现代数学基础丛书　66

拓扑空间中的反例

汪　林　杨富春　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书汇集了拓扑空间与线性拓扑空间方面的大量反例.主要内容为:拓扑空间、可数性公理、分离性公理、连通性、紧性、局部凸空间、桶空间和囿空间、线性拓扑空间中的基.

本书可供高等院校理工科学生、研究生、教师参考.

现代数学基础丛书 66

拓扑空间中的反例

汪 林 杨富春 编著

责任编辑 吕 虹

封面设计 黄华斌

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000 年 6 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2003 年 8 月第二次印刷 印张:12 3/4

印数:3001—5 500 字数:219 000

ISBN 7-03-008211-7

定价:25.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序　　言

在数学的教学和研究中，经常需要用反例来说明某个命题不真，而绝大多数的数学书籍，主要是致力于证明在某些条件下某一结论是真，但很少谈到在另一些条件下某一结论是正确的还是错误的，即用来说明某些命题不真的反例较少，这不利于学习的深入．因此，比较系统地汇集某个数学分支的反例以弥补这方面的不足，无疑是十分有益的．基于这一想法，我们撰写了本书．

本书的取材，主要是从各种有关的书籍以及近几十年散见在国内外各种数学杂志上的反例中挑选出来的；也有一些例子取自 L. A. Steen 与 J. A. Seebach, Jr 合著的“Counter-Examples in Topology”和 S. M. Khaleelulla 著的“Counterexamples in Topological Vector Spaces”两本书；还有一部分是我们在长期的教学和研究实践中构造的．书中还介绍了最近几年才发展起来的集值分析方面的例子．阅读本书所需的预备知识，假定读者已经掌握，因此，书中只准备了很少的说明．每一章都以引言开始，用来明确所用的记号、术语和定义，也陈述了一些有关的定理，这些定理或者是构造某些反例时要用到的，或者是为了衬托某个反例．各章引言部分一般未介绍实分析与泛函分析方面的术语与记号，有关这方面的内容，读者可参看[9]与[10]．此外，在许多例子的后面，以“注”的形式把这个反例与某个正面的命题相比较，以便读者更好地了解到这个命题的条件所起的作用和所举反例的意义．

本书得到云南大学学术著作和教材出版基金、云南省科委和教委应用基础研究基金资助．已故的中国科学院院士程民德教授仔细地审阅了书稿，并提出了许多具体而又宝贵的意见；A. C. Thompson①教授给作者们以很大的鼓励，并提供了一些反例；云南大学卫念祖教授始终关怀本书的撰写；科学出版社对本书的出版工作给予了极大的支持．在此，作者谨向他们致以深深的谢意．

由于作者水平所限，一定存在不少缺点，殷切期望专家和读者予以批评指教．

汪　林　杨富春

1998 年 12 月于云南大学

---

① A. C. Thompson 教授（加拿大），1979 年 9 月至 1980 年 7 月曾在我国讲学，并在南京大学主持了一个泛函分析讨论班．

目　　录

第一章　拓扑空间

引　　言

给定集 X,它的一个子集族 τ 称为 X 上的一个**拓扑结构**,简称**拓扑**,是指 τ 满足下列三个条件:1°空集 $\varnothing$ 和 X 本身是 τ 的元;2° τ 内任意有限多个元的交仍是 τ 的元;3° τ 内任意多个元的并仍是 τ 的元.集 X 连同它上面的一个拓扑 τ,构成一个**拓扑空间**(X,τ),有时简写(X,τ)为 X. τ 的元叫 X 的**开集**,而其补集叫**闭集**.空间 X 的元称为点.

在同一个集 X 上,若有两个拓扑 τ_1 与 τ_2,且 $\tau_1\subset\tau_2$,则称拓扑 τ_1 **弱于或粗于**拓扑 τ_2,或者说拓扑 τ_2 **强于或细于**拓扑 τ_1,记作 $\tau_1<\tau_2$ 或 $\tau_2>\tau_1$. X 上最弱的拓扑由 X 本身及空集 $\varnothing$ 组成,而且叫**平庸拓扑**, X 称为**平庸空间**. X 上最强的拓扑由集 X 的一切子集组成,而且称为**离散拓扑**, X 称为**离散空间**.设 τ_1 和 τ_2 为集 X 上的两个拓扑,若 τ_1 既不强于 τ_2 也不弱于 τ_2,则称 τ_1 和 τ_2 为**不可比较**的.

设(X,τ)是拓扑空间, Y 是 X 的子集.令

$$\sigma=\{U\mid U=G\cap Y,G\in\tau\},$$

则 σ 是 Y 上的一个拓扑,这个拓扑称为 τ 的**相对拓扑**或**继承下来的拓扑**,(Y,σ)称为(X,τ)的**子空间**.

对任一度量空间(X,d),把(X,d)中的开集全体记作 τ,则 τ 是 X 上的一个拓扑,因而(X,τ)是一个拓扑空间. τ 称为由距离 d 所**诱导出的拓扑**.所谓度量空间(X,d)是一个拓扑空间,指的就是(X,τ).

设(X,τ)是拓扑空间,如果存在 X 上的距离 d,使得 τ 就是由距离 d 诱导出的拓扑,则称(X,τ)为**可度量化的空间**.

设 X 为一拓扑空间,对于 $X\times X$ 上的实值函数 $d(x,y)$,考虑下述条件:

(i) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$.

(ii) $d(x,y)=d(y,x)\geqslant 0$.

(iii) $A\subset X$ 是闭集当且仅当对任意 $x\in X\setminus A$,有 $d(x,A)>0$.

(iv) $x\in\bar{A}$ 当且仅当 $d(x,A)=0$.

当 d 满足(i),(ii),(iii)时,称 d 为 X 上的**对称距离**.当 d 满足(i),(ii),(iv)时,称 d 为 X 上的**半距离**.对称度量空间,半度量空间的用语也是自明的.

