Lecture 2 Assignment Extra

Nguyen Quang Huy 07/04/2020

P2.5

Với ma trận A_{m*n} và ma trận đường chéo P_{n*n} có đường chéo bằng $\{p_1, p_2, ...p_n\}$ ta có:

$$A * P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} * p_1 & a_{12} * p_2 & \dots & a_{1n} * p_n \\ a_{21} * p_1 & a_{22} * p_2 & \dots & a_{2n} * p_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} * p_1 & a_{m2} * p_2 & \dots & a_{mn} * p_n \end{bmatrix}$$

Tương tự, với ma trận A_{m*n} và ma trận đường chéo P_{m*m} có đường chéo bằng $\{p_1, p_2, ...p_m\}$ ta có:

$$P * A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_m \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} * p_1 & a_{12} * p_1 & \dots & a_{1n} * p_1 \\ a_{21} * p_2 & a_{22} * p_2 & \dots & a_{2n} * p_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} * p_m & a_{m2} * p_m & \dots & a_{mn} * p_m \end{bmatrix}$$

Nhận xét: phép nhân ma trận $A_{m*n} * P_{n*n}$ scale mỗi cột của ma trận A với hệ số p_i, phép nhân ma trận $P_{m*m} * A_{m*n}$ scale mỗi hàng của ma trận A với hệ số p_i

P2.6

Với $A \in R^{m*n}, B \in R^{n*p}$, ta có:

$$AB = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} (j_1) & (j_2) \end{array} \\ \begin{array}{c} (i_1) \\ (i_2) \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \end{array} * \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} (l_1) & (l_2) \end{array} \\ \begin{array}{c} (k_1) \\ (k_2) \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] \end{array}$$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} (l_1) & (l_2) \end{array} \\ \begin{array}{c} (i_1) \\ (i_2) \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} A_{11} * B_{11} + A_{12} * B_{21} & A_{11} * B_{12} + A_{12} * B_{22} \\ \hline A_{21} * B_{11} + A_{22} * B_{21} & A_{21} * B_{12} + A_{22} * B_{22} \end{array}\right] \end{array}$$

Nhận xét:
Để thực hiện phép nhân ma trận, các kích thước của các ma trận con phải thỏa mãn:

- $i_1 + i_2 = m$, $j_1 + j_2 = n$
- $k_1 + k_2 = n$, $l_1 + l_2 = p$
- $j_1 = k_1$, $j_2 = k_2$

P2.7

Trong không gian 2D:

$$ReflectOrigin() * Translate(20, 10) * Rotate(30^o) = \begin{bmatrix} -cos(30^o) & -sin(30^o) & -20 \\ sin(30^o) & -cos(30^o) & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trong không gian 3D:

$$ReflectOrigin() * Translate(20, 10, 0) * RotateZ(30^o) = \begin{bmatrix} -cos(30^o) & -sin(30^o) & 0 & -20 \\ sin(30^o) & -cos(30^o) & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Code link here
Gif P2.7.1
Gif P2.7.2

P2.8

Để giảm chiều dữ liệu: $\bar{z} \xrightarrow{A} z = (1, w_1, w_2, ..w_k)^T$ thì ma trận $A_{(k+1)*(n+1)}$ có dạng $A = \left[\bar{I}_{(k+1)*(k+1)} \,\middle|\, \bar{0}_{(k+1)*(n-k)}\right]$

$$A * z = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] * \begin{bmatrix} 1 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix}$$

P2.9

Xét ma trận $A \in R^{m*n}$: Với mọi x thuộc Ker(A), ta có $A * x = \bar{0}$
$\rightarrow A^T * A * x = \bar{0}$
$\rightarrow x \in Ker(A^T * A)$ *(1)*
Với mọi x thuộc $Ker(A^T * A)$, ta có $A^T * A * x = \bar{0}$

$\rightarrow x^T * A^T * A * x = \bar{0}$
$\rightarrow (A * x)^T * A * x = \bar{0}$
$\rightarrow A * x = \bar{0}$
$\rightarrow x \in Ker(A)$ *(2)*
Từ (1) và (2) ta có $Ker(A^T * A) = Ker(A)$
$\rightarrow Nullity(A^T * A) = Nullity(A)$
Mặt khác ta có $A \in R^{m*n}$ và $A^T * A \in R^{n*n}$
$\rightarrow n - Nullity(A^T * A) = n - Nullity(A)$ hay $Rank(A^T * A) = Rank(A)$
Chứng minh tương tự ta có $Rank(A * A^T) = Rank(A^T)$
Theo kết quả P2.11: $Rank(A) = Rank(A^T)$
$\rightarrow Rank(A^T * A) = Rank(A) = Rank(A^T) = Rank(A * A^T)$

P2.10

Chứng minh $(A * B * C)^{-1} = C^{-1} * B^{-1} * A^{-1}$

Ta có $(A * B * C)^{-1} * (A * B * C) = I$ và $C^{-1} * B^{-1} * A^{-1} * A * B * C = I$
Suy ra $(A * B * C)^{-1} * (A * B * C) = C^{-1} * B^{-1} * A^{-1} * A * B * C$
$\rightarrow (A * B * C)^{-1} * A * B * C * C^{-1} * B^{-1} * A^{-1} = C^{-1} * B^{-1} * A^{-1} * A * B * C * C^{-1} * B^{-1} * A^{-1}$
$\rightarrow (A * B * C)^{-1} = C^{-1} * B^{-1} * A^{-1}$

Chứng minh $A^{-1^T} = A^{T^{-1}} := A^{-T}$

Ta có: $A^{T^{-1}} * A^T = I$ và $A^{-1^T} * A^T = (A * A^{-1})^T = I^T = I$
$\rightarrow A^{T^{-1}} * A^T = A^{-1^T} * A^T$
$\rightarrow A^{T^{-1}} * A^T * A^{T^{-1}} = A^{-1^T} * A^T * A^{T^{-1}}$
$\rightarrow A^{T^{-1}} = A^{-1^T}$

P2.11

Chứng minh $Rank(A) < min(m, n)$

Xét ma trận A_{m*n}, ta có $Rank(A) = Dim(img(A))$ với $img(A) = \{x | A * x ! = \bar{0}, x \in R^n\}$.
Do $img(A) \subseteq R^n \rightarrow Rank(A) <= n$ *(1)*
Do $img(A) = span(a_1, a_2, ..a_m)$ với a_i là hàng i của A $\rightarrow Rank(A) <= m$ *(2)*
Từ (1) và (2) $\rightarrow Rank(A) < min(m, n)$
Tương tự cho $Rank(A^T) < min(m, n)$

Chứng minh $Rank(A) = Rank(A^T)$

Điều này tương đương với việc chứng minh$dim(Col(A)) = dim(Row(A)$
Gọi $B = b_1, b_2, ...b_p$ với $u_i \in R^m$ là basis vector của Col(A)
Ta có $A = B_{m*p} * W_{p*n}$.

Do mỗi hàng của A đều là tổ hợp tuyến tính của p vector là các hàng của W

$\rightarrow Row(A) \subseteq Span(w_1, w_2..w_p)$ với w_i là hàng i của W

$\rightarrow Dim(Row(A)) <= Dim(Col(A))$

Tương tự $\rightarrow Dim(Row(A)) >= Dim(Col(A))$

$\rightarrow Dim(Row(A)) = Dim(Col(A))$