云南大学数学与统计学院  
《算法图论实验》上机实践报告

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 课程名称：算法图论实验 | 年级：2015级 | 上机实践成绩： |
| 指导教师：李建平 | 姓名： | 专业： |
| 上机实践名称：有向图的弧连通度 | 学号：20151910042 | 上机实践日期：2018-11-21 |
| 上机实践编号：6 | 组号： |  |

# 实验目的

1. 了解图的点连通度和弧连通度的定义；
2. 了解Menger定理的描述以及证明。

# 实验内容

1. 写出求图的弧连通度的算法；
2. 用C语言实现上述算法。

# 实验平台

Windows 10 Pro 1803；

MacOS Mojave。

# 算法设计

## 预备知识

为了刻画图的连通程度，引入图的连通度的概念。设连通图不是完全图，如果，使得是不连通的，则称是图的**点截集**（vertex-cut）。如果，也称之为-点截集。给定图的两个顶点和，假如点截集使得顶点和彼此不可到达，那么称点截集是图中**分离的点截集**（vertex-cut separating and ）。

定义图的点连通度（vertex-connectivity），记为，

对于非负整数，若，则称是-点连通图（-vertex-connected Graph），简称-连通图。

类似地可以定义边截集。给定连通图，如果，使得是不连通的，则称是图的**边截集**（edge-cut）。如果，也称之为-边截集。类似地定义**分离的边截集**（edge-cut separating and ）。定义图的边连通度（edge-connectivity），记为，

设是一个图，和是的任意两个非空真子集。给定一个链，如果它的两个端点分别属于和，而且链上的其他点都不属于，则称这个链是-**链**（-chain）。特别地，若，则本身就是一个-链。若，且任何一个-链都与相交，则称是一个-**分离集**（-separator），与也是-分离集。

**Menger定理** 和是的任意两个子集，则中存在个点不交的-链，当且仅当每个-分离集至少包含个点。

**Menger推论1** 设，，则中存在个点不交的-链，当且仅当中的每个分离的点截集至少包含个点。

**Menger推论2** 设，，则中存在个边不交的-链，当且仅当中的每个分离的边截集至少包含个边。

（**该推论的证明比较有启发性**，可以利用图的线图来证明，线图必然满足Menger定理，所以根据这个观察结果，直接证明本推论。）

**关于点的Menger型极大极小定理** 设是的两个不相邻的点，则内点不交的-链的最大个数等于局部点连通度。

**关于边的Menger型极大极小定理** 设是的两个不相邻的点，则内边不交的-链的最大个数等于局部点边通度。

## 算法解析

有了Menger定理的铺垫，就可以很顺利地写出求图的点连通度的算法，其核心思想是网络流算法。因为有点不交这个限制条件，所以不能单纯地讲所有边的容量设置为1。这直接导致了网络流算法中出现了节点的流量限制，但是Edmonds-Karp算法中并没有对于节点进行限制，所以需要对原图进行一定的变换。-链集合如图(*a*)所示，对于其中的蓝色节点来说，一定是偶数，可以将之拆分为两个节点，中间加一个边，且该边的容量设置为，这样就可以解除节点容量限制，直接在原图中进行网络最大流算法。(*a*)图是原先的，(*b*)图是经过变换之后的图。这样就可以解决点连通度的求解问题。对于边连通度问题而言要简单一点，直接在原图上采取网络流算法即可，通过遍历所有的点对，找出最小值即可。



## 求有向图的弧连通度的算法

假设已经有Edmonds-Karp算法，可以用来求解有向图的顶点与之间的最大网络流，且记这个形式为，这个算法是下面这个算法的子算法。

|  |  |
| --- | --- |
| **Algorithm**  **Input**  **Output**  **Begin**  **Step 1**  **Step 2**  **Step 3**  **Step 4**  **End** | 求有图的弧连通度，记此算法为  连通的有向图  图的一个弧连通度，记  // 初始化一个空的列表  // 初始化弧的容量  **for** **each** edge :    // 寻找任意有序点对之间的最大流量  **for each** vertex :  **for each** vertex **and** :    **output** |

# 程序代码

# 参考文献

[1] **林锐**. 高质量 C++/C 编程指南 [M]. 1.0 ed., 2001.

[2]