若 Y 是 n 维欧氏空间 R^n 的子集,则 Y 上的相对拓扑也称为**通常拓扑**.

设(X,τ)是拓扑空间, A 与 V 都是 X 的子集.称 V 为 A 的**邻域**,是指存在

(X,τ)中的开集 G,使

$$A \subset G \subset V.$$

所谓点 x 的邻域,就是单点集$\{x\}$的邻域.由点 x 的一切邻域组成的集族$\mathscr{U}(x)$称为点 x 的**邻域系**.

设 A 是拓扑空间(X,τ)的子集,x 称为 A 的**内点**,是指 $x\in X$, $A\in\mathscr{U}(x)$. A 的内点全体称为 A 的**内部**,记作 A°.

称点 x 是拓扑空间(X,τ)的子集 A 的**接触点**,是指对任意 $U\in\mathscr{U}(x)$,恒有 $U\cap A\neq\varnothing$. A 的接触点集称为 A 的**闭包**,记作 $\overline{A}$.点 x 称做 A 的**聚点**,是指 x 是 $A\setminus\{x\}$的接触点. x 称做 A 的 ω **聚点**,是指含有 x 的任一开集必含有 A 的无穷多个点. x 称做 A 的**凝聚点**,是指任一含有 x 的开集必含有 A 中不可数个点. A 的一切聚点所成之集称为 A 的**导集**,记作 A'.若 $A=A'$,则称 A 为**完备集**.

设 A 为拓扑空间 X 的子集,称点 x 是 A 的**外点**,是指 x 是 A 的补集 A^{c} 的内点. A 的外点的集合称为 A 的**外部**,记作 A^{e}.称点 x 是 A 的**边界点**,是指 $x\notin A^{e}$ 且 $x\notin A^{\circ}$. A 的边界点的集称为 A 的**边界**,记作 A^{b}.称 x 为 A 的**弧立点**,是指 $x\in A$且存在 $V\in\mathscr{U}(x)$,使 $V\cap A=\{x\}$.

设 A 为拓扑空间 X 的子集,称 A 在 X 中**稠密**,是指 $\overline{A}=X$.若 B 也是 X 的子集,称 A 在 B 中稠密,是指 $\overline{A}\supset B$.称 A 在 X 中**无处稠密**,是指$(\overline{A})^{\circ}=\varnothing$.称 X 为**可分空间**,是指 X 有可数稠密子集.

拓扑空间 X 的子集 A 称为**第一纲集**,是指 A 是可数个无处稠密集的并集.不是第一纲的集称为**第二纲集**.

设(X,τ)与(Y,σ)都是拓扑空间,映射 $f: X\rightarrow Y$ 称为在点 $x\in X$ **连续**,是指对于 $V\in\mathscr{U}(f(x))$,有 $U\in\mathscr{U}(x)$,使

$$f(U)\subset V$$

成立.若 f 在 X 的每一点都连续,则称 f 是**连续映射**.容易证明,f 连续当且仅当对 Y 的每个开集 G,其逆像

$$f^{-1}(G)=\{x\in X\mid f(x)\in G\}$$

是 X 的开集.如果 X 内任意两个不同的点有不同的像,就称 f 是**单射**.如果 Y 内每一点必是 X 内某一点的像,就称 f 是**满射**.从 X 到 Y 的每个既单又满的映射 f 必有逆映射 g,它是 Y 到 X 上的既单又满的映射,这里,$g(y)=x$ 当且仅当 $f(x)=y$.这时如果 f 和 g 都连续,便称 f 为**同胚映射**或**拓扑映射**.两个拓扑空间称为**同胚**的,是指它们之间存在一个同胚映射.在每个同胚映射下保持不变的性质称为**拓扑性质**.

设(X,τ)与(Y,σ)都是拓扑空间,$f: X\rightarrow Y$.称 f 为**开映射**,是指对任意 $G\in\tau$,必有 $f(G)\in\sigma$.称 f 为**闭映射**,是指对 X 的任意闭集 F,$f(F)$是 Y 的闭集.

拓扑 τ 的子族$\mathscr{B}$称为 τ 的**基或拓扑基**,是指 τ 的每个元可表为$\mathscr{B}$的一些元的并,这时,也说拓扑 τ 是由 $\mathscr{B}$生成的.拓扑 τ 的一个子族$\mathscr{V}$称为 τ 的一个**子基**,是指 $\mathscr{V}$中元的所有有限交构成的集族是 τ 的一个基.拓扑空间(X,τ)称为**第二可数**的,是指 τ 有一个可数基.

拓扑空间(X,τ)的点 x 的一族邻域$\mathscr{B}(x)$称为 x 的**邻域基**或**局部基**或**基本邻域系**,是指 x 的任意邻域都含有属于$\mathscr{B}(x)$的元.如果 X 的每一点都有一个可数局部基,便称 X 为**第一可数空间**.显然,第二可数空间必是第一可数空间.

定理 1　设 A 为第一可数空间 X 的子集,则 x 是 A 的接触点,当且仅当 x 是 A 的点列$\{x_n\}$在 X 中的极限,即对于 x 的任意邻域 U,有 $n_0\in N$,当 $n\geqslant n_0$ 时 $x_n\in U$.

推论　设 A 为第一可数空间 X 的子集,则 A 是闭集,当且仅当 A 是**序列闭**的,即当且仅当若 A 的点列$\{x_n\}$收敛于 $x\in X$,则 $x\in A$.

定理 2　若 X 为第一可数空间,Y 为拓扑空间,则映射 $f: X\to Y$ 是连续的,当且仅当 f 是**序列连续**的,即当且仅当若 X 的序列$\{x_n\}$收敛于 x,则 Y 的序列$\{f(x_n)\}$收敛于 $f(x)$.

定理 3　若 $f: X\to Y$ 为集 X 到拓扑空间(Y,σ)的映射,令

$$\tau=f^{-1}(\sigma)=\{f^{-1}(G)\mid G\in\sigma\},$$

则(X,τ)是拓扑空间,且 τ 是使 f 为连续的 X 上的最弱拓扑.

