云　南　大　学

数学分析习作课（1）读书报告

题　　目：几何直观与模式语言在数学分析中的应用

学　　院：数学与统计学院

专　　业：信息与计算科学

姓名、学号：刘鹏、20151910042

任课教师：杨汉春

时　　间：2016-01-01

摘要：“数无形而少直观，形无数而难入微”，华罗庚教授如此概括数学的学习。微积分是用分析的方法对解析式函数进行普遍性研究。其中**连续概念、一致连续概念、微分中值定理、复合函数求导法则、反函数求导法则**等概念与方法，均存在着或明显简单或巧妙难得的几何直观。要想深刻理解数学分析中的很多概念，从几何直观入手，是一个很不错的方法。

数学到底是什么？这个问题或许很难回答。借鉴过很多前人经验后，我认为把数学理解为一种有关“模式”的科学是比较恰当的。数学中有很多的概念可以从现实世界中找到原型，并且复杂的背后，我们往往可以看到这些多元化东西的实质就是一个东西

关键词：几何图形、直观、模式化

几何直观

本学期的数学分析课程关注一元微积分，并且重点关注连续可导函数。**一元微分学的解析表达式对应直角坐标系上的函数图像。**

只能说，几何直观对于数学分析来讲，是在基础概念的理解上起帮助作用，然而要想走得更高更远，非用解析方法不可。

华罗庚教授曾说“有数无形不直观，有形无数难入微”，早先出现的欧几里得几何，难于找寻解题思路，并且往往要做很多辅助线，有时若没有巧妙的方法，难以进行工作。后世出现的直角坐标系，令判定与构造变得机械化，有时不用画图便可以解决一些比较难的问题。

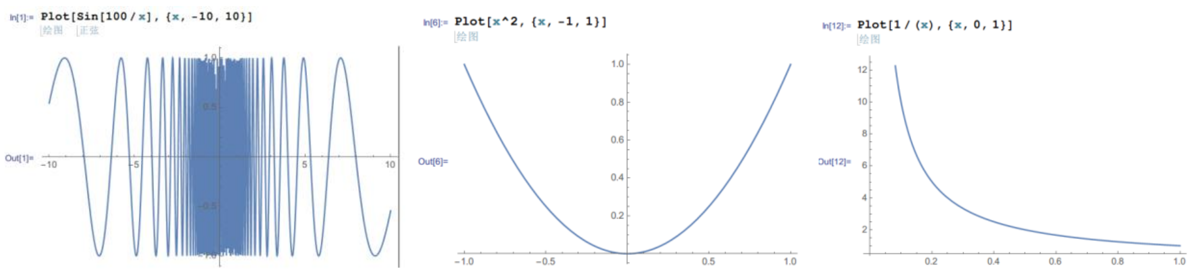
用几何直观对微积分中的几个概念进行说明：

1.一致连续性：**设函数$f(x)$在区间X（或开，或闭，或半开半闭）内满足对任意的$\varepsilon > 0$，可以找到只与ε有关而与X内的点x无关的$\eta > 0$，使得对X内任意两点x_1和x_2，当$|x_1 - x_2| < \eta$时，总有$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$，就称$f(x)$在$X$内一致连续。**

