道这部分信任度该分给 A 中哪些元素；

当 $A = \Omega$ 时，则 $m(A)$ 也表示不知道该如何分配的部分。

例如，对上例所给出的有限集 Ω 及基本函数 m ，当

$A = \{\text{红}\}$ 时，有 $m(A) = 0.3$ ，它表示对命题“ x 是红色”的精确信任度为0.3。

$B = \{\text{红}, \text{黄}\}$ 时，有 $m(B) = 0.2$ ，它表示对命题“ x 或者是红色，或者是黄色”的精确信任度为0.2，却不知道该把这0.2分给 $\{\text{红}\}$ 还是分给 $\{\text{黄}\}$ 。

$C = \Omega = \{\text{红}, \text{黄}, \text{白}\}$ 时，有 $m(\Omega) = 0.2$ ，表示不知道该对这0.2如何分配，但知道它不属于 $\{\text{红}\}$ ，就一定属于 $\{\text{黄}\}$ 或 $\{\text{白}\}$ 。

(2) 概率分配函数不是概率

例如，在例6.5中， m 符合概率分配函数的定义，但

$$m(\{\text{红}\}) + m(\{\text{黄}\}) + m(\{\text{白}\}) = 0.3 + 0 + 0.1 = 0.4 < 1$$

因此 m 不是概率，因为概率 P 要求： $P(\text{红}) + P(\text{黄}) + P(\text{白}) = 1$

D-S理论的形式描述

2. 信任函数

定义6.4 信任函数 $\text{Bel} : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ 为

$$\text{Bel}(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad \text{对所有的 } A \subseteq \Omega$$

其中, 2^Ω 是 Ω 的幂集。Bel 又称为下限函数, $\text{Bel}(A)$ 表示对 A 的总的信任度。

例如, 对例6.5有

$$\text{Bel}(\{\text{红}\}) = 0.3$$

$$\text{Bel}(\{\text{红}, \text{白}\}) = m(\{\text{红}\}) + m(\{\text{白}\}) + m(\{\text{红}, \text{白}\}) = 0.3 + 0.1 + 0.2 = 0.6$$

根据定义还可以得到:

$$\text{Bel}(\Phi) = m(\Phi) = 0$$

$$\text{Bel}(\Omega) = \sum_{B \subseteq \Omega} m(B) = 1$$

例如, 对例6.5有

$$\text{Bel}(\Phi) = m(\Phi) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Bel}(\{\text{红}, \text{黄}, \text{白}\}) &= m(\Phi) + m(\{\text{红}\}) + m(\{\text{黄}\}) + m(\{\text{白}\}) + m(\{\text{红}, \text{黄}\}) \\ &\quad + m(\{\text{红}, \text{白}\}) + m(\{\text{黄}, \text{白}\}) + m(\{\text{红}, \text{黄}, \text{白}\}) \\ &= 0 + 0.3 + 0 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0 + 0.2 = 1 \end{aligned}$$

D-S理论的形式描述

3. 似然函数(1/2)

定义6.5 似然函数 $Pl: 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ 为

$$Pl(A) = 1 - Bel(\neg A) \quad \text{对所有的 } A \subseteq \Omega$$

其中, $\neg A = \Omega - A$ 。

似然函数又称为不可驳斥函数或上限函数。由于 $Bel(\neg A)$ 表示对 $\neg A$ 的信任度, 即 A 为假的信任度, 因此, $Pl(A)$ 表示对 A 为非假的信任度。

以例6.5为例:

$$\begin{aligned} Pl(\{\text{红}\}) &= 1 - Bel(\neg\{\text{红}\}) = 1 - Bel(\{\text{黄}, \text{白}\}) \\ &= 1 - (m\{\text{黄}\} + m\{\text{白}\} + m\{\text{黄}, \text{白}\}) = 1 - (0 + 0.1 + 0) = 0.9 \end{aligned}$$

这里的0.9是“红”为非假的信任度。由于“红”为真的精确信任度为0.3, 而剩下的 $0.9 - 0.3 = 0.6$, 则是知道非假, 但却不能肯定为真的那部分。

