

现代数学基础丛书 66

拓扑空间中的反例

汪 林 杨富春 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书汇集了拓扑空间与线性拓扑空间方面的大量反例.主要内容为:拓扑空间、可数性公理、分离性公理、连通性、紧性、局部凸空间、桶空间和囿空间、线性拓扑空间中的基.

本书可供高等院校理工科学生、研究生、教师参考.

现代数学基础丛书 66

拓扑空间中的反例

汪 林 杨富春 编著

责任编辑 吕 虹

封面设计 黄华斌

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000 年 6 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2003 年 8 月第二次印刷 印张:12 3/4

印数:3001—5 500 字数:219 000

ISBN 7-03-008211-7

定价:25.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

《现代数学基础丛书》编委会

副主编:夏道行 龚 昇 王梓坤 齐民友

编 委:(以姓氏笔画为序)

万哲先 王世强 王柔怀 叶彦谦

孙永生 江泽坚 江泽培 李大潜

陈希孺 张恭庆 严志达 胡和生

姜伯驹 聂灵沼 莫绍揆 曹锡华

序 言

在数学的教学和研究中,经常需要用反例来说明某个命题不真,而绝大多数的数学书籍,主要是致力于证明在某些条件下某一结论是真,但很少谈到在另一些条件下某一结论是正确的还是错误的,即用来说明某些命题不真的反例较少,这不利于学习的深入.因此,比较系统地汇集某个数学分支的反例以弥补这方面的不足,无疑是十分有益的.基于这一想法,我们撰写了本书.

本书的取材,主要是从各种有关的书籍以及近几十年散见在国内外各种数学杂志上的反例中挑选出来的;也有一些例子取自 L. A. Steen 与 J. A. Seebach, Jr 合著的“Counter-Examples in Topology”和 S. M. Khaleelulla 著的“Counterexamples in Topological Vector Spaces”两本书;还有一部分是我们在长期的教学和研究实践中构造的.书中还介绍了最近几年才发展起来的集值分析方面的例子.阅读本书所需的预备知识,假定读者已经掌握,因此,书中只准备了很少的说明.每一章都以引言开始,用来明确所用的记号、术语和定义,也陈述了一些有关的定理,这些定理或者是构造某些反例时要用到的,或者是为了衬托某个反例.各章引言部分一般未介绍实分析与泛函分析方面的术语与记号,有关这方面的内容,读者可参看[9]与[10].此外,在许多例子的后面,以“注”的形式把这个反例与某个正面的命题相比较,以便读者更好地了解到这个命题的条件所起的作用和所举反例的意义.

本书得到云南大学学术著作和教材出版基金、云南省科委和教委应用基础研究基金资助.已故的中国科学院院士程民德教授仔细地审阅了书稿,并提出了许多具体而又宝贵的意见;A. C. Thompson^①教授给作者们以很大的鼓励,并提供了一些反例;云南大学卫念祖教授始终关怀本书的撰写;科学出版社对本书的出版工作给予了极大的支持.在此,作者谨向他们致以深深的谢意.

由于作者水平所限,一定存在不少缺点,殷切期望专家和读者予以批评指教.

汪 林 杨富春

1998 年 12 月于云南大学

^① A. C. Thompson 教授(加拿大),1979 年 9 月至 1980 年 7 月曾在我国讲学,并在南京大学主持了一个泛函分析讨论班.

目 录

序言

第一章 拓扑空间	(1)
引言	(1)
1. 存在某个非离散的拓扑空间,其中每个开集都是闭集,而每个闭集也都是开集	(5)
2. 存在某个集 X 上的两个拓扑,其并不是 X 上的拓扑	(5)
3. 存在某个 Hausdorff 空间中的基本有界集,它不是紧有界的	(6)
4. 存在某个积空间 $X \times Y$ 中的不开的子集 A ,使 $A[x] = \{y (x, y) \in A\}$ 与 $A[y] = \{x (x, y) \in A\}$ 分别是 Y 与 X 的开集	(7)
5. 存在某个集 X 上的两个拓扑 τ_1 与 τ_2 ,使 $\tau_1 \subset \tau_2$,但 (X, τ_1) 中的半开集未必是 (X, τ_2) 中的半开集	(7)
6. 存在某个集 X 上的两个不同的拓扑 τ_1 与 τ_2 ,使 A 是 (X, τ_1) 中的半开集当且仅当 A 是 (X, τ_2) 中的半开集	(8)
7. 存在某个 S 闭空间,它的一个子空间不是 S 闭的	(8)
8. 存在某个 S 闭空间的连续像,它不是 S 闭的	(8)
9. 存在某个集上的一族 Urysohn 拓扑,其中不存在最弱的拓扑	(9)
10. 存在某个由拓扑空间 X 到 Y 上的半同胚映射 f ,它在 X 的某个子集 A 上的限制 $f A$ 不是 A 到 $f(A)$ 上的半同胚映射	(9)
11. 存在某个拓扑空间的紧子集,它不是 S 紧的	(10)
12. 存在两个正则开集,其并不是正则开集	(10)
13. 存在两个正则闭集,其交不是正则闭集	(10)
14. 存在某个拓扑空间 X ,其中每个非空子集在 X 中都是稠密的	(10)
15. 存在某个有限集,其导集非空	(10)
16. 存在某个集的导集,它不是闭集	(10)
17. 存在某个 T_1 空间中的紧集,它不是闭的	(11)
18. 存在某个拓扑空间,其中每个非空闭集都不是紧的	(11)
19. 存在某个非 Hausdorff 空间,其中每个紧集都是闭的,而每个闭集也都是紧的	(11)
20. 存在某个紧集,其闭包不是紧集	(11)
21. 存在某个拓扑空间,它的每个紧集都不包含非空开集	(12)
22. 存在某个无限拓扑空间,其中每个子集都是紧的	(12)
23. 存在实数集上的一个 Hausdorff 拓扑,它的任何有理数子集的导集都是空集 ..	(12)
24. 存在某个无限拓扑空间,其中不含有无限孤立点集	(12)

25. 存在某个非离散的拓扑空间,其中每个紧集都是有限集	(13)
26. 存在集 X 上两个不可比较的拓扑 τ_1 与 τ_2 ,使 (X, τ_1) 与 (X, τ_2) 同胚	(13)
27. 存在两个拓扑空间 X 与 Y ,使 X 同胚于 Y 的一个子空间,而 Y 同胚于 X 的一个子空间,但 X 与 Y 并不同胚	(13)
28. 存在一维欧氏空间 R 的两个同胚的子空间 A 与 B ,而不存在 R 到 R 上的同胚映射 f ,使 $f(A)=B$	(13)
29. 存在某个非紧的度量空间 X ,使 X 上的每个实值连续函数都是一致连续的 ...	(13)
30. R^2 中存在不同胚的子集	(14)
31. 存在两个同胚的度量空间 X 与 Y ,其中 X 中的有界集都是全有界的,而 Y 中的有界集并不都是全有界的	(15)
32. 存在两个度量空间 X 与 Y ,使 X^2 与 Y^2 等距而 X 与 Y 并不等距	(15)
33. 存在某个非紧的度量空间,它不能与其真子集等距	(16)
34. 存在某个拓扑空间 X , X 的点都是函数,其拓扑相当于逐点收敛,而 X 不是可度量化化的空间	(16)
35. 存在某个函数序列 $\{f_n\}$,其图像序列 $\{G(f_n)\}$ 收敛,但 $\{f_n\}$ 并不一致收敛	(17)
第二章 映射与极限	(18)
引言	(18)
1. 存在无界的收敛实数网	(19)
2. 存在某个序列的子网,它不是子序列	(19)
3. 存在某个网 $\{x_\alpha \alpha \in A\}$ 及 A 的一个无限子集 B ,使 $\{x_\beta \beta \in B\}$ 不是子网	(19)
4. 存在某个序列闭集,它不是闭集	(20)
5. 存在某个拓扑空间的序列,它收敛于该空间的每一个点	(20)
6. 存在某个集 X 上的两个拓扑 τ_1 与 τ_2 ,凡 $\{x_n\}$ 依 τ_1 收敛于 x 必蕴涵 $\{x_n\}$ 依 τ_2 收敛于 x ,但 τ_1 并不强于 τ_2	(20)
7. 至多有一个聚点的拓扑空间	(20)
8. 1° 子集 A 以点 x 为聚点; $2^\circ A \setminus \{x\}$ 中存在序列收敛于 x ; $3^\circ A \setminus \{x\}$ 中存在完全不同的点所成的序列收敛于 x .上述三个命题彼此不等价	(21)
9. 存在某个具有聚点的可数集 S ,而在 S 中不存在收敛于该聚点的序列	(21)
10. 存在某个非第一可数空间,使得每个集每个聚点必是该集中某个序列的极限	(22)
11. 存在两个拓扑空间,其中每个集每个聚点必是该集中某个序列的极限,但其积空间却无此性质	(23)
12. 聚点、 ω 聚点与凝聚点这三个概念两两相异	(23)
13. 一个非 Hausdorff 空间,其中收敛序列的极限都是唯一的	(24)
14. 存在某个拓扑空间到另一个拓扑空间上的映射,它是连续的,但既不是开的也不是闭的	(24)
15. 存在某个拓扑空间到另一个拓扑空间上的映射,它是开的和闭的,但不是连续的	(25)