定理 3 确定的 X 的拓扑 τ 称为由拓扑空间(Y,σ)及映射 $f: X\to Y$ 确定的**诱导拓扑**.

定理 4　若 f 是拓扑空间(X,τ)到集 Y 上的满射,令

$$\sigma=\{G\mid G\subset Y, f^{-1}(G)\in\tau\},$$

则(Y,σ)是拓扑空间,且 σ 是使 f 为连续的 Y 上的最强拓扑.

定理 4 确定的 Y 上的拓扑 σ 称为由拓扑空间(X,τ)及满射 $f: X\to Y$ 确定的**诱导拓扑**.

设$\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\mid\alpha\in D\}$为拓扑空间族,令

$$X=\prod_{\alpha\in D}X_\alpha=\{(x_\alpha)_{\alpha\in D}\mid x_\alpha\in X_\alpha,\alpha\in D\}.$$

若 $P_\alpha: X\to X_\alpha$ 为 X 到 X_α 上的射影,则显然有

$$P_\alpha^{-1}(x_\alpha)=\{x\mid P_\alpha(x)=x_\alpha\}=\{x_\alpha\}\times\prod_{\substack{\beta\in D\\ \beta\neq\alpha}}X_\beta.$$

且对于 X_α 的开集 U_α,显然有

$$\begin{aligned}P_\alpha^{-1}(U_\alpha)&=\{x\mid P_\alpha(x)=x_\alpha\in U_\alpha\}\\&=U_\alpha\times\prod_{\substack{\beta\in D\\ \beta\neq\alpha}}X_\beta.\end{aligned}$$

以$\{P_\alpha^{-1}(U_\alpha)\mid\alpha\in D,U_\alpha\in\tau_\alpha\}$为子基在 X 上确定的拓扑,是使射影为连续的最弱拓扑,称它为**积拓扑**.

在 $\prod\limits_{\alpha\in D}X_\alpha$ 上还可以用其它方法确定拓扑.如以$\prod\limits_{\alpha\in D}\{U_\alpha\mid U_\alpha\in\tau_\alpha\}$为拓扑基确定的拓扑称为**箱拓扑**.显然,箱拓扑强于积拓扑.本书如无特别声明,所论的积空间都意味着具有积拓扑.

在积拓扑下的收敛称为**坐标收敛**.特别是所有 X_α 都相同时称为**逐点收敛**.

设(X,τ)是拓扑空间,ρ是 X 上的一个等价关系,而 Y 是 X 按关系 ρ 分成的等价类的集,即

$$Y=X/\rho\text{ 或 }Y=\{\rho(x)\mid x\in X\},$$

这里,当 $\rho(x)\cap\rho(y)\neq\varnothing$时,有 $\rho(x)=\rho(y)$.

设 P 为 X 到 Y 的映射,对 X 的每一元 x,有 $P(x)=\rho(x)$,即每一点 x 对应含 x 的类.当 σ 是 Y 上使 P 成为连续的最强拓扑,即由(X,τ)及 P 确定的 Y 的拓扑时,σ 称为 Y 上的**商拓扑**,而称(Y,σ)为**商空间**或**分解空间**.P 称为 X 到商空间 Y 上的**射影**或**商映射**.

拓扑空间 X 称为 $\boldsymbol{T_0}$ **空间**,是指对于 X 内任意两个不同的点 x,y,有 x 的邻域 U 使 $y\notin U$,或有 y 的邻域 V 使 $x\notin V$,二者之一必成立.

拓扑空间 X 称为 $\boldsymbol{T_1}$ **空间**,是指 X 内任意两个不同的点都各有一个邻域不含另一点.

容易证明,为使拓扑空间 X 是 $\boldsymbol{T_1}$ 空间,当且仅当单点集是闭集.

拓扑空间 X 称为 $\boldsymbol{T_2}$ **空间**或 **Hausdorff 空间**,是指 X 内任意两个不同的点都各有邻域互不相交.

拓扑空间 X 的开集 G 称为**正则开集**,是指 $G=(\overline{G})^{\circ}$;闭集 F 称为**正则闭集**,是指 $F=\overline{(F^{\circ})}$.称 X 为**半正则空间**,是指它是 T_2 空间,且其中一切正则开集所成之集族构成一个拓扑基.

称拓扑空间 X 为 $\boldsymbol{T_3}$ **空间**,是指 X 内每一点以及不含该点的任一闭集都各有邻域互不相交.T_3 空间同时为 T_1 空间时,称为**正则空间**.

有些书籍将 T_3 空间称为正则空间,而将正则空间称为 T_3 空间.

拓扑空间 X 称为 $\boldsymbol{T_{3\frac{1}{2}}}$ **空间**,是指对于 X 的每一点 x 及 x 的每个邻域 U,有从 X 到单位闭区间上的连续映射 f,使得 $f(x)=0$,并且在 $X\setminus U$ 上,f 恒等于 1.$T_{3\frac{1}{2}}$空间同时为 T_1 空间时,称为**完全正则空间**.

拓扑空间 X 称为 $\boldsymbol{T_4}$ **空间**,是指 X 内任意两个不相交的闭集都各有邻域互不相交.T_4 空间同时为 T_1 空间时,就称为**正规空间**.

有些书籍将 T_4 空间称为正规空间,而将正规空间称为 T_4 空间.

拓扑空间 X 称为 **Urysohn 空间**,是指对于 X 的任意相异两点 x,y,存在连续

函数 $f: X \to [0,1]$,使 $f(x)=0$, $f(y)=1$.

若拓扑空间 X 可表成它的两个非空的、不相交的开子集 A 与 B 的并集,则称 X 为**非连通空间**.若 X 不是非连通空间,则称它为**连通空间**.对于拓扑空间 X 的一个子集 E,若 E 作为 X 的子空间是连通的(非连通的),则称为 X 的**连通子集**(非连通子集).

