Unità didattica: generalità sulla struttura dati grafo (graph)

[1-T]

Titolo: Definizioni e terminologia

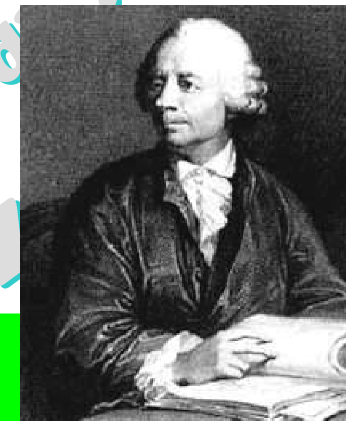
Argomenti trattati:

- ✓ Definizione di grafo, cammino, grafo orientato e non orientato, grafo connesso e non connesso
- ✓ Definizione di cammino semplice, cammino minimo, ciclo
- ✓ Rappresentazione grafica di un grafo
- ✓ Rappresentazione di un grafo mediante matrice archi-nodi

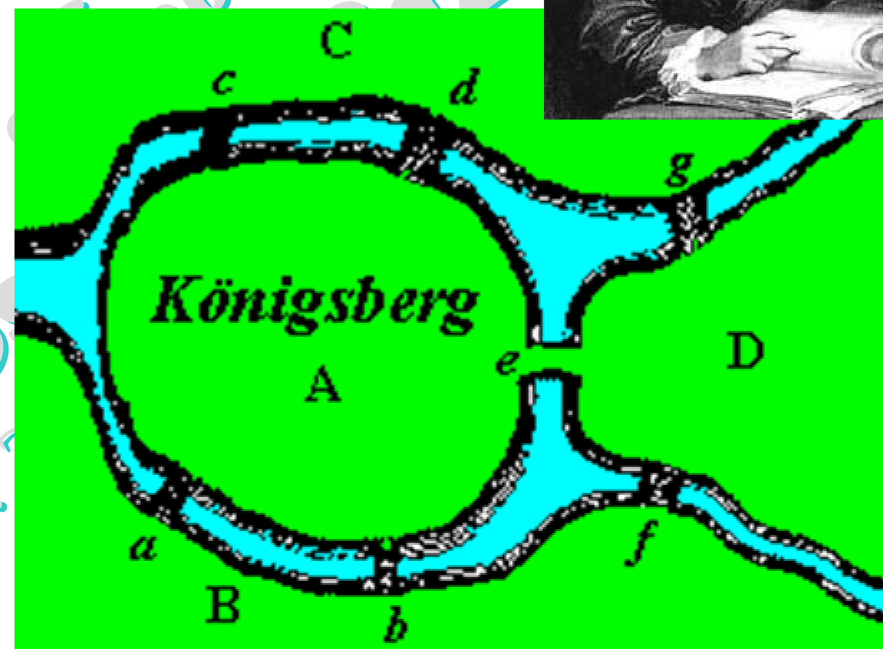
Prerequisiti richiesti: generalità sui tipi di dati strutturati

Grafi

La **teoria dei grafi** si fa risalire al 1736 quando **Leonhard Eulero**



(*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis,* Commetarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 8) trattò il seguente ...



Problema:

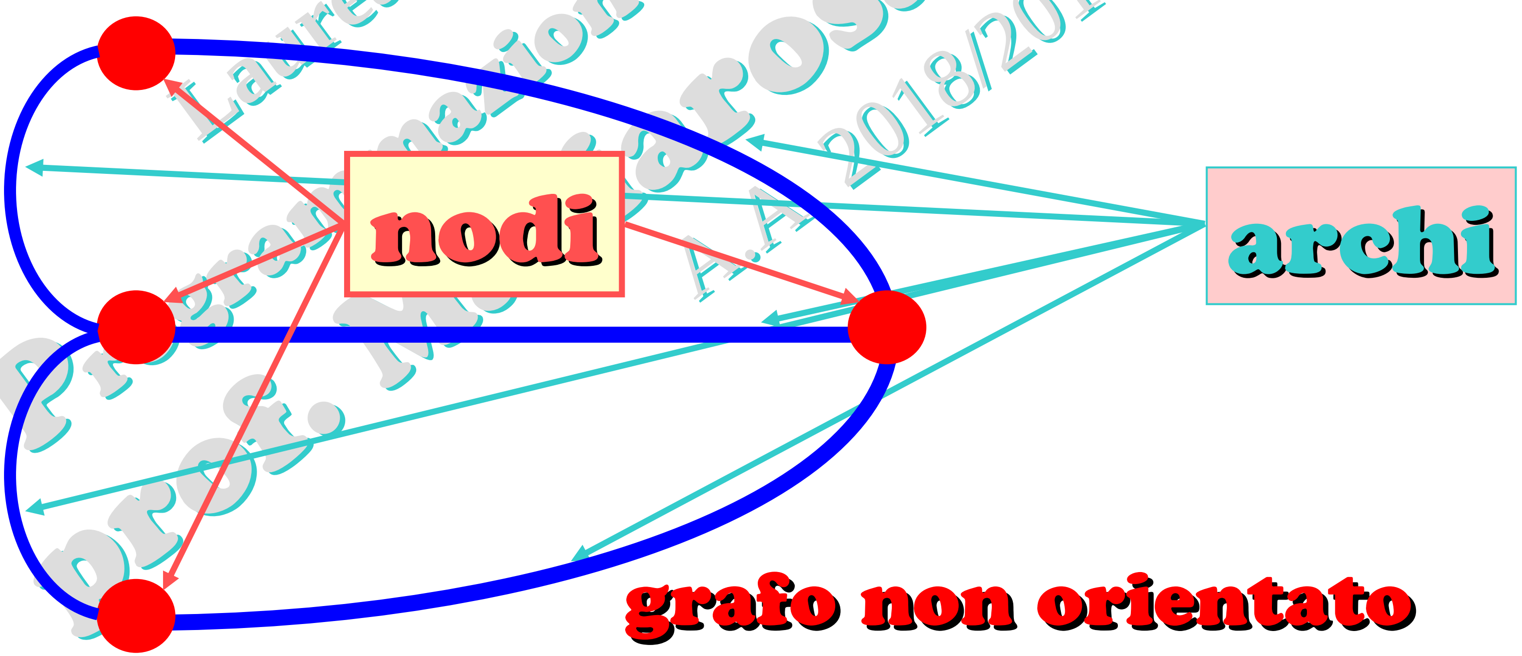
La vecchia città di *Königsberg* (in seguito chiamata *Kaliningrad*) aveva 7 ponti (segnati con ***a***,***b***,***c***,...,***g***) sul fiume *Pregal* (in seguito *Pregolya*) per collegare alla terra ferma l'isola di *Kneiphof* (lettere **A**, **B**, **C** e **D**).

