Modulo: Approfondimenti sui Sistemi Aritmetici di un computer: tipo reale [P2_03]

Unità didattica: Sistema Aritmetico Reale Floating-Point [2-AT]

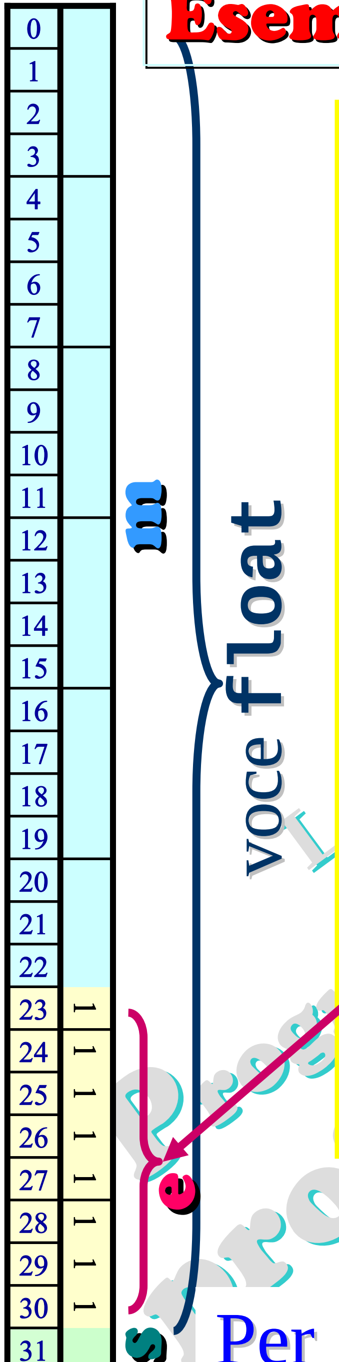
Titolo: Rappresentazione in memoria dei numeri reali

Argomenti trattati:

- ✓ Visualizzazione dei campi segno, esponente, mantissa
- ✓ Variabili predefinite dell'ambiente floating-point del C (in float.h)
- ✓ Schemi di rounding del Sistema Aritmetico Standard

Prerequisiti richiesti: Sistema Aritmetico Floating Point IEEE Standard 754

Esempio: Estrazione di alcuni bit dal contenuto di una variabile




```c
#include <stdio.h>
#define bias 127
int estrae_esp(int *);
void main()
{  float x; short xesp;
   scanf("%f",&x);
   xesp=(short)estrae_esp(&x);
   printf("esp = %d\n",xesp);
}
int estrae_esp(int *n)
/* estrae da un float il campo esponente */
{int xesp, mask;
   mask=0x7f800000; xesp=*n&mask;
   xesp=xesp>>23; xesp=xesp-bias;
   return xesp;
}
```

Nota: il programma non è ISO C STANDARD! Infatti usando Dev-C++ o MS Visual C++ v.6, Visual Studio 2008 si ha un WARNING, usando CodeBlocks (-pedentic) si ha un ERROR!

Per **x = 8.5** produce **esp = 3** (Bias s.p.=127)

Versione che non provoca errori: usa union

```c
#include <stdio.h>
#define bias 127
short estrae_esp1(int);

void main()
{   union sp {
    {     float x;
          int   n;
    } f;
    short xesp;
  scanf("%f",&f.x);
  xesp = estrae_esp1(f.n);
  printf("esp = %hd",xesp);
}

short estrae_esp1(int n)
/* estrae l'esponente */
{int xesp, mask;
   mask=0x7f800000;
   xesp = n&mask;
   xesp = xesp>>23;
   xesp = xesp-bias;
   return (short)xesp;
}
```

union dichiara due variabili **f.x** e **f.n**, di tipo diverso, che condividono la stessa area di memoria

f.x = 8.5

`0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0`

f.n

n

`0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0`

&

mask

`0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0`

`0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0`

xesp

`0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0` -

bias

`0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1` =

(short)xesp `0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1`

3

Il seguente programma visualizza in hex un float ed un double …

... si può aggiungere anche la visualizzazione dei bit

mostra_float_double.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <float.h>
void mostra_sp(int );
void mostra_dp(int []);
void main()
{float a; double b;
 scanf("%le",&b); a=(float)b;
 printf("float =%+e,\t", a); mostra_sp(a);
 printf("double=%+e,\t", b); mostra_dp(&b);
}
void mostra_sp(int n)
{   printf("float  esadecimale=%08x\n",n);
}
void mostra_dp(int n[])
{   printf("double esadecimale=%08x %08x\n",n[1],n[0]);
}
```

per usare le variabili predefinite del sistema aritmetico floating-point

Warn o Err: parametro formale ed attuale non sono dello stesso tipo.

Versione che non provoca errori: usa union

mostra_float_double.c

