Modulo: Approfondimenti sui Sistemi Aritmetici di un computer: tipo intero [P2_02]

Unità didattica: Rappresentazioni per complemento a 2 e per eccesso B [4-AT]

Titolo: Interi rappresentati per complemento a 2, per eccesso B

Argomenti trattati:

- ✓ Rappresentazione per complemento a 2 su n bit
- ✓ Rappresentazione per complemento alla base: cifre complementari
- ✓ Rappresentazione per eccesso B (B-biased) su n bit
- ✓ Tipi di dati interi in C (char, short int, long int) signed e unsigned
- ✓ Overflow d'intero

Prerequisiti richiesti: Sistema Aritmetico Intero

La rappresentazione per complemento a 2 (r_{C2}) su **n bit** di un **intero** (rappresentabile) $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}$ si esprime con la formula

$$r_{C2}(\mathbf{k}) = [2^n + \mathbf{k}]_{mod.2^n}$$

Per un **intero +k ≥ 0** (k=0, 1, ..., 2^{n-1}) coincide col numero stesso:

$$r_{C2}(+k) = [2^n + (+k)]_{mod.2^n} \equiv k$$

Invece per un **intero –k < 0** (–k=–(2^{n-1}–1), ..., -1) è data da

$$r_{C2}(-k) = [2^n + (-k)]_{mod.2^n} \equiv 2^n - k$$

La rappresentazione per complemento a 2 su n bit di un numero negativo si può calcolare anche tramite gli operatori bitwise:

- si complementa il numero positivo bit a bit (0←→1)
- si addiziona 1 modulo 2^n.

Esempio

$n=4$, $k = 5$, $r_{C2}(-5)=?$

$r_{C2}(-k)=[2^n+(-k)]_{mod.2^n} \equiv 2^n - k =$

$= [16 - 5] = 11_{10} = 1011_2$

$n=4$, $-k = -5$,

$+5_{10} = 0101_2$ ⟵ $+k$

$bitNOT(+5_{10}) = 1010_2 +$

$1 =$

1011 ⟵ $r_{C2}(-5)$

Dall'essere

$$r_{C2}(+k) + r_{C2}(-k) = 2^n \equiv 0 \pmod{2^n}$$

risulta che $r_{C2}(-k)$ si comporta come $-k$ in aritmetica **mod 2^n**, e pertanto entrambi gli algoritmi per + e – si riconducono ad un'addizione aritmetica.

Esempio: sottrazione

$$h - k = [r_{C2}(h) + r_{C2}(-k)]_{\text{mod } 2^n}$$

n=4, h-k = 7-5,

$r_{C2}(+7)$ = 0111 +
$r_{C2}(-5)$ = 1011 =
10010 = $r_{C2}(+2)$

Rappresentazione per complemento alla base: cifre complementari

Base 2	
0	1

Base 10	
0	9
1	8
2	7
3	6
4	5

Base 16	
0	F
1	E
2	D
3	C
4	B
5	A
6	9
7	8

h e k cifre complementari

se, in base β, risulta

$h + k = \beta - 1$

Rappresentazione per complemento alla base

$n=4$

range $[i_{min}, i_{max}]=[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$
$=[-8, 7]$

$\beta=2$	
0	1

$n=4$

$+7_{10}$		0	1	1	1	
compl.		1	0	0	0	
+1		0	0	0	1	
$r_{C_2}(-7)$ -7_{10}		1	0	0	1	+
$+7_{10}$		0	1	1	1	=
0	~~1~~	0	0	0	0	

Rappresentazione per complemento alla base

n=4

Base 10	
0	9
1	8
2	7
3	6
4	5

$r_{C_{10}}(-37)$

range $[i_{min}, i_{max}] = [-10^{n-1}, 10^{n-1} - 1]$
$= [-1000, 999]$

n=4

$+37_{10}$		0	0	3	7
Compl.		9	9	6	2
+1		0	0	0	1
-37_{10}		9	9	6	3
$+37_{10}$		0	0	3	7
0	1	0	0	0	0

