Matematik 3GT – efterår 2003

Esben Bistrup Halvorsen

Opgave 17.19

Lad A være en delmængde af et topologisk rum X. Med $\operatorname{Bd} A$ betegnes *randen* af A, som i opgaven defineres som delmængden $\operatorname{Bd} A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$. Man ser let, at $\overline{X - A} = X - \operatorname{Int} A$ (thi $\operatorname{Int} A$ er den største åbne mængde indeholdt i A, hvormed $X - \operatorname{Int} A$ må være mindste afsluttede mængde indeholdende $X - A$), således at vi har

$$\operatorname{Bd} A = \overline{A} \cap (X - \operatorname{Int} A) = \overline{A} - \operatorname{Int} A.$$

Opgaven løses ved gentagen udnyttelse af ovenstående ligning.

(a) Med ovenstående beskrivelse af $\operatorname{Bd} A$ er det klart, at $\operatorname{Int} A$ er disjunkt med $\operatorname{Bd} A$. Endvidere følger det af inklusionen $\operatorname{Int} A \subseteq \overline{A}$, at $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Bd} A$.

(b) Der gælder, at

$$\begin{aligned} A \text{ er åben og afsluttet} &\iff A = \operatorname{Int} A = \overline{A} \\ &\iff \overline{A} \subseteq \operatorname{Int} A \\ &\iff \operatorname{Bd} A = \emptyset. \end{aligned}$$

(c) Der gælder, at

$$U \text{ er åben} \iff \operatorname{Int} U = U \iff \operatorname{Bd} U = \overline{U} - U,$$

hvor den sidste (venstregående) implikation følger af at U og $\operatorname{Int} U$ begge er delmængder af $\overline{U}$.

(d) Hvis U er åben gælder $U = \operatorname{Int} U \subseteq \operatorname{Int} \overline{U}$, men den omvendte inklusion gælder ikke nødvendigvis. Sætter vi f.eks. $U = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ fås $\operatorname{Int} \overline{U} = \mathbb{R}$.