1. 针对如下概率图模型

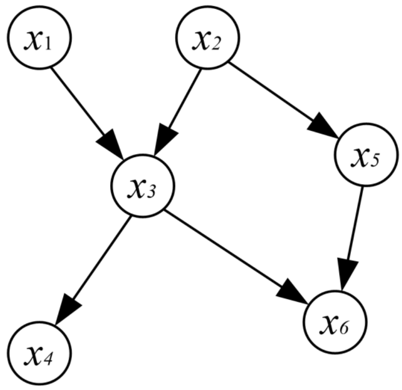

图 1: Question1-概率图模型

1.1 试写出如下有向图模型对应的联合概率分布函数;

由有向图中的连接关系可知, 联合概率分布函数为:

$$p\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\right)=p\left(x_1\right)p\left(x_2\right)p\left(x_3\mid x_1,x_2\right)p\left(x_4\mid x_3\right)p\left(x_5\mid x_2\right)p\left(x_6\mid x_3,x_5\right) \tag{1}$$

1.2 试根据 D-separation 定理, 判断随机变量 x_1 与 x_6 是否独立?

从图中可知, $x_1\rightarrow x_3\rightarrow x_6$ 是 head-to-tail 基础结构, 且结点未存在堵塞. 因此根据 D-separation 定理可知, 随机变量 x_1 与 x_6 不独立.

1.3 试根据 D-separation 定理, 判断随机变量 x_1 与 x_5 是否独立? 并给出公式证明;

x_1 和 x_5 的两条路径分别为 $x_1\rightarrow x_3\rightarrow x_6\leftarrow x_5$ 和 $x_1\rightarrow x_3\leftarrow x_2\rightarrow x_5$. 两条路径中都包含 head-to-head 结点, 且顶点解 $C=\emptyset$, 因此根据 D-separation 定理可知, 随机变量 x_1 与 x_5 独立.

证明 (本文以离散变量的推导为例, 连续随机变量只需将 $\sum$ 改为 $\int$ 即可):

$$
\begin{aligned}
p(x_1,x_5) &= \sum_{x_2,x_3,x_4,x_6} p(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \\
&= \sum_{x_2,x_3,x_4,x_6} p(x_1)\,p(x_2)\,p(x_3 \mid x_1,x_2)\,p(x_4 \mid x_3)\,p(x_5 \mid x_2)\,p(x_6 \mid x_3,x_5) \\
&= \sum_{x_2,x_3,x_4,x_6} p(x_1)\,p(x_5)\,p(x_3 \mid x_1,x_2)\,p(x_4 \mid x_3)\,p(x_2 \mid x_5)\,p(x_6 \mid x_3,x_5) \\
&= p(x_1)\,p(x_5) \sum_{x_2,x_3,x_4} \left[p(x_3 \mid x_1,x_2)\,p(x_4 \mid x_3)\,p(x_2 \mid x_5) \sum_{x_6} p(x_6 \mid x_3,x_5) \right] \\
&= p(x_1)\,p(x_5) \sum_{x_2,x_3,x_4} p(x_3 \mid x_1,x_2)\,p(x_4 \mid x_3)\,p(x_2 \mid x_5) \\
&= p(x_1)\,p(x_5) \sum_{x_2,x_3} \left[p(x_3 \mid x_1,x_2)\,p(x_2 \mid x_5) \sum_{x_4} p(x_4 \mid x_3) \right] \\
&= p(x_1)\,p(x_5) \sum_{x_2} \left[p(x_2 \mid x_5) \sum_{x_3} p(x_3 \mid x_1,x_2) \right] \\
&= p(x_1)\,p(x_5)
\end{aligned}
$$

由此可得, 随机变量 x_1 与 x_5 独立.

1.4 试根据 D-separation 定理, 判断随机变量 x_1 与 x_5 在给定 x_4 时是否条件独立?

x_1 和 x_5 的其中一条路径为 $x_1 \to x_3 \leftarrow x_2 \to x_5$, x_3 为 head-to-head 结点, 但后代结点 x_4 在顶点集 C 中, 而 x_2 为 tail-to-tail 结点, 且不位于顶点集 C 中, 因此根据 D-separation 定理, 该路径未被阻塞. 因此随机变量 x_1 与 x_5 在给定 x_4 时不条件独立.

