P126.

24. 证：对于 A 与 A^T，显然 $(\lambda E-A)=(\lambda E-A^T)^T$.

$|\lambda E-A|$ 中挑出 $R_{r_1},\cdots R_{r_k}$，$C_{c_1},\cdots C_{c_k}$

的 k 级子式.

与 $|\lambda E-A^T|$ 中由 $R_{c_1},\cdots,R_{c_k}$，$C_{r_1},\cdots C_{r_k}$

构成的子式.

互为转置，值相同

故 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-A^T$ 有相同的行列式因子，等价.

所以 A 与 A^T 等价.

25. $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ \lambda & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -\lambda+2\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ \lambda & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-3 & 4\lambda-8\\ 0 & -1 & (\lambda+1)(\lambda-2)\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{pmatrix}$

$\lambda E-B=\begin{pmatrix}\lambda-3 & 0 & -8\\ -3 & \lambda+1 & -6\\ 2 & 0 & \lambda+5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^3\end{pmatrix}$

$$\lambda E - C = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ \lambda-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

A 与 C 相似. A 与 B, B 与 C 不相似

28. (2). $\lambda E - B = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & \lambda+1 \\ \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2}(\lambda+1)(\lambda-1) \\ 0 & \lambda-2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

初等因子 $(\lambda-1)$, $(\lambda+1)$, $(\lambda-2)$

B 的 Jordan 标准形 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\lambda E - D = \begin{pmatrix} \lambda-3 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & \lambda+5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$

初等因子 $(\lambda-1)^2$, $(\lambda+1)^2$.

D 的 Jordan 标准形 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix}$

30. $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ -a & \lambda-2 & 0\\ -b & -c & \lambda+1\end{pmatrix}$ a，c 不为 0 时.

$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$

$\begin{vmatrix}-a & 0\\ -b & \lambda+1\end{vmatrix}=-a(\lambda+1)$ $\quad\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0\\ -b & -c\end{vmatrix}=-c(\lambda-2)$

于是，$\lambda E-A\rightarrow\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-2)^2(\lambda+1)\end{pmatrix}$

初等因子 $(\lambda-2)^2$，$(\lambda+1)$

A的 Jordan 标准形：$\begin{pmatrix}2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

a 为 0，c 不为 0 时.

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ b & c & \lambda+1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & & \\ & \lambda-2 & \\ & & (\lambda-2)^2(\lambda+1)\end{pmatrix}$

初等因子 $(\lambda-2)$，$(\lambda-2)$，$(\lambda+1)$

A的 Jordan 标准形 $\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{pmatrix}$

a 不为 0，c 为 0 时. 同第一种情况

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ a & \lambda-2 & 0\\ b & 0 & \lambda+1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-2)^2(\lambda+1)\end{pmatrix}$

a，c 均为 0，b 不为 0 时．同第二种情况

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ b & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda-2 & \\ & & (\lambda-2)^2(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

a，b，c 均为 0 时．也同第二种情况．

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & & \\ & \lambda-2 & \\ & & \lambda+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda-2 & \\ & & (\lambda-2)^2(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

A 的 Jordan 标准形可能为：

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad (a \text{ 不为 } 0 \text{ 时})$$

或

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad (a \text{ 为 } 0 \text{ 时})$$

A 相似于对角矩阵的充要条件为 $a=0$．