I suoi abitanti desideravano, se possibile, seguire un percorso (chiuso) che, partendo da una terra ferma, attraversasse i sette ponti esattamente 1 volta per tornare al punto di partenza.

Struttura reticolare: grafo

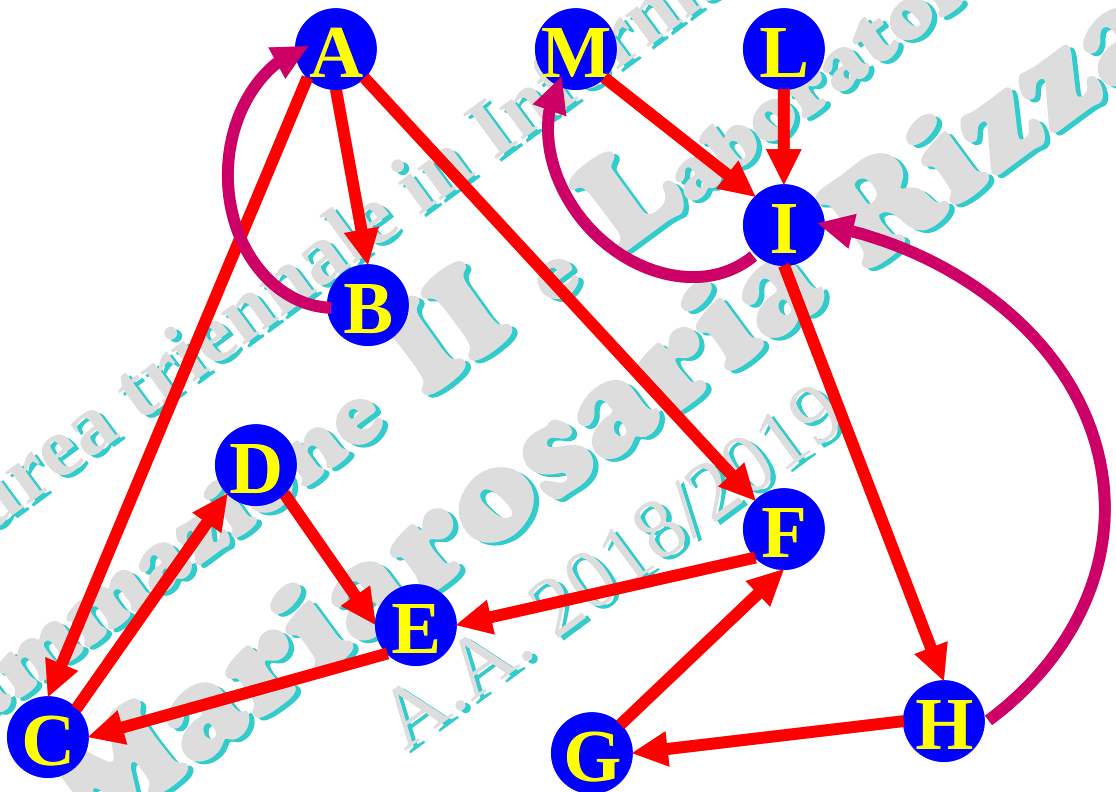
grafo =

insieme di nodi o vertici
(punti)
+
insieme di archi o lati
(connessioni tra due nodi)



