Wstęp do Informatyki :: Laboratorium 1

1. Wzór Newtona-Raphsona.

Metoda Newtona-Raphsona wykonuje iteracyjnie obliczenia, aż do momentu gdy jej wyniki będą satysfakcjonujące.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Warunki stopu

W praktyce stosowanych jest kilka kryteriów warunków stopu dla algorytmu (ϵ to przyjęta dokładność obliczeń):

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$$

Przykład

Obliczanie pierwiastka kwadratowego ze wzoru Newtona.

W wyniku prostych uproszczeń matematycznych:

$$\sqrt{a} = x \ \Rightarrow a = x^2$$

Otrzymujemy równanie:

$$x^2 - a = 0$$

Zatem:

$$f(x) = x^2 - a$$

$$f'(x) = 2x$$

Podstawiając powyższe do wzoru Newtona uzyskujemy finalną zależność:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k}$$

Po dalszych obliczeniach:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k - \frac{a}{x_k})$$

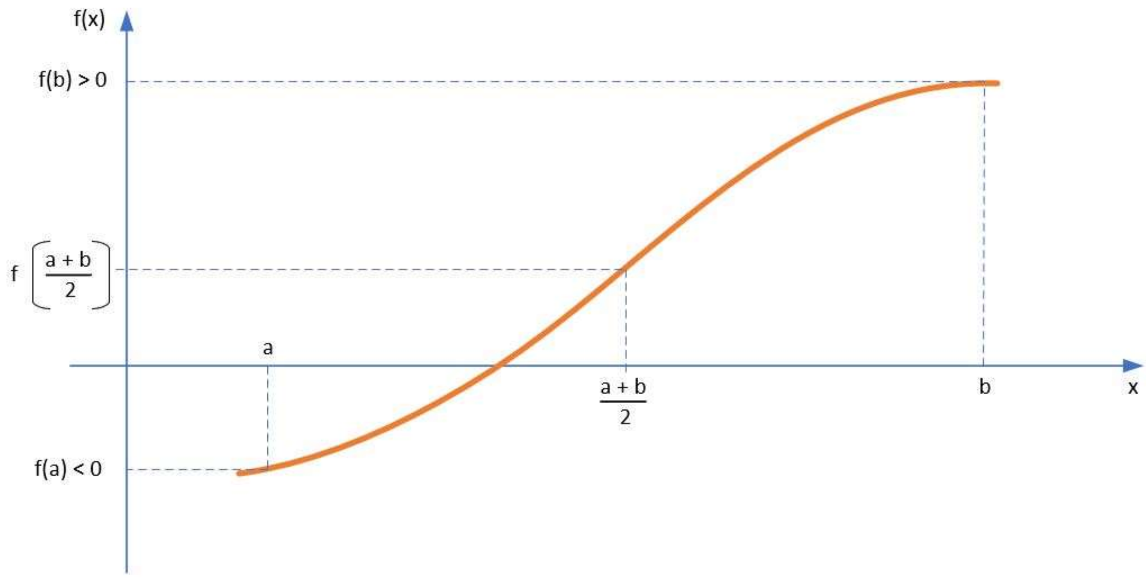
2. Metoda bisekcji.

Metoda bisekcji służąca do znalezienia rozwiązania równania $f(x) = 0$ zawiera następujące kroki:

- Znalezienie wartości x, powiedzmy $x = a$, takiej że $f(a) < 0$
- Znalezienie wartości x, powiedzmy $x = b$, takiej że $f(b) > 0$

Rozwiązanie równania $f(x) = 0$ będzie zlokalizowane pomiędzy a i b.

Dodatkowo pozukiwane rozwiązanie równania będzie się znajdować w pierwszej połówce odległości pomiędzy a i b lub drugiej.



Algorytm:

1. Należy znaleść wartość funkcji $f([a+b]/2)$ – czyli środek na osi odciętych układu kartezjańskiego pomiędzy a i b.
2. Jeśli $f([a+b]/2) > 0$ to rozwiązanie równania leży w pierwszej połowie długości pomiędzy a i b.
3. Jeśli $f([a+b]/2) < 0$ to rozwiązanie równania leży w drugiej połowie długości pomiędzy a i b.
4. Po wybraniu odpowiedniej połówki powtarzamy kroki, dzieląc wybraną połówkę na pół i kolejne, aż do znalezienia rozwiązania.
5. Punkt stopu definiujemy jako zadowalającą nas dokładność otrzymanego rozwiązania:

$$f(x_k) \cong 0 \text{ dla danego } \epsilon$$

Przykład:

Niech dana będzie funkcja:

$$f(x) = x^2 - 2$$

W celu wyznaczenia jej pierwiastków otrzymujemy wyrażenie:

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 2 = 0$$

Dla $x = 1$ otrzymujemy, że $x^2 - 2 < 0$

Dla $x = 2$ otrzymujemy, że $x^2 - 2 > 0$

Na tej podstawie możemy wnioskować, że rozwiązanie równania będzie znajdować się w zbiorze liczb $(1\,;\;2)$. Obliczamy punkt środka, który dla danego przedziału będzie równy 1,5.

Obliczamy wartość wyrażenia dla $x = 1{,}5$. Otrzymujemy wartość:

$$x^2 - 2 = 0{,}25 > 0$$

Zatem rozwiązanie będzie leżało gdzieś pomiędzy $(1\ ;\ 1{,}5)$. Punkt środka jest teraz równy wartości $1{,}25$.

Dla $x = 1{,}25$ otrzymujemy wartość:

$$x^2 - 2 = -0{,}4375 < 0$$

Więc rozwiązanie równania będzie leżało gdzieś pomiędzy $(1{,}25\ ;\ 1{,}5)$.

W celu wyznaczenia zadawalającego nas rozwiązania w odniesieniu do przyjętego ϵ powtarzamy powyższe kroki.

3. Ciąg Fibonacciego.

Ciąg Fibonacciego jest popularnym ciągiem liczb naturalnych. Określa się go rekurencyjnie za pomocą następujących reguł:

- Pierwszy wyraz ciągu jest równy 0;
- Drugi wyraz ciągu jest równy 1
- Każdy następny wyraz ciągu jest równy sumie dwóch poprzednich wyrazów.

  Ciąg Fibonacciego definiujemy następującą zależnością formalną:

$$F_n := \begin{cases} 0 \Rightarrow n = 0; \\ 1 \Rightarrow n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2} \Rightarrow n > 1 \end{cases}$$

4. Liczby pierwsze.

Liczba pierwsza Jest to liczba naturalna większa od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki naturalne:

- jedynkę;
- samą siebie.

Przykład początkowych liczb pierwszych:

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$ itd.

5. Dzielniki liczby.

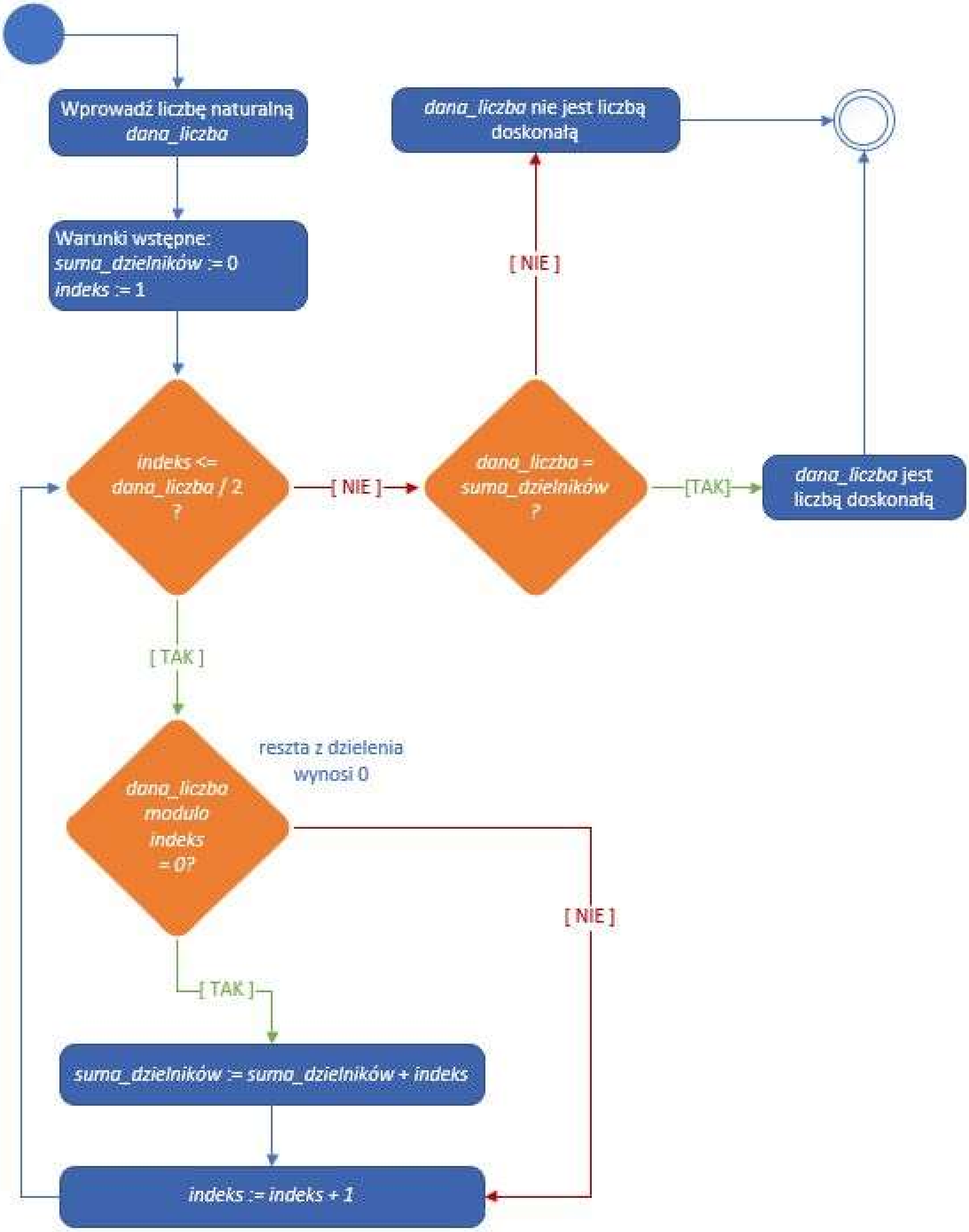
Dzielnik danej liczby całkowitej jest to liczba całkowita, która dzieli bez reszty daną liczbę.

