> 设V是一个n维欧式空间, $n \geq 2$. 证明: V上任一个正交变换均可表示成个数不超过n的镜面反射之积.

证:

设$\mathcal{A}$是V上的正交变换, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$是$V$的一组标准正交基, 令

$$\eta_i = \mathcal{A}\varepsilon_i,\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

既然$\mathcal{A}$是正交变换, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$也是$V$的标准正交基.

如果$\varepsilon_i = \eta_i$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则只要取$\mathcal{A}_1$满足

$$\mathcal{A}_1\xi = \xi - 2(\varepsilon_1, \xi)\varepsilon_1$$

就有, $\mathcal{A}_1$是V上的镜面反射且

$$\mathcal{A}_1\varepsilon_1 = -\varepsilon_1, \mathcal{A}_1\varepsilon_i = \varepsilon_i, (i = 2, \cdots, n).$$

于是有

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_1$$

既然$n \geq 2$, 结论成立.

当ε_i与η_i不尽相同时, 不妨设$\varepsilon_1 \neq \eta_1$, 用数学归纳法.

当$n = 2$时, 存在镜面反射$\mathcal{A}_1$使得$\mathcal{A}_1\varepsilon_1 = \eta_1$, 设$\mathcal{A}_1\varepsilon_2 = \xi_2$, 则$\eta_1, \xi_2$也是$V$的一组标准正交基.

如果$\xi_2 = \eta_2$, 取$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$即可.

否则, $\xi_2 \neq \eta_2$, 可以选出$\mathcal{B} : V \to V$使得$\mathcal{B}\eta_1 = \eta_1, \mathcal{B}\xi_2 = \eta_2$.

既然η_1, ξ_2和η_1, η_2都是V上的标准正交基, $\mathcal{B}$可以线性扩张为V上的一个正交变换, 这时有

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{A}_1$$

显然$B|_{L(\xi_2)}$是$L(\xi_2)$上的一个正交变换.

既然$\xi_2 \neq \eta_2$, 在$L(\xi_2)$中存在一个镜面反射$\mathcal{A}_2$使得$\mathcal{A}_2\xi_2 = \eta_2$. 令$B = \mathcal{A}_2$即可让结论成立.

假设在小于n的情况下结论均成立, 对于等于n的情况,

首先一定存在镜面反射$\mathcal{A}_1$, 使得$\mathcal{A}_1\varepsilon_1 = \eta_1$, 设$\mathcal{A}_1\varepsilon_i = \xi_i, (i = 2, \cdots, n)$.

取$\mathcal{B} : V \to V$使得$\mathcal{B}\eta_1 = \eta_1, \mathcal{B}\xi_i = \eta_i, (i = 2, \cdots, n)$.

既然$\eta_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$和$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$都是$V$的标准正交基, $\mathcal{B}$可以线性扩张为V上的一个正交变换.

这时有

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{A}_1$$

令$V_1 = L(\xi_2, \cdots, \xi_n) = L(\eta_2, \cdots, \eta_n)$, 则$V = L(\eta_1) \oplus V_1$, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{B}|_{V_1} : &V_1 \to V_1 \\ &\alpha \to \mathcal{B}\alpha \end{aligned}$$

是V_1上的一个正交变换.

由归纳假设, $\mathcal{B}|_{V_1}$可以表示成V_1上一些镜面反射的乘积

$$\mathcal{B}|_{V_1} = \mathcal{C}_s \cdots \mathcal{C}_2$$

其中$s \leq n$.

定义

$$\mathcal{A}_i : V \to V,\ i = 2, \cdots, s$$

使得对于任意$\alpha = k\eta_1 + \beta \in L(\eta_1) + V_1 = V$, 有$\mathcal{A}_i \alpha = k\eta_1 + \mathcal{C}_i(\beta)$.

这时$A_i\ (i = 2, \cdots, s)$都是V上的镜面反射而且

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_s \cdots \mathcal{A}_2$$

于是就有

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_s \cdots \mathcal{A}_1$$

其中$s \leq n$.

由归纳原理, 可以知道n维线性空间V中的任一正交变换都可以表示为不超过n个镜面反射的乘积.

证毕.