grafo non orientato

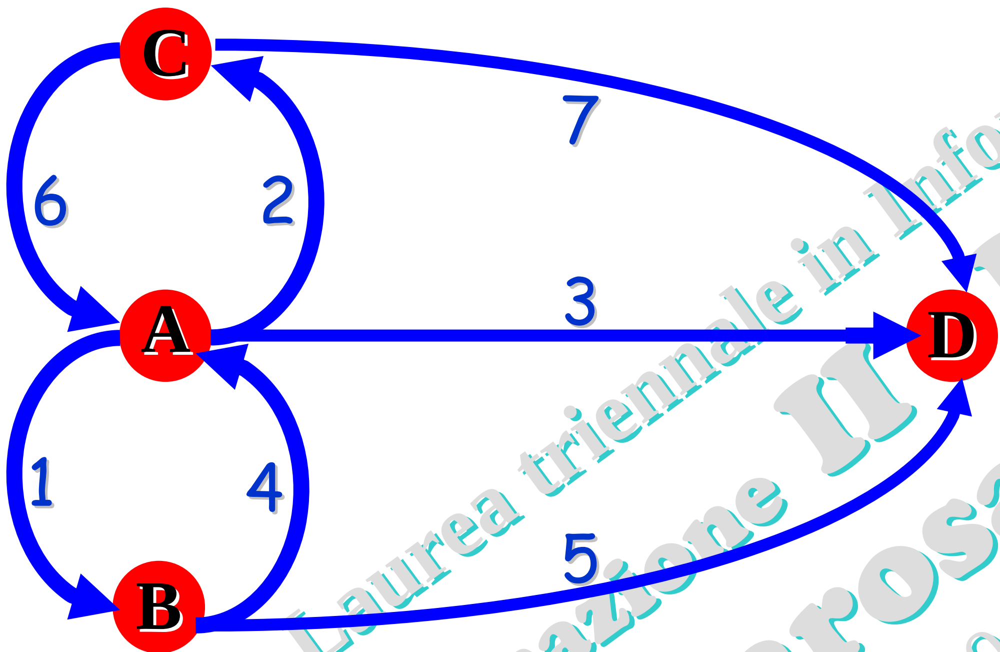
grafo orientato = *quando è assegnato un verso di percorrenza agli archi*



*Nei grafi orientati è consentito che tra una coppia di nodi vi siano **due archi** purché questi abbiano versi opposti*

Esempio di grafo orientato

rappresentazione grafica



rappresentazione matematica
(mediante matrice)

$$
\begin{array}{c|cccc|}
\text{archi} & \multicolumn{4}{c}{\text{vertici}} \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
4 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
5 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
6 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
7 & 0 & 0 & \boxed{-1} & \boxed{1} \\
 & & & \text{da} & \text{a}
\end{array}
$$

vertici $V = \{A, B, C, D\}$
o nodi

1	2	3	4

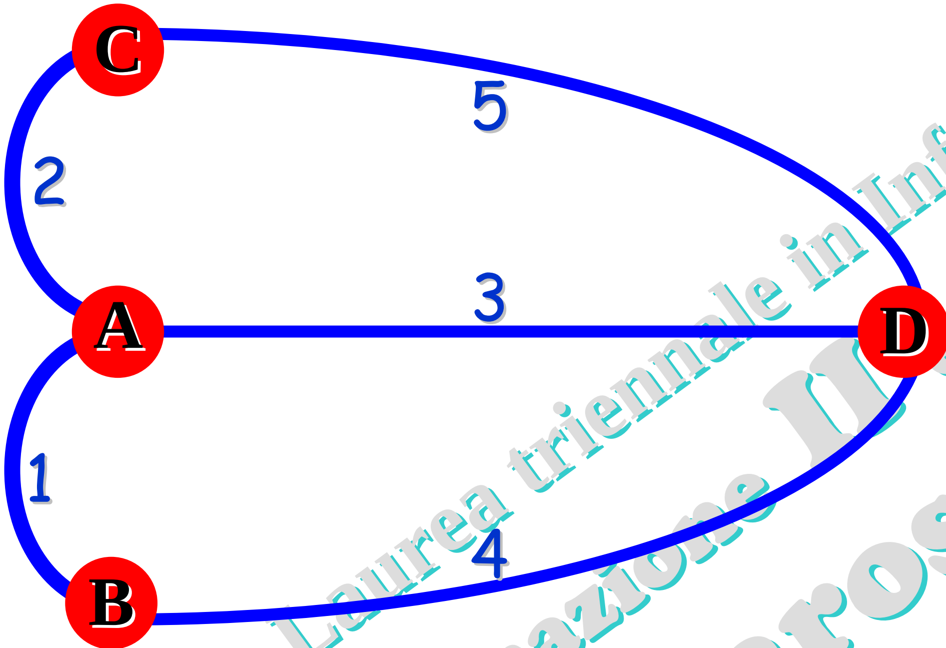
archi orientati coppie ordinate

$A = \{(A,B);(A,C);(A,D);(B,A);(B,D);(C,A);(C,D)\}$

1	2	3	4	5	6	7

Esempio di grafo non orientato

rappresentazione grafica



rappresentazione matematica
(mediante matrice)

