声明

此文档是基于 **SparklingWind** 的《高中生学 FFT 算法》。本文可以当做对其的注解，并额外增加了雷德算法及其证明。

Something About FFT

Author Clown

复数的一些性质

1. $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

   证

   $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{(i\theta)n} = e^{(in)\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

   证毕

2. 令 $\mathbb{W}_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$，则 $\mathbb{W}_n^k(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ 为 1 的 n 个 n 次方根。

   证

   $$(\mathbb{W}_n^k)^n = (e^{\frac{2k\pi i}{n}})^n = e^{2k\pi i} = (e^{2\pi i})^k = 1^k = 1.$$

   证毕

3. 当 x 不被 n 整除时，$\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{W}_n^{xk} = 0$.

   证

   $$\because\ n \nmid x \Rightarrow \mathbb{W}_n^x \neq 1,\quad n \mid n \Rightarrow \mathbb{W}_n^n = 1 \Rightarrow \mathbb{W}_n^{xn} = 1.$$

   $$\therefore \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{W}_n^{xk} = \frac{\mathbb{W}_n^0(1-\mathbb{W}_n^{xn})}{1-\mathbb{W}_n^x} = \frac{1(1-1)}{1-\mathbb{W}_n^x} = 0.$$

   证毕

4. 消去律：$\mathbb{W}_{xn}^{xk} = \mathbb{W}_n^k$.

   证

   $$e^{\frac{2xk\pi i}{xn}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \mathbb{W}_n^k.$$

   证毕

5. $\mathbb{W}_n^{k+\frac{n}{2}} = \text{-}\mathbb{W}_n^k$.

   证

   $$\because\ \mathbb{W}_n^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{\frac{n}{2}\times 2\pi i}{n}} = e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = \text{-}1.$$

   $$\therefore\ \mathbb{W}_n^{k+\frac{n}{2}} = \mathbb{W}_n^k\mathbb{W}_n^{\frac{n}{2}} = \text{-}\mathbb{W}_n^k.$$

   证毕

正文

对于一个 $n-1$ 次多项式：$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$.

可以用 $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ 来表示这个多项式。这种表示法称为**系数表示法**。

如果 $a_{n-1} \neq 0$，则称 n 为该多项式的严格次数界。

如果代 $\{x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1}\}$ 入多项式，可以求出一些具体的值：

$$\left\{ \big(x_0, f(x_0)\big),\ \big(x_1, f(x_1)\big), \ldots,\ \big(x_{n-1}, f(x_{n-1})\big) \right\} \tag{$I-1$}$$

可以用这些点对（$I-1$）来表示这个多项式，这种表示法称为**点值表示法**。

已知两个多项式：$\begin{cases} \mathbb{A}(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}. \\ \mathbb{B}(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}. \end{cases}$

我们想要得到这两个多项式的乘积 $\mathbb{C}(x)$，即：

$$\mathbb{C}(x) = \mathbb{A}(x) \times \mathbb{B}(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_{2n-2}x^{2n-2}.$$

其中：$c_i = \sum_{k=0} a_k \times b_{i-k}, \quad 0 \leqslant i \leqslant 2n-2, a_t = b_t = 0, \ (t \geqslant n)$ 。

显然，如果要用系数表示法求 $\mathbb{C}(x)$，则需要做 $\binom{2n}{2}$ 次加法和乘法。但是，如果我们用点值表示法来完成这个计算，显然仅需做 $2n-1$ 次乘法。这个过程称为 DFT。

约定：$\mathbb{W}_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$。

令 $x_r = \mathbb{W}_{2n}^r = e^{\frac{r\pi i}{n}}$，并将 $n-1$ 次多项式 $\mathbb{A}(x)$ 扩充到 $2n-1$ 次。即：

$$\mathbb{A}(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n + \ldots + a_{2n-1}x^{2n-1}, \quad a_t = 0, \ (t \geqslant n)$$

