P86.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$AM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+3b \\ c & 2c+3d \end{pmatrix}.$$

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$$

$$AM - MA = \begin{pmatrix} -2c & 2a+2b-2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix}$$

令 $AM - MA = 0$, 则 $c = 0$, $a + b = d$.

$$\operatorname{Ker} \tau = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$\operatorname{Im} \tau = L\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

3. (1) 若 σ 与 τ 有相同的像集.

则 $\operatorname{Im} \sigma = \operatorname{Im} \tau$, 任意 $\alpha \in V$. 必有 $\beta \in V$.

s.t. $\sigma(\alpha) = \tau(\beta)$.

$\tau\sigma(\alpha) = \tau\tau(\beta) = \tau^2(\beta) = \tau(\beta) = \sigma(\alpha)$.

因此 $\tau\sigma = \sigma$. 类似的有 $\sigma\tau = \tau$.

若 $\sigma\tau = \tau$. $\tau\sigma = \sigma$.

$\sigma\tau = \tau$. 则 $\operatorname{Im}\tau \subset \operatorname{Im}\sigma$.

$\tau\sigma = \sigma$, 则 $\operatorname{Im}\sigma \subset \operatorname{Im}\tau$. 因此, $\operatorname{Im}\sigma = \operatorname{Im}\tau$.

(2). "⇒" $\ker\tau=\ker\sigma$，则有 $\sigma(\alpha)=0\to\tau(\alpha)=0$

任取 $\beta\in V$. $\sigma(\beta-\sigma(\beta))=\sigma(\beta)-\sigma^2(\beta)=0$.

于是有 $\tau(\beta-\sigma(\beta))=0$，$\tau(\beta)=\tau\sigma(\beta)=0$. $\tau\sigma=\tau$.

类似的有 $\sigma\tau=\sigma$.

"⇐" 对于任意 $\alpha\in\ker\sigma$. $\sigma(\alpha)=0$ $\tau(\alpha)=\tau(\sigma(\alpha))=0$.

有 $\ker\sigma\subset\ker\tau$. 类似的，有 $\ker\tau\subset\ker\sigma$.

因此，$\ker\tau=\ker\sigma$.

4. $1+i\to(1,0)$. $1-i\to(0,1)$.

则 $1\to(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. $i\to(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

$\sigma(a+bi)=(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b)$. $(a,b\in\mathbb{R})$.

5. 令 $f(x)=e^x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$，$\mathbb{R}^+$ 仍然全体正实数.

$f(\mathbb{R})=\mathbb{R}^+$，$f$ 是满的.

而且显然 f 是单的. 因此 f 是 1-1 的.

∴ $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^+$ 关于 f 是同构的.

6. V_α: 所有以 α 为根的 F 上的多项式.

设 $f\in V_\alpha$，$g\in V_\alpha$，则 $f(\alpha)=g(\alpha)=0$. $(f+g)(\alpha)=0$.

$kf(\alpha)=0$. ∴ V_α 是 F 上的线性空间，

类似的，V_β 也是 F 上的线性空间.

对于 P 上任一多项式 f

$$f - f(\alpha) \in V_\alpha, \quad f - f(\beta) \in V_\beta.$$

V_α，V_β 中的任一元素都能这样表示。

这也找到了一个 V_α 与 V_β 间的一一映射 σ.

对于任意 P 中的 k.

$$kf - kf(\alpha) \in V_\alpha. \quad kf - kf(\beta) \in V_\beta.$$

任意 P 上的 f, g.

$$f+g - (f+g)(\alpha) \in V_\alpha. \quad f+g - (f+g)(\beta) \in V_\beta.$$

因此 σ 是一个线性 1-1 映射.

$\therefore$ V_α 与 V_β 同构.