```c
#include ...      #define MAX_LEN 64
void estrae_64_bit(short , char [], short []);
void mostra_sp(int );
void mostra_dp(int []);
void main()    {short k, bit[MAX_LEN];
    union sp
    {    float fa;
         int   la;
         char C[4];// solo per estrae_64_bit
    } a;
    union dp
    {     double db;
         int   lb[2];
         char C[8];// solo per estrae_64_bit
    } b;
    scanf("%le",&b.db); a.fa=(float)b.db;

    printf("\n\nfloat= %+e,", a.fa); mostra_sp(a.la);
    estrae_64_bit(sizeof(a.fa), a.C, bit); printf("\tbit = ");
    for (k=31; k>=0; k--)        (k==31 | k==23) ? printf("%1d ",bit[k]) : printf("%1d",bit[k]);

    printf("\n\ndouble= %+e,", b.db); mostra_dp(b.lb);
    estrae_64_bit(sizeof(b.db), b.C, bit); printf("\tbit = ");
    for (k=63; k>=0; k--)        (k==63 | k==52) ? printf("%1d ",bit[k]) : printf("%1d",bit[k]);
}
```

```c
void mostra_sp(int n)
{   printf("float  esadecimale = %08x",n);
}

void mostra_dp(int n[])
{   printf("double esadecimale = %08x %08x",n[1],n[0]);
}

void estrae_64_bit(short len, char ch[], short bit[MAX_LEN])
{...}
```

C 64 bit

```c
union dp
   {     double db;
         long int lb;
         char C[8];// solo per estrae_64_bit
   } b;
...
void mostra_dp(long int n)
{   printf("double esadecimale = %16lx", n);
}
```

output

```
1.25
float =+1.250000e+000, float  esadecimale=3fa00000
                  bit 0 01111111    01000000000000000000000
double=+1.250000e+000, double esadecimale=3ff40000 00000000
                  bit 0 01111111111 0100000000000000000000000...
```

Che relazione c'è tra il *Sistema Aritmetico Floating-Point* in singola precisione e quello in doppia precisione?

- **Aumenta l'intervallo di rappresentabilità** (perché aumenta il campo esponente da 8 a 11 bit $\Rightarrow$ range: da $[-127, +128]$ a $[-1023, +1024]$).
- **Aumenta la densità dei numeri** (perché aumenta il campo mantissa da 23 a 52 bit $\Rightarrow$ range: da $[0, 8388607]$ a $[0, 4503599627370495]$).

Quiz

- Quanti numeri double ci sono tra due float consecutivi?
- Quanti numeri double ci sono oltre FLT_MAX (massimo float normalizzato rappresentabile)?

ESEMPIO 1: Numeri normalizzati (*bit implicito*=1)

Numeri normalizzati	$E_{min} < e < E_{max}$	$m \geq 0$

b.db = +1.0;

+1	s.p. (32bit)	3f800000		
		0	011 1111 1	000 0000 0000 0000 0000 0000
	d.p. (64bit)	3ff00000 00000000		
		0	011 1111 1111	0000 0000 0000 ..... 0000 0000
long d.	(80bit)	0	011 1111	1000 0000 0000 ..... 0000 0000

bit esplicito

b.db = -1.0;

–1	s.p. (32bit)	bf800000		
		1	011 1111 1	000 0000 0000 0000 0000 0000
	d.p. (64bit)	bff00000 00000000		
		1	011 1111 1111	0000 0000 0000 ..... 0000 0000

Per estrarre da un **float** i bit dei campi segno, esponente, mantissa ....

EstraeFloat_Bit.c

per usare: **FLT_MIN**, ...

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <float.h>
#include <math.h> /*per pow()
void estrae_bit(int ,char [32]);

int main()
{   char i, bit[32];
    union basic_single {float fa;
                        int ia; } a;
/*definisce float di cui visualizzare i bit*/
a.fa= ...
estrae_bit(a.ia, bit);
printf("\tfloat   = %e\n",a.fa);
printf("\tint hex = %08x\n",a.ia);
puts("bit corrispondenti segno esponente mantissa");
printf("\t\t %1d ",bit[0]);
for (i=1; i<=8; i++)
    printf("%1d",bit[i]);
printf(" ");
for (i=9; i<32; i++)
    printf("%1d",bit[i]);
return 0;}
```

```c
void estrae_bit(int reg, char B[32])
/* rappresentazione binaria dell'int reg
   nell'array B
   bit +signif.   <---  bit -signif.
   B[0] B[1] B[2]  ...  B[30] B[31]
*/
{   short i;
    for (i=31; i>=0; i--)
    {    B[i]=(char)(1&reg); /* estrae bit -significat.*/
         reg=reg>>1;         /* shift a destra di 1 bit*/
    }
}
```