2. 针对如下概率图模型, 试将该有向图转换成因子图, 并给出各因子结点对应的因子. 利用 sum-product 算法计算 $p(x_3)$ (要求写出消息传递的具体步骤)

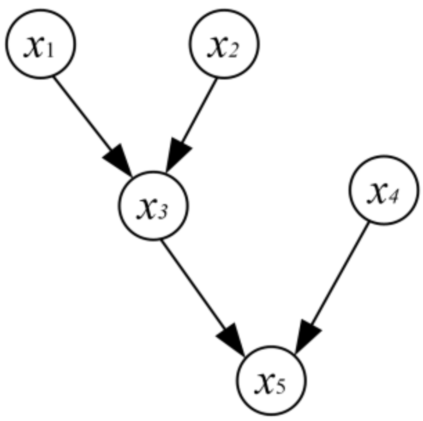

图 2: Question2-概率图模型

该有向图可以转为如下因子图 (为了便于后续分析, 以 x_3 作为根节点):

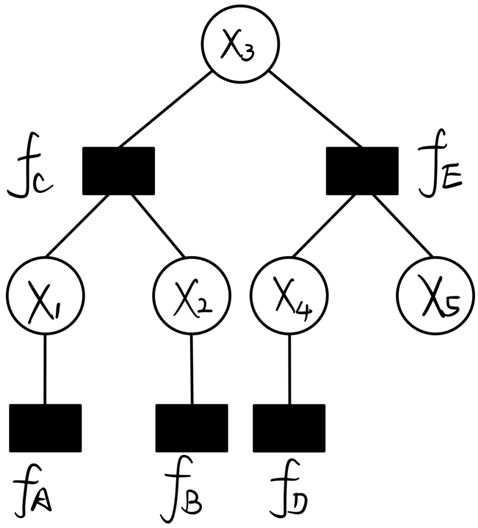

图 3: Question2-因子图模型

从有向图中可知:

$$p\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\right)=p\left(x_1\right) p\left(x_2\right) p\left(x_3 \mid x_1, x_2\right) p\left(x_4\right) p\left(x_5 \mid x_3, x_4\right)$$

从因子图中可知:

$$p\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\right)=f_a\left(x_1\right) f_b\left(x_2\right) f_c\left(x_1, x_2, x_3\right) f_d\left(x_4\right) f_e\left(x_3, x_4, x_5\right)$$

两者对照可得:

$$\begin{aligned}
f_a\left(x_1\right) &= p\left(x_1\right), \\
f_b\left(x_2\right) &= p\left(x_2\right), \\
f_c\left(x_1, x_2, x_3\right) &= p\left(x_3 \mid x_1, x_2\right), \\
f_d\left(x_4\right) &= p\left(x_4\right), \\
f_e\left(x_3, x_4, x_5\right) &= p\left(x_5 \mid x_3, x_4\right).
\end{aligned}$$

利用 sum-product 算法计算 $p(x_3)$:

第一步:

$$\begin{aligned}
\mu_{f_A \rightarrow x_1}\left(x_1\right) &= f_A\left(x_1\right) \\
\mu_{f_B \rightarrow x_2}\left(x_2\right) &= f_B\left(x_2\right) \\
\mu_{f_D \rightarrow x_4}\left(x_4\right) &= f_D\left(x_4\right) \\
\mu_{x_5 \rightarrow f_E}\left(x_5\right) &= 1
\end{aligned}$$

第二步:

$$\begin{aligned}
\mu_{x_1 \rightarrow f_C}\left(x_1\right) &= \mu_{f_A \rightarrow x_1}\left(x_1\right)=f_A\left(x_1\right) \\
\mu_{x_2 \rightarrow f_C}\left(x_2\right) &= \mu_{f_B \rightarrow x_2}\left(x_2\right)=f_B\left(x_2\right) \\
\mu_{x_4 \rightarrow f_E}\left(x_4\right) &= \mu_{f_D \rightarrow x_4}\left(x_4\right)=f_D\left(x_4\right)
\end{aligned}$$

第三步:

$$\begin{aligned}
\mu_{f_C\to x_3}(x_3) &= \sum_{x_1,x_2} \mu_{x_1\to f_C}(x_1)\,\mu_{x_2\to f_C}(x_2) f_C(x_1,x_2,x_3) \\
&= \sum_{x_1,x_2} f_A(x_1) f_B(x_2) f_C(x_1,x_2,x_3) \\
\mu_{f_E\to x_3}(x_3) &= \sum_{x_4,x_5} \mu_{x_4\to f_E}(x_4)\,\mu_{x_5\to f_E}(x_5) f_E(x_3,x_4,x_5) \\
&= \sum_{x_4,x_5} f_D(x_4) f_E(x_3,x_4,x_5)
\end{aligned}$$

停止步:

$$\begin{aligned}
p(x_3) &= \mu_{f_C\to x_3}(x_3)\,\mu_{f_E\to x_3}(x_3) \\
&= \left(\sum_{x_1,x_2} f_A(x_1) f_B(x_2) f_C(x_1,x_2,x_3)\right)\left(\sum_{x_4,x_5} f_D(x_4) f_E(x_3,x_4,x_5)\right)
\end{aligned}$$