vertici

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
\text{archi } 1 & & & & \\
2 & & & & \\
3 & & & & \\
4 & & & & \\
5 & & & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

vertici $V = \{A, B, C, D\}$

1	2	3	4

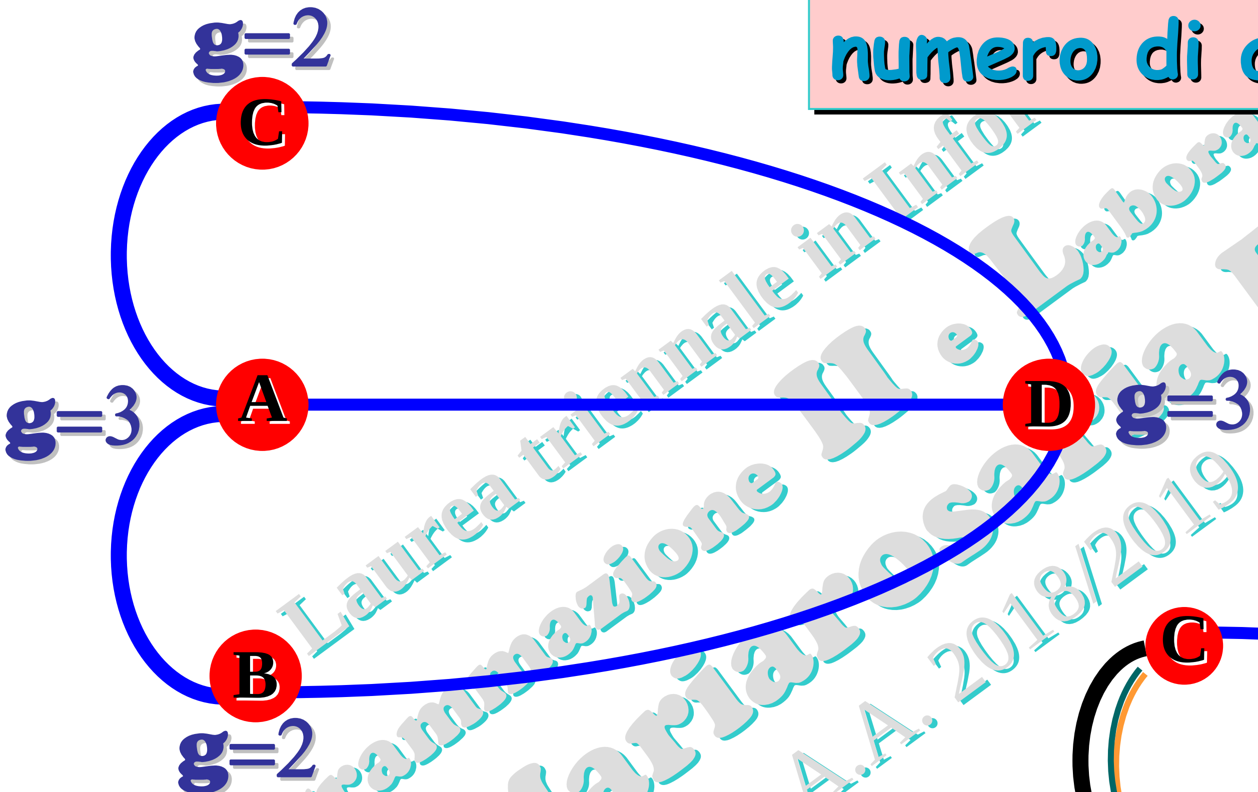
archi non orientati

coppie non ordinate

$A = \{(A,B);(A,C);(A,D);(B,D);(C,D)\}$

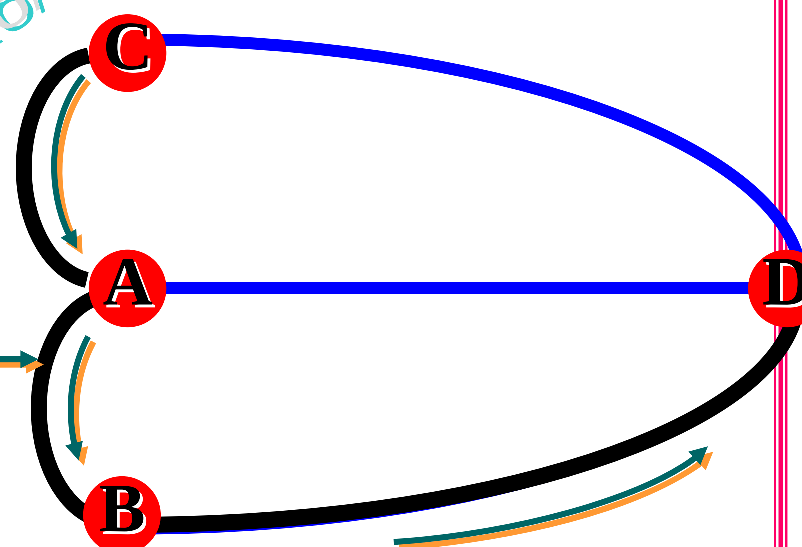
1	2	3	4	5

grado di un nodo = numero di archi incidenti



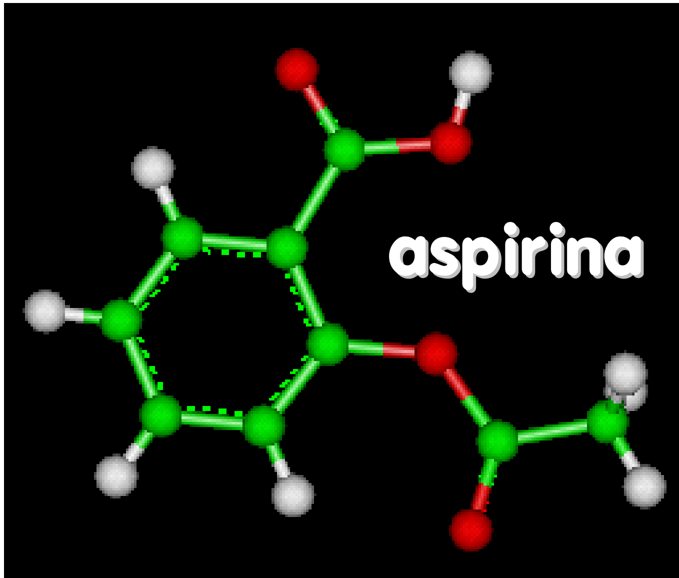
C A B D :