ricorda che …

Oggetto IEEE Std.754	Caratterizzazione esponente **e**	mantissa **m**	ℓ
Numeri normalizzati valore = $(-1)^{s}[\ell.\mathbf{m}]\times 2^{\mathbf{e}-\text{Bias}}$	$E_{min} < \mathbf{e} < E_{max}$	$\mathbf{m} \geq 0$	1
Infinito con segno	$\mathbf{e} = E_{max}$	$\mathbf{m} = 0$	-
NaN (Not A Number)	$\mathbf{e} = E_{max}$	$\mathbf{m} \neq 0$	-
Zero con segno	$\mathbf{e} = E_{min}$	$\mathbf{m} = 0$	-
Numeri denormalizzati valore = $(-1)^{s}[\ell.\mathbf{m}]\times 2^{\mathbf{e}-\text{Bias}+1}$	$\mathbf{e} = E_{min}$	$\mathbf{m} \neq 0$	0

output

(prof. M. Rizzardi)

FLT_MAX, FLT_MIN, DBL_MAX, DBL_MIN: variabili predefinite

```
a.fa = FLT_MAX;
```

```
          float    = 3.402823e+038
         long hex = 7f7fffff
bit corrispondenti segno esponente mantissa
                      0   11111110  11111111111111111111111
```

massimo numero normalizzato rappresentabile in s.p.

```
a.fa = FLT_MIN;
```

```
          float    = 1.175494e-038
         long hex = 00800000
bit corrispondenti segno esponente mantissa
                      0   00000001 00000000000000000000000
```

minimo numero normalizzato rappresentabile in s.p.

```
a.fa = FLT_MIN/pow(2,23);
```

```
          float    = 1.401298e-045
         long hex = 00000001
bit corrispondenti segno esponente mantissa
                      0   00000000  00000000000000000000001
```

minimo numero denormalizzato

```
a.fa = FLT_MIN/pow(2,24);
```

```
          bit corrispondenti segno esponente mantissa
                      0   00000000  00000000000000000000000
```

underflow

EstraeFloat_Bit.c

+1.5 $= 1 + \frac{1}{2}$	**s.p.** (32bit)	**3fc00000**		
		0	011 1111 1	100 0000 0000 0000 0000 0000
	d.p. (64bit)	**3ff80000 00000000**		
		0	011 1111 1111	1000 0000 0000 ..... 0000 0000
+1.25 $= 1 + \frac{1}{4}$	**s.p.** (32bit)	**3fa00000**		
		0	011 1111 1	010 0000 0000 0000 0000 0000
	d.p. (64bit)	**3ff40000 00000000**		
		0	011 1111 1111	0100 0000 0000 ..... 0000 0000
+1.125 $= 1 + \frac{1}{8}$	**s.p.** (32bit)	**3f900000**		
		0	011 1111 1	001 0000 0000 0000 0000 0000
	d.p. (64bit)	**3ff20000 00000000**		
		0	011 1111 1111	0010 0000 0000 ..... 0000 0000

ESEMPIO 2a: estremi normalizzati (bit implicito=1) *in singola precisione*

Numeri normalizzati	$E_{min} < e < E_{max}$	$m \geq 0$

FLT_MIN 1.1…e–38	**s.p.** (32bit)	**00800000**			
		0	000 0000 1	000 0000 0000 0000 0000 0000	
	d.p. (64bit)	**38100000 00000000**			
		0	011 1000 0001	0000 0000 0000 ….. 0000 0000	
FLT_MAX 3.4…e+38	**s.p.** (32bit)	**7f7fffff**			
		0	111 1111 0	111 1111 1111 1111 1111 1111	
	d.p. (64bit)	**47efffff e0000000**			
		0	100 0111 1110	1111 1111 1111 ….. 0000 0000	