16. 存在某个拓扑空间到另一个拓扑空间上的映射,它是闭的,但既不是开的也不是连续的	(25)
17. 存在某个拓扑空间到另一个拓扑空间上的映射,它是连续的和开的,但不是闭的	(26)
18. 存在某个拓扑空间到另一个拓扑空间上的映射,它是开的,但既不是连续的也不是闭的	(26)
19. 存在某个拓扑空间到另一个拓扑空间上的映射,它是连续的和闭的,但不是开的	(26)
20. 存在某个一对一的闭映射,其逆映射不是闭映射	(26)
21. 存在某个拓扑空间 X 到另一个拓扑空间 Y 的两个连续而不相等的映射,它们在 X 的某个稠密子集上取值相同	(27)
22. 存在某个不连续映射,它把紧集映成紧集	(27)
23. 存在两个连续闭映射 f 与 g ,使 $f \times g$ 不是闭映射	(27)
24. 存在半连续而不连续的映射	(28)
25. 存在两个半连续映射,它们的和与积并不半连续	(28)
26. 存在某个半连续映射序列的逐点极限,它并不半连续	(28)
27. 弱* 连续映射与弱连续映射互不蕴涵	(29)
28. 弱连续映射与序列连续映射互不蕴涵	(29)
29. 序列连续且弱连续而不弱* 连续的映射	(29)
30. 序列连续且弱* 连续而不弱连续的映射	(30)
31. 弱连续且序列连续而不连续的映射	(30)
32. 存在某个具有强闭图像的弱连续映射,它并不连续	(30)
33. 存在某个具有强闭图像的映射,它并不弱连续	(31)
34. 存在某个具有闭图像的映射,它的图像并不强闭	(31)
35. 存在某个 Darboux 映射,它不是连续映射	(31)
36. 闭映射、诱导闭映射与伪开映射之间的关系	(32)
37. 存在某个闭包连续映射,它却无处连续	(32)
38. 存在拓扑空间 X, Y 及映射 $f: X \rightarrow Y$,使 f 在某点连续而不闭包连续	(33)
39. 存在某个正则空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f ,使 f 在某点闭包连续而不连续	(33)
40. 存在弱连续而非 θ_s 连续的映射	(33)
第三章 可分性与可数性	(34)
引言	(34)
1. 存在某个不可分的拓扑空间,它满足可数链条件	(35)
2. 可分性与第一可数公理互不蕴涵	(35)
3. 可分空间与紧空间互不蕴涵	(35)
4. 可分空间与 Lindelöf 空间互不蕴涵	(36)
5. 第一可数空间与 Lindelöf 空间互不蕴涵	(36)

6. 第一可数空间与紧空间互不蕴涵	(37)
7. 第一可数空间与 Hausdorff 空间互不蕴涵	(37)
8. 存在不满足第一可数性公理的可数拓扑空间	(37)
9. 存在某个 T_1 空间, 其中每个紧子集都是闭的, 但它不是 Hausdorff 空间	(39)
10. 存在满足第一可数公理而不满足第二可数公理的拓扑空间	(39)
11. 存在某个满足第一可数公理且可分的 Lindelöf 空间, 它不满足第二可数公理	(39)
12. 存在不满足第二可数公理的遗传可分空间	(40)
13. 存在某个可分的紧空间, 它不是稠密可分的	(40)
14. 存在某个不可分空间, 它有可分的 Stone-Cech 紧化	(41)
15. 存在不可数个可分空间, 其积空间并不可分	(41)
16. 存在某个可分空间的闭子空间, 它不是可分的	(41)
17. 存在某个集 X 上的两个拓扑 τ_1 与 τ_2 , $\tau_1 < \tau_2$, 使 (X, τ_1) 可分而 (X, τ_2) 不可分	(42)
18. 存在某个满足第一可数公理的拓扑空间, 它的一个商空间不满足第一可数公理	(42)
19. 存在不可数个满足第一可数公理的拓扑空间, 其积空间不满足第一可数公理	(42)
20. 存在某个满足第一可数公理的拓扑空间, 它的一个连续像不满足第一可数公理	(43)
21. 存在两个 Lindelöf 空间, 其积空间不是 Lindelöf 空间	(43)
22. 存在某个 Lindelöf 空间的子空间, 它不是 Lindelöf 空间	(44)
23. 存在某个可分的度量空间 X 及 Lindelöf 空间 Y , 使 $X \times Y$ 不是 Lindelöf 空间	(44)
24. 存在不可度量化化的满足第一可数公理的可分的紧 Hausdorff 空间	(44)
25. 存在某个可分的度量空间, 它无处局部紧	(46)
26. 存在一族可度量化化的拓扑空间, 其积空间不可度量化	(47)
27. 存在某个可度量化化的拓扑空间, 它的一个商空间不可度量化	(47)
第四章 分离性	(49)
引言	(49)
1. 存在某个拓扑空间, 它不是 T_0 空间	(50)
2. 存在 T_0 而非 T_1 的拓扑空间	(50)
3. 存在 T_1 而非 T_2 的拓扑空间	(50)
4. 存在 T_2 而非半正则的拓扑空间	(50)
5. 存在半正则而非正则的拓扑空间	(51)
6. 存在某个 Hausdorff 空间, 它不是完全 Hausdorff 空间	(52)
7. 存在某个完全 Hausdorff 空间, 它不是正则空间	(53)
8. 半正则空间与完全 Hausdorff 空间互不蕴涵	(53)

9. 存在某个完全 Hausdorff 空间,它不是 Urysohn 空间	(54)
10. 存在某个 Urysohn 空间,它不是完全正则空间	(55)
11. Urysohn 空间与半正则空间互不蕴涵	(55)
12. 存在完全正则而非正规的拓扑空间	(55)
13. 存在正规而不完备正规的拓扑空间	(56)
14. 存在正规而不完全正规的拓扑空间	(58)
15. 正则而不完全正则的拓扑空间	(60)
16. Urysohn 空间与正则空间互不蕴涵	(61)
17. 完全正规而不完备正规的拓扑空间	(61)
18. 存在某个正规空间的子空间,它不是正规空间	(61)
19. 存在某个非正规空间,它的每个真子空间都是正规的	(61)
20. 存在两个正规空间,其积空间并不正规	(61)
21. 存在不可数个可度量的可数空间,其积空间并不正规	(62)
22. 存在两个完全正规空间,其积空间并不完全正规	(63)
23. 存在一族完备正规空间,其积空间并不完备正规	(64)
24. 存在某个正则空间的商空间,它不是正则空间	(64)
25. 存在某个由正则空间 X 到拓扑空间 Y 上的一对一的闭映射 f ,使 $f(X)=Y$ 不是正则空间	(64)
26. 介于 T_0 与 T_1 之间的分离公理	(65)
27. 介于 T_1 与 T_2 之间的分离公理	(66)
28. 存在不可度量化的紧的完全正规空间	(67)
29. 存在不可度量化的可数的完全正规空间	(68)
第五章 连通性	(69)
引言	(69)
1. 存在连通而非弧状连通的拓扑空间	(70)
2. 存在弧状连通而非超连通的拓扑空间	(70)
3. 存在局部连通而非局部弧状连通的拓扑空间	(70)
4. 局部连通空间与连通空间互不蕴涵	(70)
5. 弧状连通空间与局部连通空间互不蕴涵	(71)
6. 超连通空间与局部连通空间互不蕴涵	(72)
7. 局部弧状连通空间与超连通空间互不蕴涵	(72)
8. 局部弧状连通空间与连通空间互不蕴涵	(72)
9. 局部弧状连通空间与弧状连通空间互不蕴涵	(73)
10. 存在连通而不强连通的拓扑空间	(73)
11. 强局部连通空间与强连通空间互不蕴涵	(73)
12. 存在某个拓扑空间的子集 A 与 B ,使 $A \cup B$ 与 $A \cap B$ 都是连通的,但 A 与 B 并 不都连通	(73)
13. 闭包连通而本身并不连通的子集	(74)

14. 存在某个拓扑空间,其中每个无限集都是连通的	(74)
15. 存在某个不连通的度量空间 (X, d) ,使得对每一 $x \in X, f_x(y) = d(x, y)$ 都具有 介值性质	(74)
16. 存在某个度量空间 (X, d) 中的序列 S ,使 S 有子列 $Y = \{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y_{n+1})$ $= 0, C(Y) = C(S)$,而 $C(S)$ 不连通,这里 $C(Z)$ 表示序列 Z 的聚点之集	(75)
17. 存在不闭的弧状连通区	(76)
18. 存在某个弧状连通集,其闭包并不弧状连通	(76)
19. R^2 中存在某个子集 B ,使 B 与 \bar{B} 都是连通的,且 B 还是弧状连通的,但 B 却 不是弧状连通的	(76)
20. 存在某个连通空间,任意移走一点后仍为连通空间	(77)
21. 存在完全不连通的非离散的拓扑空间	(77)
22. 存在某个完全不连通的度量空间,其中任意开球 $B(a, r)$ 的闭包都是闭球 $B[a, r]$	(77)
23. 存在某个连通空间,只移走一点后就变成完全不连通空间	(77)
24. 存在可数 Hausdorff 连通空间	(79)
25. 存在可数 Hausdorff 连通、局部连通空间	(80)
26. 存在具有散点的可数 Hausdorff 连通空间	(81)
27. 存在某个具有散点 p 的连通空间 X ,使得对每一连续的非常值映射 $f: X \rightarrow X$, 都有 $f(p) = p$	(82)
28. 存在某个连通空间,它是可数个两两不相交的连通紧集的并集	(83)
29. 存在某个拓扑空间,它是两个全断的闭子集的并,但它本身却是连通的	(84)
30. 存在可数个局部连通空间,其积空间并不局部连通	(84)
31. 存在某个局部连通空间的连续像,它不是局部连通的	(85)
32. 存在拓扑空间 X 与 Y 以及 X 到 Y 上的连续满射 f ,使 $f(X) = Y$ 是连通空间, 而 X 不是连通空间	(85)
33. 箱拓扑与积拓扑之间的差异	(85)
第六章 紧性	(87)
引言	(87)
1. 存在子集紧而不可数紧的拓扑空间	(89)
2. 存在可数紧而不紧的拓扑空间	(89)
3. 存在序列紧而不紧的拓扑空间	(89)
4. 存在紧而不序列紧的拓扑空间	(89)
5. 存在可数紧而不序列紧的拓扑空间	(90)
6. 存在局部紧而不强局部紧的拓扑空间	(90)
7. 三种不同的局部紧空间的定义之间的关系	(90)
8. 存在某个强局部紧空间,它不是紧的	(92)
9. 存在某个 Lindelöf 空间,它不是 σ 紧的	(92)
10. 存在某个 σ 紧而不紧的拓扑空间	(92)