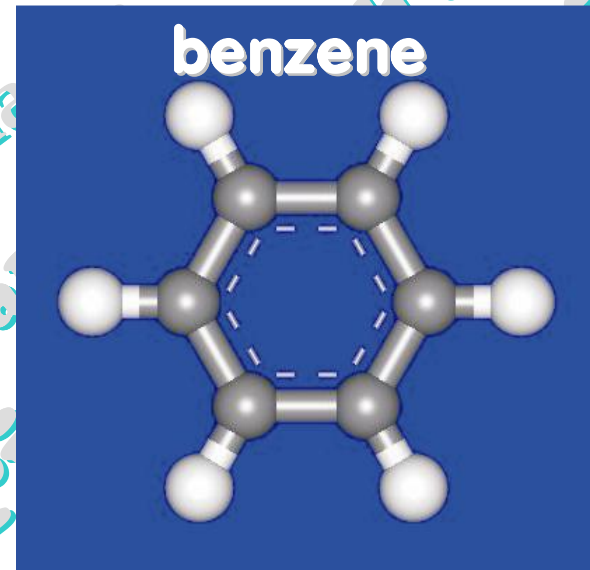
cammino da **C** a **D**



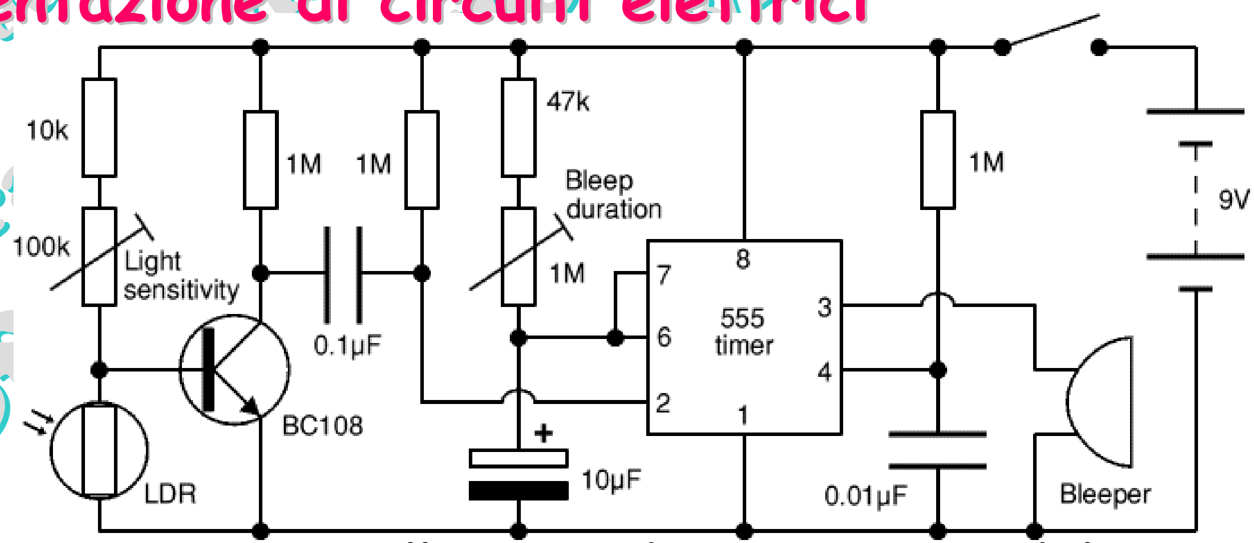
Esempi di applicazioni dei grafi

rappresentazione di strutture molecolari