ESEMPIO 2b: *estremi normalizzati* *(bit implicito=1)* *in doppia precisione*

Underflow → 0

DBL_MIN 2.2…e–308	s.p. (32bit)	00000000		
		0	000 0000 0	000 0000 0000 0000 0000 0000
	d.p. (64bit)	00100000 00000000		
		0	000 0000 0001	0000 0000 0000 ..... 0000 0000

Overflow → Inf

DBL_MAX 1.7…e+308	s.p. (32bit)	7f800000 (+inf)		
		0	111 1111 1	000 0000 0000 0000 0000 0000
	d.p. (64bit)	7fefffff ffffffff		
		0	111 1111 1110	1111 1111 1111 ..... 1111 1111

ESEMPIO 3: Zero con segno (bit implicito=0)

+0	s.p. (32bit)	00000000		
		0	000 0000 0	000 0000 0000 0000 0000 0000
	d.p. (64bit)	00000000 00000000		
		0	000 0000 0000	0000 0000 0000 ..... 0000 0000
–0	s.p. (32bit)	80000000 (*)		
		1	000 0000 0	000 0000 0000 0000 0000 0000
	d.p. (64bit)	80000000 0000000 (**)		
		1	000 0000 0000	0000 0000 0000 ..... 0000 0000

(*) per esempio `a.fa=-DBL_MIN`

(**) per esempio `b.db=-DBL_MIN/DBL_MAX`

ESEMPIO 4: Infinito con segno (affine mode)

Infinito con segno	$e = E_{max}$	$m = 0$

+INF	**s.p.** (32bit)	7f800000 (+inf)			
		0	111 1111 1	000 0000 0000 0000 0000 0000	
	d.p. (64bit)	7ff00000 00000000 (+1.#INF00e+000)			
		0	111 1111 1111	0000 0000 0000 ..... 0000 0000	
–INF	**s.p.** (32bit)	ff800000 (-inf)			
		1	111 1111 1	000 0000 0000 0000 0000 0000	
	d.p. (64bit)	fff00000 00000000 (-inf)			
		1	111 1111 1111	0000 0000 0000 ..... 0000 0000	

per es. `a.fa=-FLT_MAX/FLT_MIN`
`b.db=-DBL_MAX/DBL_MIN`

→

```
a float = -1.#INF00e+000
b double= -1.#INF00e+000
```

ESEMPIO 5: *NaN*

NaN (Not A Number)	$e = E_{max}$	$m > 0$

+NAN	**s.p.** (32bit)	**7fc00000**		
		0	111 1111 1	100 0000 0000 0000 0000 0000
	d.p. (64bit)	**7ff80000 00000000**		
		0	111 1111 1111	1000 0000 0000 ..... 0000 0000

per es.

```
a.fa = ((float)DBL_MAX)+((float)-DBL_MAX);
```

forma indeterminata $+\infty-\infty$

```
a float = 1.#QNAN0e+000
b double= 1.#QNAN0e+000
```

–NAN	s.p. (32bit)	ffc00000		
		1	111 1111 1	100 0000 0000 0000 0000 0000
	d.p. (64bit)	fff80000 00000000		
		1	111 1111 1111	1000 0000 0000 ..... 0000 0000

per es.

```
a.fa = pow(-2,1.5);
```

operazione invalida $(-2)^{1.5}$

```
a float = -1.#IND00e+000
b double= -1.#IND00e+000
```

... perché $(-2)^{1.5} = e^{1.5\log(-2)}$ e non è definito log(-2)!!!

ESEMPIO 6a: Numeri denormalizzati (bit implicito=0) in singola precisione

Numeri denormalizzati	$e = E_{min}$	$m > 0$

Per i denormalizzati il valore dell'esponente (costante) è dato da: **e–Bias+1** (–126 in single)

FLT_MIN/2 = $5.8\ldots e\text{-}39_{10}$ = 00400000_{16}

0	000 0000 0	100 0000 0000 0000 0000 0000

FLT_MIN/4 = $2.9\ldots e\text{-}39_{10}$ = 00200000_{16}

0	000 0000 0	010 0000 0000 0000 0000 0000

FLT_MIN/8 = $1.4\ldots e\text{-}39_{10}$ = 00100000_{16}

0	000 0000 0	001 0000 0000 0000 0000 0000

…

FLT_MIN/2^{23} = $1.4\ldots e\text{-}45_{10}$ = 00000001_{16}

0	000 0000 0	000 0000 0000 0000 0000 0001

ESEMPIO 6b: Numeri denormalizzati (bit implicito=0) in doppia precisione

Per i denormalizzati il valore dell'esponente (costante) è dato da: **e –Bias+1** (–1022 in double)