11. R^2 中存在两个局部紧的子空间,其并不是局部紧的	(92)
12. 存在可数个局部紧空间,其积不是局部紧的	(92)
13. 存在某个局部紧空间的子空间,它不是局部紧的	(93)
14. 存在某个局部紧空间的商空间,它不是局部紧的	(93)
15. 存在某个局部紧空间的连续像,它不是局部紧的	(93)
16. 存在某个强局部紧空间 X 和开映射 f ,使 $f(X)$ 不是强局部紧的	(94)
17. 存在某个强局部紧空间的开连续像,它不是强局部紧的	(94)
18. 存在可数个 σ 紧空间,其积不是 σ 紧的	(94)
19. 存在某个 σ 紧空间的子空间,它不是 σ 紧的	(95)
20. 存在某个拓扑空间中的两个紧集,其交不是紧集	(95)
21. 存在不可数个序列紧空间,其积空间并不序列紧	(95)
22. 存在两个可数紧空间,其积空间并不可数紧	(95)
23. 存在某个子集紧空间的连续像,它不是子集紧的	(96)
24. 存在某个 Hausdorff 空间,它的一点紧化不是 Hausdorff 空间	(96)
25. 任给自然数 n ,可构造一个具有 n 点紧化的拓扑空间,但对 $m > n$,不存在 m 点紧化空间	(96)
26. 存在两个 Hausdorff 空间,它们都有 n 点紧化空间,而其积空间没有 n 点紧化空间	(97)
27. 存在某个最强的紧拓扑,它不是 Hausdorff 拓扑	(97)
28. 存在某个最弱的 Hausdorff 拓扑,它不是紧拓扑	(98)
29. 存在某个可度量化局部紧空间,其一点紧化不可度量化	(100)
30. 存在可数亚紧而非亚紧的拓扑空间	(100)
31. 存在亚紧而不仿紧的拓扑空间	(101)
32. 存在一个仿紧空间,它不是紧空间	(101)
33. 存在可数亚紧而不可数仿紧的拓扑空间	(102)
34. 存在可数仿紧而不可数紧的拓扑空间	(102)
35. 存在可数仿紧而不仿紧的拓扑空间	(102)
36. 亚紧空间与可数仿紧空间互不蕴涵	(102)
37. 存在仿紧而不全体正规的拓扑空间	(102)
38. 存在正规而不全体正规的拓扑空间	(103)
39. 存在全体正规而不超全体正规的拓扑空间	(103)
40. 存在正规而不族正规的拓扑空间	(104)
41. 存在族正规而不完全族正规的拓扑空间	(104)
42. 存在 σ_f 仿紧而非正规的拓扑空间	(105)
43. 存在某个可数亚紧空间的开连续像,它不是可数亚紧的	(105)
44. 存在两个仿紧空间,其积空间并不仿紧	(106)
45. 存在某个仿紧空间的子空间,它不是仿紧空间	(107)

46. 存在某个完全正规的仿紧空间与某个可分的度量空间,其积空间不是正规空间	(107)
47. 存在某个亚紧的 Moore 空间,它不是可遮空间	(108)
48. 存在某个可遮的 Moore 空间,它并不正规	(108)
49. 存在不可度量化的完全正规的仿紧空间	(109)
50. 存在不可度量化的 Moore 空间	(109)
51. 存在某个仿紧的遗传可分的半度量空间,它不是可展的	(110)
第七章 线性拓扑空间	(111)
引言	(111)
1. 线性度量空间中的一个度量有界集,它不有界	(115)
2. 一个非局部凸的线性度量空间,其中度量有界集与有界集是一致的	(115)
3. 存在某个有界集,它的凸包不是有界的	(116)
4. 存在某个相对紧集,它的平衡凸包不是相对紧的	(116)
5. 局部有界而不局部凸的线性拓扑空间	(117)
6. 局部凸而非局部有界的线性拓扑空间	(117)
7. $x_n \rightarrow o$ 并不蕴涵 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow o$ 的线性拓扑空间	(118)
8. 存在某个线性空间上的两个不同拓扑,它们具有相同的有界集	(118)
9. 存在某个线性空间上的两个不同拓扑,它们具有相同的连续线性泛函	(119)
10. 存在某个线性空间上的两个不同拓扑,它们具有相同的闭子空间	(119)
11. 有界集必为全有界集的无穷维线性拓扑空间	(119)
12. 存在某个赋范线性空间 X 的子集 B ,使 B 是 $\sigma(X, X')$ 全有界而不范数拓扑全有界	(120)
13. 存在某个无穷维线性拓扑空间,其中的有界闭集都是紧的	(120)
14. 存在某个线性拓扑空间,其中存在紧而不序列紧的子集	(120)
15. 一个线性空间上的两种不同的拓扑,在这两种拓扑下收敛序列是相同的,但紧集并不相同	(120)
16. Mackey 相对紧而非 Mackey 相对序列紧的子集	(120)
17. 有界而不连续的线性映射	(121)
18. 连续而不强有界的线性映射	(121)
19. 无处连续的自反开映射	(122)
20. 非线性的等距映射	(123)
21. 不存在非零连续线性泛函的线性拓扑空间	(123)
22. 一个非局部凸空间,在它上面存在非零连续线性泛函	(124)
23. 一个线性拓扑空间中的两个闭子空间,其和不闭	(125)
24. 代数相补而不拓扑相补的闭子空间	(125)
25. 一个线性拓扑空间,其中每个有限维子空间都没有相补子空间	(126)
26. 存在某个最强的线性拓扑,它不是局部凸的	(126)

27. 存在两个线性拓扑,其交不是线性拓扑	(126)
第八章 局部凸空间	(127)
引言	(127)
1. 一个局部凸的 Fréchet 空间,它不是 Banach 空间	(128)
2. 不可度量化的完备的局部凸空间	(128)
3. 序列完备而不有界完备的局部凸空间	(129)
4. 有界完备而不完备的局部凸空间	(129)
5. 完备而不 Br 完备的局部凸空间	(129)
6. 全完备而不超完备的线性拓扑空间	(130)
7. 不可度量化的超完备的局部凸空间	(130)
8. 不完备的 G 空间	(131)
9. 两个相容的拓扑,其中一个完备而另一个不完备	(131)
10. 存在某个不可分的局部凸空间,它的每个有界子集都是可分的	(131)
11. 存在某个完备空间的稠密的真子空间,它是序列完备的	(131)
12. 一个局部凸空间的对偶空间中的弱* 紧集,它并不强* 有界	(132)
13. 一个局部凸空间中的凸紧集,它不是其端点集的凸包	(132)
14. 一个局部凸空间中的平衡闭凸集,它没有端点	(132)
15. 具有稠密端点的凸集	(133)
16. 一个线性拓扑空间中的紧凸集,它没有端点	(134)
17. 一个局部凸 Hausdorff 空间中的两个凸紧集 A 与 B ,使 $\text{ext}(A+B) \neq \text{ext}(A)$ $+ \text{ext}(B)$	(134)
18. 存在某个紧集,其绝对凸闭包不是紧的	(134)
19. 一个对偶空间 $\langle X, Y \rangle$ 使 X 上的一个相容拓扑并不位于 $\sigma(X, Y)$ 与 $m(X, Y)$ 之间	(135)
20. 一个线性空间,在它上面的所有相容局部凸拓扑都是相同的	(135)
21. 一族局部凸空间 X_α 的归纳极限 X ,使 X 的某个有界集不包含于任何一个 X_α 内	(135)
22. 一个局部凸空间族 X_α 的归纳极限 X ,使在某个 X_α 上由 X 诱导出来的拓扑不 等于 X_α 的原拓扑	(136)
23. 存在某个局部凸空间中的两个赋范子空间的代数直接和,它不可度量化	(136)
24. 非局部凸的几乎弱* 拓扑	(137)
25. 几乎弱* 闭而不弱* 闭的集合	(137)
26. 存在某个全完备空间到另一个全完备空间上的连续线性映射,它不是开的 ...	(138)
27. 伪完备而不完备的线性拓扑空间	(138)
28. 一个线性拓扑空间上的平移不变的距离,它不能连续扩张成为完备化空间上的 距离	(138)
29. 一个局部凸空间的凸紧子集,它关于度量空间有绝对扩张,而关于紧 Hausdorff 空间没有绝对扩张	(139)

30. 准上半连续而不上半连续的映射	(140)
31. 弱上半连续而不准上半连续的映射	(141)
32. 一个可分的线性拓扑空间,它有不可分的闭线性子空间	(142)
33. 可分而不序列可分的线性拓扑空间	(142)
34. 一个可度量化空间序列的严格归纳极限,它不可度量化	(143)
35. 一个完备的局部凸空间,它的一个商空间并不完备	(143)
36. 存在两个全完备空间,其积并不全完备	(143)
37. 存在一族全完备空间,其直接和并不全完备	(144)
38. 存在一族超完备空间,其直接和并不超完备	(144)
39. 一个全完备空间序列的严格归纳极限,它不是全完备空间	(144)
40. 一个完备局部凸空间族的归纳极限,它并不完备	(144)
第九章 桶空间、圜空间和 Baire 空间	(146)
引言	(146)
1. 存在某个赋范空间,它不是桶空间	(149)
2. 第一纲的桶空间	(149)
3. 不可度量化的桶空间	(150)
4. 不可度量化的圜空间	(150)
5. 桶空间与圜空间互不蕴涵	(150)
6. 存在某个拟桶空间,它既不是圜空间,也不是桶空间	(150)
7. 一个拟 M 桶空间,它不是拟桶空间	(151)
8. 一个半圜空间,它不是 s 圜空间	(151)
9. c 序列空间与 s 圜空间互不蕴涵	(151)
10. 存在某个完备的局部凸空间,它不是拟桶空间	(152)
11. 存在某个特异空间,它不是半自反的	(152)
12. 存在某个局部凸的 Fréchet 空间,它的强对偶既非圜空间,也非桶空间	(152)
13. 存在某个特异空间,它的强对偶不可分	(153)
14. 存在某个特异空间,它的强对偶不可度量化	(153)
15. 存在某个特异空间,它不是拟桶空间	(154)
16. 存在某个有界完备的局部凸空间,它不是序列桶空间	(154)
17. 存在某个圜空间,它的强双对偶不是圜空间	(155)
18. 存在某个可数桶空间,它不是桶空间	(155)
19. 存在某个可数拟桶空间(因而是 σ 拟桶空间),它不是 σ 桶空间	(155)
20. 存在某个序列桶空间,它不是 σ 拟桶空间	(155)
21. 存在某个具有性质 (c) 的局部凸空间,它不是 σ 桶空间	(156)
22. 存在某个序列桶空间,它没有性质 (s)	(156)
23. 存在某个 (DF) 空间,它不是可数桶空间	(156)
24. 存在某个 (DF) 空间,它不是拟桶空间	(156)
25. 存在某个 K 拟桶空间,它不是 K 桶空间	(156)

