P27.

17.(2). 证明：

令 $f(x)=(6-\frac{1}{\sqrt{2}}x-5x^2-x^3)^{97}(1-6x^2+5x^4+\sqrt{2}x^6)^{99}$

$f(1)=(6-\frac{1}{\sqrt{2}}-5-1)^{97}(1-6+5+\sqrt{2})^{99}$

$=(-\frac{1}{\sqrt{2}})^{97}(\sqrt{2})^{99}=-2.$

∴ 原多项式展开式各项系数之和为 $-2$.

20. $g(x)=x^3(x+1)-5x^2(x+1)+9x^2-9$

$=(x^3-5x^2+9x-9)(x+1)$

$=(x^2-2x+3)(x-3)(x+1).$

$x^2-2x+3=0.\quad (x-1)^2=-2.\quad x=1\pm\sqrt{2}i.$

$x^2=-1\pm2\sqrt{2}i$

$x^4+2x^2+9=0 \rightarrow (x^2+1)^2=-8.\quad x^2=-1\pm2\sqrt{2}i.$

得 $-1+2\sqrt{2}i$ 和 $-1-2\sqrt{2}i$ 为两个多项式的公共根

21. (1) 证明：若 $a$ 是 $f(x)$ 的 $k+1$ 重根，则 $f(x)$ 可以写成.

$f(x)=(x-a)^{k+1}g(x).\quad, f(a)=0,\qquad (x-a)\nmid g(x).$

$f'(x)=[(x-a)^{k+1}]'g(x)+(x-a)^{k+1}g'(x)$

$=(k+1)(x-a)^k g(x)+(x-a)^{k+1}g'(x).$

$f'(a)=0.$

$f^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}[(x-a)^{k+1}]^{(i)}g^{(n-i)}(x)$

当 $n \le k$ 时，$f^{(n)}(a)=0$.

$n=k+1$ 时，$f^{(k+1)}(x)$ 中只有一项不含 $(x-a)$.

为 $(k+1)!g(x)$. 由于 $(x-a)\nmid g(x)$. $g(a)\neq 0$.

$\therefore f^{(k+1)}(a)\neq 0$.

若 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k)}(a)=0$, $f^{(k+1)}(a)\neq 0$,

则 $(x-a)$ 是 $f^{(k)}(x)$ 的一重因式.

$f^{(k-1)}(x)$ 的二重因式.

$\cdots$

$f(x)$ 的 $k+1$ 重因式.

$\therefore a$ 是 $f(x)$ 的 $k+1$ 重根.

23. $f(x)=x^3+px+q$ 有重根.

① 三重根，$f(x)=(x-\alpha)^3$

$=x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2 x-\alpha^3$.

$-3\alpha=0$. $\alpha=0$, $q=-\alpha^3=0$. $p=3\alpha^2=0$.

$\therefore p=0, q=0$ 时，$f(x)$ 有三重根.

② 二重根，$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$

$=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x-\beta)$

$=x^3-(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)x-\alpha^2\beta$

$2\alpha+\beta=0$, $p=\alpha^2+2\alpha\beta$. $q=-\alpha^2\beta$.

$p=-3\alpha^2$, $q=2\alpha^3$, ($\alpha$ 为任意非零常数) 时.

$f(x)$ 有二重根.

25. $f(x)=(x+1)^n-(x^n+1)$

$f(x)$ 有多重根，$\Leftrightarrow$ $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有相同根.

$f'(x) = n(x+1)^{n-1} - nx^{n-1}$

设 $f(x_0)=f'(x_0)=0$.

$(x_0+1)^n = x_0^n+1$, $\quad (x_0+1)^{n-1} = x_0^{n-1}$ $\Rightarrow$ $x_0\neq 0$.

$\left(1+\frac{1}{x_0}\right)^{n-1}=1 \quad \left(1+\frac{1}{x_0}\neq 1\right)$

$1+\frac{1}{x_0} = \left(e^{\frac{2\pi i}{n-1}}\right)^j$, $j=1,2,\cdots,n-2$

$x_0 = \dfrac{1}{\left(e^{\frac{2\pi i}{n-1}}\right)^j-1}$, 记 $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n-1}}$

$f(x)$ 有重因式 $\Leftrightarrow \left(\dfrac{\varepsilon^j}{\varepsilon^j-1}\right)^n = \left(\dfrac{1}{\varepsilon^j-1}\right)^n+1$

$\Leftrightarrow (\varepsilon^j)^n = 1+(\varepsilon^j-1)^n$.

$\Leftrightarrow \exists j\in\{1,2,\cdots,n-2\}$. s.t. $(\varepsilon^j-1)^{n-1}=1$

要有 $|\varepsilon^j-1|=1 \Rightarrow \varepsilon^j-1=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\Rightarrow 6\mid n-1$,

而 $n=6k+1$ 时. 取 $j=\frac{n-1}{6}$ 可使 $(\varepsilon^j-1)^{n-1}=1$. $(k\geq 1)$

因此，$n=6k+1$, $(k\geq 1)$ 时，

$f(x)=(x+1)^n-x^n-1$ 有重因式.

27. (1). $f(x)=x^4-4x^3+2x^2+x+6$.

$=(x-2)(x^3-2x^2-2x-3)$

$=(x-2)(x-3)(x^2+x+1)$. ($\mathbb{R}$上分解).

$f(x)=(x-2)(x-3)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ($\mathbb{C}$上分解)

(2) $g(x)=x^3+x^2+x+1$

$=(x^2+1)(x+1)$ （R上分解）

$=(x+i)(x-i)(x+1)$ （C上分解）

P29. 9. 证明: $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-c}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{n}(x_i-c)}{x_i-c}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i-c)}$

$f(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$

$f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)}{x-x_i}$

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}$ , $\frac{f'(c)}{f(c)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c-x_i}$

即 $-\frac{f'(c)}{f(c)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-c}$ ，证毕.

12. 证明: 反证法.

若 $f(x)$ 在有理数上可约. 设 $f(x)=g(x)h(x)$,

$g(x)$, $h(x)$ 为次数小于 $n$ 的整系数多项式.

有多于 $n$ 个整数使 $|f(x)|=1$.

则这些整数令 $|g(x)|=|h(x)|=1$.

$\partial(g(x))+\partial(h(x))=n$. 不妨设 $\partial(g(x))\le\frac{n}{2}$.

多于 $n$ 个整数使 $|g(x)|=1$, 而 $g(x)-1$ 与 $g(x)+1$

均至多有 $\frac{n}{2}$ 个零点. $|g(x)|=1$ 至多 $n$ 个根，矛盾. 故 $f(x)$ 在Q上不可约.