DBL_MIN/2 = $00080000\ 00000000_{16}$

0	000 0000 0000	1000 0000 0000 ..... 0000 0000

DBL_MIN/4 = $00040000\ 00000000_{16}$

0	000 0000 0000	0100 0000 0000 ..... 0000 0000

DBL_MIN/8 = $00020000\ 00000000_{16}$

0	000 0000 0000	0010 0000 0000 ..... 0000 0000

...

DBL_MIN/2^{52} = $00000000\ 00000001_{16}$

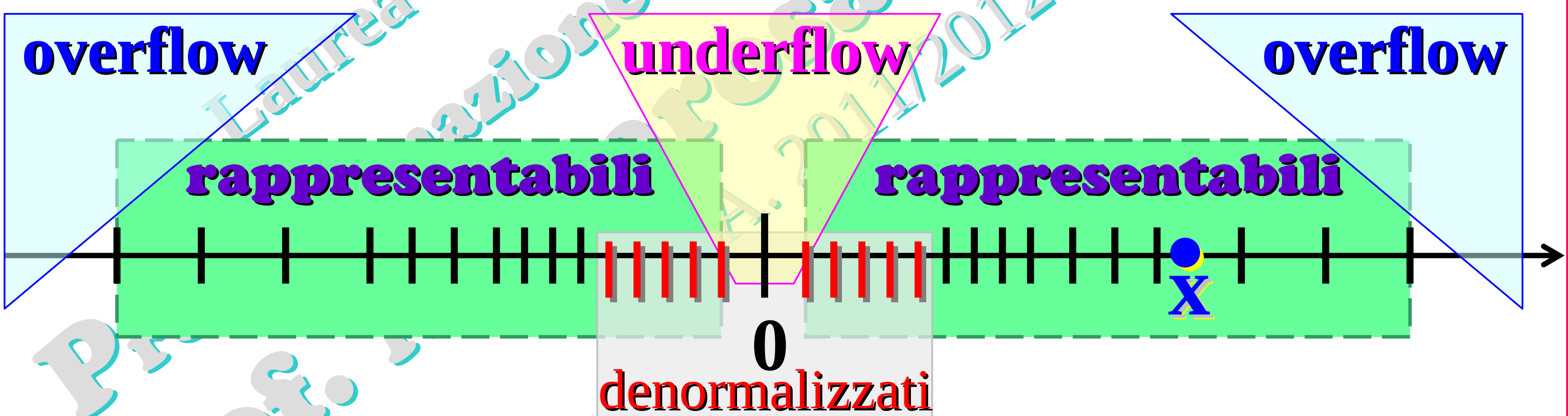
0	000 0000 0000	0000 0000 0000 ..... 0000 0001

SCHEMI DI ROUNDING

$$\forall x \in \mathbb{R} : x = \pm 1.x_1x_2x_3\ldots\times 2^p \xrightarrow{?} fl(x)$$

$$fl(x) = (\mathbf{s}, \mathbf{e}, \mathbf{m})$$

s	e	m



Per gli **x** **rappresentabili** come determinare la **mantissa** **m** di ***fl***(x) **?**

SCHEMI DI ROUNDING

Ad ogni numero reale rappresentabile viene associato il suo rappresentante floating-point mediante uno schema di *rounding*:

$$\forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow fl(x) \in F(2, t, E_{min}, E_{max})$$

Il ***S.A. Standard IEEE*** prevede **4** schemi di rounding:

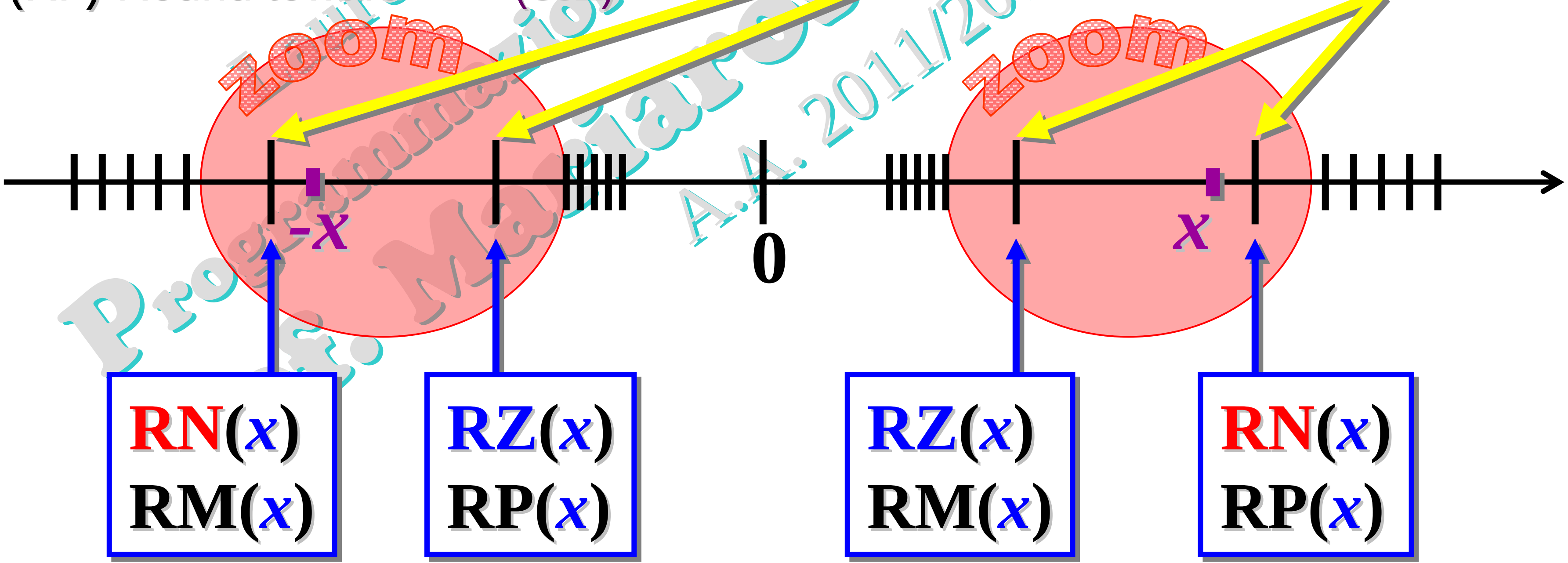
(RN) Round to nearest (round) ← (default)

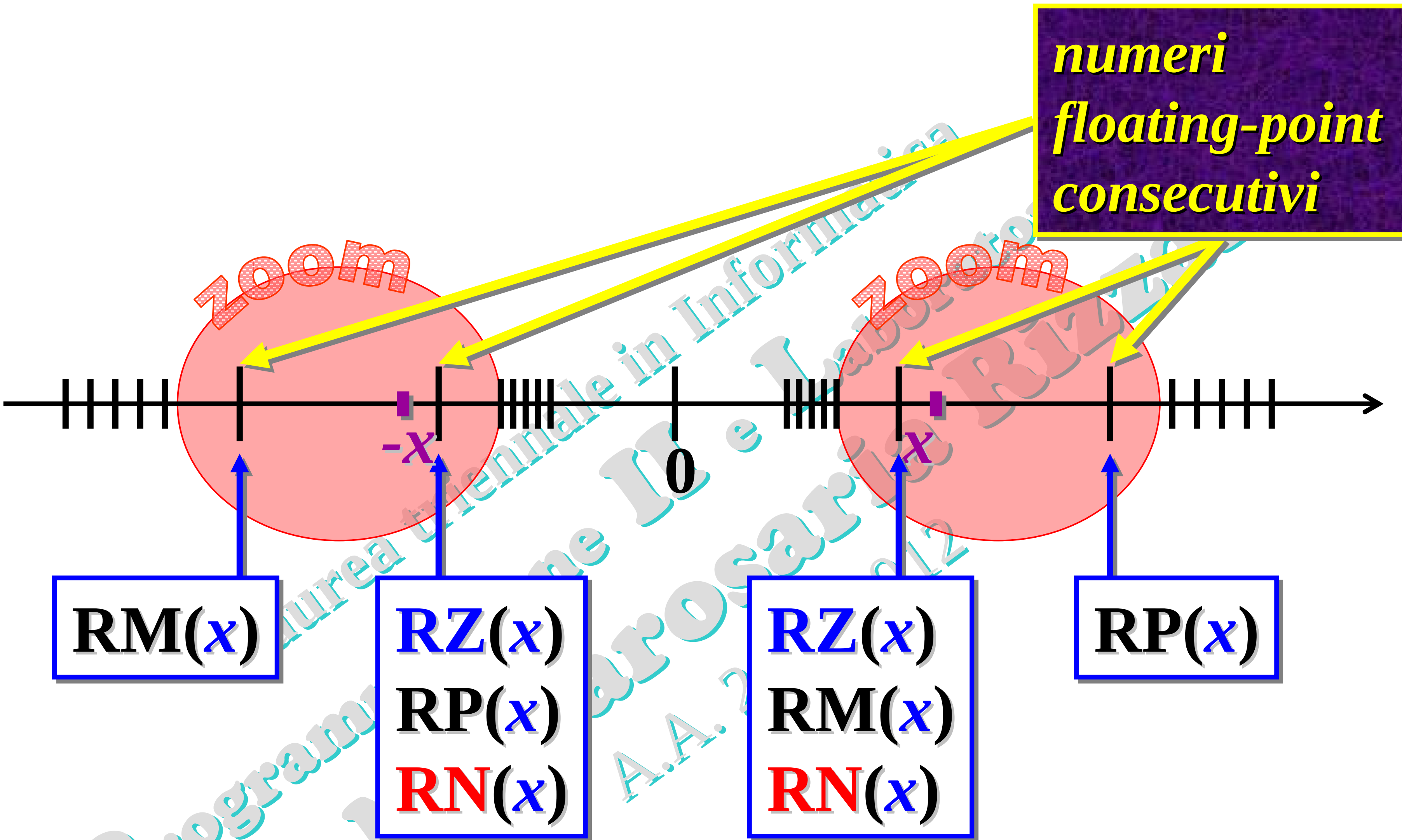
(RZ) Round toward 0 (fix) [troncamento]