26. 存在某个线性空间上两个可以比较而不相等的范数,使强范数是桶空间而弱范数是 Banach 空间	(157)
27. 一个桶空间的闭子空间,它不是桶空间	(157)
28. 一个囿空间的闭子空间,它不是囿空间	(158)
29. 一个桶空间,它的一个稠密的不可数余维子空间不是桶空间	(158)
30. 一个桶空间,它的一个稠密的不可数维的子空间不是桶空间	(158)
31. 一个 Baire-like 空间,它不是无序 Baire-like 空间	(159)
32. 一个赋范桶空间(从而是 Baire-like 空间),它不是 Baire 空间	(159)
33. 一个 Mackey 空间,它不是拟桶空间	(160)
34. 不具有性质(s)的 Mackey 空间	(160)
35. 一个具有性质(s)的 Mackey 空间,它不具有性质(c)	(160)
36. 一个半自反的 Mackey 空间,它不是自反的	(161)
37. 一个 Mackey 空间,它不是 σ 拟桶空间	(161)
38. 一个 Mackey 空间且是 σ 桶空间,它不是桶空间	(161)
39. 一个 σ 桶空间,它不是 Mackey 空间	(162)
40. 存在某个(LF)空间的 Mackey 对偶,它不是 B_r 完备的	(162)
41. 存在某个半自反空间,它的强对偶不是半自反的	(163)
42. 一个非自反(甚至非半自反)的局部凸空间,它的强对偶是自反的	(163)
43. 存在某个桶空间,它不是 Montel 空间	(163)
44. 存在某个 Freilét 空间,它不是 Schwartz 空间	(163)
45. 存在某个 Schwartz 空间,它不是 Montel 空间	(163)
46. 不可分的 Montel 空间	(164)
47. 自反的非 Montel 空间	(164)
48. 不完备的 Montel 空间	(164)
49. 存在某个自反空间的闭子空间,它不是自反的	(164)
50. 存在某个 Mackey 空间的闭子空间,它不是 Mackey 空间	(164)
51. 存在某个(DF)空间的闭子空间,它不是(DF)空间	(165)
52. 一个具有性质(c)的 Mackey 空间,它的一个稠密的有限余维子空间却不是 Mackey 空间	(166)
第十章 线性拓扑空间中的基	(167)
引言	(167)
1. 没有基的可分 Banach 空间	(169)
2. 一个有基的 Banach 空间,其对偶空间没有基	(169)
3. 有基而没有无条件基的 Banach 空间	(169)
4. 具有唯一无条件基的无穷维 Banach 空间	(169)
5. 一个 Banach 空间的无条件基,它不是有界完全的	(170)
6. 一个 Banach 空间的无条件基,它不是收缩的	(170)
7. 一个 Banach 空间的无条件基,它不是绝对收敛基	(170)

8. 一个 Banach 空间的基,它不是正规基	(171)
9. 一个 Banach 空间的基,它不是单调基	(171)
10. 一个 Banach 空间的次对称基,它不是对称基	(171)
11. 有基而没有次对称基的 Banach 空间	(172)
12. 一个赋范线性空间的基,它不是 Schauder 基	(172)
13. 一个 Banach 空间,它的对偶空间有弱* 基而没有基	(173)
14. 一个 Banach 空间,它的对偶空间的一个 Schauder 基不是弱* 基	(174)
15. 一个 Banach 空间,它的对偶空间的一个弱* 基不是弱* Schauder 基	(174)
16. 一个赋范线性空间中的弱 Schauder 基,它不是基	(175)
17. 一个稠密子空间的基,它不是整个空间的基	(175)
18. 序列 $\{x_n\}$,它是 Banach 空间 $(X, \ \cdot\ _X)$ 与 $(Y, \ \cdot\ _Y)$ 的基,但不是 $(X \cap Y, \ \cdot\ = \ \cdot\ _X + \ \cdot\ _Y)$ 的基	(176)
19. 不具有 KMR 性质的局部凸空间	(177)
20. 一个 Fréchet 空间,它的一个弱 Schauder 基不是 Schauder 基	(177)
参考文献	(179)

第一章 拓 扑 空 间

引 言

给定集 X , 它的一个子集族 τ 称为 X 上的一个**拓扑结构**, 简称**拓扑**, 是指 τ 满足下列三个条件: 1° 空集 \emptyset 和 X 本身是 τ 的元; 2° τ 内任意有限多个元的交仍是 τ 的元; 3° τ 内任意多个元的并仍是 τ 的元. 集 X 连同它上面的一个拓扑 τ , 构成一个**拓扑空间** (X, τ) , 有时简写 (X, τ) 为 X . τ 的元叫 X 的**开集**, 而其补集叫**闭集**. 空间 X 的元称为**点**.

在同一个集 X 上, 若有两个拓扑 τ_1 与 τ_2 , 且 $\tau_1 \subset \tau_2$, 则称拓扑 τ_1 **弱于**或**粗于**拓扑 τ_2 , 或者说拓扑 τ_2 **强于**或**细于**拓扑 τ_1 , 记作 $\tau_1 < \tau_2$ 或 $\tau_2 > \tau_1$. X 上最弱的拓扑由 X 本身及空集 \emptyset 组成, 而且叫**平庸拓扑**, X 称为**平庸空间**. X 上最强的拓扑由集 X 的一切子集组成, 而且称为**离散拓扑**, X 称为**离散空间**. 设 τ_1 和 τ_2 为集 X 上的两个拓扑, 若 τ_1 既不强于 τ_2 也不弱于 τ_2 , 则称 τ_1 和 τ_2 为**不可比较的**.

设 (X, τ) 是拓扑空间, Y 是 X 的子集. 令

$$\sigma = \{ U \mid U = G \cap Y, G \in \tau \},$$

则 σ 是 Y 上的一个拓扑, 这个拓扑称为 τ 的**相对拓扑**或**继承下来的拓扑**, (Y, σ) 称为 (X, τ) 的**子空间**.

对任一度量空间 (X, d) , 把 (X, d) 中的开集全体记作 τ , 则 τ 是 X 上的一个拓扑, 因而 (X, τ) 是一个拓扑空间. τ 称为由距离 d 所**诱导出的拓扑**. 所谓度量空间 (X, d) 是一个拓扑空间, 指的就是 (X, τ) .

设 (X, τ) 是拓扑空间, 如果存在 X 上的距离 d , 使得 τ 就是由距离 d 诱导出的拓扑, 则称 (X, τ) 为**可度量化化的空间**.

设 X 为一拓扑空间, 对于 $X \times X$ 上的实值函数 $d(x, y)$, 考虑下述条件:

(i) $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$.

(iii) $A \subset X$ 是闭集当且仅当对任意 $x \in X \setminus A$, 有 $d(x, A) > 0$.

(iv) $x \in A$ 当且仅当 $d(x, A) = 0$.

当 d 满足 (i), (ii), (iii) 时, 称 d 为 X 上的**对称距离**. 当 d 满足 (i), (ii), (iv) 时, 称 d 为 X 上的**半距离**. 对称度量空间, 半度量空间的用语也是自明的.

若 Y 是 n 维欧氏空间 R^n 的子集, 则 Y 上的相对拓扑也称为**通常拓扑**.

设 (X, τ) 是拓扑空间, A 与 V 都是 X 的子集. 称 V 为 A 的**邻域**, 是指存在

(X, τ) 中的开集 G , 使

$$A \subset G \subset V.$$

所谓点 x 的邻域, 就是单点集 $\{x\}$ 的邻域. 由点 x 的一切邻域组成的集族 $\mathcal{U}(x)$ 称为点 x 的邻域系.

设 A 是拓扑空间 (X, τ) 的子集, x 称为 A 的内点, 是指 $x \in X, A \in \mathcal{U}(x)$. A 的内点全体称为 A 的内部, 记作 A° .

称点 x 是拓扑空间 (X, τ) 的子集 A 的接触点, 是指对任意 $U \in \mathcal{U}(x)$, 恒有 $U \cap A \neq \emptyset$. A 的接触点集称为 A 的闭包, 记作 \bar{A} . 点 x 称做 A 的聚点, 是指 x 是 $A \setminus \{x\}$ 的接触点. x 称做 A 的 ω 聚点, 是指含有 x 的任一开集必含有 A 的无穷多个点. x 称做 A 的凝聚点, 是指任一含有 x 的开集必含有 A 中不可数个点. A 的一切聚点所成之集称为 A 的导集, 记作 A' . 若 $A = A'$, 则称 A 为完备集.

