2013年12月
第33卷第6期

郧阳师范高等专科学校学报
Journal of Yunyang Teachers College

Dec. 2013
Vol. 33 No. 6

关于两幂等变换值域与核的一点注记

姜 琴,袁 力

(郧阳师范高等专科学校,湖北 十堰 442000)

[摘 要]幂等变换的值域与核与其所定义的线性空间之间有着非常密切的关系.对已知两幂等变换的值域与核分别相等的充分必要条件进行分析,把该结论的充分性推广到 p 次幂等变换,并得到一个新的必要条件,两者结合,最终将原充分必要条件推广到了 p 次幂等变换的值域与核上来.

[关键词]幂等变换;值域;核;相等

[doi]10.3969/j.issn.1008－6072.2013.06.006

[中图分类号]O151.2　　[文献标识码]A　　[文章编号]1008—6072(2013)06—0021—03

在北京大学数学系编高等代数(第三版),第七章课后有如下例题:

例 1 设 $\sigma^2=\sigma$, $\tau^2=\tau$ 证明:

(1) σ 与 τ 有相同值域的充分必要条件是

$\sigma\tau=\tau$, $\tau\sigma=\sigma$;

(2) σ 与 τ 有相同的核的充分必要条件是

$\sigma\tau=\sigma$, $\tau\sigma=\tau$. [1]

这个题目给出了两个幂等变换的值域与核分别相同的充分必要条件,其实对该问题的条件与结论深入分析,还可以进一步得到一些关于幂等变换值域与核的有价值的结论.

1 预备知识

定义 1 设线性变换 $\sigma\in L(V)$,满足 $\sigma^2=\sigma$,则称 σ 为幂等变换.

定义 2 设 σ 是线性空间 V 的一个线性变换, σ 的全体像组成的集合 $\sigma(V)$ 称为 σ 的值域,用 $\mathrm{Im}\sigma$ 表示;所有被 σ 变成零向量的向量组成的集合 $\sigma^{-1}(0)$ 称为 σ 的核,用 $\ker\sigma$ 表示.

对于数域P上 n 维线性空间 V 的任一线性变换 σ ,我们知道 σ 的值域与核的维数与空间 V 的维数满足下面的关系式:

$$\dim(\sigma(V))+\dim(\sigma^{-1}(0))=n=\dim(V)$$

但由此条件不一定能推得

$\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)=V$. [2]

我们可以来看下面的例子:

例 2 设 $V=P[x]_n$, σ 是 V 上的微分变换,则

$\sigma(V)=P[x]_{n-1}$, $\sigma^{-1}(0)=P$

且有 $\dim\sigma(V)+\dim(\sigma^{-1}(0))=\dim V$,但显然 $P[x]_{n-1}+P\neq P[x]_n$,也即

$\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)=V$ 不成立.

上述问题,如果增加条件 $\sigma^2=\sigma$,即线性变换 σ 为幂等变换,则由条件

$\dim(\sigma(V))+\dim(\sigma^{-1}(0))=\dim V$ 就能推得

$V=\sigma(V)\oplus\sigma^{-1}(0)$. [3,4]

事实上,对任意 $\alpha\in V$ 则 $\sigma(\alpha)\in\sigma(V)$,设 $\alpha_1=\alpha-\sigma(\alpha)$,由 $\sigma^2=\sigma$ 可知

$\sigma(\alpha_1)=\sigma(\alpha)-\sigma^2(\alpha)=0$,故 $\alpha_1\in\sigma^{-1}(0)$,因此 $\alpha\in\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)$

即 $V\subseteq\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)$,而 $\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)\subseteq V$ 是显然的,故 $V=\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)$

又因 $\dim(\sigma(V))+\dim(\sigma^{-1}(0))=\dim V$,所以 $V=\sigma V\oplus\sigma^{-1}(0)$. [5]

[收稿日期]2013－08－12
[基金项目]湖北省教育厅科研计划项目(B20126001);郧阳师范高等专科学校教研基金项目(2012007)
[作者简介]姜 琴(1978－),女,湖北十堰人,郧阳师范高等专科学校计算机科学系讲师,硕士,主要从事计算数学及图形图像方面的教学与研究.

2 主要结论

定理 1 设 $\sigma,\tau \in L(V)$,则

1)若 $\sigma\tau=\sigma$,$\tau\sigma=\tau$,则 σ 与 τ 都是幂等变换.

2)若 $\sigma\tau=\tau$,$\tau\sigma=\sigma$,则 σ 与 τ 都是幂等变换.

证 1)因为 $\sigma\tau=\sigma$,$\tau\sigma=\tau$,则 $(\sigma\tau)\sigma=\sigma\sigma=\sigma^2$,同时 $(\sigma\tau)\sigma=\sigma(\tau\sigma)=\sigma\tau=\sigma$,

所以 $\sigma^2=\sigma$. 同理可证 τ 也是幂等变换.