并令：$\begin{cases} \mathbb{A}'(x) = a_0 + a_2x + a_4x^2 + \ldots + a_{2n-4}x^{n-2} + a_{2n-2}x^{n-1} \\ \mathbb{A}''(x) = a_1 + a_3x + a_5x^2 + \ldots + a_{2n-3}x^{n-2} + a_{2n-1}x^{n-1} \end{cases}$

那么：

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(x_r) &= a_0 + a_1x_r + \ldots + a_{n-1}x_r^{n-1} + a_nx_r^n + \ldots + a_{2n-1}x_r^{2n-1} \\ &= \left(a_0x_r^0 + a_2x_r^2 + \ldots + a_{2n-2}x_r^{2n-2}\right) + x_r\left(a_1x_r^0 + a_3x_r^2 + \ldots + a_{2n-1}x_r^{2n-2}\right) \\ &= \left(a_0(x_r^2)^0 + a_2(x_r^2)^1 + \ldots + a_{2n-2}(x_r^2)^{n-1}\right) + x_r\left(a_1(x_r^2)^0 + a_3(x_r^2)^1 + \ldots + a_{2n-1}(x_r^2)^{n-1}\right) \\ &= \mathbb{A}'(x_r^2) + x_r\mathbb{A}''(x_r^2) \\ &= \mathbb{A}'(\mathbb{W}_{2n}^{2r}) + \mathbb{W}_{2n}^r\mathbb{A}''(\mathbb{W}_{2n}^{2r}) \\ &= \mathbb{A}'(\mathbb{W}_n^r) + \mathbb{W}_{2n}^r\mathbb{A}''(\mathbb{W}_n^r) \qquad \text{【复数的性质4，消去律】} \end{aligned}$$

$\because$ 当 $r \geqslant n$ 时，$\mathbb{W}_{2n}^r = \mathbb{W}_{2n}^{(r-n)+n} = -\mathbb{W}_{2n}^{r-n}$，$\mathbb{W}_n^r = \mathbb{W}_n^{r-n+n} = \mathbb{W}_n^{r-n}$ 【复数的性质5】

$\therefore$ 当 $r < n$ 时，令 $t = r$， 则 $\mathbb{A}(x_r) = \mathbb{A}(\mathbb{W}_{2n}^r) = \mathbb{A}'(\mathbb{W}_n^t) + \mathbb{W}_{2n}^t\mathbb{A}''(\mathbb{W}_n^t)$

当 $r \geqslant n$ 时，令 $t = r-n$，则 $\mathbb{A}(x_r) = \mathbb{A}(\mathbb{W}_{2n}^r) = \mathbb{A}'(\mathbb{W}_n^t) - \mathbb{W}_{2n}^t\mathbb{A}''(\mathbb{W}_n^t)$

也就是说：

$$\mathbb{A}(x_r) = \mathbb{A}(\mathbb{W}_{2n}^r) = \begin{cases} \mathbb{A}'(\mathbb{W}_n^r) + \mathbb{W}_{2n}^r \mathbb{A}''(\mathbb{W}_n^r) & (r < n) \\ \mathbb{A}'(\mathbb{W}_n^{r-n}) - \mathbb{W}_{2n}^{r-n} \mathbb{A}''(\mathbb{W}_n^{r-n}) & (r \geqslant n) \end{cases}$$