设 A 为拓扑空间 X 的子集, 称点 x 是 A 的外点, 是指 x 是 A 的补集 A^c 的内点. A 的外点的集合称为 A 的外部, 记作 A^e . 称点 x 是 A 的边界点, 是指 $x \notin A^\circ$ 且 $x \notin A^e$. A 的边界点的集称为 A 的边界, 记作 A^b . 称 x 为 A 的孤立点, 是指 $x \in A$ 且存在 $V \in \mathcal{U}(x)$, 使 $V \cap A = \{x\}$.

设 A 为拓扑空间 X 的子集, 称 A 在 X 中稠密, 是指 $\bar{A} = X$. 若 B 也是 X 的子集, 称 A 在 B 中稠密, 是指 $\bar{A} \supset B$. 称 A 在 X 中无处稠密, 是指 $(\bar{A})^\circ = \emptyset$. 称 X 为可分空间, 是指 X 有可数稠密子集.

拓扑空间 X 的子集 A 称为第一纲集, 是指 A 是可数个无处稠密集的并集. 不是第一纲的集称为第二纲集.

设 (X, τ) 与 (Y, σ) 都是拓扑空间, 映射 $f: X \rightarrow Y$ 称为在点 $x \in X$ 连续, 是指对于 $V \in \mathcal{U}(f(x))$, 有 $U \in \mathcal{U}(x)$, 使

$$f(U) \subset V$$

成立. 若 f 在 X 的每一点都连续, 则称 f 是连续映射. 容易证明, f 连续当且仅当对 Y 的每个开集 G , 其逆像

$$f^{-1}(G) = \{x \in X \mid f(x) \in G\}$$

是 X 的开集. 如果 X 内任意两个不同的点有不同的像, 就称 f 是单射. 如果 Y 内每一点必是 X 内某一点的像, 就称 f 是满射. 从 X 到 Y 的每个既单又满的映射 f 必有逆映射 g , 它是 Y 到 X 上的既单又满的映射, 这里, $g(y) = x$ 当且仅当 $f(x) = y$. 这时如果 f 和 g 都连续, 便称 f 为同胚映射或拓扑映射. 两个拓扑空间称为同胚的, 是指它们之间存在一个同胚映射. 在每个同胚映射下保持不变的性质称为拓扑性质.

设 (X, τ) 与 (Y, σ) 都是拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$. 称 f 为开映射, 是指对任意 $G \in \tau$, 必有 $f(G) \in \sigma$. 称 f 为闭映射, 是指对 X 的任意闭集 F , $f(F)$ 是 Y 的闭集.

拓扑 τ 的子族 \mathcal{B} 称为 τ 的基或拓扑基, 是指 τ 的每个元可表为 \mathcal{B} 的一些元的并, 这时, 也说拓扑 τ 是由 \mathcal{B} 生成的. 拓扑 τ 的一个子族 \mathcal{D} 称为 τ 的一个子基, 是指 \mathcal{D} 中元的所有有限交构成的集族是 τ 的一个基. 拓扑空间 (X, τ) 称为第二可数的, 是指 τ 有一个可数基.

拓扑空间 (X, τ) 的点 x 的一族邻域 $\mathcal{B}(x)$ 称为 x 的邻域基或局部基或基本邻域系, 是指 x 的任意邻域都含有属于 $\mathcal{B}(x)$ 的元. 如果 X 的每一点都有一个可数局部基, 便称 X 为第一可数空间. 显然, 第二可数空间必是第一可数空间.

定理 1 设 A 为第一可数空间 X 的子集, 则 x 是 A 的接触点, 当且仅当 x 是 A 的点列 $\{x_n\}$ 在 X 中的极限, 即对于 x 的任意邻域 U , 有 $n_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq n_0$ 时 $x_n \in U$.

推论 设 A 为第一可数空间 X 的子集, 则 A 是闭集, 当且仅当 A 是序列闭的, 即当且仅当若 A 的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in X$, 则 $x \in A$.

定理 2 若 X 为第一可数空间, Y 为拓扑空间, 则映射 $f: X \rightarrow Y$ 是连续的, 当且仅当 f 是序列连续的, 即当且仅当若 X 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x , 则 Y 的序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(x)$.

定理 3 若 $f: X \rightarrow Y$ 为集 X 到拓扑空间 (Y, σ) 的映射, 令

$$\tau = f^{-1}(\sigma) = \{f^{-1}(G) \mid G \in \sigma\},$$

则 (X, τ) 是拓扑空间, 且 τ 是使 f 为连续的 X 上的最弱拓扑.

定理 3 确定的 X 的拓扑 τ 称为由拓扑空间 (Y, σ) 及映射 $f: X \rightarrow Y$ 确定的诱导拓扑.

定理 4 若 f 是拓扑空间 (X, τ) 到集 Y 上的满射, 令

$$\sigma = \{G \mid G \subset Y, f^{-1}(G) \in \tau\},$$

则 (Y, σ) 是拓扑空间, 且 σ 是使 f 为连续的 Y 上的最强拓扑.

定理 4 确定的 Y 上的拓扑 σ 称为由拓扑空间 (X, τ) 及满射 $f: X \rightarrow Y$ 确定的诱导拓扑.

设 $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in D\}$ 为拓扑空间族, 令

$$X = \prod_{\alpha \in D} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in D} \mid x_\alpha \in X_\alpha, \alpha \in D\}.$$

若 $P_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ 为 X 到 X_α 上的射影, 则显然有

$$P_\alpha^{-1}(x_\alpha) = \{x \mid P_\alpha(x) = x_\alpha\} = \{x_\alpha\} \times \prod_{\substack{\beta \in D \\ \beta \neq \alpha}} X_\beta.$$

且对于 X_α 的开集 U_α , 显然有

$$\begin{aligned} P_\alpha^{-1}(U_\alpha) &= \{x \mid P_\alpha(x) = x_\alpha \in U_\alpha\} \\ &= U_\alpha \times \prod_{\substack{\beta \in D \\ \beta \neq \alpha}} X_\beta. \end{aligned}$$

以 $\{P_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha \in D, U_\alpha \in \tau_\alpha\}$ 为子基在 X 上确定的拓扑, 是使射影为连续的最弱拓扑, 称它为积拓扑.

在 $\prod_{\alpha \in D} X_\alpha$ 上还可以用其它方法确定拓扑. 如以 $\prod_{\alpha \in D} \{U_\alpha \mid U_\alpha \in \tau_\alpha\}$ 为拓扑基确定的拓扑称为箱拓扑. 显然, 箱拓扑强于积拓扑. 本书如无特别声明, 所论的积空间都意味着具有积拓扑.

在积拓扑下的收敛称为坐标收敛. 特别是所有 X_α 都相同时称为逐点收敛.

设 (X, τ) 是拓扑空间, ρ 是 X 上的一个等价关系, 而 Y 是 X 按关系 ρ 分成的等价类的集, 即

$$Y = X/\rho \text{ 或 } Y = \{\rho(x) \mid x \in X\},$$

这里, 当 $\rho(x) \cap \rho(y) \neq \emptyset$ 时, 有 $\rho(x) = \rho(y)$.

设 P 为 X 到 Y 的映射, 对 X 的每一元 x , 有 $P(x) = \rho(x)$, 即每一点 x 对应含 x 的类. 当 σ 是 Y 上使 P 成为连续的最强拓扑, 即由 (X, τ) 及 P 确定的 Y 的拓扑时, σ 称为 Y 上的商拓扑, 而称 (Y, σ) 为商空间或分解空间. P 称为 X 到商空间 Y 上的射影或商映射.

拓扑空间 X 称为 T_0 空间, 是指对于 X 内任意两个不同的点 x, y , 有 x 的邻域 U 使 $y \notin U$, 或有 y 的邻域 V 使 $x \notin V$, 二者之一必成立.

拓扑空间 X 称为 T_1 空间, 是指 X 内任意两个不同的点都各有一个邻域不含另一点.

容易证明, 为使拓扑空间 X 是 T_1 空间, 当且仅当单点集是闭集.

拓扑空间 X 称为 T_2 空间或 Hausdorff 空间, 是指 X 内任意两个不同的点都各有邻域互不相交.

拓扑空间 X 的开集 G 称为正则开集, 是指 $G = (G^\circ)^\circ$; 闭集 F 称为正则闭集, 是指 $F = \overline{(F^\circ)}$. 称 X 为半正则空间, 是指它是 T_2 空间, 且其中一切正则开集所成之族构成一个拓扑基.

称拓扑空间 X 为 T_3 空间, 是指 X 内每一点以及不含该点的任一闭集都各有邻域互不相交. T_3 空间同时为 T_1 空间时, 称为正则空间.

有些书籍将 T_3 空间称为正则空间, 而将正则空间称为 T_3 空间.

拓扑空间 X 称为 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间, 是指对于 X 的每一点 x 及 x 的每个邻域 U , 有从 X 到单位闭区间上的连续映射 f , 使得 $f(x) = 0$, 并且在 $X \setminus U$ 上, f 恒等于 1. $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间同时为 T_1 空间时, 称为完全正则空间.

拓扑空间 X 称为 T_4 空间, 是指 X 内任意两个不相交的闭集都各有邻域互不相交. T_4 空间同时为 T_1 空间时, 就称为正规空间.

有些书籍将 T_4 空间称为正规空间, 而将正规空间称为 T_4 空间.

拓扑空间 X 称为 Urysohn 空间, 是指对于 X 的任意相异两点 x, y , 存在连续

函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$, 使 $f(x) = 0, f(y) = 1$.

若拓扑空间 X 可表成它的两个非空的、不相交的开子集 A 与 B 的并集, 则称 X 为**非连通空间**. 若 X 不是非连通空间, 则称它为**连通空间**. 对于拓扑空间 X 的一个子集 E , 若 E 作为 X 的子空间是连通的(非连通的), 则称为 X 的**连通子集**(非连通子集).

以上非连通定义中“开子集”, 可以改为“闭子集”, 也可以改为“既开且闭的子集”.