以上非连通定义中"开子集",可以改为"闭子集",也可以改为"既开且闭的子集".

拓扑空间 X 是连通的,当且仅当 X 的子集中只有 X 与空集 $\varnothing$ 是既开且闭的.

称拓扑空间 X 是**紧的**,是指 X 的每个开覆盖必有有限子覆盖.

定理 5 (Tychonoff)　紧拓扑空间的直积关于积拓扑是紧空间.

拓扑空间 X 称为**局部紧空间**,是指对于每一点 $x \in X$,存在 $U \in \mathscr{U}(x)$,使得 $\bar{U}$ 是紧的.

对于非紧空间 X 常需要构造一个紧空间,以 X 为其稠密子空间.所构造的紧空间称为 X 的**紧化空间**.

拓扑空间的最简单的紧化是由添加一点而成.设(X, τ)为拓扑空间,令

$$X^* = X \cup \{\infty\},$$

$$\tau_1 = \{U \mid U^c \text{ 是 } X \text{ 的闭紧子集}, U \subset X^*\},$$

$$\tau^* = \tau \cup \tau_1,$$

则(X^*, τ^*)是(X, τ)的紧化空间.

定理 6　拓扑空间(X, τ)的一点紧化(X^*, τ^*)是紧空间,且 X 是 X^* 的稠密子空间.

本书的某些例子还要涉及 Stone-Cech 紧化.

关于拓扑空间的更多材料以及上述定理的证明均可参看文献[4]和[89].

1. 存在某个非离散的拓扑空间,其中每个开集都是闭集,而每个闭集也都是开集.

易见,离散拓扑空间中每个开集都是闭集,而每个闭集也都是开集.应当注意,这个命题之逆并不成立.例如,设 $\boldsymbol{X}$ 为自然数的全体,又设

$$P = \{\{2n-1, 2n\} \mid n = 1, 2, \cdots,\}.$$

命 $\boldsymbol{X}$ 的开集族为空集 $\varnothing$ 以及 P 中元素的并集,则此开集族确定了 X 上的一个拓扑 τ,称 τ 为**奇偶拓扑**.在拓扑空间(X, τ)中,每个开集都是闭集,而每个闭集也都是开集.然而,因单点集不是开集,故(X, τ)不是离散拓扑空间.

2. 存在某个集 $\boldsymbol{X}$ 上的两个拓扑,其并不是 $\boldsymbol{X}$ 上的拓扑.

设 $\tau = \{U_\alpha\}$ 与 $\tau' = \{U'_\beta\}$ 是集 X 上的两个拓扑.根据并集与交集的定义,有

$$\tau \cup \tau' = \{U_\alpha, U'_\beta\},$$

$$\tau \cap \tau' = \{V_r \mid V_r \in \tau, V_r \in \tau'\}.$$

容易验证,集 X 上任意个拓扑 τ_α 之交 $\tau=\bigcap_\alpha \tau_\alpha$ 仍是 X 上的一个拓扑.但是,X 上的两个拓扑之并未必是 X 上的拓扑.例如,设 $X=\{a, b, c\}$,其中 a, b, c 两两相异,则 X 的子集族

$$\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a\}\}$$

形成了 X 上的一个拓扑,而子集族

$$\tau_2 = \{X, \varnothing, \{b, c\}, \{b, a\}, \{b\}\}$$

形成了 X 上的另一个拓扑.显然,τ_1 与 τ_2 之并:

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \varnothing, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}\}$$

不是 X 上的拓扑.

注　容易证明,若 X 是一个至多含有两个点的集合,则 X 上任何两个拓扑之并仍是 X 上的拓扑.

3. 存在某个 Hausdorff 空间中的基本有界集,它不是紧有界的.

拓扑空间 X 的子集 A 称做**紧有界**的,是指 A 的闭包 $\bar{A}$ 是紧的;A 称做**基本有界**的,是指对于 X 的每个拓扑基,都可以从中选出有限个元,它们足以覆盖 A.

Hindman[80] 证明了:

定理 1(广义 Heine-Borel 定理)　拓扑空间中每个基本有界的闭集必是紧集.

定理 2(广义 Bolzano-Weierstrass 定理)　拓扑空间中每个基本有界的无限集必有聚点.

Hindman 还指出,每个紧有界集必是基本有界的.若拓扑空间是正则空间,则逆命题也成立.对于一般的拓扑空间即使是 Hausdorff 空间,基本有界集未必是紧有界的,他的例子如下:

设 X 是闭区间$[0,1]$, $A = X \setminus Q$, Q 为有理数集.命

$$\tau = \{U \cup (V \cap A) \mid U, V \text{ 是}[0,1]\text{ 上的通常拓扑下的开集}\}.$$

易见,τ 是 X 上的一个 Hausdorff 拓扑.任取拓扑空间(X, τ)的一个拓扑基 $\mathscr{B}$,我们可把 $\mathscr{B}$ 表成

$$\mathscr{B} = \{U_\delta \cup (V_\delta \cap A) \mid \delta \in \Delta\}.$$

于是,$\{U_\delta \mid \delta \in \Delta\} \cup \{V_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ 是$[0,1]$在通常拓扑下的一个开覆盖.因$[0,1]$是紧的,故存在有限子覆盖 $\{U_\delta \mid \delta \in \Delta'\} \cup \{V_\delta \mid \delta \in \Delta'\}$.但此时

$$A \subset \bigcup_{\delta \in \Delta'} (U_\delta \cup (V_\delta \cap A)),$$

因此,A 是基本有界的,又,拓扑空间(X, τ)显然不紧,而 $\bar{A} = X$,故 A 不是紧有界的.

4. 存在某个积空间 $X\times Y$ 中的不开的子集 A，使 $A[x]=\{y\mid(x,y)\in A\}$ 与 $A[y]=\{x\mid(x,y)\in A\}$ 分别是 Y 与 X 的开集.