再如:

$$Pl(\{\text{黄}, \text{白}\}) = 1 - Bel(\neg\{\text{黄}, \text{白}\}) = 1 - Bel(\{\text{红}\}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

这里的0.7的含义与上面分析类似。

D-S理论的形式描述

3. 似然函数(2/2)

似然函数的另外一种计算方法:

由于

$$\begin{aligned}\sum_{\{\text{红}\} \cap B \neq \Phi} m(B) &= m(\{\text{红}\}) + m(\{\text{红, 黄}\}) + m(\{\text{红, 白}\}) + m(\{\text{红, 黄, 白}\}) \\ &= 0.3 + 0.2 + 0.2 + 0.2 = 0.9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\{\text{黄, 白}\} \cap B \neq \Phi} m(B) &= m(\{\text{黄}\}) + m(\{\text{白}\}) + m(\{\text{黄, 白}\}) + m(\{\text{红, 黄}\}) + m(\{\text{红, 白}\}) + m(\{\text{红, 黄, 白}\}) \\ &= 0 + 0.1 + 0 + 0.2 + 0.2 + 0.2 = 0.7\end{aligned}$$

可见, $Pl(\{\text{红}\})$, $Pl(\{\text{黄, 白}\})$ 亦可分别用下式计算:

$$\begin{aligned}Pl(\{\text{红}\}) &= \sum_{\{\text{红}\} \cap B \neq \Phi} m(B) \\ Pl(\{\text{黄, 白}\}) &= \sum_{\{\text{黄, 白}\} \cap B \neq \Phi} m(B)\end{aligned}$$

如果把它推广到一般可得公式:

$$Pl(A) = \sum_{A \cap B \neq \Phi} m(B)$$

其证明见教材

D-S理论的形式描述

4. 信任函数与似然函数的关系(1/3)

信任函数和似然函数之间存在关系：

$$Pl(A) \geq Bel(A)$$

证明：

$$\because Bel(A) + Bel(\neg A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) + \sum_{C \subseteq \neg A} m(C) \leq \sum_{E \subseteq \Omega} m(E) = 1$$

$$\begin{aligned} \because Pl(A) - Bel(A) &= 1 - Bel(\neg A) - Bel(A) \\ &= 1 - (Bel(\neg A) + Bel(A)) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore Pl(A) \geq Bel(A)$$

由于Bel(A)和Pl(A)分别表示A为真的信任度和A为非假的信任度，因此，可分别称Bel(A)和Pl(A)为对A信任程度的下限和上限，记为：

$$A[Bel(A), Pl(A)]$$

D-S理论的形式描述

4. 信任函数与似然函数的关系(2/3)

例如，在前面的例子中

$$\text{Bel}(\{\text{红}\})=0.3$$

$$\text{Pl}(\{\text{红}\})=0.9$$

即： $\{\text{红}\}[0.3, 0.9]$

它表示对{红}的精确信任度为0.3，不可驳斥部分为0.9，肯定不是{红}的为0.1。

同理可以求得

$$\{\text{黄}\}[0, 0.4]$$

$$\{\text{白}\}[0.1, 0.5]$$

$$\{\text{红}, \text{黄}\}[0.5, 0.9]$$

$$\{\text{红}, \text{白}\}[0.6, 1]$$

$$\{\text{黄}, \text{白}\}[0.1, 0.7]$$

$$\{\text{红}, \text{黄}, \text{白}\}[1, 1]$$

$$\{\ }[0, 0]$$

D-S理论的形式描述

4. 信任函数与似然函数的关系(3/3)

一些典型值的含义:

$A[0, 1]$: 说明对A一无所知。其中, $\text{Bel}(A)=0$, 说明对A无信任;
再由 $\text{Pl}(A)=1-\text{Bel}(\neg A)=1$, 可知 $\text{Bel}(\neg A)=0$, 说明对 $\neg A$ 也没有信任。