拓扑空间 X 是连通的, 当且仅当 X 的子集中只有 X 与空集 \emptyset 是既开且闭的. 称拓扑空间 X 是**紧的**, 是指 X 的每个开覆盖必有有限子覆盖.

定理 5 (Tychonoff) 紧拓扑空间的直积关于积拓扑是紧空间.

拓扑空间 X 称为**局部紧空间**, 是指对于每一点 $x \in X$, 存在 $U \in \mathcal{U}(x)$, 使得 U 是紧的.

对于非紧空间 X 常需要构造一个紧空间, 以 X 为其稠密子空间. 所构造的紧空间称为 X 的**紧化空间**.

拓扑空间的最简单的紧化是由添加一点而成. 设 (X, τ) 为拓扑空间, 令

$$\begin{aligned} X^* &= X \cup \{\infty\}, \\ \tau_1 &= \{U \mid U^c \text{ 是 } X \text{ 的闭紧子集}, U \subset X^*\}, \\ \tau^* &= \tau \cup \tau_1, \end{aligned}$$

则 (X^*, τ^*) 是 (X, τ) 的紧化空间.

定理 6 拓扑空间 (X, τ) 的一点紧化 (X^*, τ^*) 是紧空间, 且 X 是 X^* 的稠密子空间.

本书的某些例子还要涉及 Stone-Čech 紧化.

关于拓扑空间的更多材料以及上述定理的证明均可参看文献[4]和[89].

1. 存在某个非离散的拓扑空间, 其中每个开集都是闭集, 而每个闭集也都是开集.

易见, 离散拓扑空间中每个开集都是闭集, 而每个闭集也都是开集. 应当注意, 这个命题之逆并不成立. 例如, 设 X 为自然数的全体, 又设

$$P = \{\{2n-1, 2n\} \mid n = 1, 2, \dots\}.$$

命 X 的开集族为空集 \emptyset 以及 P 中元素的并集, 则此开集族确定了 X 上的一个拓扑 τ , 称 τ 为**奇偶拓扑**. 在拓扑空间 (X, τ) 中, 每个开集都是闭集, 而每个闭集也都是开集. 然而, 因单点集不是开集, 故 (X, τ) 不是离散拓扑空间.

2. 存在某个集 X 上的两个拓扑, 其并不是 X 上的拓扑.

设 $\tau = \{U_\alpha\}$ 与 $\tau' = \{U'_\beta\}$ 是集 X 上的两个拓扑. 根据并集与交集的定义, 有

$$\tau \cup \tau' = \{U_\alpha, U'_\beta\},$$

$$\tau \cap \tau' = \{V_r \mid V_r \in \tau, V_r \in \tau'\}.$$

容易验证, 集 X 上任意个拓扑 τ_α 之交 $\tau = \bigcap_\alpha \tau_\alpha$ 仍是 X 上的一个拓扑. 但是, X 上的两个拓扑之并未必是 X 上的拓扑. 例如, 设 $X = \{a, b, c\}$, 其中 a, b, c 两两相异, 则 X 的子集族

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a\}\}$$

形成了 X 上的一个拓扑, 而子集族

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{b, a\}, \{b\}\}$$

形成了 X 上的另一个拓扑. 显然, τ_1 与 τ_2 之并:

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}\}$$

不是 X 上的拓扑.

注 容易证明, 若 X 是一个至多含有两个点的集合, 则 X 上任何两个拓扑之并仍是 X 上的拓扑.

3. 存在某个 Hausdorff 空间中的基本有界集, 它不是紧有界的.

拓扑空间 X 的子集 A 称做**紧有界的**, 是指 A 的闭包 \mathcal{A} 是紧的; A 称做**基本有界的**, 是指对于 X 的每个拓扑基, 都可以从中选出有限个元, 它们足以覆盖 A .

Hindman^[80]证明了:

定理 1 (广义 Heine-Borel 定理) 拓扑空间中每个基本有界的闭集必是紧集.

定理 2 (广义 Bolzano-Weierstrass 定理) 拓扑空间中每个基本有界的无限集必有聚点.

Hindman 还指出, 每个紧有界集必是基本有界的. 若拓扑空间是正则空间, 则逆命题也成立. 对于一般的拓扑空间即使是 Hausdorff 空间, 基本有界集未必是紧有界的, 他的例子如下:

设 X 是闭区间 $[0, 1]$, $A = X \setminus Q$, Q 为有理数集. 命

$$\tau = \{U \cup (V \cap A) \mid U, V \text{ 是 } [0, 1] \text{ 上的通常拓扑下的开集}\}.$$

易见, τ 是 X 上的一个 Hausdorff 拓扑. 任取拓扑空间 (X, τ) 的一个拓扑基 \mathcal{B} , 我们可把 \mathcal{B} 表成

$$\mathcal{B} = \{U_\delta \cup (V_\delta \cap A) \mid \delta \in \Delta\}.$$

于是, $\{U_\delta \mid \delta \in \Delta\} \cup \{V_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ 是 $[0, 1]$ 在通常拓扑下的一个开覆盖. 因 $[0, 1]$ 是紧的, 故存在有限子覆盖 $\{U_\delta \mid \delta \in \Delta'\} \cup \{V_\delta \mid \delta \in \Delta'\}$. 但此时

$$A \subset \bigcup_{\delta \in \Delta'} (U_\delta \cup (V_\delta \cap A)),$$

因此, A 是基本有界的, 又, 拓扑空间 (X, τ) 显然不紧, 而 $\mathcal{A} = X$, 故 A 不是紧有界的.

4. 存在某个积空间 $X \times Y$ 中的不开的子集 A , 使 $A[x] = \{y \mid (x, y) \in A\}$ 与 $A[y] = \{x \mid (x, y) \in A\}$ 分别是 Y 与 X 的开集.

容易证明, 若 X, Y 是拓扑空间, A 是积空间 $X \times Y$ 中的开子集, 令

$$A[x] = \{y \mid (x, y) \in A\},$$

$$A[y] = \{x \mid (x, y) \in A\},$$

则 $A[x]$ 与 $A[y]$ 分别是 Y 与 X 中的开子集. 应当注意, 这个命题之逆并不成立. 例如, 设 A 是过平面原点的两条对角线的补集, 并加上原点 $(0, 0)$. 在平面 $X \times Y = R \times R$ 上取通常拓扑, 对任意 $x_0 \in X, x_0 \neq 0$,

$$A[x_0] = \{y \mid (x_0, y) \in A\}$$

是实直线 Y 中两个点 $\{y_0, -y_0\}$ 所成之集的补集, 因而是 Y 中的开集; 而 $A[0]$ 就是实直线 Y , 因而也是开集. 同理, 对于任意 $y \in Y, A[y]$ 是 X 中的开集. 然而, A 不是 $X \times Y$ 中的开集, 因为 $(0, 0)$ 不是 A 的内点 (参看图 1).

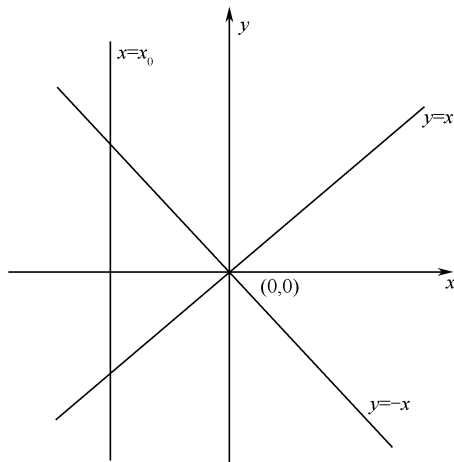


图 1

5. 存在某个集 X 上的两个拓扑 τ_1 与 τ_2 , 使 $\tau_1 \subset \tau_2$, 但 (X, τ_1) 中的半开集未必是 (X, τ_2) 中的半开集.

设 A 是拓扑空间 X 的子集, 称 A 为半开的, 是指存在开集 G , 使得

$$G \subset A \subset \bar{G}.$$

半开集的概念是由 Levine^[100] 引入的. 他指出, 尽管 X 上的两个拓扑 τ_1 与 τ_2 而有 $\tau_1 \subset \tau_2$, 此时仍不能由 A 是 (X, τ_1) 中的半开集推出 A 是 (X, τ_2) 中的半开集, 他的例子如下:

设 X 是实数集, τ_1 是由一切形如 $(x, y) (x < y)$ 的区间生成的拓扑, τ_2 是由一切形如 $[x, y) (x < y)$ 的区间生成的拓扑, 则 $\tau_1 \subset \tau_2$. 显然, $(x, y]$ 是 (X, τ_1) 中的

半开集,但 $(x, y]$ 不是 (X, τ_2) 中的半开集.

6. 存在某个集 X 上的两个不同的拓扑 τ_1 与 τ_2 , 使 A 是 (X, τ_1) 中的半开集当且仅当 A 是 (X, τ_2) 中的半开集.

我们用 $\text{So}(X)$ 代表拓扑空间 X 中的一切半开集所成的集族. Levine^[100] 猜测: 若 $\text{So}(X, \tau_1) \subset \text{So}(X, \tau_2)$, 则 $\tau_1 \subset \tau_2$. 由此推知, 若 $\text{So}(X, \tau_1) = \text{So}(X, \tau_2)$, 则 $\tau_1 = \tau_2$.

Hamlett^[72] 指出, 这个猜测是不正确的. 例如, 设 $X = \{a, b, c\}$, 并令

$$\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\},$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}.$$

可以证明, A 是 (X, τ_1) 中的半开集当且仅当 A 是 (X, τ_2) 中的半开集. 然而, $\tau_1 \neq \tau_2$.

7. 存在某个 S 闭空间, 它的一个子空间不是 S 闭的.

设 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ 是拓扑空间 (X, τ) 中的一些半开集组成的集族. 若 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ 是 X 的一个覆盖, 则称 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ 是 X 的一个半开覆盖或 S 覆盖.