容易证明，若 X，Y 是拓扑空间，A 是积空间 $X\times Y$ 中的开子集，令

$$A[x]=\{y\mid(x,y)\in A\},$$
$$A[y]=\{x\mid(x,y)\in A\},$$

则 $A[x]$ 与 $A[y]$ 分别是 Y 与 X 中的开子集.应当注意，这个命题之逆并不成立.例如，设 A 是过平面原点的两条对角线的补集，并加上原点$(0,0)$.在平面 $X\times Y=R\times R$ 上取通常拓扑，对任意 $x_0\in X$，$x_0\neq 0$，

$$A[x_0]=\{y\mid(x_0,y)\in A\}$$

是实直线 Y 中两个点$\{y_0,-y_0\}$所成之集的补集，因而是 Y 中的开集；而 $A[0]$ 就是实直线 Y，因而也是开集.同理，对于任意 $y\in Y$，$A[y]$ 是 X 中的开集.然而，A 不是 $X\times Y$ 中的开集，因为$(0,0)$不是 A 的内点(参看图 1).

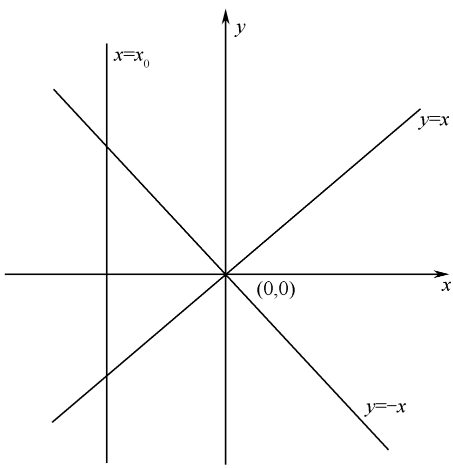

图 1

5. 存在某个集 X 上的两个拓扑 τ_1 与 τ_2，使 $\tau_1\subset\tau_2$，但(X,τ_1)中的半开集未必是(X,τ_2)中的半开集.

设 A 是拓扑空间 X 的子集，称 A 为**半开的**，是指存在开集 G，使得

$$G\subset A\subset\overline{G}.$$

半开集的概念是由 Levine[100]引入的.他指出，尽管 X 上的两个拓扑 τ_1 与 τ_2 而有 $\tau_1\subset\tau_2$，此时仍不能由 A 是(X,τ_1)中的半开集推出 A 是(X,τ_2)中的半开集，他的例子如下：

设 X 是实数集，τ_1 是由一切形如$(x,y)(x<y)$的区间生成的拓扑，τ_2 是由一切形如$[x,y)(x<y)$的区间生成的拓扑，则 $\tau_1\subset\tau_2$.显然，$(x,y]$是(X,τ_1)中的

半开集,但$(x,y]$不是(X,τ_2)中的半开集.

6. 存在某个集 X 上的两个不同的拓扑 τ_1 与 τ_2,使 A 是(X,τ_1)中的半开集当且仅当 A 是(X,τ_2)中的半开集.

我们用 So(X)代表拓扑空间 X 中的一切半开集所成的集族. Levine[100]猜测:若 So$(X,\tau_1)\subset$So(X,τ_2),则 $\tau_1\subset\tau_2$. 由此推知,若 So$(X,\tau_1)=$So(X,τ_2),则 $\tau_1=\tau_2$.

Hamlett[72]指出,这个猜测是不正确的. 例如,设 $X=\{a,b,c\}$,并令

$$\tau_1=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},X\},$$

$$\tau_2=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},X\}.$$

可以证明,A 是(X,τ_1)中的半开集当且仅当 A 是(X,τ_2)中的半开集. 然而,$\tau_1\neq\tau_2$.

7. 存在某个 S 闭空间,它的一个子空间不是 S 闭的.

设$\{A_\alpha\mid\alpha\in\Delta\}$是拓扑空间$(X,\tau)$中的一些半开集组成的集族. 若$\{A_\alpha\mid\alpha\in\Delta\}$是 X 的一个覆盖,则称$\{A_\alpha\mid\alpha\in\Delta\}$是 X 的一个**半开覆盖**或 ***S* 覆盖**.

拓扑空间 X 称做 ***S* 闭的**. 是指 X 的每个 S 覆盖$\{U_\alpha\}$,存在有限子集$\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n}$,使得

$$X\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}.$$

S 闭空间的子空间不必是 S 闭的. 封定,粟延龄[17]有例如下:

设 X 是实数集$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$,命非空开集为 $X\setminus C$,其中 C 是 X 的任一至多可数集(可以是空集),如此确定的开集全体形成 X 的一个拓扑. 显然,X 是 S 闭的.

设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$是 X 的可数子空间,则 A 是闭的. 对于每个 $x_i\in A$,因为

$$G=X\setminus\{A\setminus\{x_i\}\}$$

是 X 的开集,所以 $A\setminus\{x_i\}$是子空间 A 的闭集,于是单点集$\{x_i\}$是 A 的开集,从而 A 是离散子空间. 由此可知,A 不是 S 闭子空间.

8. 存在某个 S 闭空间的连续像,它不是 S 闭的.

王国俊[3]指出,为使拓扑空间 X 是 S 闭的,当且仅当从 X 的每个正则闭覆盖中都可选出 X 的有限子覆盖.

王国俊还引入了 S 连续映射的概念:设 X 与 Y 都是拓扑空间,$f:X\to Y$. 如果对 Y 中的每个正则闭集 P,$f^{-1}(P)$是 X 中的正则闭集的并,则称 f 为 ***S* 连续映射**. 王国俊证明了,若 X 是 S 闭空间,$f:X\to Y$ 是 X 到拓扑空间 Y 上的 S 连续满映射,则 Y 也是 S 闭空间.