据此，我们就可以在 $O(nlogn)$ 的时间内将系数表示法转化为点值表示法，具体做法看如下伪代码：

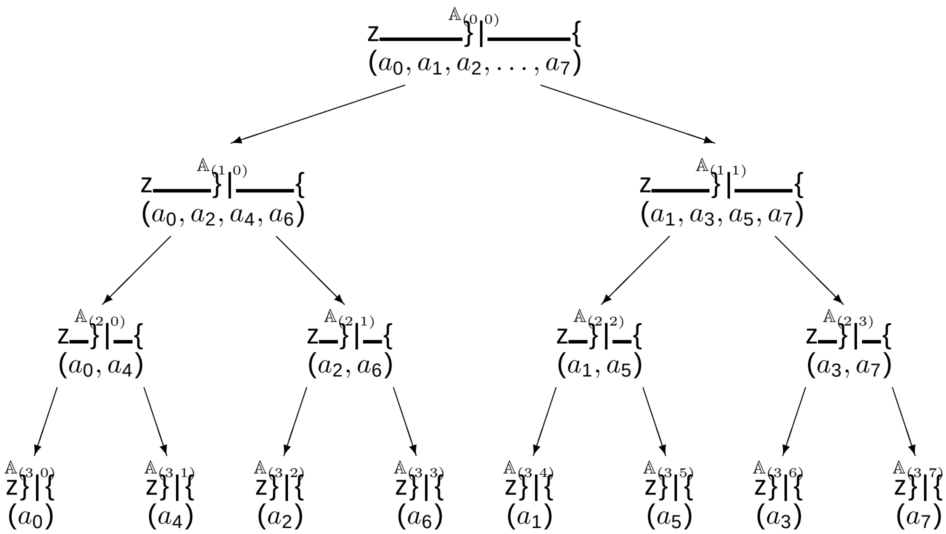
- row_1 : *begin*
- row_2 : $DFT\ 2n, \{a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}\}$
- row_3 : $if\ n = 1\ then\ return\ a_0$
- row_4 : $\{\mathbb{A}'(x_0), \mathbb{A}'(x_1), \ldots, \mathbb{A}'(x_{n-1})\} \leftarrow DFT\ n, \{a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{2n-2}\}$
- row_5 : $\{\mathbb{A}''(x_0), \mathbb{A}''(x_1), \ldots, \mathbb{A}''(x_{n-1})\} \leftarrow DFT\ n, \{a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2n-1}\}$
- row_6 : $for\ t = 0\ to\ n-1$
- row_7 : $\mathbb{A}(x_t) = \mathbb{A}'(x_t) + \mathbb{W}_{2n}^t \mathbb{A}''(x_t)$
- row_8 : $\mathbb{A}(x_t + n) = \mathbb{A}'(x_t) - \mathbb{W}_{2n}^t \mathbb{A}''(x_t)$
- row_9 : $return\ \ \mathbb{A}(x_0), \mathbb{A}(x_1), \mathbb{A}(x_2), \ldots, \mathbb{A}(x_{2n-1})$
- row_{10} : *end*

有了前面的分析，伪码一目了然。

虽然它的复杂度是 $O(nlogn)$ 的，但是不难发现，在递归前需要先将奇数项和偶数项剥离开来，而这需要 $O(n)$ 的辅助空间。

为了进一步改进空间复杂度，下面引进**雷德算法**。

为了节省辅助空间的开销，我们不得不得到整个算法的实际计算顺序。为了更直观的说明，我画了一个 $n = 8$ 时的简图。



因此我们的实际计算顺序是：

- $Step_1$: $\begin{array}{l}(A_{(3,0)}, A_{(3,1)}) \Rightarrow A_{(2,0)}, \quad (A_{(3,2)}, A_{(3,3)}) \Rightarrow A_{(2,1)}, \\ (A_{(3,4)}, A_{(3,5)}) \Rightarrow A_{(2,2)}, \quad (A_{(3,6)}, A_{(3,7)}) \Rightarrow A_{(2,3)}.\end{array}$

- $Step_2$: $(A_{(2,0)}, A_{(2,1)}) \Rightarrow A_{(1,0)}, \quad (A_{(2,2)}, A_{(2,3)}) \Rightarrow A_{(1,1)}.$

- $Step_3$: $(A_{(1,0)}, A_{(1,1)}) \Rightarrow A_{(0,0)}.$

容易发现，如果我们能将原来的系数序列变成递归到最底层时的系数序列（上图中，则需将 $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ 变成 $\{a_0, a_4, a_2, a_6, a_1, a_5, a_3, a_7\}$ ），那么，我们就可以将 DFT 过程写成迭代的方式，从而免去辅助空间的开销。

不妨假设 $a_r = 2^p \times b_p + 2^{p-1} \times b_{p-1} + \cdots + 2^0 \times b_0$ 在递归最底层的
序列中第 $a'_r = 2^p \times b'_p + 2^{p-1} \times b'_{p-1} + \cdots + 2^0 \times b'_0$ 个位置（从左往右，从 0 计起）。
其中，$2^{p+1} = n$; $b_i, b'_i \in \{0, 1\}$。
我们来模拟下递归过程。

