P124.

8. 令 $A_1 = \begin{pmatrix} a & b & \\ & a & b \\ & & a \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} c & d \\ & c \end{pmatrix}$.

则 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$.

$f_{A_1}(x) = (x-a)^3$. $f_{A_2}(x) = (x-c)^2$

$A_1 - aE = \begin{pmatrix} 0 & b & \\ & 0 & b \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $(A_1 - aE)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $(A_1 - aE)^3 = 0$.

$A_2 - cE = \begin{pmatrix} 0 & d \\ & 0 \end{pmatrix}$ $(A_2 - cE)^2 = 0$.

$\therefore g_{A_1}(x) = (x-a)^3$. $g_{A_2}(x) = (x-c)^2$.

$$g_A(x) = \begin{cases} (x-a)^3 (x-c)^2, & a \neq c. \\ (x-a)^3, & a = c. \end{cases}$$

9. 设 $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{r_i}$. 在 $\mathbb{C}$ 上,

$$m(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{k_i} \quad 0 \leq k_i \leq r_i$$

$$m^t(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{k_i t}$$

对于A的特征值λ. 有$A\xi = \lambda\xi$. ($\xi$为A的特征向量)

$$m(\lambda) = \sum_{i=0}^{q} c_i \lambda^i$$

$$m(A)\xi = \sum_{i=0}^{q} c_i A^i = \left(\sum_{i=0}^{q} c_i \lambda_i\right)\xi = m(\lambda)\xi.$$

$$m(\lambda)\xi = m(A)\xi = 0, \quad \therefore\ m(\lambda) = 0.$$

因此 A 的特征值必是 $m(\lambda)$ 的根，即 $k_i > 0$.

只要取 $t = \max\left\{\left[\frac{r_i}{k_i}\right]\right\}$，就有 $f(x) \mid m^t(x)$.

10. 在 $\mathbb{C}$ 上讨论.

充分性：若 $(\varphi(x), m(x)) = 1$.

则 $m(x)$ 与 $\varphi(x)$ 没有公共根.

既然 A 的特征值都是 $m(x)$ 的根.

则 $m(\lambda) \neq 0$. ($\lambda$ 是 A 的特征值)

必要性：$\lambda$ 是 A 的特征值.

$\varphi(\lambda) \neq 0$. 对于所有的 $\lambda$.

则 $\varphi(\lambda)$ 没有根是 A 的特征值.

而 $m(x) \mid f_A(x)$，$m(x)$ 的根都是 A 的特征值.

所以 $m(x)$ 与 $\varphi(x)$ 无公共根.

即 $(m(x), \varphi(x)) = 1$.