2)因为 $\sigma\tau=\tau$,$\tau\sigma=\sigma$,则 $(\sigma\tau)\sigma=\tau\sigma=\sigma$,同时 $(\sigma\tau)\sigma=\sigma(\tau\sigma)=\sigma\sigma=\sigma^2$,

所以 $\sigma^2=\sigma$. 同理可证 τ 也是幂等变换.

由定理 1 可知,例 1 中关于线性变换 σ 与 τ 的两个等式是其为幂等变换的充分条件. 反之,其逆命题是否成立? 也即若 σ 与 τ 均为幂等变换,是否有 $\sigma\tau=\sigma$,$\tau\sigma=\tau$ 和 $\sigma\tau=\tau$,$\tau\sigma=\sigma$ 成立.

先来看下面的例子.

例 3 设 $A=\begin{pmatrix}4&4&0\\-3&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-6\\0&1&-2\end{pmatrix}$

容易验证 $A^2=A$,$B^2=B$

即 A,B 都是幂等矩阵,但

$$AB=\begin{pmatrix}4&4&0\\-3&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-6\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&12&-24\\-3&-9&-18\\0&1&-2\end{pmatrix}\neq A$$

由 $L(V)$ 与 $P^{n\times n}$ 之间的同构关系可知,定理 1 的逆命题是不成立的.[6] 通过例 1 可知,若在 σ 与 τ 幂等的基础上增加条件 $\ker\sigma=\ker\tau$,则可得 $\sigma\tau=\sigma$,$\tau\sigma=\tau$.

下面再给出一个上述等式成立的充分条件.

定理 2 设 σ,τ 均为幂等变换,其中 σ,τ 均不为零变换和单位变换,如果 $\sigma+\varepsilon$ 与 $\tau+\varepsilon$ 均可逆,则

1)$\sigma\tau=\sigma,\tau\sigma=\tau$.

2)$\sigma\tau=\tau$,$\tau\sigma=\sigma$.

证 1)因 $\sigma\tau-\sigma=\sigma(\tau-\varepsilon)=\sigma(\tau^2-\varepsilon)=\sigma(\tau-\varepsilon)(\tau+\varepsilon)$,又因 $\tau+\varepsilon$ 可逆,

故上式恒等于零,则可得 $\sigma\tau=\sigma$.

同理可证 $\tau\sigma=\tau$.

2)因 $\sigma\tau-\tau=(\sigma-\varepsilon)\tau=(\sigma^2-\varepsilon)\tau=(\sigma+\varepsilon)(\sigma-\varepsilon)\tau$,又因 $\sigma+\varepsilon$ 可逆,

故上式恒等于零,则可得 $\sigma\tau=\tau$. 同理可证 $\tau\sigma=\sigma$.

定理 2 给出了例 1 中两等式成立的另一个充分条件,是对该问题的一个有益补充. 同时,定理 1 的结论还可作如下推广:

推论 1 设 $\sigma,\tau\in L(V)$,如果 $\sigma\tau^{l-1}=\sigma$ 且 $\tau\sigma^{k-1}=\tau$,其中 $l,k\in N$,且 $l\neq 0,1$;$k\neq 0,1$,则 σ 是 p 次幂等变换,τ 是 q 次幂等变换,其中 $p\leq k$,$q\leq l$ 且 p,$q\neq 0,1$.

证 由 $\sigma\tau^{l-1}=\sigma$ 且 $\tau\sigma^{k-1}=\tau$,可知

$\sigma\tau^{l-1}\sigma^{k-1}=(\sigma\tau^{l-1})\sigma^{k-1}=\sigma^k$,

$\sigma\tau^{l-1}\sigma^{k-1}=(\sigma\tau^{l-2})(\tau\sigma^{k-1})=\sigma\tau^{l-1}=\sigma$,所以

$\sigma^k=\sigma$

由最小数原理知,存在最小正整数 $p\leq k$ 且 $p\neq 0,1$,使得 $\sigma^p=\sigma$

同理

$\tau\sigma^{k-1}\tau^{l-1}=(\tau\sigma^{k-1})\tau^{l-1}=\tau^l$

$\tau\sigma^{k-1}\tau^{l-1}=(\tau\sigma^{k-2})(\sigma\tau^{l-1})=\tau\sigma^{k-1}=\tau$,

所以 $\tau^l=\tau$,存在最小正整数 $q\leq l$,且 $q\neq 0$,1 使得 $\tau^q=\tau$.

由定理和推论的结果,最终可将例 1 的结论推广到更一般的情况.