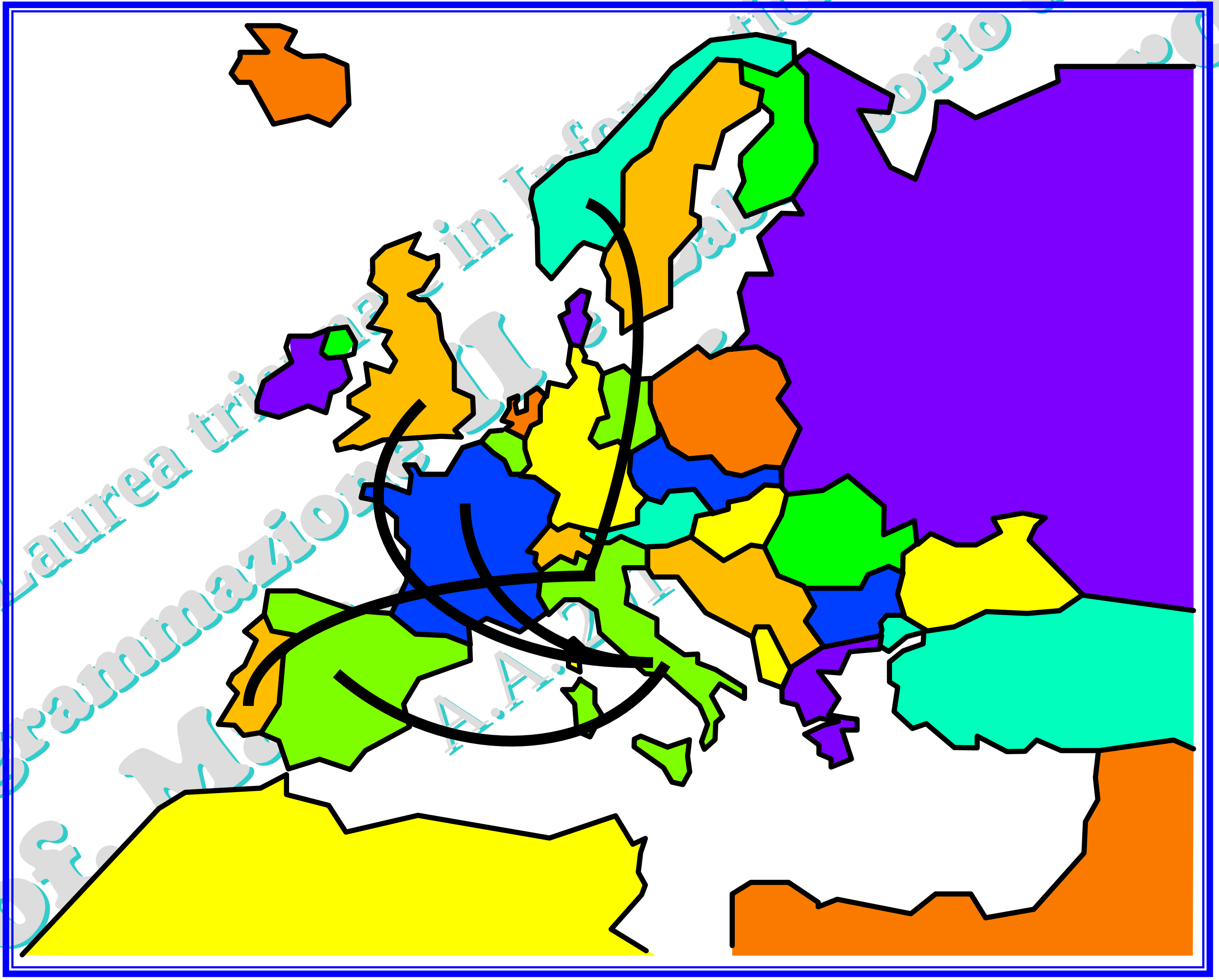


rappresentazione di circuiti elettrici



Sensore (allarme) di variazione di luce

Esempio: quanti colori sono necessari affinchè ogni coppia di paesi confinanti abbia colori differenti?