拓扑空间 X 称做 S 闭的. 是指 X 的每个 S 覆盖 $\{U_\alpha\}$, 存在有限子集 $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$, 使得

$$X \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}.$$

S 闭空间的子空间不必是 S 闭的. 封定, 栗延龄^[17] 有例如下:

设 X 是实数集 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$, 命非空开集为 $X \setminus C$, 其中 C 是 X 的任一至多可数集 (可以是空集), 如此确定的开集全体形成 X 的一个拓扑. 显然, X 是 S 闭的.

设 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ 是 X 的可数子空间, 则 A 是闭的. 对于每个 $x_i \in A$, 因为

$$G = X \setminus \{A \setminus \{x_i\}\}$$

是 X 的开集, 所以 $A \setminus \{x_i\}$ 是子空间 A 的闭集, 于是单点集 $\{x_i\}$ 是 A 的开集, 从而 A 是离散子空间. 由此可知, A 不是 S 闭子空间.

8. 存在某个 S 闭空间的连续像, 它不是 S 闭的.

王国俊^[3] 指出, 为使拓扑空间 X 是 S 闭的, 当且仅当从 X 的每个正则闭覆盖中都可选出 X 的有限子覆盖.

王国俊还引入了 S 连续映射的概念: 设 X 与 Y 都是拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$. 如果对 Y 中的每个正则闭集 P , $f^{-1}(P)$ 是 X 中的正则闭集的并, 则称 f 为 S 连续映射. 王国俊证明了, 若 X 是 S 闭空间, $f: X \rightarrow Y$ 是 X 到拓扑空间 Y 上的 S 连续满映射, 则 Y 也是 S 闭空间.

应当注意, S 闭空间的连续像未必是 S 闭空间. 例如, Thompson^[166]证明了每个极端不连通的紧空间^①是 S 闭的. 由此推出 N 的 Stone-Cech 紧化 βN 是 S 闭的. 然而, βN 的连续像 βR 并不 S 闭.

注 Thompson 证明了 S 闭空间的同胚像必是 S 闭的.

Cameron^[43]也证明了, 为使拓扑空间 (X, τ) 是 S 闭的, 当且仅当每个由正则闭集组成的覆盖必有有限子覆盖.

Cameron 还指出, S 闭空间的连续像不必是 S 闭的, S 闭空间的商空间不必是 S 闭的. 两个 S 闭空间之积不必是 S 闭的.

9. 存在某个集上的一族 Urysohn 拓扑, 其中不存在最弱的拓扑.

设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的一对一的映射. 若对任一 $S \subset X$, S 是 X 的半开集当且仅当 $f(S)$ 是 Y 的半开集, 则称 f 是 X 到 Y 上的半同胚映射, 这时称 X 与 Y 半同胚. 在半同胚映射下保持不变的性质称为半拓扑性质.

设 (X, τ) 是拓扑空间, $[\tau]$ 表示与 (X, τ) 具有相同半开集族的全体拓扑空间组成的拓扑族. 杨忠强^[13]研究了 $[\tau]$ 中存在最弱拓扑的条件, 并指出, 从 (X, τ) 的 T_1 分离性不足以推出 $[\tau]$ 中存在最弱拓扑. 事实上, 即使假定 (X, τ) 是 Urysohn 空间 (由文献[46]知这时 $[\tau]$ 中所有拓扑空间都是 Urysohn 空间) 也不能保证 $[\tau]$ 中存在最弱拓扑. 杨忠强的例子如下:

设 X 为全体实数, Q 为全体有理数, 对任意 $x \in X$, 定义点 x 的邻域基为

$$\mathcal{B}(x) = \left\{ \{x\} \cup \left[\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \cap Q \mid n = 1, 2, \dots \right] \right\}.$$

由此生成的拓扑空间 (X, τ) 是 Urysohn 空间, 但 $[\tau]$ 中不存在最弱拓扑. 证明细节可参看作者原文.

注 杨忠强指出, S 闭性质是半拓扑性质.

10. 存在某个由拓扑空间 X 到 Y 上的半同胚映射 f , 它在 X 的某个子集 A 上的限制 $f|_A$ 不是 A 到 $f(A)$ 上的半同胚映射.

设 (X, τ) 与 (Y, σ) 都是拓扑空间, $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ 是半同胚映射, $A \subset X$, 则 $f|_A: (A, \tau|_A) \rightarrow (f(A), \sigma|_{f(A)})$ 未必是半同胚映射, 其中 $\tau|_A$ 与 $\sigma|_{f(A)}$ 分别表示 A 与 $f(A)$ 关于 (X, τ) 与 (Y, σ) 的相对拓扑. 下面的例子是由郭驼英^[25]作出的.

设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, 再设

$$\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\},$$

$$\sigma = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

令 $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ 是恒等映射, 则 f 是半同胚映射. 取 $A = \{2, 3\}$, 则

① Hausdorff 空间 X 称做极端不连通的, 是指 X 中每个开集的闭包是开集.

$$\tau \mid A = \{\emptyset, \{2, 3\}\}, \sigma \mid f(A) = \{\emptyset, \{2, 3\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

显然, $f \mid A$ 不是半同胚映射.

11. 存在某个拓扑空间的紧子集, 它不是 S 紧的.

设 (X, τ) 是拓扑空间. 若对 X 的任一 S 覆盖必有有限子覆盖, 则称 X 是 S 紧的.

显然, S 紧空间一定是紧空间, 但紧空间未必是 S 紧的. 例如, 设 $X = [-1, 1]$, 并具有实数空间的子空间拓扑 τ , 则拓扑空间 (X, τ) 是紧的. 令

$$\mathcal{U} = [-1, 0] \cup \left\{ \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

则 \mathcal{U} 是 X 的一个 S 覆盖, 但 \mathcal{U} 没有有限子覆盖. 因此, X 不是 S 紧的.

12. 存在两个正则开集, 其并不是正则开集.

正则开集的并集不必是正则开的. 例如, 设 X 是实数集并取通常拓扑,

$$G_1 = \left[0, \frac{1}{2} \right), G_2 = \left[\frac{1}{2}, 1 \right], \text{ 则 } G_1 \text{ 与 } G_2 \text{ 都是 } X \text{ 的正则开集, 但其并集}$$

$$G_1 \cup G_2 = \left[0, \frac{1}{2} \right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

不是正则开的.

13. 存在两个正则闭集, 其交不是正则闭集.

两个正则闭集的交集不必是正则闭的. 例如, 设 X 是实数集并取通常拓扑, $F_1 = \left[0, \frac{1}{2} \right], F_2 = \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$, 则 F_1 与 F_2 都是 X 的正则闭集, 但 $F_1 \cap F_2 = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ 不是正则闭的.

14. 存在某个拓扑空间 X , 其中每个非空子集在 X 中都是稠密的.

在集 X 上取平庸拓扑, 则对任意 $A \subset X$, 都有 $\bar{A} = X$, 其中 $A \neq \emptyset$.

15. 存在某个有限集, 其导集非空.

在 T_1 空间特别是度量空间内, 有限集的导集必为空集. 在一般的拓扑空间内, 有限集的导集不必是空集. 例如, 设 $X = \{a, b, c\}$, 令

$$\tau = \{X, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a\}, \emptyset\},$$

则 (X, τ) 为一拓扑空间. 考虑 X 的子集 $A = \{a\}$, 则点 b 和 c 都是 A 的聚点, 故 $A' = \{b, c\}$, 即有限集 A 的导集 A' 非空.

16. 存在某个集的导集, 它不是闭集.

在 T_1 空间内, 一个集的导集必为闭集. 在一般的拓扑空间内, 一个集的导集未必是闭集. 例如, 设 $X = \{a, b, c\}$, 令

$$\tau = \{X, \{a\}, \{b, c\}, \emptyset\},$$

则 (X, τ) 为一拓扑空间. 取 $A = \{b\}$, 易见, $A' = \{c\}$, 且 A' 不是闭集.

17. 存在某个 T_1 空间中的紧集,它不是闭的.

在一般拓扑空间甚至 T_1 空间中,紧集未必是闭的.例如,设 X 为实数集,命 X 的开集为空集 \emptyset 以及一切 $X \setminus C$, 其中 C 为任意有限集.此开集族形成 X 的一个拓扑 τ , 我们称 τ 为有限补拓扑.这个拓扑空间中的有限集都是闭的,故它是一个 T_1 空间.

现取 X 的子集 $A = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$, 并任取 A 的一个开覆盖

$$\mathcal{U} = \{ U_\alpha = X \setminus C_\alpha \mid \alpha \in \Delta \},$$

其中 C_α 为有限集.于是,存在 $U_0 \in \mathcal{U}$, 使 $0 \in U_0 = X \setminus C_0$. 由于 C_0 是有限集,故存在某个区间 I , 使 $0 \in I \subset U_0$. 因此存在自然数 n_0 , 当 $n > n_0$ 时,就有

$$x_n = \frac{1}{n} \in I \subset U_0.$$

由此可见,我们可从 \mathcal{U} 中选出有限多个开集 U_α , 它们足以覆盖 A , 即 A 是紧的.然而,由于 A 是无限集,故据拓扑 τ 的定义, A 不是闭的.

注 容易证明,紧拓扑空间中的闭集必是紧集.但是,紧拓扑空间中的紧集未必是闭集.例如,在集 X 上取平庸拓扑,则 X 为一紧拓扑空间.任取 X 的非空真子集 A , 则 A 是紧的,但它不是闭的.

18. 存在某个拓扑空间,其中每个非空闭集都不是紧的.

设 $X = (0, 1)$, 并令

$$\tau = \left\{ \emptyset, X, U_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n} \right] \mid n = 2, 3, \dots \right\},$$

则 (X, τ) 为一拓扑空间.任取非空闭集 $F \subset X$, 则 $\{ U_n \mid n = 2, 3, \dots \}$ 是 F 的一个开覆盖,它没有有限子覆盖,故 F 不是紧的.

19. 存在某个非 Hausdorff 空间,其中每个紧集都是闭的,而每个闭集也都是紧的.