应当注意，S 闭空间的连续像未必是 S 闭空间．例如，Thompson[166]证明了每个极端不连通的紧空间①是 S 闭的．由此推出 N 的 Stone-Cech 紧化 βN 是 S 闭的．然而，βN 的连续像 βR 并不 S 闭．

注　Thompson 证明了 S 闭空间的同胚像必是 S 闭的．

Cameron[43]也证明了，为使拓扑空间(X,τ)是 S 闭的，当且仅当每个由正则闭集组成的覆盖必有有限子覆盖．

Cameron 还指出，S 闭空间的连续像不必是 S 闭的，S 闭空间的商空间不必是 S 闭的．两个 S 闭空间之积不必是 S 闭的．

9．存在某个集上的一族 Urysohn 拓扑，其中不存在最弱的拓扑．

设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的一对一的映射．若对任一 $S\subset X$，S 是 X 的半开集当且仅当 $f(S)$是 Y 的半开集，则称 f 是 X 到 Y 上的**半同胚映射**，这时称 X 与 Y **半同胚**．在半同胚映射下保持不变的性质称为**半拓扑性质**．

设(X,τ)是拓扑空间，$[\tau]$表示与(X,τ)具有相同半开集族的全体拓扑空间组成的拓扑族．杨忠强[13]研究了$[\tau]$中存在最弱拓扑的条件，并指出，从(X,τ)的 T_1 分离性不足以推出$[\tau]$中存在最弱拓扑．事实上，即使假定(X,τ)是 Urysohn 空间（由文献[46]知这时$[\tau]$中所有拓扑空间都是 Urysohn 空间）也不能保证$[\tau]$中存在最弱拓扑．杨忠强的例子如下：

设 X 为全体实数，Q 为全体有理数，对任意 $x\in X$，定义点 x 的邻域基为

$$\mathscr{B}(x)=\left\{\{x\}\cup\left[\left(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right)\cap Q \mid n=1,2,\cdots\right]\right\}.$$

由此生成的拓扑空间(X,τ)是 Urysohn 空间，但$[\tau]$中不存在最弱拓扑．证明细节可参看作者原文．

注　杨忠强指出，S 闭性质是半拓扑性质．

10．存在某个由拓扑空间 X 到 Y 上的半同胚映射 f，它在 X 的某个子集 A 上的限制 $f|A$ 不是 A 到 $f(A)$上的半同胚映射．

设(X,τ)与(Y,σ)都是拓扑空间，$f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$是半同胚映射，$A\subset X$，则 $f|A:(A,\tau|A)\to(f(A),\sigma|f(A))$未必是半同胚映射，其中 $\tau|A$ 与 $\sigma|f(A)$ 分别表示 A 与 $f(A)$关于(X,τ)与(Y,σ)的相对拓扑．下面的例子是由郭驼英[25]作出的．

设 $X=\{1,2,3,4\}$，再设

$$\tau=\{\varnothing,X,\{1\}\},$$
$$\sigma=\{\varnothing,X,\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}.$$

令 $f:(X,\tau)\to(X,\sigma)$是恒等映射，则 f 是半同胚映射．取 $A=\{2,3\}$，则

① Hausdorff 空间 X 称做**极端不连通的**，是指 X 中每个开集的闭包是开集．

$$\tau \mid A=\{\varnothing,\{2,3\}\}, \sigma \mid f(A)=\{\varnothing,\{2,3\},\{2\},\{3\}\}.$$

显然,$f|A$ 不是半同胚映射.

11. 存在某个拓扑空间的紧子集,它不是 S 紧的.

设(X,τ)是拓扑空间.若对 X 的任一 S 覆盖必有有限子覆盖,则称 X 是 **S 紧的**.

显然,S 紧空间一定是紧空间,但紧空间未必是 S 紧的.例如,设 $X=[-1,1]$,并具有实数空间的子空间拓扑 τ,则拓扑空间(X,τ)是紧的.令

$$\mathscr{U}=[-1,0]\cup\left\{\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right] \,\middle|\, n\in N\right\},$$

则$\mathscr{U}$是 X 的一个 S 覆盖,但$\mathscr{U}$没有有限子覆盖.因此,X 不是 S 紧的.

12. 存在两个正则开集,其并不是正则开集.

正则开集的并集不必是正则开的.例如,设 X 是实数集并取通常拓扑,$G_1=\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$G_2=\left(\frac{1}{2},1\right)$,则 G_1 与 G_2 都是 X 的正则开集,但其并集

$$G_1\cup G_2=\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$$

不是正则开的.

13. 存在两个正则闭集,其交不是正则闭集.

两个正则闭集的交集不必是正则闭的.例如,设 X 是实数集并取通常拓扑,$F_1=\left[0,\frac{1}{2}\right]$,$F_2=\left[\frac{1}{2},1\right]$,则 F_1 与 F_2 都是 X 的正则闭集,但 $F_1\cap F_2=\left\{\frac{1}{2}\right\}$不是正则闭的.

14. 存在某个拓扑空间 X,其中每个非空子集在 X 中都是稠密的.

在集 X 上取平庸拓扑,则对任意 $A\subset X$,都有 $\bar{A}=X$,其中 $A\neq\varnothing$.

15. 存在某个有限集,其导集非空.

在 T_1 空间特别是度量空间内,有限集的导集必为空集.在一般的拓扑空间内,有限集的导集不必是空集.例如,设 $X=\{a,b,c\}$,令

$$\tau=\{X,\{a,b\},\{a,c\},\{a\},\varnothing\},$$

则(X,τ)为一拓扑空间.考虑 X 的子集 $A=\{a\}$,则点 b 和 c 都是 A 的聚点,故 $A'=\{b,c\}$,即有限集 A 的导集 A'非空.

16. 存在某个集的导集,它不是闭集.

在 T_1 空间内,一个集的导集必为闭集.在一般的拓扑空间内,一个集的导集未必是闭集.例如,设 $X=\{a,b,c\}$,令

$$\tau=\{X,\{a\},\{b,c\},\varnothing\},$$

则(X,τ)为一拓扑空间.取 $A=\{b\}$,易见,$A'=\{c\}$,且 A'不是闭集.

17. 存在某个 T_1 空间中的紧集,它不是闭的.