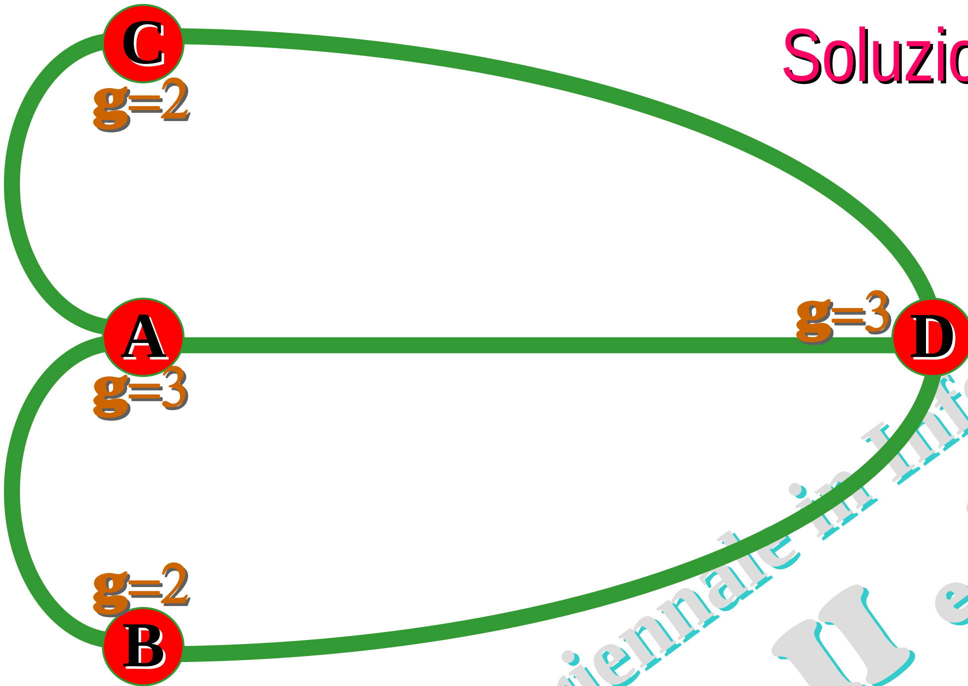


Esempio: rotte aeree tra città

Esempio

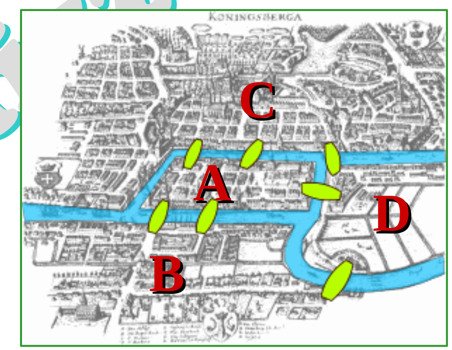
Una carta stradale può essere presentata come un grafo i cui nodi sono le città e i cui archi sono le strade fra una città ed un'altra.

Si può risolvere il problema del cammino minimo tra due città.



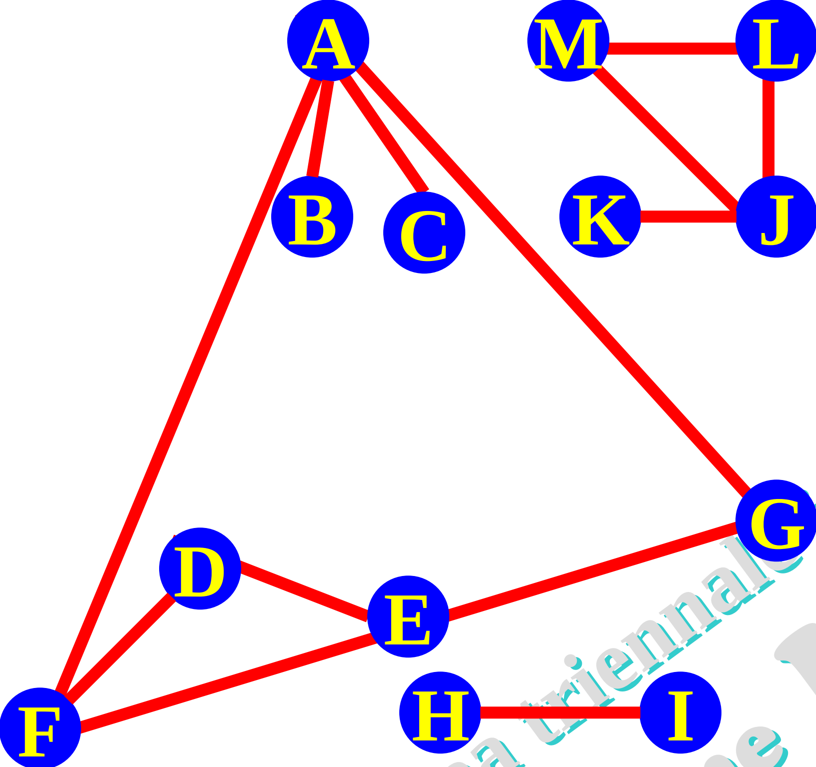
Soluzione al Problema di ***Königsberg***:

<u>non</u> si può percorrere tutto il grafo passando una sola volta per ciascun arco e tornando al nodo di partenza.