定理 3 设 σ 是 k 次幂等变换,τ 是 l 次幂等变换,则

(1)σ 与 τ 有相同值域的充要条件是 $\sigma^{k-1}\tau=\tau,\tau^{l-1}\sigma=\sigma$

(2)σ 与 τ 有相同的核的充要条件是 $\sigma\tau^{l-1}=\sigma,\tau\sigma^{k-1}=\tau$

证 (1)必要性 因 $\sigma(V)=\tau(V)$,对于任意 $\beta\in V$,则 $\tau(\beta)\in\tau(V)=\sigma(V)$,

即存在 $\alpha\in V$,使得 $\tau(\beta)=\tau(\alpha)$,又因 $\sigma^k=\sigma$

所以有 $(\sigma^{k-1}\tau)\beta=\sigma^{k-1}(\tau(\beta))=\sigma^{k-1}(\sigma(\alpha))=\sigma^k(\alpha)=\sigma(\alpha)=\tau(\beta)$

由 β 的任意性可知 $\sigma^{k-1}\tau=\tau$. 同理可证 $\tau^{l-1}\sigma=\sigma$

充分性 因 $\sigma^{k-1}\tau=\tau$,则 $\tau(V)=(\sigma^{k-1}\tau)V=\sigma(\sigma^{k-2}\tau)V\subset\sigma(V)$

同理可知 $\sigma(V)\subset\tau(V)$,故 $\sigma(V)=\tau(V)$.

(2)必要性 因 $\tau^l=\tau$,即 $\tau^l-\tau=\tau(\tau^{l-1}-\varepsilon)=0$

则对任意 $\alpha\in V$,有 $\tau(\tau^{l-1}-\varepsilon)=0$,即 $(\tau^{l-1}-\varepsilon)\alpha\in\tau^{-1}(0)$

又因 $\sigma^{-1}(0)=\tau^{-1}(0)$ ，则 $(\tau^{l-1}-\varepsilon)\alpha \in \sigma^{-1}(0)$ 即

$(\sigma(\tau^{l-1}-\varepsilon))\alpha=(\sigma\tau^{l-1}-\sigma)\alpha=0$,

由 α 的任意性可知 $\sigma\tau^{l-1}=\sigma$. 同理可证 $\varpi^{k-1}=\tau$.

充分性　因 $\sigma\tau^{l-1}=\sigma$ ，则对于任意 $\alpha \in V$ ，

$(\sigma\tau^{l-1}-\sigma)\alpha=(\sigma(\tau^{l-1}-\varepsilon))\alpha=\sigma((\tau^{l-1}-\varepsilon)\alpha)=0$

即 $(\tau^{l-1}-\varepsilon)\alpha \in \sigma^{-1}(0)$ ，又因

$\tau((\tau^{l-1}-\varepsilon)\alpha)=(\tau^{l}-\tau)\alpha=0$,

即 $(\tau^{l-1}-\varepsilon)\alpha \in \tau^{-1}(0)$

由 α 的任意性，可知 $\sigma^{-1}(0)\subseteq\tau^{-1}(0)$.

同理可证 $\tau^{-1}(0)\subseteq\sigma^{-1}(0)$ ，故 $\sigma^{-1}(0)=\tau^{-1}(0)$ ，证毕.

3　结束语

本文对已知两幂等变换的值域与核分别相同的充分必要条件进行分析，从充分性和必要性两个方向进行讨论，把已有充分条件做了推广，并证明得到一个新的必要条件，将研究所得充分和必要条件相结合，最终把原充要条件推广到了 p 次幂等变换的值域与核上来. 这一推广使得该问题的研究具有了更广泛的意义.

[参考文献]

[1]北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组. 高等代数[M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[2]汪杏枝. n 维线性空间上的幂等秩的线性变换[J]. 湖北师范学院学报，2001，21(2).

[3]高　枫. 幂等矩阵及其性质[J]. 常州工学院学报，2009，22(1/Z).

[4]吕温霞，姜凤英. 线性空间的幂等变换与对合变换的几个等价表示[J]. 长春师范学院学报(自然科学版)，1994，(1).

[5]朱一心，马雪松，范兴亚. 关于线性变换的像空间与核空间的直和[J]. 数学的实践与认识，2012，42(18).

[6]吴校良. 线性变换的核空间与像空间的维数关系式[J]. 内蒙古民族大学学报，2012，18(2).

【编校：胡军福】

TwoIdempotent Transformation Value and Core

JIANG－Qin，YUAN－Li

(Yunyang Teachers' College，Shiyan 442000，China)

Abstract：Idempotent transformation value and core are closely connected with the linear space defined by them. The necessary conditions for two equal idempotent values and cores have been analyzed，whose conclusion has been further applied to P idempotent transformation to achieve a new necessary condition. The two being combined will make the original necessary condition extend to p idempotent transformation value and core.

Key words：idempotent transformation；value；core；equal