P27.

14. 证明：

既然 $f(x) \mid h(x)$. 不妨设 $h(x)=q(x)f(x)$.

而 $g(x) \mid h(x)$. $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

可以得到 $g(x) \mid q(x)$. 不妨设 $q(x)=p(x)g(x)$.

于是有 $h(x)=p(x)g(x)f(x)$. $g(x)f(x) \mid h(x)$.

此结论可以推广：

若有 $\{f_i(x)\}$, $g(x) \in P[x]$, $\{f_i(x)\}$ 互素.

$f_i(x) \mid g(x)$, $i=1,2,\cdots$. 则任意 $f_i(x)f_j(x)\cdots f_k(x)$

也整除 $g(x)$.

不断因式分解即可证明.

16. 证明： 设有 $f(x), g(x) \in P[x]$, $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的

最大公因式.

"$\Rightarrow$"： $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 次数最大的公因式.

若存在 $d'(x)$, $\partial(d'(x)) < \partial(d(x))$.

$d'(x) \mid f(x)$, $d'(x) \mid g(x)$. $d'(x) \nmid d(x)$.

将 $d(x)$ 因式分解. 必有一不可约项 $q(x)$. $q(x) \nmid d(x)$.

则 $q(x)d(x)$ 也是 $f(x), g(x)$ 的公因式.

$\partial(q(x)d(x)) > \partial(d(x))$. 矛盾.

所以 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式.

"$\Leftarrow$": $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式.

若有 $d'(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 的公因式.

且 $\partial(d'(x)) > \partial(d(x))$.

$d'(x) \mid d(x) \Rightarrow d(x) = 0$. 矛盾.

所以 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 次数最大的公因式.

19. 证明: $(f(x), f(x)) = f(x)$.

只需证 $(f'(x), f(x)) = 1$.

若 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个不可约因式

$f(x) = p(x)\, q(x)$.

$f'(x) = p'(x)\, q(x) + q'(x)\, p(x)$

显然 $f(x)$ 不含重因式. $p(x) \nmid q(x)$.

则 $p(x) \nmid q'(x)$, $p(x) \nmid p'(x)$. (次数问题).

$\therefore p(x) \mid f'(x)$.

由此 对于 $f(x)$ 的任何一个不可约因式 $p(x)$.

$p(x) \mid f'(x)$. $\therefore (f(x), f'(x)) = 1$. 证毕.

P28. $f(x)=af_1(x)+bg_1(x)$. $g(x)=cf_1(x)+dg_1(x)$

3. 证明：设 $(f_1(x),g_1(x))=d(x)$.

$f_1(x)=f_2(x)d(x)$. $g_1(x)=g_2(x)d(x)$.

$f(x)=(af_2(x)+bg_2(x))d(x)$. $d(x)\mid f(x)$

$g(x)=(cf_2(x)+dg_2(x))d(x)$. $d(x)\mid g(x)$.

$\therefore$ $d(x)$ 也是 $f(x)$, $g(x)$ 的公因式.

取 $d'(x)$ 为 $f(x)$, $g(x)$ 的另一公因式.

则存在 $u(x)$, $v(x)$. $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d'(x)$.

即 $u(x)(af_1(x)+bg_1(x))+v(x)(cf_1(x)+dg_1(x))=d'(x)$.

整理得，$(au(x)+cv(x))f_1(x)+(bu(x)+dv(x))g_1(x)=d(x)$

$d'(x)$ 也是 $f_1(x)$, $g_1(x)$ 的公因式. $d'(x)\mid d(x)$.

既然 $(f_1(x),g_1(x))=d(x)$, $d(x)$ 首一,

则 $(f(x),g(x))=d(x)$.

$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x))$. 证毕

7. 证明：

~~必~~要性：$f(x)$, $g(x)$ 互素，则因式分解后，

二者没有相同的不可约因式.

设 $f(x)=f_1(x)\cdots f_k(x)$, $f_i(x)$ 不可约

$g(x)=g_1(x)\cdots g_l(x)$. $g_i(x)$ 不可约.

则 $f^n(x)=f_1^n(x)\cdots f_k^n(x)$.

$g^n(x)=g_1^n(x)\cdots g_l^n(x)$.

依然没有相同的不可约因式.

$f^n(x)$, $g^n(x)$ 互素.

充分性: $(f^n(x), g^n(x))=1$

若 $f(x)$, $g(x)$ 不互素. 设 $(f(x), g(x))=d(x)\neq C$

$f(x)=f_1(x)d(x)$, $g(x)=g_1(x)d(x)$.

$f^n(x)=f_1^n(x)d^n(x)$, $g^n(x)=g_1^n(x)d^n(x)$,

$d^n(x)\mid f^n(x)$, $d^n(x)\mid g^n(x)$.

$d^n(x)$ 也是 $(f^n(x), g^n(x))$ 的因式. 矛盾.

$\therefore$ $f(x)$, $g(x)$ 互素.

证毕.