在一般拓扑空间甚至 T_1 空间中,紧集未必是闭的.例如,设 X 为实数集,命 X 的开集为空集 $\varnothing$ 以及一切 $X \setminus C$,其中 C 为任意有限集.此开集族形成 X 的一个拓扑 τ,我们称 τ 为**有限补拓扑**.这个拓扑空间中的有限集都是闭的,故它是一个 T_1 空间.

现取 X 的子集 $A=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$,并任取 A 的一个开覆盖

$$\mathscr{U}=\{U_\alpha = X \setminus C_\alpha \mid \alpha \in \Delta\},$$

其中 C_α 为有限集.于是,存在 $U_0 \in \mathscr{U}$,使 $0 \in U_0 = X \setminus C_0$.由于 C_0 是有限集,故存在某个区间 I,使 $0 \in I \subset U_0$.因此存在自然数 n_0,当 $n > n_0$ 时,就有

$$x_n = \frac{1}{n} \in I \subset U_0.$$

由此可见,我们可从 $\mathscr{U}$ 中选出有限多个开集 U_α,它们足以覆盖 A,即 A 是紧的.然而,由于 A 是无限集,故据拓扑 τ 的定义,A 不是闭的.

注　容易证明,紧拓扑空间中的闭集必是紧集.但是,紧拓扑空间中的紧集未必是闭集.例如,在集 X 上取平庸拓扑,则 X 为一紧拓扑空间.任取 X 的非空真子集 A,则 A 是紧的,但它不是闭的.

18. 存在某个拓扑空间,其中每个非空闭集都不是紧的.

设 $X=(0,1)$,并令

$$\tau=\left\{\varnothing, X, U_n=\left(0,1-\frac{1}{n}\right) \middle| n=2,3,\cdots\right\},$$

则 (X,τ) 为一拓扑空间.任取非空闭集 $F \subset X$,则 $\{U_n \mid n=2,3,\cdots\}$ 是 F 的一个开覆盖,它没有有限子覆盖,故 F 不是紧的.

19. 存在某个非 Hausdorff 空间,其中每个紧集都是闭的,而每个闭集也都是紧的.

容易证明,Hausdorff 空间中的紧集必为闭集.例 17 说明了在这个命题中,拓扑空间为 Hausdorff 空间的条件不可去掉.然而,也确实存在非 Hausdorff 空间.其中每个紧集都是闭的,而且每个闭集也都是紧的.下面的例子是由 Levine[101]作出的.

设 (Q,τ) 是有理数集并取实数空间的相对拓扑,(X,τ^*) 是 (Q,τ) 的一点紧化.由于 (Q,τ) 不是局部紧的,可见 (X,τ^*) 不是 Hausdorff 空间(参看文献[4],p.218),而是 T_1 空间.

可以证明,(X,τ^*) 中的每个闭集都是紧的,而每个紧集也都是闭的.证明细节可参看作者原文.

20. 存在某个紧集,其闭包不是紧集.

设 X 为一无限集,$a \in X$,命 X 的开集为空集以及含点 a 的任意子集,则单点

集 $A=\{a\}$是拓扑空间 X 的紧集,但 $\overline{A}=X$ 不是紧集.

21. 存在某个拓扑空间,它的每个紧集都不包含非空开集.

设 X 为实数集,并在 X 上取通常拓扑 τ,再设 Q 为有理数集.我们在 X 上取另一个拓扑 τ^*,它是由 τ 加上形如 $Q\cap U$ 的集构成,其中 $U\in\tau$.显然,拓扑 τ^* 强于拓扑 τ,而(X,τ)是 Hausdorff 空间,故(X,τ^*)也是 Hausdorff 空间.

兹证(X,τ^*)中的任何紧集都不包含非空开集.假如相反,即设(X,τ^*)中存在紧集 C,它包含非空开集 G.因(X,τ^*)是 Hausdorff 空间,故 C 必为闭集,从而 $\overline{G}\subset C$.根据拓扑 τ^* 的定义,$\overline{G}$ 必包含某个闭区间$[p,q]$,其中 $p,q\in Q$.于是,集族

$$\mathscr{U}=\{(-\infty,p),(q,+\infty),Q,(x,q)\mid x>p,x\in X\setminus Q\}$$

就构成了紧集 C 的一个开覆盖.任取有限个$(x_1,q),(x_2,q),\cdots,(x_n,q)$,其中 $x_i\in X\setminus Q$, $i=1,2,\cdots,n$,令

$$x_0=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},$$

则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(x_i,q)=(x_0,q)$. 由于 $p<x_0$,故$(-\infty,p)$, Q,(x_0,q),$(q,+\infty)$不能覆盖 C,这与 C 是紧集的条件发生矛盾.可见 C 不包含非空开集.

22. 存在某个无限拓扑空间,其中每个子集都是紧的.

设 X 为一无限集,命 X 的闭集为$\varnothing$, X 以及任意有限集.对 X 的任意一个开覆盖,这些开集中的任意一个只盖不住有限个集,例如 n 个点.于是,我们可以从这个开覆盖中至多选出 n 个开集,它们覆盖了这 n 个点.因此,连同前面一个开集共至多 $n+1$ 个开集就覆盖了 X,故 X 是紧的.显然,X 的每个子集也都是紧的.

23. 存在实数集上的一个 Hausdorff 拓扑,它的任何有理数子集的导集都是空集.

设 X 为实数集,对任意 $\varepsilon>0$ 及 $x\in X$,令

$$U_\varepsilon(x)=\{y\mid |x-y|<\varepsilon \text{ 且当 } y\neq x \text{ 时}, y \text{ 为无理数}\}.$$

不难验证,全体 $U_\varepsilon(x)$生成 X 上的一个 Hausdorff 拓扑,从而 X 为一 Hausdorff 空间.

设 A 为 X 的任一有理数子集,任取 $x\in X$,因为 x 的每个邻域不含有 $A\setminus\{x\}$ 的点,故 $x\notin A'$.由于 $x\in X$ 是任取的,因而 $A'=\varnothing$.