Rappresentazione per complemento alla base

n=4

Base 16	
0	F
1	E
2	D
3	C
4	B
5	A
6	9
7	8

range $[i_{min}, i_{max}] = [-16^{n-1}, 16^{n-1} - 1]$
$= [-4096, 4095]$

$r_{C_{16}}(-3898)$

n=4

$+3898_{10}$		0	f	3	a
Complem.		f	0	c	5
+1		0	0	0	1
-3898_{10}		f	0	c	6
$+3898_{10}$		0	f	3	a
0	1	0	0	0	0

La rappresentazione biased con bias B di un intero (rappresentabile) **k** su n bit, $r_B(k)$, può esprimersi con la formula

$$r_B(k) = k + B = k + 2^{n-1} - 1$$

$2^{n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{2^n}$ ...

Risulta $r_B(h)+r_B(\pm k) = h \pm k + 2B = h \pm k + 2^n - 2 \equiv h \pm k - 2$

invece di $r_B(h \pm k) = h \pm k + B = h \pm k + 2^{n-1} - 1$

serve correzione

correzione

Quindi $r_B(h \pm k) = r_B(h) + r_B(\pm k) + \text{correzione} \Leftrightarrow \text{correzione} = 2^{n-1}+1$

Esempio 1

n=4, B=7,

$r_B(+6) = +6+7 = 1101_2$

$r_B(-5) = -5+7 = 0010_2$

Esempio 2: sottrazione

n=4, h – k = 7 – 5,

$r_B(+7) = 1110 +$

$r_B(-5) = 0010 =$

$\times 0000 \pmod{2^n}$

$+ 1001 =$ correzione

$1001 = r_B(+2)$

Rappresentazione biased

n=4

range $[i_{min}, i_{max}] = [-(2^{n-1}-1), 2^{n-1}] = [-7, 8]$

Bias $= 2^{n-1}-1 = 7$

n=4

$+5_{10}$				
+Bias				
= 12	1	1	0	0

-5_{10}				
+Bias				
= 2	0	0	1	0

prova

$r_B(+5_{10})=12$	1	1	0	0
$r_B(-5_{10})=2$	0	0	1	0
$r_B(+5_{10})+r_B(+5_{10})$	1	1	1	0
correzione	1	0	0	1
~~1~~	0	1	1	1
$r_B(0) \Leftrightarrow B=$	0	1	1	1

- La **rappresentazione per complemento a 2** è usata per memorizzare i numeri interi con segno.
- La **rappresentazione biased** è usata per il campo esponente di un numero reale floating-point.
- La **rappresentazione per segno e modulo** è usata per il campo mantissa di un numero reale floating-point.

Il **Sistema Aritmetico degli Interi (I)** di un computer usa la ***rappresentazione per complemento a 2*** dei numeri interi.

Interi nel linguaggio C:

il tipo `char`

rappresenta un intero su **n**=**8** bit (**1** byte)

range = $[-2^7, 2^7 - 1] = [-128, +127]$

il tipo `short int`

rappresenta un intero su **n**=**16** bit (**2** byte)

range = $[-2^{15}, 2^{15} - 1] = [-32768, +32767]$

il tipo `int`

rappresenta un intero su **n**=**32** bit (**4** byte)

range = $[-2^{31}, 2^{31} - 1] = [-2147483648, +2147483647]$

il tipo `long int`

rappresenta un intero su **n**=**64** bit (**8** byte)

indirizzi a 64 bit

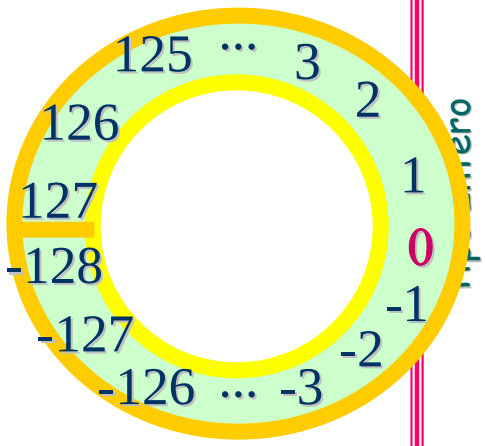
range = $[-2^{64}, 2^{64} - 1] = [\ldots]$

Quando si tenta di rappresentare un intero che non appartiene al range si dice che si è verificato un OVERFLOW d'intero (non è segnalato).