一致连续性表示：**不论在区间D的任何部分，只要自变量的两个数值接近到一定程度，就可使对应的函数值达到所指定的接近程度。**

由此我们可以引入一个矩形L，从几何角度研究描述这个分析现象。

几何直观：**一致连续性是函数的整体性质，而连续是一个局部性质。**如图所示：



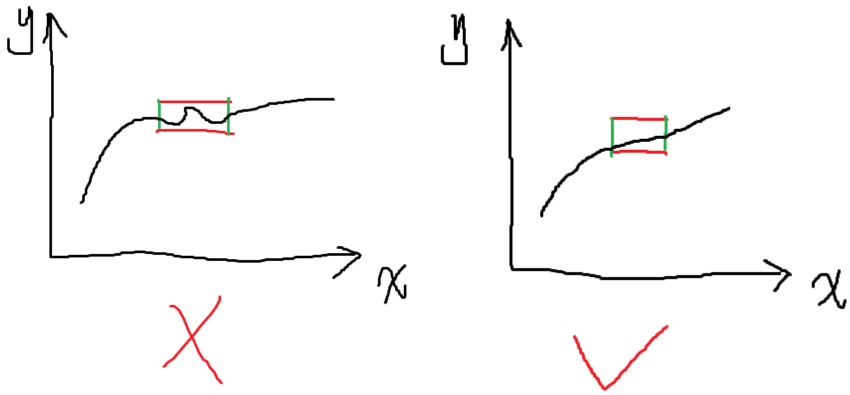
根据课本定义，函数$f_1(x) = sin\left(\frac{100}{x}\right)$在区间$[-10,10]$是非一致连续的，$f_2(x) = x^2$在区间$[-1,1]$上是一致连续的，$f_3(x) = \frac{1}{x}$在区间(0,1]上是，非一致连续的。

下面给出判定方法以及非一致连续函数的归纳。

判定：**对于在$[a,b]$连续，在(a,b)可导的函数$f(x)$，在$[a,b]$上一致连续的充要条件是可以找到一个底长为η，纵高为ε的矩形L，并使得L可以在函数$f(x)$的图像上平移。并且**

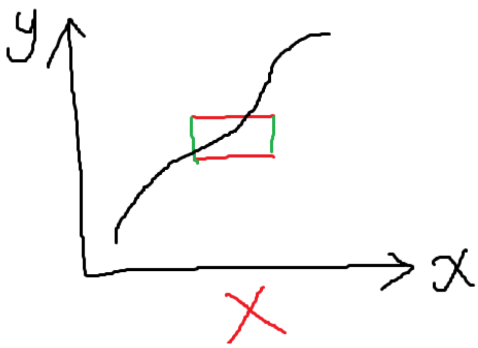
①L所包围的曲线所对应的坐标x与y之间的映射必须是单射。

即如下图示：



只能是右图样式，左图之类的不成立。

②函数$f(x)$的某个邻域上的图像，只能穿过该矩形的“y方向的边”，不能穿过“x方向的边”。



穿过红线是不符合定义的，能且只能穿绿线。

反之，非一致连续函数必然找不到这样的矩形L。

分类来说：

Ⅰ$f(x)=\sin\frac{1}{x}$，如果取定一个这样的矩形L，其长宽是定值，使得这样的平移在$x=0$附近一定区间上成立。观察函数$f(x)=\sin\frac{1}{x}$，可以明显地观察到，当$x\to 0^{+}$时，$\dfrac{1}{x}$变化愈加剧烈，当x变化一个Δx（Δx很小），$\dfrac{1}{x}$将变化一个较大范围，$\sin\frac{1}{x}$变化的“周期数（或更恰当地称之为‘振荡数’）”也越多，函数的两个相邻零点之间的距离越小。所以我们假设的这个矩形的“x方向宽度”终归会大于某一个“相邻零点间距”。所以，这样的矩形不存在。**这是第一类非一**

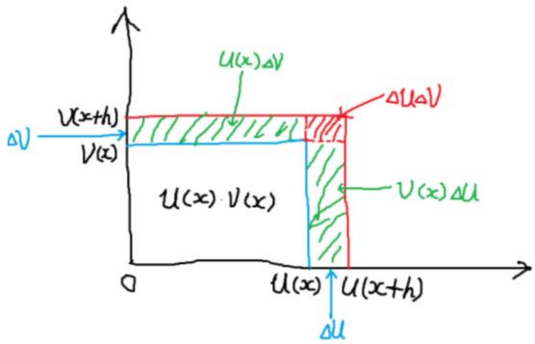
致连续，可以命名为“周期无穷小振荡型”。|

| $f(x)=\frac{1}{x}$，如果取定一个这样的矩形L，其长宽是定值，使得这样的平移在$x=0$附近一定区间上成立。观察函数$f(x)=\frac{1}{x}$，它以纵坐标轴为垂直渐近线，所以当$|x-x_0|\to 0$时，$\frac{1}{x}$近乎于一条竖直直线，所以在这附近，$f(x)$的图像必定穿过矩形L“x方向的边”，这肯定不成立。

所以，$f(x)=\frac{1}{x}$在区间$(0,\delta)$和$(\delta,0)$，$\delta>0$，是不一致连续的。**这是第二类非一致连续，可以命名为“切线斜率无穷大型”|**