由上图，容易知 a'_r 必然是根的
左子树中的叶子节点，故 $b'_p = 0$

$$b_0 = 1? \xrightarrow[\text{(Y) } b'_p = 1]{\text{(N) } b'_p = 0} b_1 = 1? \xrightarrow[\text{(Y) } b'_{p-1} = 1]{\text{(N) } b'_{p-1} = 0} \cdots \; b_p = 1? \xrightarrow[\text{(Y) } b'_0 = 1]{\text{(N) } b'_0 = 0}$$

类似地，容易知 a'_r 必然是根的
右子树中的叶子节点，故 $b'_p = 1$

不难发现，$b'_i = b_{p-i}$。

下面考虑该算法的实现。
先考虑这样的一个事实：当一个二进制数 x 自增 2^0 时，会不断试图从右往左进位。
注意到，b'_i 与 b_{p-i} 存在一一对应关系（具体地，$b'_i = b_{p-i}$ ）。不难想到，当 a_r 自增 1 时，让 a'_r 自增 2^p 并试图从左往右进位，得到的数 $a''_r = a'_{r+1}$。证明略。
为了更深刻理解这一算法，仅以 $n = 8$ （ $2^{p+1} = n$ ）为例模仿该过程：
为方便描述，记 $a'_r = a_{s(r)}$.

$$\begin{array}{llll}
0 + 2^0 \text{ 往左进位} \Rightarrow 1, & s(0+1) + 2^p \text{ 往右进位} \Rightarrow 4, & \Rightarrow s(1) & = 4; \\
1 + 2^0 \text{ 往左进位} \Rightarrow 2, & s(1+1) + 2^p \text{ 往右进位} \Rightarrow 2, & \Rightarrow s(2) & = 2; \\
2 + 2^0 \text{ 往左进位} \Rightarrow 3, & s(2+1) + 2^p \text{ 往右进位} \Rightarrow 6, & \Rightarrow s(3) & = 6; \\
3 + 2^0 \text{ 往左进位} \Rightarrow 4, & s(3+1) + 2^p \text{ 往右进位} \Rightarrow 1, & \Rightarrow s(4) & = 1; \\
4 + 2^0 \text{ 往左进位} \Rightarrow 5, & s(4+1) + 2^p \text{ 往右进位} \Rightarrow 5, & \Rightarrow s(5) & = 5; \\
5 + 2^0 \text{ 往左进位} \Rightarrow 6, & s(5+1) + 2^p \text{ 往右进位} \Rightarrow 3, & \Rightarrow s(6) & = 3; \\
6 + 2^0 \text{ 往左进位} \Rightarrow 7, & s(6+1) + 2^p \text{ 往右进位} \Rightarrow 7, & \Rightarrow s(7) & = 7.
\end{array}$$

代码如下：

```
template<class T> static void Rader(complex<T>* F, int N) {
    int n = N>>1, bit = 1, tib = n, arg;
    for(; bit < N; ++bit, tib ^= arg) {
        if( bit < tib ) swap(F[bit], F[tib]);
```

```
            for(arg=n; arg & tib; arg >>= 1) tib ^= arg;
        }
    }
```

之后，迭代版的 DFT 代码也就不难写出了。

```
    template<class T> static void Transform(complex<T>* F, int N, int rev) {
        Rader(F, N);
        for(int h=2; h <= N; h <<= 1) {
            const complex<T> wn(cos(rev*2*PI / h), sin(rev*2*PI / h));
            int H = h >> 1;
            for(int i=0; i < N; i += h) {
                complex<T> w(1, 0);
                int j = i, k = i + H;
                for(; j < k; ++j) {
                    complex<T> u = F[j];
                    complex<T> v = w*F[j+H];
                    F[j] = u + v;
                    F[j+H] = u - v;
                    w = w * wn;
                }
            }
        }
    }
```