(RM) Round toward $-\infty$ (floor)

(RP) Round toward $+\infty$ (ceil)

numeri floating-point consecutivi



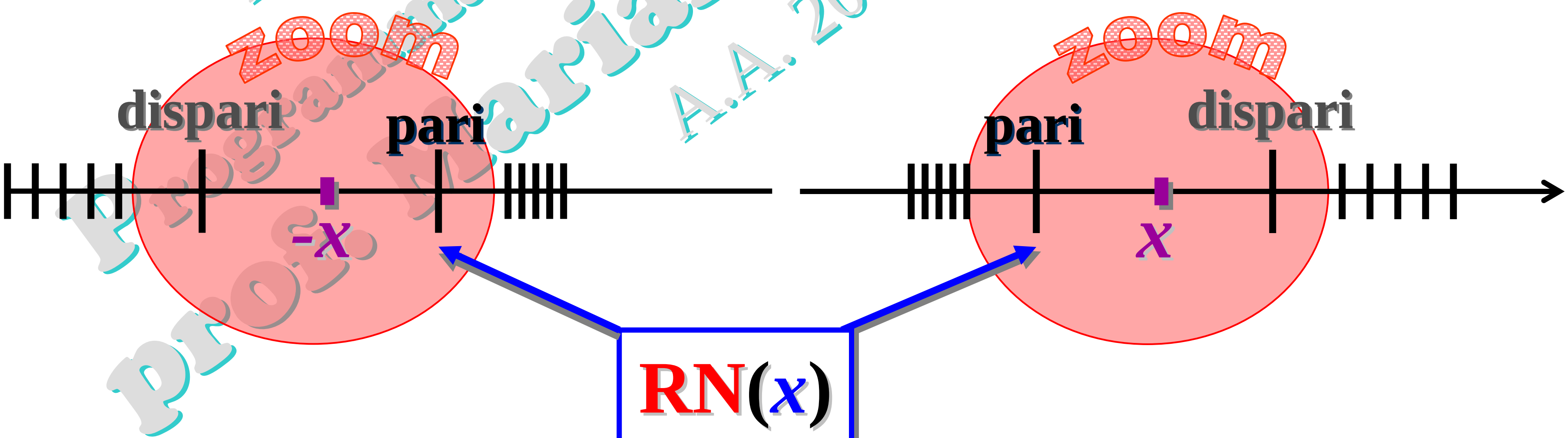


i 4 **SCHEMI DI ROUNDING** sono diversi!

