一元多项式的抽象定义:

给定一个数域$\mathbb{P}$, x为一符号(或文字). 形如

$$f(x) \triangleq a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots$$

形式的表达式称为系数在数域$\mathbb{P}$上的一元多项式.

简称为$\mathbb{P}$上的一元多项式. 其中对$i=0,1,\cdots,n,\cdots$,

所有$a_i \in \mathbb{P}$. 至多有限个不为0.

把$a_i x^i$称为$f(x)$的i次单项(i次项). a_i称为其系数.

用连加号表为 $f(x) \triangleq \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$.

上式中若有$a_n \neq 0$ 但对所有$s>n$有$a_s=0$. 称$a_n x^n$为首项,

a_n为首项系数, n为$f(x)$的次数. 并表为$\partial(f(x))$.

若一个多项式所有系数全为0, 则称之为零多项式.

并记作0, 零多项式的次数规定为$-\infty$.

整除概念.

数域$\mathbb{P}$上的多项式$g(x)$称为整除$f(x)$的, 若存在

$\mathbb{P}$上的多项式$h(x)$使得$f(x)=g(x)h(x)$. 成立.

用$g(x) \mid f(x)$表示$g(x)$整除$f(x)$, $g(x) \nmid f(x)$表示$g(x)$不整除$f(x)$;

$g(x) \mid f(x)$时, 称$g(x)$是$f(x)$的因式, $f(x)$是$g(x)$的倍式.

一元多项式加减乘除运算的基本性质

① $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$

证：$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}a_ix^i+\sum_{i=0}^{+\infty}b_ix^i$

$$=\sum_{i=0}^{+\infty}(a_i+b_i)x^i=\sum_{i=0}^{+\infty}(b_i+a_i)x^i$$

$$=\sum_{i=0}^{+\infty}b_ix^i+\sum_{i=0}^{+\infty}a_ix^i=g(x)+f(x)$$

② $f(x)g(x)=g(x)f(x)$.

令 $c_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j$

$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_kx^k=g(x)f(x).$$

③ $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$

证：$(a_i+b_i)+c_i=a_i+(b_i+c_i)$.

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(a_i+b_i)+c_i=\sum_{i=0}^{+\infty}a_i+(b_i+c_i)$$

$$(f+g)+h=f+(g+h).$$

④ $(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$

证：设 $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$，$g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i$，$h(x)=\sum_{i=0}^{l}c_ix^i$.

$$(f(x)g(x))h(x)=\left(\sum_{s=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)x^s\right)\left(\sum_{i=0}^{l}c_ix^i\right)$$

$$=\sum_{t=0}^{m+n+l}\left(\sum_{s+k=t}\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)c_k\right)x^t$$

$$= \sum_{t=0}^{m+n+l} \left(\sum_{i+j+k=t} a_i b_j c_k \right) x^t$$

$$= \sum_{t=0}^{m+n+l} \left(\sum_{i+p=t} a_i \left(\sum_{j+k=p} b_j c_k \right) \right) x^t$$

$$= f(x)\left(g(x)h(x)\right)$$

⑤ $f(x)(g(x)+h(x)) = f(x)g(x)+f(x)h(x)$

$(g(x)+h(x))f(x) = g(x)f(x)+h(x)f(x)$.

证: $f(x)(g(x)+h(x)) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{l} c_i x^i \right)$

$$= \sum_{t=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=t} a_i b_j \right) x^t + \sum_{t=0}^{n+l} \left(\sum_{i+j=t} b_i c_j \right) x^t$$

$$= f(x)g(x) + f(x)h(x).$$

由乘法的交换律

$(g(x)+h(x))f(x) = g(x)f(x)+h(x)f(x)$

也成立.