那么，我们接下来的工作就是要将点值表示法，转化成系数表示法。

其实 DFT 过程我们可以看做是作矩阵乘法，如下图：

$$\begin{bmatrix} 1 & (\mathbb{W}_n^0)^1 & (\mathbb{W}_n^0)^2 & \cdots & (\mathbb{W}_n^0)^{n-1} \\ 1 & (\mathbb{W}_n^1)^1 & (\mathbb{W}_n^1)^2 & \cdots & (\mathbb{W}_n^1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (\mathbb{W}_n^{n-1})^1 & (\mathbb{W}_n^{n-1})^2 & \cdots & (\mathbb{W}_n^{n-1})^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}(\mathbb{W}_n^0) \\ \mathbb{A}(\mathbb{W}_n^1) \\ \vdots \\ \mathbb{A}(\mathbb{W}_n^{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\text{如果我们令系数矩阵 } \mathbb{P} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}\text{，令值矩阵 } \mathbb{R} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}(\mathbb{W}_n^0) \\ \mathbb{A}(\mathbb{W}_n^1) \\ \vdots \\ \mathbb{A}(\mathbb{W}_n^{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\text{再令变量矩阵 } \mathbb{Q} = \begin{bmatrix} 1 & (\mathbb{W}_n^0)^1 & (\mathbb{W}_n^0)^2 & \cdots & (\mathbb{W}_n^0)^{n-1} \\ 1 & (\mathbb{W}_n^1)^1 & (\mathbb{W}_n^1)^2 & \cdots & (\mathbb{W}_n^1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (\mathbb{W}_n^{n-1})^1 & (\mathbb{W}_n^{n-1})^2 & \cdots & (\mathbb{W}_n^{n-1})^{n-1} \end{bmatrix}$$

则有：$\mathbb{QP} = \mathbb{R}$。如果能找到 $\mathbb{Q}$ 的逆矩阵 $\mathbb{Q}^{-1}$，那么 $\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{R} = \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{QP} = \mathbb{IP} = \mathbb{P}$（$\mathbb{I}$ 为单位矩阵），即完成了点值表示法向系数表示法的转化。这个过程称之为 IDFT。

其实 $\mathbb{Q}^{-1}$ 很特殊：$\mathbb{Q}_{i,j}^{-1} = \dfrac{1}{n\mathbb{Q}_{i,j}}$。其中，$(i,j)$ 为矩阵中第 i 行，第 j 列的元素。

证

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{Q}_{i,k}\mathbb{Q}^{-1}_{k,j}=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{W}_n^{ik}\times\frac{1}{n}\times\mathbb{W}_n^{-jk}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{W}_n^{(i-j)k}=\begin{cases}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{W}_n^{0}=\frac{1}{n}\times n=1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\text{【复数的性质4】}\end{cases}$$

因此， $\mathbb{Q}\mathbb{Q}^{-1}=\mathbb{I}$

证毕

因此，IDFT 过程可以看做作下图中的矩阵乘法：

$$\frac{1}{n}\times\begin{bmatrix}1 & (\mathbb{W}_n^0)^{-1} & (\mathbb{W}_n^0)^{-2} & \cdots & (\mathbb{W}_n^0)^{-(n-1)}\\ 1 & (\mathbb{W}_n^1)^{-1} & (\mathbb{W}_n^1)^{-2} & \cdots & (\mathbb{W}_n^1)^{-(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & (\mathbb{W}_n^{n-1})^{-1} & (\mathbb{W}_n^{n-1})^{-2} & \cdots & (\mathbb{W}_n^{n-1})^{-(n-1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{A}(\mathbb{W}_n^0)\\ \mathbb{A}(\mathbb{W}_n^1)\\ \vdots\\ \mathbb{A}(\mathbb{W}_n^{n-1})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{n-1}\end{bmatrix}$$

对比 DFT 过程，不难发现，我们直接套用 DFT 的算法框架，即可做 IDFT，那么 IDFT 过程的复杂度也应该是 $O(nlogn)$ 的。

另外，值得一提的是，对于两个数的乘法，我们没必要非得要按十进制来运算，实际应用时可以采用一百进制、一万进制来运算，会计算的更快（在精度允许的前提下）。

另外一个需要**注意**的地方是，尽管前面一直没说，但是要求做 FFT 时，N 必须是 2 的幂次。

特别提醒一下输出时，注意一下前导零。。。。。就此，问题完美解决!!