24. 存在某个无限拓扑空间,其中不含有无限孤立点集.

可以证明,每个无限 Hausdorff 空间必定含有无限孤立点集.对于一般的拓扑空间,这一命题并不成立.例如,设 X 为一无限集,对 X 的子集 A,当 A 为有限集或为空集时,令 $\overline{A}=A$;当 A 为无限集时,令 $\overline{A}=X$.于是,X 为一拓扑空间.易见,X 中不存在无限孤立点集.

25. 存在某个非离散的拓扑空间,其中每个紧集都是有限集.

我们知道,拓扑空间中的有限集必为紧集,但紧集未必是有限集.我们称拓扑空间 X 为 **cf 空间**,是指 X 中每个紧集都是有限集.例如,设 X 为任一非空集合,在 X 上取离散拓扑,则 X 为一 cf 空间.

除了离散的 cf 空间外,也确实存在无限的非离散的 cf 空间.例如,设 X 为一自然数集,命

$$\tau = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \cdots, \{1,2,\cdots,n\}, \cdots, X\},$$

则 (X, τ) 为一非离散的 cf 空间.又如,设 X 为任一无限集,命 X 的开集或为空集,或为其补集至多是可数的,则 X 也是一个非离的 cf 空间.

26. 存在集 X 上两个不可比较的拓扑 τ_1 与 τ_2,使 (X, τ_1) 与 (X, τ_2) 同胚.

设 X 为一集,$a, b \in X$ 且 $a \neq b$.命开集族 τ_1 为 X,$\varnothing$以及含点 a 的一切子集;又命开集族 τ_2 为 X,$\varnothing$以及含点 b 的一切子集.于是,拓扑空间(X, τ_1)与拓扑空间(X, τ_2)是不可比较的.另一方面,不难看出,

$$f(x) = \begin{cases} x, x \neq a, b, \\ a, x = b, \\ b, x = a \end{cases}$$

是(X, τ_1)到(X, τ_2)上的一个同胚映射,从而(X, τ_1)与(X, τ_2)是同胚的拓扑空间.

27. 存在两个拓扑空间 X 与 Y,使 X 同胚于 Y 的一个子空间,而 Y 同胚于 X 的一个子空间,但 X 与 Y 并不同胚.

在实数集 R 上取通常拓扑.令 $X=(0,1)$,$Y=[0,1]$,并在 X 与 Y 上都取相对拓扑,则拓扑空间 X 同胚于拓扑空间 Y 的子空间$(0,1)$,Y 同胚于 X 的子空间 $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$,但 X 与 Y 并不同胚.

28. 存在一维欧氏空间 $\boldsymbol{R}$ 的两个同胚的子空间 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$,而不存在 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 上的同胚映射 $\boldsymbol{f}$,使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}$.

取 $A=\{0\}\cup[1,2]\cup\{3\}$,$B=[0,1]\cup\{2\}\cup\{3\}$,则

$$g(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2, & x = 0, \\ 3, & x = 3 \end{cases}$$

是子空间 A 到子空间 B 上的同胚映射,从而 A 与 B 是 R 的两个同胚的子空间.但不存在 R 到 R 上的同胚映射 f,使 $f(A)=B$.

29. 存在某个非紧的度量空间 X,使 X 上的每个实值连续函数都是一致连续的.

我们知道,紧度量空间上的每个实值连续函数都是有界的,并且是一致连续

的.于是便产生下述问题：

(i) 若度量空间 X 上的每个实值连续函数都是有界的,则 X 是否必为紧的?

(ii) 若度量空间 X 上的每个实值连续函数都是一致连续的,则 X 是否必为紧的?

Hewitt[79]肯定地回答了第一个问题.他证明了,为使度量空间 X 是紧的,当且仅当 X 上每个实值连续函数都是有界的.

容易证明,对于欧氏空间中的子集 A,第二个问题的答案也是肯定的,即 A 为紧集的充要条件是 A 上的每个实值连续函数都是一致连续的.然而,对于一般的度量空间,尽管在它上面的每个实值连续函数都是一致连续的,但该空间仍然是不必紧的.例如,在实数集 R 上取离散距离,即

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

显然,度量空间(R,d)上的每个实值函数都是连续的,而且还是一致连续的.但是,度量空间(R,d)不是紧的.

Hermann[75]于 1981 年指出,为使度量空间 X 是紧的,当且仅当下面两个条件成立：

(i) X 上的每个实值连续函数都是一致连续的.

(ii) 对任意 $\varepsilon>0$,$\{x \mid x\in X, d(x)>\varepsilon\}$是有限集,其中 $d(x)$代表点 x 到集 $X\setminus\{x\}$的距离,即

$$d(x)=\inf\{d(x,y)\mid y\in X\setminus\{x\}\}.$$

30. R^2 中存在不同胚的子集.

考虑二维欧氏空间 R^2 的子集

$$X=\{x\mid d(x,p_0)=1 \text{ 或 } d(x,p_1)=1\},$$

$$Y=\{x\mid d(x,p_2)=1\},$$

这里,$p_0=(-1,0)$,$p_1=(1,0)$,$p_2=(5,0)$(见图 2).

兹证 X 与 Y 并不同胚.假如相反,即存在同胚映射 $f\colon X\to Y$.令 $q=f(0)$,

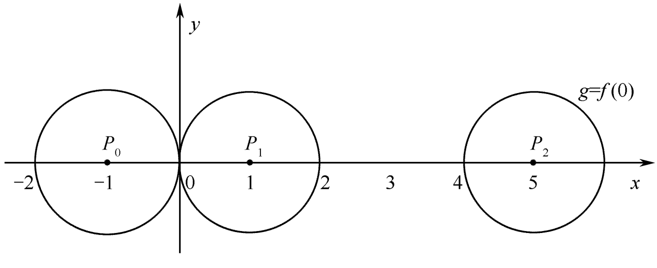

图 2