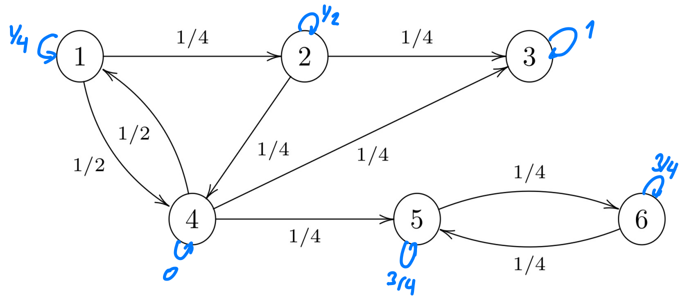
Sistemas Estocásticos 2024-25

Examen Final (Primera parte)

Sistemas a tiempo discreto

A. Consideremos la cadena de Markov definida en el siguiente diagrama:



Se asuma que cada estado tiene un arco hacia el estado mismo con la probabilidad necesaria para hacer que la suma de las probabilidades en salida sea 1.

i) Determinar la matriz de transición de la cadena

La matriz de transición que indica la probabilidad de ir de un estado a otro es:

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

ii) Determinar la(s) clase(s) comunicante(s)

Decimos que n lleva a m $(n \to m)$ si $P_n(X_t = m) > 0$ para algún $t > 0$.
Decimos que n se comunica con m $(n \leftrightarrow m)$ si: $n \to m$ y $m \to n$.

Se puede observar que '$\leftrightarrow$' es una relación de equivalencia que separa M en clases de equivalencia llamadas clases comunicantes.

En nuestro caso tenemos 3 conjuntos $\{1, 2, 4\}$, $\{3\}$ y $\{5, 6\}$.

iii) Determinar la(s) clase(s) absorbentes

Una clase es absorbente si una vez que llegamos a esa clase, ya no podemos salir.

En nuestro caso, tanto $\{3\}$, como $\{5,6\}$ son estados absorbentes.

iv) Determinar la probabilidad que saliendo de 1 se llegue al estado 3

h_{i3} probilidad de llegar a 3 partiendo de i

$$h_{13} = \frac{1}{4}\cdot h_{23} + \frac{1}{2}\cdot h_{43} + \frac{1}{4} h_{13}$$

$$h_{23} = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot h_{43} + \frac{1}{2}\cdot h_{23} \overset{(1)}{=} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} h_{13}\right) + \frac{1}{2} h_{23} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} h_{13} + \frac{1}{2} h_{23} =$$

$$h_{23} - \frac{1}{2} h_{23} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} h_{13} = \frac{5}{16} + \frac{1}{8} h_{13} = \frac{1}{2} h_{23}\ ;\quad h_{23} = \frac{10}{16} + \frac{2}{8} h_{13} \quad (2)$$

$$h_{43} = \frac{1}{2}\cdot h_{13} + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4} \underbrace{h_{53}}_{0} = \quad h_{43} = \frac{1}{2} h_{13} + \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$h_{53} = h_{63} = 0$$

$$h_{13} = \frac{1}{4} h_{23} + \frac{1}{2} h_{43} + \frac{1}{4} h_{13}\ ;\quad \frac{3}{4} h_{13} \overset{(1)(2)}{=} \frac{1}{4}\cdot \overset{(2)}{\left(\frac{5}{8} + \frac{1}{4} h_{13}\right)} + \frac{1}{2}\overset{(1)}{\left(\frac{1}{2} h_{13} + \frac{1}{4}\right)} =$$

$$= \frac{5}{32} + \frac{1}{16} h_{13} + \frac{1}{4} h_{13} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16} h_{13} + \frac{9}{32}\ ;\quad h_{13} = \frac{4\cdot 5}{3\cdot 16} h_{13} + \frac{4\cdot 9}{3\cdot 32} = \frac{20}{48} h_{13} + \frac{36}{96} =$$

$$= \frac{5}{12} h_{13} + \frac{3}{8} = h_{13}\ ;\quad \frac{7}{12} h_{13} = \frac{3}{8}\ ;\quad \boxed{h_{13} = \frac{3\cdot 12}{8\cdot 7} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14} \simeq 0{,}6429}$$

$$(2)\quad h_{23} = \frac{10}{16} + \frac{2}{8} h_{13} = \frac{10}{16} + \frac{2\cdot 9}{8\cdot 14} \simeq 0{,}7857$$

$$(1)\quad h_{43} = \frac{1}{2} h_{13} + \frac{1}{4} = \frac{1\cdot 9}{2\cdot 14} + \frac{1}{4} \simeq 0{,}5714$$

- Comprobamos el sist. ec.

$$h_{13} = \frac{1}{4}\cdot h_{23} + \frac{1}{2} h_{43} + \frac{1}{4} h_{13} = 0{,}6428 \checkmark$$

$$h_{23} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} h_{43} + \frac{1}{2} h_{23} = 0{,}7857 \checkmark$$

$$h_{43} = \frac{1}{2} h_{13} + \frac{1}{4} = 0{,}5714 \checkmark$$

- Además podemos observar que los valores tienen sentido ya que h_{43} es el más bajo dado que está a $\frac{1}{4}$ de entrar al absorbente $\{5,6\}$ y 2 el más alto ya que está a un paso

v) Determinar (sin necesidad de cálculo) la probabilidad que saliendo de 1 se llegue a 5

Entiendo el enunciado como que no tenemos que calcular los 'h' de nuevo.

Dado que $\{1, 2, 4\}$ es una clase comunicante, que tiene dos posibles salidas: 3, 5 y sabemos que ir a 3 tiene una probabilidad de 0,6429, nos queda que ir a 5 tiene $1-p$, es decir $\boxed{0{,}3571.}$

vi) Determinar (sin necesidad de cálculo) el tiempo medio necesario para ir de 1 a 3

El tiempo medio es infinito, ya que si formamos el sistema de ecuaciones, tendremos que desde 5 y desde 6 hasta 3 el tiempo es infinito, y como estos van a formar parte del sistema de ecuaciones, por pequeña que sea su aportación, nos quedará $+\infty$ por lo que es $\boxed{\text{infinito.}}$

vii) Determinar (sin necesidad de cálculo) la probabilidad de pasar por 3 saliendo de 5

La probabilidad es claramente 0 ya que $\{5, 6\}$ son una clase absorbente por lo que si empezamos ahí, ya no se puede salir.