浙江大学 2007-2008 学年 春夏 学期

《高等代数 II》课程期末考试试卷

开课学院：理学院，考试形式：闭卷，允许带__________入场

考试时间：2008 年 6 月 29 日，所需时间：120 分钟，任课老师：________

考生姓名：____________学号：________________专业：理科试验班

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

一、 选择题（每小题 3 分，共 12 分）

1．设 $W=\{(a,a+b,a-b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}$，这里 $\mathbf{R}$ 为实数集，则 （ ）

(A) W 与 $\mathbf{R}^2$ 同构。
(B) W 与 $\mathbf{R}^3$ 同构。
(C) W 与 $\mathbf{R}^2$ 的一个真子空间同构。
(D) $\mathbf{R}^2$ 与 W 的一个真子空间同构。

2. 设 V_1，V_2 是偶氏空间 V 的两个子空间，则 V_2 是 V_1 的正交补的充要条件是 ( )
(A) $V=V_1+V_2,\ V_1\cap V_2=0$
(B) $V_1\perp V_2$
(C) $V=V_1+V_2,\ \dim \mathrm{V}=\dim V_1+\dim V_2$
(D) $V=V_1+V_2$， 且 $\forall\alpha\in V_1$， $\beta\in V_2$ 有 $(\alpha,\beta)=0$

3. 设 A 是欧氏空间 V 的线性变换，则 A 是正交变换的必要而非充分条件是( )
(A) $\forall\alpha,\beta\in V$，$\langle A\alpha,A\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$
(B) $\forall\alpha\in V,|A\alpha|=|\alpha|$
(C) $\forall\alpha,\beta\in V$，$(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)$
(D) A 在 V 的任何一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵
（注：其中 $\langle,\rangle$ 表示两个向量的夹角，（,）表示该空间的内积。）

4. 设 A 是线性空间 V 的线性变换，$W_1,\cdots,W_n$ 都是 V 的一组 A-不变子空间，且 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_n$，则 V 中一定存在一组基，使 A 在该基下的矩阵是( )
(A) 对角矩阵 (B) 反对称矩阵 (C) 可逆矩阵 (D) 准对角矩阵

二、 判断题（对的打 √，错的打×）（每小题 3 分，共 12 分）

1. 若两个 $m \times n$ 的 $\lambda -$ 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的秩,则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价 (　　).

2. 在 R^3 空间中， A 是 V 中任一向量在 xoy 平面上的垂直投影的线性变换，则
   (i) $\operatorname{Im} A \cap \ker A = \{0\}$. (　　)；　　　　(ii) $\operatorname{Im} A + \ker A = V$. (　　)

3. 欧氏空间中保持长度不变的变换是正交变换. (　　)

4. 多项式 $x^3 - 6x^2 + 16x - 14$ 在有理数域上不可约. (　　)

三、 填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. 若矩阵 A 的全部初等因子为 $\lambda - 1, (\lambda - 1)^2, (\lambda + 2)^2$，则 A 的不变因子为

   ____.

2. 设 σ, τ 是 R^2 空间的线性变换，定义为 $\sigma(x, y) = (0, x),\ \tau(x, y) = (y, x),\ \forall x, y \in R,$

   则 $(2\sigma^2 - 3\tau)(x, y) =$ ________________________________.

3. 已知 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 30x - 13$ 有一个根为 $2 - 3i$, 则 $f(x)$ 在实数域上典型分解式为 $f(x) =$ ____________________________.

4. 设 s 为有限维复线性空间上的一个线性变换，l 为 s 的一个特征值，若 r_1, r_2 分别表示 s 的属于特征值 l 的特征子空间和根子空间的维数，r_3 表示 l 的重数，则 r_1, r_2, r_3 的大小关系满足______________________________。

四、（本题 15 分）

求 $A=\begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ 的若当标准形和最小多项式。

五.（本题 10 分）

. 试求多项式 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ 和 $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ 的最大公因式。

六.（本题 10 分）

（1）设W_1,W_2是数域P上的有限维线性空间，$\dim W_1 = n$, σ为定义在W_1上取值于W_2中的线性映射，试证明$\dim(\mathrm{Im}\,\sigma) + \dim(Ker\,\sigma) = n$。

（2）试利用(1)的结论解释齐次线性方程组$A_{m\times n}x = 0$的解空间维数为$n - r(A)$。

七．（本题 10 分）设 A 是数域 $\mathbf{P}$ 上的 n 阶方阵，证明 A 与 A^T 相似。

八、（本题 15 分）

实二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 4bx_2x_3$ 通过 R^3 上的正交线性变换 T 化为标准型 $g = y_2^2 + 2y_3^2$，求参数 a,b 及所用的正交变换 T 。