下面附上 hoj10004 的AC代码。。。采用的是一万进制。。。。。

```
#include <cmath>
#include <cstdio>
#include <complex>
#include <cstdlib>
#include <cstring>
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;

struct FFT {
public:
    static const int BIT = 4;
    static const int BASE = (int)1e4;
    static const long double PI;
private:
    template<class T> static void Rader(complex<T>* F, int N) {
        int n = N>>1, bit = 1, tib = n, arg;
        for(; bit < N; ++bit, tib ^= arg) {
            if( bit < tib ) swap(F[bit], F[tib]);
            for(arg=n; arg & tib; arg >>= 1) tib ^= arg;
        }
```

```
    }

    template<class T> static void Transform(complex<T>* F, int N, int rev) {
        Rader(F, N);
        for(int h=2; h <= N; h <<= 1) {
            const complex<T> wn(cos(rev*2*PI / h), sin(rev*2*PI / h));
            int H = h >> 1;
            for(int i=0; i < N; i += h) {
                complex<T> w(1, 0);
                int j = i, k = i + H;
                for(; j < k; ++j) {
                    complex<T> u = F[j];
                    complex<T> v = w*F[j+H];
                    F[j] = u + v;
                    F[j+H] = u - v;
                    w = w * wn;
                }
            }
        }
    }
public:
    template<class T> static void DFT(complex<T>* F, int N) {
        Transform(F, N, 1);
    }
    template<class T> static void IDFT(complex<T>* F, int N) {
        Transform(F, N, -1);
    }
    template<class T> static int Convert(complex<T>* F, char* s) {
        int len = strlen(s), rlen = len;
        for(; len >= BIT; len -= BIT) {
            int arg = 0;
            for(int i=len-BIT; i < len; ++i) arg = arg*10 + s[i]-'0';
            *F++ = complex<T>(arg, 0);
        }
        if( len ) {
            int arg = 0;
            for(int i=0; i < len; ++i) arg = arg*10 + s[i]-'0';
            *F++ = complex<T>(arg, 0);
        }
        return rlen;
    }
};

const long double FFT:: PI = acos(-1.0);

typedef unsigned __int64 LL;
const int MAXN = 1<<20;
const int MAXS = (int)1e6 + 10;
int T_T, N, ans[MAXN];
char in[MAXS];
```

```
complex<long double> F[2][MAXN];

void work() {
    scanf("%d", &T_T);
    while( T_T-- ) {
        memset(F, 0, sizeof F);
        scanf("%s", in); N = FFT::Convert(F[0], in);
        scanf("%s", in); N = max(N, FFT::Convert(F[1], in));
        int len = (N-1) / FFT::BIT + 1;
        for(N=1; N < len; N <<= 1); N <<= 1;

        FFT::DFT(F[0], N);
        FFT::DFT(F[1], N);
        for(int i=0; i < N; ++i) F[0][i] *= F[1][i];
        FFT::IDFT(F[0], N);
        for(int i=0; i < N; ++i) F[0][i] /= complex<long double>(N, 0);
        for(int i=0; i < N; ++i) {
            LL arg = (LL) round(F[0][i].real());
            ans[i] = arg % FFT::BASE;
            F[0][i+1] += complex<long double>(arg/FFT::BASE, 0);
        }

        while( N > 1 && !ans[N-1] ) --N;
        printf("%d", ans[--N]);
        while( N >= 1 ) printf("%04d", ans[--N]);
        putchar('\n');
    }
}

int main()
{
    work();
    return 0;
}
```

温馨提示，复制代码会有奇怪的字符以致编译不过，手打吧亲。。。。

青春是低吟浅唱，你是我学不会的歌。

———— *by* 笑着哭的小丑