$A[0, 0]$: 说明A为假。即 $\text{Bel}(A)=0$, $\text{Bel}(\neg A)=1$ 。

$A[1, 1]$: 说明A为真。即 $\text{Bel}(A)=1$, $\text{Bel}(\neg A)=0$ 。

$A[0.6, 1]$: 说明对A部分信任。即 $\text{Bel}(A)=0.6$, $\text{Bel}(\neg A)=0$ 。

$A[0, 0.4]$: 说明对 $\neg A$ 部分信任。即 $\text{Bel}(A)=0$, $\text{Bel}(\neg A)=0.4$ 。

$A[0.3, 0.9]$: 说明对A和 $\neg A$ 都有部分信任。其中, $\text{Bel}(A)=0.3$, 说明对A为真有0.3的信任度; $\text{Bel}(\neg A)=1-0.9=0.1$, 说明对A为假有0.1的信任度。因此, $A[0.3, 0.9]$ 表示对A为真的信任度比A为假的信任度稍高一些。

D-S理论的形式描述

5. 概率分配函数的正交和(1/3)

当证据来源不同时，可能会得到不同的概率分配函数。例如，对

$\Omega=\{\text{红}, \text{黄}\}$

假设从不同知识源得到的两个概率分配函数分别为：

$$m_1(\{\}, \{\text{红}\}, \{\text{黄}\}, \{\text{红}, \text{黄}\}) = (0, 0.4, 0.5, 0.1)$$

$$m_2(\{\}, \{\text{红}\}, \{\text{黄}\}, \{\text{红}, \text{黄}\}) = (0, 0.6, 0.2, 0.2)$$

可采用德普斯特提出的求正交和的方法来组合这些函数

定义6.6 设 m_1 和 m_2 是两个不同的概率分配函数，则其正交和 $m=m_1 \oplus m_2$ 满足

$$m(\Phi) = 0$$

$$m(A) = K^{-1} \times \sum_{x \cap y = A} m_1(x) \times m_2(y)$$

其中：

$$K = 1 - \sum_{x \cap y = \Phi} m_1(x) \times m_2(y) = \sum_{x \cap y \neq \Phi} m_1(x) \times m_2(y)$$

如果 $K \neq 0$ ，则正交和也是一个概率分配函数；如果 $K = 0$ ，则不存在正交和 m ，称 m_1 与 m_2 矛盾。

D-S理论的形式描述

5. 概率分配函数的正交和(2/3)

例6.5 设 $\Omega=\{a, b\}$, 且从不同知识源得到的概率分配函数分别为

$$m_1(\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\})=(0, 0.3, 0.5, 0.2)$$

$$m_2(\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\})=(0, 0.6, 0.3, 0.1)$$

求正交和 $m=m_1 \oplus m_2$ 。

解：先求K

$$\begin{aligned} K &= 1 - \sum_{x \cap y = \Phi} m_1(x) \times m_2(y) \\ &= 1 - (m_1(\{a\}) \times m_2(\{b\}) + m_1(\{b\}) \times m_2(\{a\})) \\ &= 1 - (0.3 \times 0.3 + 0.5 \times 0.6) = 0.61 \end{aligned}$$

D-S理论的形式描述

5. 概率分配函数的正交和(3/3)

再求 $m(\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\})$, 由于

$$\begin{aligned}m(\{a\}) &= \frac{1}{0.61} \times \sum_{x \cap y = \{a\}} m_1(x) \times m_2(y) \\&= \frac{1}{0.61} \times (m_1(\{a\}) \times m_2(\{a\}) + m_1(\{a\}) \times m_2(\{a, b\}) + m_1(\{a, b\}) \times m_2(\{a\})) \\&= \frac{1}{0.61} \times (0.3 \times 0.6 + 0.3 \times 0.1 + 0.2 \times 0.6) = 0.54\end{aligned}$$

同理可求得

$$m(\{b\}) = 0.43$$

$$m(\{a, b\}) = 0.03$$

故有

$$m(\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}) = \{0, 0.54, 0.43, 0.03\}$$

对于多个概率分配函数的组合, 方法类似。

本章小结

- * 不确定性的推理方法
 - * 可信度模型（C-F模型）及改进
 - * 主观贝叶斯方法
 - * 证据理论
 - * 模糊集合理理论证
- * 参考章节 第6章