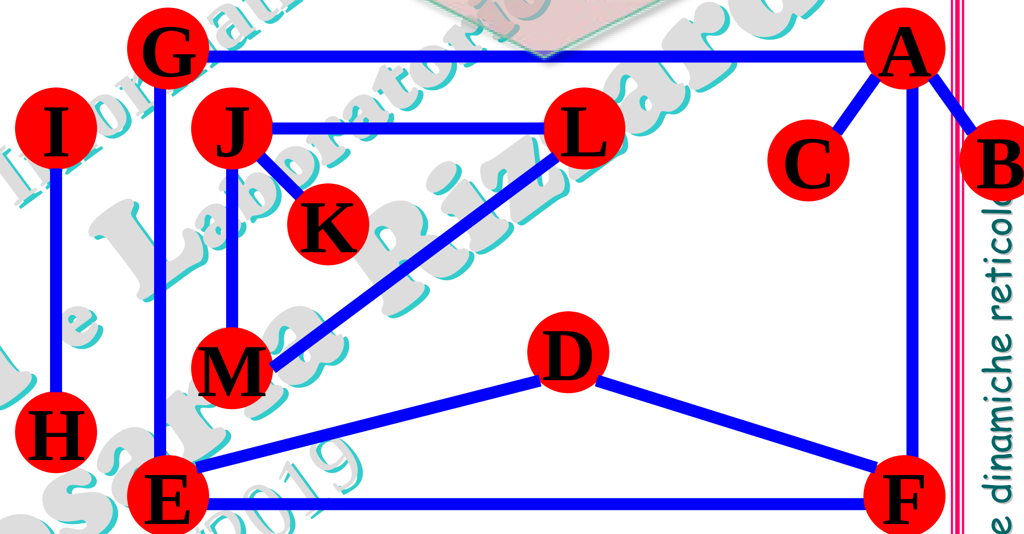


Infatti Eulero enunciò il Teor.:

"esiste un percorso (ciclo Euleriano) *che parte da un nodo qualsiasi, attraversa una sola volta ciascun arco, termina nel vertice iniziale se, e solo se, il grafo è connesso e tutti i vertici hanno grado pari".*



rappresentazioni diverse di uno stesso grafo (grafi isomorfi)

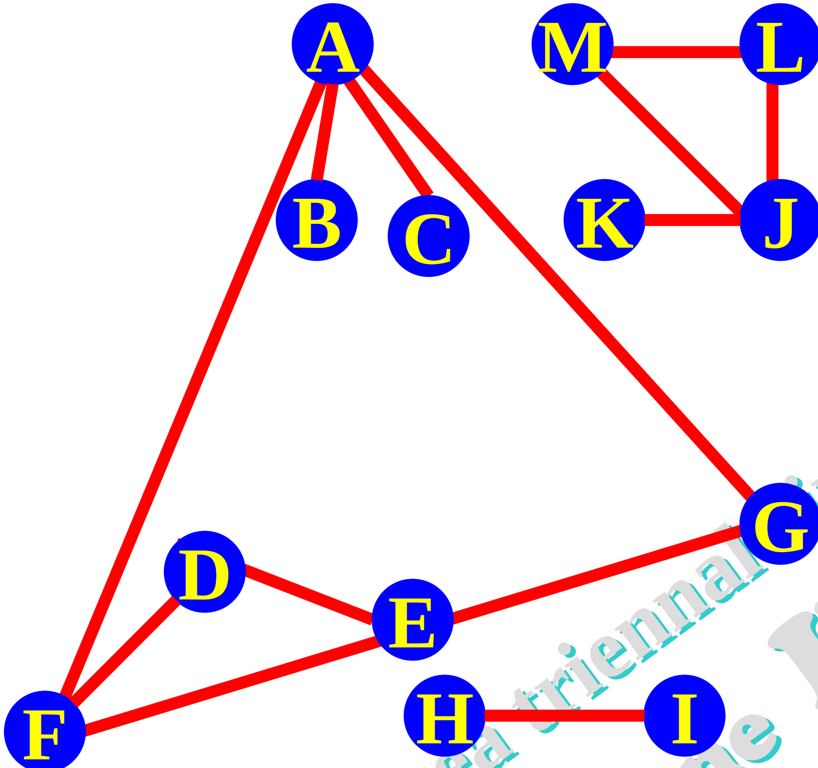


cammino da x a y = lista di vertici connessi da archi che va da ***x*** ad ***y***

lunghezza del cammino = numero degli archi attraversati

cammino da D ad A = {

- **DFEDFA** ***cammino***
- **DFEGA** ***cammino semplice*** (non passa 2 volte per uno stesso nodo)
- **DFA** ***cammino minimo***

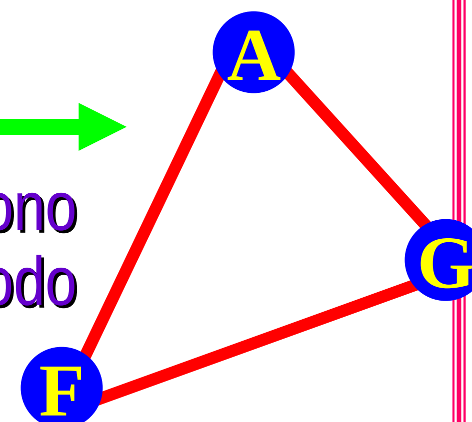


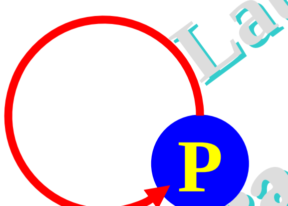
grafo non connesso costituito da tre **grafi connessi** (= tutti i nodi hanno un cammino che li unisce):

- **ABCDEFG**
- **HI**
- **JKLM**

sottografi connessi

AFGA è un ***ciclo***: cammino semplice in cui coincidono (solo) il primo e l'ultimo nodo





cappio o ***loop***: ciclo di lunghezza 1

Ciclo Euleriano: ciclo che attraversa ogni arco esattamente 1 volta.

Ciclo Hamiltoniano: ciclo che visita ogni nodo (tranne il primo) esattamente 1 volta