云南大学数学与统计学院  
《算法图论实验》上机实践报告

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 课程名称：算法图论实验 | 年级：2015级 | 上机实践成绩： |
| 指导教师：李建平 | 姓名：**刘鹏** | 专业： |
| 上机实践名称：二部图的最小匹配问题 | 学号：20151910042 | 上机实践日期：2018-12-18 |
| 上机实践编号：8 | 组号： |  |

# 实验目的

1. 了解最小匹配问题及其解决算法；
2. 了解最小匹配算法的实际应用模型。

# 实验内容

1. 用网络流算法实现求二部图的最小匹配问题，用伪代码将此算法表示出来；
2. 用C语言实现上述算法。

# 实验平台

Windows 10 Pro 1803；

MacOS Mojave。

# 算法设计

定义 1 匹配 给定，若，且中任何两条边都不相邻，则称是的**边无关集**（Edge-independent Set），也称为**匹配**（Matching）。我们称在中的边为-边，不在中的边称为非-边。如果点，且中存在-边，则称为**-饱和点**（-saturated Vertex）；反之，如果中全是非-边，则称为**-非饱和点**（-unsaturated Vertex）。

定义 2 完美匹配 给定，是的一个匹配，而且中没有-非饱和点，则称是的完美边无关集（Perfect Edge-independent Set），也称是的完美匹配（Perfect Matching）。如果对于边无关集，不存在另一个边无关集，使得，那么称边无关集是**最大的**（Maximum）；**完美边无关集一定是最大边无关集，但是最大边无关集不一定是完美边无关集。**

最大边无关集不一定是完美匹配，换言之，在某个合适这种情况的图中，存在一个和完美匹配同势的另一个不同的匹配，亦即在该匹配中存在-非饱和点。

## 问题描述

**问题1描述**：给定一个二部图（不一定是正则二部图），通过算法计算，如果这个图有完美匹配，则输出一个完美匹配，否则输出该图不含完美匹配。

**问题2描述**：给定一个边赋权二部图，且所有权均非负，输出该图的具有最小重量的最大边无关集。

## 问题1与问题2的审视

由于最大边无关集不一定是完美边无关集，所以无法通过网络最大流一般的给出算法，但是第二个问题可以使用网络流算法来解决。除此之外，比较一般的算法是匈牙利人给出的匈牙利算法。由Berge定理可知，边无关集是图最大边无关集，当且仅当中不含-增广链。

## 求二部图的最大边无关集算法

首先根据Berge定理，给出求二部图的增广路的算法：

|  |  |
| --- | --- |
| **Algorithm**  **Input**  **Output**  **Begin**  **Step 1**  **Step 2**  **Step 3**  **Step 4**  **End** | 求二部图的增广链，记此算法为  二部图，图的一个匹配，如果是零匹配也允许  图的一个增广链，记  // 得到中的非饱和点集合  // 初始化染色  **for** **each** vertex :  **for** **each** vertex        // 起点染色，初始化队列            **while** :    **if** :    **if** :  **continue**  **else**:  **for** **each** :          **else** **if** :  **if** **is** :  return  **goto** End  **else**:    **if** :  **continue**  **for** **each** : |

这个算法在Berge定理的基础上，对于反圈法进行了修改，使得反圈的修改变得有了条件，然后就可以找寻增广路。如果找到了一个增广路，就立刻停止算法，然后输出，输出之后就可以计算就可以得到一个更大的匹配；然后再计算……直到再也找不出增广路。这是个渐进式最优化算法。这个算法与网络最大流算法的核心思想是完全一样的，只不过后者需要构造一个剩余网络。

该算法借鉴了反圈法，但是并不能把反圈法当作子算法。

# 程序代码

详见电子版。

# 参考文献

[1] **林锐**. 高质量 C++/C 编程指南 [M]. 1.0 ed., 2001.

[2] **Renfei Song**, 二分图的最大匹配、完美匹配和匈牙利算法, Aug. 1, 2013 / 算法, http://www.renfei.org/blog/bipartite-matching.html