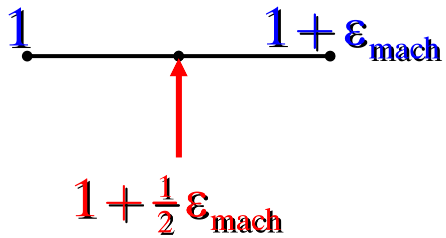
ROUND TO NEAREST (default)

Lo schema **RN** (Round to nearest) è l'arrotondamento in base al quale il valore del primo bit della mantissa di ***x*** da eliminare [il $(t+2)^{simo}$] influenza la mantissa di ***fl*(*x*)**: se questo bit è 1 allora si aggiunge 1 al bit meno significativo (**ulp**=Unit in the Last Place) della mantissa di ***fl*(*x*)**.

Per evitare errori sistematici, nel caso in cui la mantissa di ***x*** sia equidistante dalle mantisse di due numeri Floating Point consecutivi, il Round to nearest la approssima con la mantissa che tra le due è pari.



Esempio 7a: Round to nearest
in singola precisione



1	3f800000	
0	011 1111 1	000 0000 0000 0000 0000 0000

Epsilon-macchina

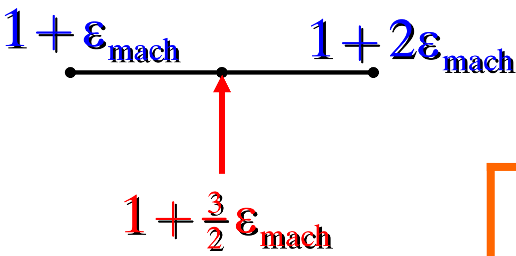
ε_{mach} = min{f >0 numero normalizzato tale che fl(1+ f) >1}

$1+1/2\,\varepsilon_{mach}$	3f800000	
0	011 1111 1	000 0000 0000 0000 0000 0000

RN

ε_{mach} = **FLT_EPSILON** (<float.h>)

$1+\varepsilon_{mach}$	3f800001	
0	011 1111 1	000 0000 0000 0000 0000 0001



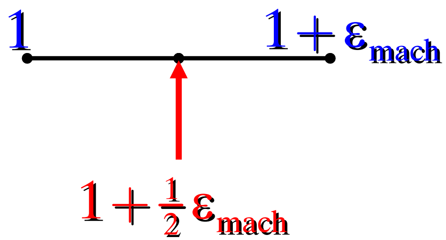
$1+\varepsilon_{mach}$	3f800001	
0	011 1111 1	000 0000 0000 0000 0000 0001

$1+3/2\,\varepsilon_{mach}$	3f800002	
0	011 1111 1	000 0000 0000 0000 0000 0010

RN

$1+2\varepsilon_{mach}$	3f800002	
0	011 1111 1	000 0000 0000 0000 0000 0010

Esempio 7b: Round to nearest
in doppia precisione



1		**3ff0000000000000**
0	011 1111 1111	0000 0000 0000 ..... 0000 0000

Epsilon-macchina

ε_{mach} = min{f >0 numero normalizzato tale che fl(1+ f) >1}

$\mathbf{1+1/2\,\varepsilon_{mach}}$		**3ff0000000000000**
0	011 1111 1111	0000 0000 0000 ..... 0000 0000

RN

ε_{mach} = **DBL_EPSILON** (<float.h>)

$\mathbf{1+\varepsilon_{mach}}$		**3ff0000000000001**
0	011 1111 1111	0000 0000 0000 ..... 0000 0001

$1+\varepsilon_{mach}$ $\quad$ $1+2\varepsilon_{mach}$

$1+\frac{3}{2}\varepsilon_{mach}$

$1+\varepsilon_{mach}$		3ff0000000000001
0	011 1111 1111	0000 0000 0000 ..... 0000 0001

$1+3/2\varepsilon_{mach}$		3ff0000000000002
0	011 1111 1111	0000 0000 0000 ..... 0000 0010

RN

$1+2\varepsilon_{mach}$		3ff0000000000002
0	011 1111 1111	0000 0000 0000 ..... 0000 0010

Esercizi

1 Scrivere una *function C* per visualizzare la rappresentazione binaria (s,e,m) di un numero *float*. Verificare che il valore del numero ottenuto dalla terna coincida con il dato iniziale.

2 Scrivere una *function C* di conversione di un numero reale dalla base 10 alla rappresentazione floating-point IEEE Std 754 binaria (single o double). Come input viene fornita una stringa di caratteri contenenti il numero da convertire. [liv. 3]