Esempio: sapendo che il tipo **char** rappresenta un intero su **n=8** bit

$$\textbf{range} = [-2^7, 2^7 - 1] = [-128, +127]$$

```
void main()
{ char c;
   c= 127; printf("+127 =  %+11d,\thex  =  %04x\n",c,c);
   c= 128; printf("+128 =  %+11d,\thex  =  %04x\n",c,c);
   c= 130; printf("+130 =  %+11d,\thex  =  %04x\n",c,c);
   c=-128; printf("-128 =  %+11d,\thex  =  %04x\n",c,c);
   c=-129; printf("-129 =  %+11d,\thex  =  %04x\n",c,c);
   c=-130; printf("-130 =  %+11d,\thex  =  %04x\n",c,c);}
```




```
+127  =      +127  hex = 007f
+128  =      -128  hex = ff80
+130  =      -126  hex = ff82
-128  =      -128  hex = ff80
-129  =      +127  hex = 007f
-130  =      +126  hex = 007e
```

$= i_{max}$

$> i_{max}$

$= i_{min}$

$< i_{min}$

L'overflow non è segnalato!

Il risultato (di tipo char) è ottenuto in aritmetica modulo 2^8

con gcc vers. 4.6.1

```c
#include <stdio.h>
int main()
{  char c;
    c= 127; printf("+127 =%+6d,\thex = %02hhx\n",c,c);
    c= 128; printf("+128 =%+6d,\thex = %02hhx\n",c,c);
    c= 130; printf("+130 =%+6d,\thex = %02hhx\n",c,c);
    c=-128; printf("-128 =%+6d,\thex = %02hhx\n",c,c);
    c=-129; printf("-129 =%+6d,\thex = %02hhx\n",c,c);
    c=-130; printf("-130 =%+6d,\thex = %02hhx\n",c,c);

return 0;
}
```

```
/home/rizzardi/Scrivania/ProgLab
+127 =  +127,   hex = 7f
+128 =  -128,   hex = 80
+130 =  -126,   hex = 82
-128 =  -128,   hex = 80
-129 =  +127,   hex = 7f
-130 =  +126,   hex = 7e

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.003 s
Press ENTER to continue.
```

Esempio

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
void main()
{short s; unsigned short u;
 printf("immetti signed short..");
 scanf("%hd",&s); u=s;
 printf("signed = %d\nunsigned = %d\n",s,u);
}
```

```
immetti signed short..-13
signed      = -13
unsigned    = 65523
```

?

Come spiegare i risultati?

È la rappresentazione per complemento a 2 di –13

```
65523+
   13=
-------
65536
```

È lo zero dell'aritmetica **mod. 2^{16}**

2^{16}

Il seguente programma [con C a 32 bit*] …

```
#include <stdio.h>
#include <math.h> /* eventualmente per usare pow(x,y) */
void main()
{
 int inp, inm; short snp, snm; long lnp, lnm;
/* assegna un valore alle variabili intere */
 scanf("%d",&lnp); /* oppure … lnp=pow(2,…)-…;*/
 lnm=-lnp; snp=lnp; snm=-snp; inp=lnp; inm=-inp;
 printf("(+)long  int = %+11d,\thex = %08x\n",lnp,lnp);
 printf("(-)long  int = %11d,\thex = %08x\n\n",lnm,lnm);
 printf("(+)short int = %+11d,\thex =     %04hx\n",
                                              snp,snp);
 printf("(-)short int = %11d,\thex =     %04hx\n\n",
                                              snm,snm);
 printf("(+)      int = %+11d,\thex = %08x\n",inp,inp);
 printf("(-)      int = %11d,\thex = %08x\n\n",inm,inm);
}
```

… produce

* C a 32 bit: long int coincide con int

Esempio 1: `pow(2,0)` $2^0=1$