容易证明, Hausdorff 空间中的紧集必为闭集.例 17 说明了在这个命题中,拓扑空间为 Hausdorff 空间的条件不可去掉.然而,也确实存在非 Hausdorff 空间.其中每个紧集都是闭的,而且每个闭集也都是紧的.下面的例子是由 Levine^[101] 作出的.

设 (Q, τ) 是有理数集并取实数空间的相对拓扑, (X, τ^*) 是 (Q, τ) 的一点紧化.由于 (Q, τ) 不是局部紧的,可见 (X, τ^*) 不是 Hausdorff 空间(参看文献[4], p.218), 而是 T_1 空间.

可以证明, (X, τ^*) 中的每个闭集都是紧的,而每个紧集也都是闭的.证明细节可参看作者原文.

20. 存在某个紧集,其闭包不是紧集.

设 X 为一无限集, $a \in X$, 命 X 的开集为空集以及含点 a 的任意子集,则单点

集 $A = \{a\}$ 是拓扑空间 X 的紧集, 但 $A = X$ 不是紧集.

21. 存在某个拓扑空间, 它的每个紧集都不包含非空开集.

设 X 为实数集, 并在 X 上取通常拓扑 τ , 再设 Q 为有理数集. 我们在 X 上取另一个拓扑 τ^* , 它是由 τ 加上形如 $Q \cap U$ 的集构成, 其中 $U \in \tau$. 显然, 拓扑 τ^* 强于拓扑 τ , 而 (X, τ) 是 Hausdorff 空间, 故 (X, τ^*) 也是 Hausdorff 空间.

兹证 (X, τ^*) 中的任何紧集都不包含非空开集. 假如相反, 即设 (X, τ^*) 中存在紧集 C , 它包含非空开集 G . 因 (X, τ^*) 是 Hausdorff 空间, 故 C 必为闭集, 从而 $G \subset C$. 根据拓扑 τ^* 的定义, G 必包含某个闭区间 $[p, q]$, 其中 $p, q \in Q$. 于是, 集族

$$\mathcal{U} = \{(-\infty, p), (q, +\infty), Q, (x, q) \mid x > p, x \in X \setminus Q\}$$

就构成了紧集 C 的一个开覆盖. 任取有限个 $(x_1, q), (x_2, q), \dots, (x_n, q)$, 其中 $x_i \in X \setminus Q, i=1, 2, \dots, n$, 令

$$x_0 = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

则 $\bigcup_{i=1}^n (x_i, q) = (x_0, q)$. 由于 $p < x_0$, 故 $(-\infty, p), Q, (x_0, q), (q, +\infty)$ 不能覆盖 C , 这与 C 是紧集的条件发生矛盾. 可见 C 不包含非空开集.

22. 存在某个无限拓扑空间, 其中每个子集都是紧的.

设 X 为一无限集, 命 X 的闭集为 \emptyset, X 以及任意有限集. 对 X 的任意一个开覆盖, 这些开集中的任意一个只盖不住有限个集, 例如 n 个点. 于是, 我们可以从这个开覆盖中至多选出 n 个开集, 它们覆盖了这 n 个点. 因此, 连同前面一个开集共至多 $n+1$ 个开集就覆盖了 X , 故 X 是紧的. 显然, X 的每个子集也都是紧的.

23. 存在实数集上的一个 Hausdorff 拓扑, 它的任何有理数子集的导集都是空集.

设 X 为实数集, 对任意 $\epsilon > 0$ 及 $x \in X$, 令

$$U_\epsilon(x) = \{y \mid |x - y| < \epsilon \text{ 且当 } y \neq x \text{ 时, } y \text{ 为无理数}\}.$$

不难验证, 全体 $U_\epsilon(x)$ 生成 X 上的一个 Hausdorff 拓扑, 从而 X 为一 Hausdorff 空间.

设 A 为 X 的任一有理数子集, 任取 $x \in X$, 因为 x 的每个邻域不含有 $A \setminus \{x\}$ 的点, 故 $x \notin A'$. 由于 $x \in X$ 是任取的, 因而 $A' = \emptyset$.

24. 存在某个无限拓扑空间, 其中不含有无限孤立点集.

可以证明, 每个无限 Hausdorff 空间必定含有无限孤立点集. 对于一般的拓扑空间, 这一命题并不成立. 例如, 设 X 为一无限集, 对 X 的子集 A , 当 A 为有限集或为空集时, 令 $A = A$; 当 A 为无限集时, 令 $A = X$. 于是, X 为一拓扑空间. 易见, X 中不存在无限孤立点集.

25. 存在某个非离散的拓扑空间, 其中每个紧集都是有限集.

我们知道, 拓扑空间中的有限集必为紧集, 但紧集未必是有限集. 我们称拓扑空间 X 为 **cf 空间**, 是指 X 中每个紧集都是有限集. 例如, 设 X 为任一非空集合, 在 X 上取离散拓扑, 则 X 为一 cf 空间.

除了离散的 cf 空间外, 也确实存在无限的非离散的 cf 空间. 例如, 设 X 为一自然数集, 命

$$\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, \dots, n\}, \dots, X\},$$

则 (X, τ) 为一非离散的 cf 空间. 又如, 设 X 为任一无限集, 命 X 的开集或为空集, 或为其补集至多是可数的, 则 X 也是一个非离散的 cf 空间.

26. 存在集 X 上两个不可比较的拓扑 τ_1 与 τ_2 , 使 (X, τ_1) 与 (X, τ_2) 同胚.

设 X 为一集, $a, b \in X$ 且 $a \neq b$. 命开集族 τ_1 为 X, \emptyset 以及含点 a 的一切子集; 又命开集族 τ_2 为 X, \emptyset 以及含点 b 的一切子集. 于是, 拓扑空间 (X, τ_1) 与拓扑空间 (X, τ_2) 是不可比较的. 另一方面, 不难看出,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq a, b, \\ a, & x = b, \\ b, & x = a \end{cases}$$

是 (X, τ_1) 到 (X, τ_2) 上的一个同胚映射, 从而 (X, τ_1) 与 (X, τ_2) 是同胚的拓扑空间.

27. 存在两个拓扑空间 X 与 Y , 使 X 同胚于 Y 的一个子空间, 而 Y 同胚于 X 的一个子空间, 但 X 与 Y 并不同胚.

在实数集 R 上取通常拓扑. 令 $X = (0, 1)$, $Y = [0, 1]$, 并在 X 与 Y 上都取相对拓扑, 则拓扑空间 X 同胚于拓扑空间 Y 的子空间 $(0, 1)$, Y 同胚于 X 的子空间 $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, 但 X 与 Y 并不同胚.

28. 存在一维欧氏空间 R 的两个同胚的子空间 A 与 B , 而不存在 R 到 R 上的同胚映射 f , 使 $f(A) = B$.

取 $A = \{0\} \cup [1, 2] \cup \{3\}$, $B = [0, 1] \cup \{2\} \cup \{3\}$, 则

$$g(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2, & x = 0, \\ 3, & x = 3 \end{cases}$$

是子空间 A 到子空间 B 上的同胚映射, 从而 A 与 B 是 R 的两个同胚的子空间. 但不存在 R 到 R 上的同胚映射 f , 使 $f(A) = B$.

29. 存在某个非紧的度量空间 X , 使 X 上的每个实值连续函数都是一致连续的.

我们知道, 紧度量空间上的每个实值连续函数都是有界的, 并且是一致连续

的.于是便产生下述问题:

(i) 若度量空间 X 上的每个实值连续函数都是有界的,则 X 是否必为紧的?

(ii) 若度量空间 X 上的每个实值连续函数都是一致连续的,则 X 是否必为紧的?

Hewitt^[79]肯定地回答了第一个问题.他证明了,为使度量空间 X 是紧的,当且仅当 X 上每个实值连续函数都是有界的.

容易证明,对于欧氏空间中的子集 A ,第二个问题的答案也是肯定的,即 A 为紧集的充要条件是 A 上的每个实值连续函数都是一致连续的.然而,对于一般的度量空间,尽管在它上面的每个实值连续函数都是一致连续的,但该空间仍然是不必紧的.例如,在实数集 R 上取离散距离,即

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

显然,度量空间 (R, d) 上的每个实值函数都是连续的,而且还是一致连续的.但是,度量空间 (R, d) 不是紧的.

Hermann^[75]于 1981 年指出,为使度量空间 X 是紧的,当且仅当下面两个条件成立:

(i) X 上的每个实值连续函数都是一致连续的.

(ii) 对任意 $\epsilon > 0$, $\{x \mid x \in X, d(x) > \epsilon\}$ 是有限集,其中 $d(x)$ 代表点 x 到集 $X \setminus \{x\}$ 的距离,即

$$d(x) = \inf\{d(x, y) \mid y \in X \setminus \{x\}\}.$$

30. R^2 中存在不同胚的子集.

考虑二维欧氏空间 R^2 的子集

$$X = \{x \mid d(x, p_0) = 1 \text{ 或 } d(x, p_1) = 1\},$$

$$Y = \{x \mid d(x, p_2) = 1\},$$

这里, $p_0 = (-1, 0)$, $p_1 = (1, 0)$, $p_2 = (5, 0)$ (见图 2).

兹证 X 与 Y 并不同胚.假如相反,即存在同胚映射 $f: X \rightarrow Y$. 令 $q = f(0)$,

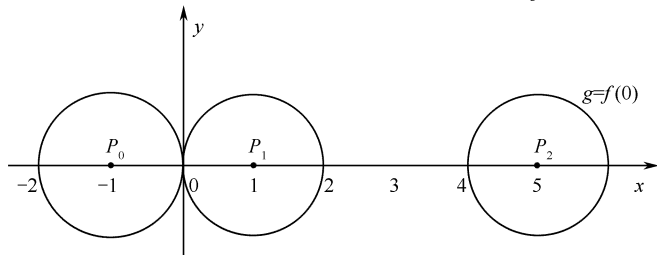


图 2