1 Schroeder-Bernsteins sætning (Kap. 1-7 opg. 6)

1.1

Det skal vises at hvis $B \subset A$ og $f : A \to B$ er injektiv så har A og B samme kardinalitet.

Inspireret af det givne vink definerer vi

$$A_1 = A \qquad B_1 = B$$
$$A_n = f(A_{n-1}) \quad B_n = f(B_{n-1})$$

endvidere definerer vi $h : A \to A$ ved

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n) \\ x & \text{ellers} \end{cases}$$

og vi vil gå efter at vise at h er en bijektion fra A til B.

For at vise surjektivitet viser vi at $h(A) \subset B$ og at $B \subset h(A)$.
Først $h(A) \subset B$

$$\begin{aligned} h(A) &= h\Big(\big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)\big) \cup \big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)\big)\Big) \\ &= h\Big(\big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)\big)\Big) \cup h\Big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)\Big) \end{aligned}$$

da $A \supset \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)$ og $h = f$ på $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)$, og da h er identiteten på $A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)$ får vi

$$= f\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)\Big) \cup \Big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)\Big) \tag{1}$$

da f tager værdier i B og da $A \setminus B = A_1 \setminus B_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)$ kan vi vurdere opad ved

$$\begin{aligned} &\subset B \cup \Big(A \setminus \big(A \setminus B\big)\Big) \\ &= B \cup B \\ &= B \end{aligned}$$

Altså er $h(A) \subset B$.

Vi mangler altså $B \subset h(A)$.
Hvis vi går ud fra (1) får vi

$$\begin{aligned} & f\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)\Big) \cup \Big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)\Big) \\ = & \bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n \setminus B_n) \cup \Big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)\Big) \end{aligned}$$

og da f er injektiv bevarer billedet af f mængdedifferens

$$\begin{aligned} = & \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(f(A_n) \setminus f(B_n)\big) \cup \Big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)\Big) \\ = & \bigcup_{n=2}^{\infty}(A_n \setminus B_n) \cup \Big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)\Big) \end{aligned}$$

det betyder altså at vi kan skrive A som

$$A = (A_1 \setminus B_1) \cup h(A) = (A \setminus B) \cup h(A)$$

og da vi ved at $B \subset A$ og $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$ da må $B \subset h(A)$.
Ergo er $h(A) = B$ hvilket vil sige at h er surjektiv på B.

Vi mangler stadig at vise injektivitet af h.
Lad $a, a' \in A$ så $h(a) = h(a')$
Der er tre (fire) tilfælde

Tilfælde 1: $a, a' \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)$
Vi har at $f(a) = h(a) = h(a') = f(a')$ og da f er injektiv må $a = a'$

Tilfælde 2: $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)$ og $a' \notin \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)$
Vi har at $f(a) = h(a) = h(a') = a'$ men i forbindelse med tidligere omskrivninger har vi at $f\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)\big) = \bigcup_{n=2}^{\infty}(A_n \setminus B_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)$ hvilket medfører at $a' = f(a) \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)$, men det havde vi netop antaget ikke var tilfældet, altså er dette tilfælde ikke muligt.

Tilfælde 2a: $a' \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)$ og $a \notin \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)$

Foregår ligesom 2

Tilfælde 3: $a, a' \notin \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)$

Vi har, pga. definitionen af h, at $a = h(a) = h(a') = a'$

altså er h også injektiv, hvilket betyder h er bijektiv, som igen er ækvivalent med at A og B har samme kardinalitet.

1.2

Det skal vises at hvis $f : A \to C$ og $g : C \to A$ er injektioner så har A og C samme kardinalitet.

Vi har at $f(A) \subset C$ og derfor er $g(f(A)) \subset g(C) \subset A$, og da g og f begge er injektive vil

$$g \circ f : A \to g(C)$$

definere en injektiv funktion. Dette betyder ifølge det tidligere viste at A og $g(C)$ har samme kardinalitet. Der eksisterer altså en bijektive afbildning

$$h : A \to g(C)$$

Derudover har vi at g betragtet som funktion på dens billede er bijektiv. Altså at funktionen

$$\tilde{g} : C \to g(C)$$

er bijektiv, og som en konsekvens vil

$$\tilde{g}^{-1} : g(C) \to C$$

være en veldefineret og bijektiv funktion.

Hvis man nu betragter funktionen

$$\varphi : A \to C$$

givet ved $\varphi = \tilde{g}^{-1} \circ h$.
Så er dette en sammensætning af bijektive afbildninger, og derfor igen bijektiv, og dette er altså ensbetydende med at A og B har samme kardinalitet.

Jakob Boyhus