```
(+)long  int =          +1,    hex =  00000001
(-)long  int =          -1,    hex =  ffffffff
(+)short int =          +1,    hex =      0001
(-)short int =          -1,    hex =      ffff
(+)      int =          +1,    hex =  00000001
(-)      int =          -1,    hex =  ffffffff
```

Esempio 2: `pow(2,5)` $2^5=32$

```
(+)long  int =         +32,    hex =  00000020
(-)long  int =         -32,    hex =  ffffffe0
(+)short int =         +32,    hex =      0020
(-)short int =         -32,    hex =      ffe0
(+)      int =         +32,    hex =  00000020
(-)      int =         -32,    hex =  ffffffe0
```

Esempio 3: pow(2,15)-1

```
(+)long  int =    +32767,   hex =  00007fff
(-)long  int =    -32767,   hex =  ffff8001
(+)short int =    +32767,   hex =      7fff
(-)short int =    -32767,   hex =      8001
(+)      int =    +32767,   hex =  00007fff
(-)      int =    -32767,   hex =  ffff8001
```

Esempio 4: pow(2,15)

```
(+)long  int =    +32768,   hex =  00008000
(-)long  int =    -32768,   hex =  ffff8000
(+)short int =    -32768,   hex =      8000
(-)short int =    -32768,   hex =      8000
(+)      int =    +32768,   hex =  00008000
(-)      int =    -32768,   hex =  ffff8000
```

overflow d'intero del tipo `short`

Esempio 5: pow(2,31)-1

```
(+)long  int =+2147483647,    hex =  7fffffff
(-)long  int =-2147483647,    hex =  80000001
(+)short int =          -1,   hex =      ffff
(-)short int =           1,   hex =      0001
(+)      int =+2147483647,    hex =  7fffffff
(-)      int =-2147483647,    hex =  80000001
```

Esempio 6: pow(2,31)

```
(+)long  int =-2147483648,    hex =  80000000
(-)long  int =-2147483648,    hex =  80000000
(+)short int =          +0,   hex =      0000
(-)short int =           0,   hex =      0000
(+)      int =-2147483648,    hex =  80000000
(-)      int =-2147483648,    hex =  80000000
```

overflow d'intero del tipo `int`

Esempio 7: pow(2,32)

```
(+)long  int =-2147483648,    hex =  80000000
(-)long  int =-2147483648,    hex =  80000000
(+)short int =        +0,     hex =      0000
(-)short int =         0,     hex =      0000
(+)      int =-2147483648,    hex =  80000000
(-)      int =-2147483648,    hex =  80000000
```

Esempio 8: pow(2,399)