Dzielnikiem liczby x nazywa się dowolną liczbę całkowitą, przez którą liczba się dzieli dana liczba x. Zatem zależność m jest dzielnikiem n zapisuje się jako $m|n$.

6. Liczby doskonałe.

Liczby doskonałe to takie liczby w dziedzinie liczb naturalnych, gdzie dana liczba jest sumą wszystkich swoich podzielników. Przykładem jest, np. liczba 28, która jest sumą dla swoich podzielników:

$$28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$$



7. Liczby zaprzyjaźnione.

Liczby zaprzyjaźnione to para różnych liczb w dziedzinie liczb naturalnych, takich że suma dzielników właściwych każdej z tych liczb równa się drugiej.

Przykład - Para Pitagorasa:

Pierwszą parą takich liczb, która została podana już przez Pitagorasa, jest para liczb 220 i 284:

$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$ (dzielniki 284),

$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$ (dzielniki 220).

Zadania do wykonania na laboratorium:

Zadanie 1. Napisać program wypisujący elementy ciągu Fibonacciego mniejsze od miliona.

Zadanie 2. Napisać program sprawdzający czy istnieje spójny podciąg ciągu Fibonacciego o zadanej sumie.

Zadanie 3. Napisać program wyznaczający pierwiastek kwadratowy ze wzoru Newtona.

Zadanie 4. Napisać program rozwiązujący równanie $x^2 - 2 = 0$ metodą bisekcji.

Zadania do wykonania na laboratorium - dodatkowe:

Zadanie 5. Napisz program wczytujący liczbę naturalną z klawiatury i odpowiadający na pytanie, czy liczba ta jest iloczynem dowolnych dwóch kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego.

Zadanie 6. Napisać program sprawdzający czy zadana liczba jest pierwsza.

Zadanie 7. Napisać program wypisujący podzielniki liczby.

Zadanie 8. Napisać program wyszukujący liczby doskonałe mniejsze od miliona.

Zadanie 9. Napisać program wyszukujący liczby zaprzyjaźnione mniejsze od miliona.

Zadanie 10. Napisać program wyznaczający największy wspólny dzielnik 3 zadanych liczb.

Zadanie 11. Napisać program wyznaczający najmniejszą wspólną wielokrotność 3 zadanych liczb.

Zadanie 12. Napisać program wyznaczający wartość do której zmierza iloraz dwóch kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego. Wyznaczyć ten iloraz dla różnych wartości początkowych wyrazów ciągu.

Zadanie 13. Zmodyfikować wzór Newtona aby program obliczał pierwiastek stopnia 3.