云南大学数学与统计学院  
《算法图论实验》上机实践报告

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 课程名称：算法图论实验 | 年级：2015级 | 上机实践成绩： |
| 指导教师：李建平 | 姓名：刘鹏 | 专业：信息与计算科学 |
| 上机实践名称：中国邮递员问题 | 学号：20151910042 | 上机实践日期：2018-12-31 |
| 上机实践编号：7 | 组号： |  |

# 实验目的

1. 了解一般“中国邮递员问题”及其算法；
2. 了解“有向中国邮递员问题”及其算法。

# 实验内容

1. 写出求最短路的最小插点问题的动态规划算法；
2. 用C语言实现上述算法。

# 实验平台

Windows 10 Pro 1803；

MacOS Mojave。

# 算法设计

## 前期知识

中国邮递员问题起源于实际需求。比之更早的一个问题是“戈尼斯堡七桥问题”，该问题由欧拉解决。给定一个图，如果存在一条简单链过图的每条边一次并且仅仅一次，那么这个链称为欧拉链（Eulerian Chain）；如果存在一个简单圈过图的每条边一次并且仅仅一次，那么这个圈称为欧拉圈（Eulerian Cycle）；若图有欧拉圈，则称图为欧拉图（Eulerian Graph）。

**定理7.1** （Euler定理） 设图是连通图，且边数，则是欧拉图，当且仅当不含奇点[1]。

**证明**

(1) 是欧拉图不含奇点

很显然，如果是欧拉图，那么本身就是一个欧拉圈。很显然，圈不含奇点。

(2) 不含奇点是欧拉图

假设是连通图，边数，且不含奇点，但是同时它不是欧拉图，同时假设是所有这种图中含边最少的一个。由图连通、以及都是偶数点可知，图的最小度。所以图含有圈（也可以这么认为：树是最简单的连通图，最小度为，往树上随便加一条原先不存在的边，都会产生圈）。假设是中含有边数最多的简单圈，因为假设不是欧拉图，所以根据假设可知：含有一个边数大于零的连通分图，且所有点的度均为偶数，由于，所以必须含有欧拉圈，否则就与是所有这种图中含边最少的一个相矛盾；现断言：。该断言可以解释如下：如果交为空，那么依此类推，其余连通分图也含欧拉圈，且与他们的交也为空，于是这些圈之间彼此点不交，这导致不是连通图，显然不可能，所以交非空。如此，可以通过走8字的方式构造一个比边数还多的圈，这与含边最多矛盾，于是这种图不存在，所以是欧拉图。证毕。 □

所谓的中国邮递员问题，指的是一个邮递员每次送邮件，要走遍他负责的投递范围的所有街道，完成任务之后，他应该按照什么样的路线走才可以使得走的总路程最短？把这个问题抽象成图论问题，就是给当一个图，每个边上有非负权值，要求出的一个（未必是简单的）圈，使得过每个边至少一次，并且使得圈的总权重最小。

可以这样思考：加入连通图不含奇点，那么这个图中有欧拉圈，即这是个欧拉图，所含的欧拉圈就是所要求的最佳邮递路线。如果连通图含有奇点，那么所求的圈必然过某条边多于一次，若在边上通过了次，我们就在与之间添加条新的边，并且令新添加的边的权重等于原来的边。对圈上每个这样的边都进行如此的操作，将得到的扩充之后的图命名为，那么就是多重图中的欧拉圈。这时得到一个很显然的事实：是由所有添加边的总权重所决定的。

如果边上的添加边数目不止一条，那么从中删除偶数条添加边，得到的图仍旧是欧拉图，且这个删减后的图的欧拉圈的权重不会变大。因此可以假设每个边上至多有一条添加边。于是，中国邮递员问题又被归结为如下的图论问题：给定连通图，每个边上有非负权，求，满足条件：在中，在的每个边上添加一个重边，使得这样得到的图无奇点。称为可行集（feasible set），并使得达到最小。

可行集是最优集，当且仅当对的每个初等圈，都有

这个事实是指任意简单圈，其包含的添加边的权重之和小于等于原先就存在的边的权重之和。这个定理是奇偶点图上作业法[2]的核心思想来源，下面简单地证明一下。

**Proof**:

**必要性**：设可行集是最优集，但这时存在一个初等圈，使得

这个不等式认为，存在一个圈，圈的边与最优集的交，比圈排除最优集中所有边的剩余还要更大。根据这个假设，可以令，也就是将初等圈中的添加边都舍弃，然后在没有添加过边的相邻点之间都加上点对。这样一来，不会改变整个图中的点都是偶度点的事实（因为两点之间顶多有一个添加边，所以这个操作仅仅会改变这个圈，对于圈外的点不影响奇偶度；对于圈内的点，要么两边的边都是添加边，要么一端是添加边但是另一端不是，在这种情况下进行进行如上操作，两边都是添加边的把这两个添加边都去掉，该点在原图中的奇偶度不变，另外的只有一端是添加边的，只是左右边由“原始边-添加边”变成了“添加边-原始边”或相反，这也不改变这个点的奇偶度），于是，也是一个可行解，且，这与是最优的相矛盾。

**充分性**：只需证明，当存在两个不同的最优集与时，只需证明两者的权重是相等的。对每个点，其关联边在与中的数目是同奇偶的（否则该点在与的分别作用下度不同）。所以不含奇点，进而可以剖分为若干个子集，使得每个子集都是初等圈，并设是所有这样的圈，于是由最优条件，任意的都有

反过来就有

所以

综上所述，充要性得证。

□

## 奇偶点图上作业法

山东师范学院的管梅谷教授提出的邮递员最优化投递路线问题，可以由管教授的奇偶点图上作业法来解决。此算法调用了算法、两点之间求最短路的算法。

|  |  |
| --- | --- |
| **Algorithm**  **Input**  **Output**  **Begin**  **Step 1**  **Step 2**  **Step 3**  **End** | 奇偶点图上作业法求解中国邮递员问题，记此算法为-  ，允许这个图为任意的图  图的一个圈，记-  // 计数并存储奇度点  **list**  **for** **each** vertex :  **if** :    **if** :    **goto** End  **else**:  **for** **through** :  **for** **each** edge :  **edge**        **for** **each** vertex :    **for** **each** vertex :  **for** **each** edge :  **if** **and** :      **else** **if** :    // 圈的对称差  **for** **each** vertex :  **for** **each** vertex :    **if** -:      **for** **each** edge :    **for** **each** **edge** :    **if** : |

这个算法的两个核心问题：如何证明最优化条件，如何找出所有的圈。第一个问题的证明已经给出，但是第二个问题需要设计算法。由于这里找的是简单圈，所以考虑某个点的反圈，从中任取一个点，在中寻找从到的路，这条路如果找到，那么就是一个简单圈。通过循环，可以找到所有的圈，然后挨个验证即可。

# 程序代码

# 参考文献

[1] 田丰, 张运清. 图与网络流理论 [M]. 2nd ed. 北京: 科学出版社, 2015.

[2] 管梅谷. 奇偶点图上作业法 [J]. 数学学报, 1960, 03): 263-6.