```
(+)long  int =+2147483647,    hex =  7fffffff
(-)long  int =-2147483647,    hex =  80000001
(+)short int =        -1,     hex =      ffff
(-)short int =         1,     hex =      0001
(+)      int =+2147483647,    hex =  7fffffff
(-)      int =-2147483647,    hex =  80000001
```

overflow d'intero del tipo `int`

Esercizi

1

Scrivere una *function C* che, fissato il numero **n** di bit, calcoli la rappresentazione di un intero:

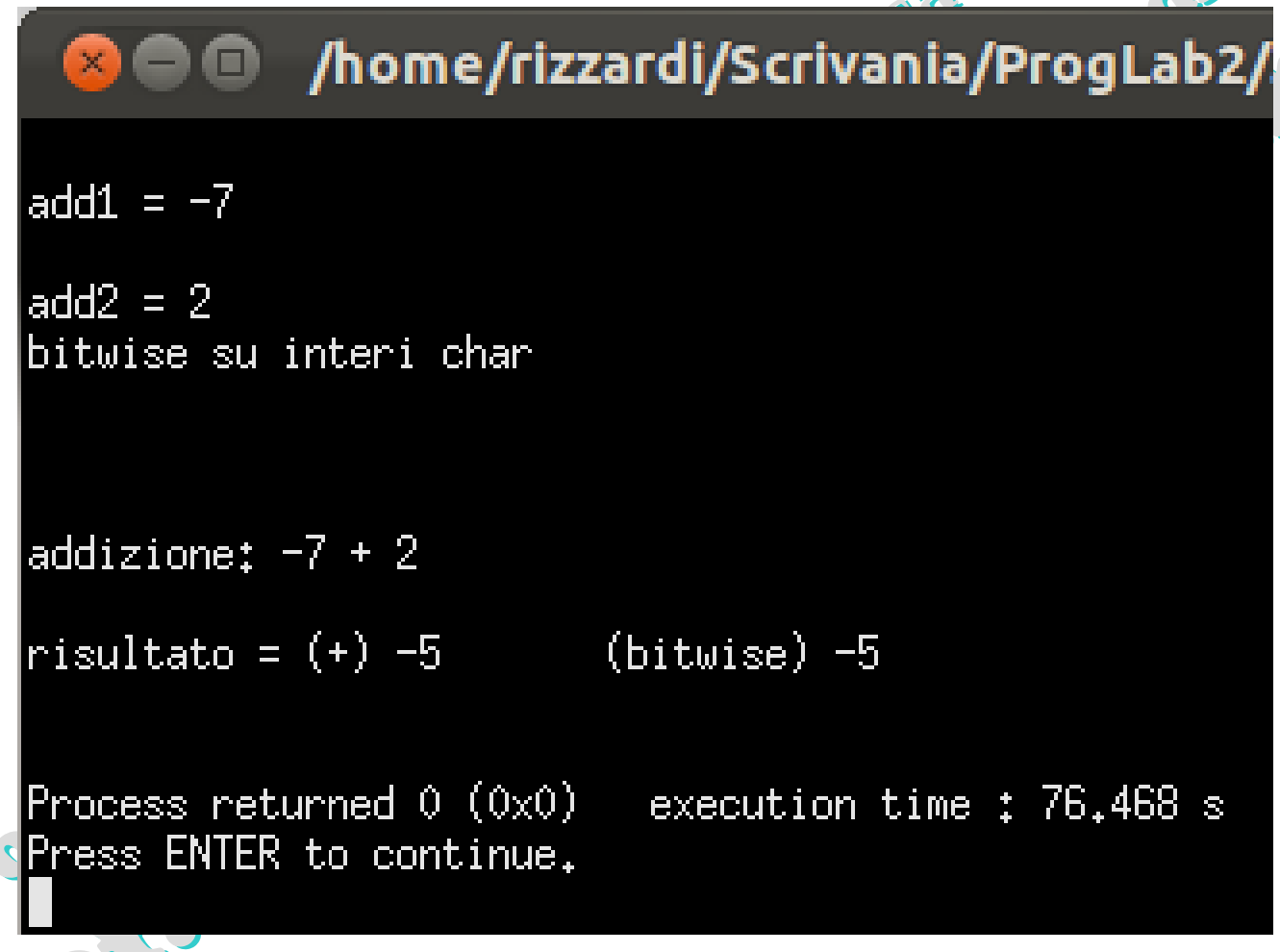
- per complemento a due (C2);
- biased.

2 Conoscendo la rappresentazione degli interi in C, riscrivere la *function C* (vers. 2) per l'addizione binaria di due interi mediante gli operatori bitwise a partire dall'algoritmo seguente:

Algoritmo "addizione binaria"

```
rip:=1;
while rip>0
      sum:=bitXOR(op1,op2);
      rip:=bitAND(op1,op2);
      rip:=leftSHIFT(rip,1);
      op1:=sum; op2:=rip;
endwhile
```

Se l'addizione binaria deve valere per tutti gli interi (interi positivi e negativi) rappresentati per complemento a 2, quale accorgimento va usato nella traduzione in *C* dell'algoritmo ... e perché.


/home/rizzardi/Scrivania/ProgLab2/
add1 = -7
add2 = 2
bitwise su interi char
addizione: -7 + 2
risultato = (+) -5 (bitwise) -5
Process returned 0 (0x0) execution time : 76.468 s
Press ENTER to continue.