其实，第一类非一致连续也属于第二类非一致连续的范畴。因为当连续函数的两个零点间距无限小时，函数在这两个零点之间的图像近乎垂直，也是切线斜率无穷大型。

2. 积的导数公式的推导：$(uv)'=u'v+uv'$



若$u(x)$和$v(x)$都是大于零的，可以形象地将两者表示为矩形的两条边。两个函数都是增函数，那么，当x有一个增量$h>0$，矩形就有面积增量：

$$\Delta S=u(x+h)\ v(x+h)-u(x)v(x)=\ u(x+h)\Delta v+v(x+h)\Delta u-\Delta u\Delta v$$

两边同时除以h并令$h\to 0^+$，那么$\Delta u\Delta v\to 0^+$，进而马上就有

$$\frac{dS}{dx}=\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx},$$

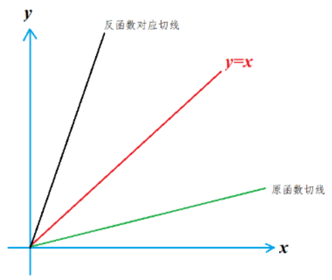
这便是积的导数公式。

3.反函数的导数与原函数的关系：

若（1）$y=f(x)$在点x_0导数存在且不等于 0；（2）$f(x)$在点x_0的某一邻域内连续，且严格单调，则其反函数$x=\varphi(y)$在点y_0可导，这里$y_0=f(x_0)$，并且有$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

用几何直观来看，这也是很简单的。

首先已经知道，原函数与其反函数的图像是关于直线$y=x$对称的，那么也立即得到，在一对对称点上，他们各自的切线也是关于直线$y=x$对称的，并且两者交于直线$y=x$上的一点处。



为了更好地观察两个切线之间的关系，我们可以将二者都平移到过原点，容易知道，绿色切线与x轴的夹角与黑色切线与x轴的夹角互余，所以有$\tan\theta_{black}\times\tan\theta_{green}=1$.

根据这个观察结果，立即知道，原函数在$x=x_0$处的切线斜率等于反函数在$y=y_0$处的切线斜率$y_0=f(x_0)$，$x_0=f^{-1}(y_0)$，即两者的导数满足以下关系：

$$[f^{-1}(y_0)]'=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

4.对参数方程的**连续性讨论**以及**微分方法**给出的几何证明

参数方程的定义：在给定的平面直角坐标系中，如果

(1) 曲线上任意一点的坐标(x,y)都是某个变数t的函数：$x=f(t),y=\varphi(t)$；

(2) 对于t的每一个允许值，由(1)中方程所确定的点(x,y)都在这条曲线上，那么(1)中方程组称为这条曲线的参数方程，联系x、y之间关系的变数称为参变数，简称参数。

首先思考一个问题，对于定义在区间(a,b)上的t，如果参数方程：

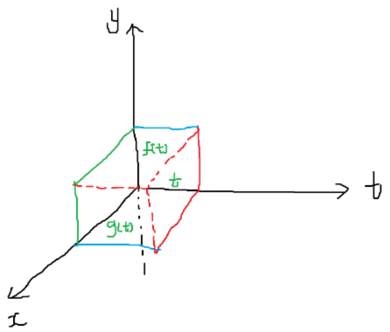
$$\begin{cases}x=g(t)\\y=f(t)\end{cases}$$

中的$g(t)$和$f(t)$都是连续的，那么函数$y=f\left(g^{-1}(t)\right)$，即$x$到$y$的映射，是不是也是连续的呢？

很显然，$g^{-1}(t)$是连续的，这由反函数的图像性质立即得到，所以说$g^{-1}(t)$的值域是一个连续区间。又因为f也是一个连续的函数，所以在三个区间的交集上（如果有的话），参数方程表示的函数是连续的。

这个连续性的证明主要是由反函数连续性与原函数连续性的关系考察而得的。并没有很大的创造性。

接下来，考察这个微分形式。



如右图，在平面直角坐标系O_{xy}上，再插入一个垂直轴t，所以函数$x\to y$就可以由图中的长方体唯一确定。其中长方体的三条棱长为$t,f(t),g(t)$，并且$\mathrm{d}x$可以看做一个很小的线段。所以根据微分的定义我们立即可以得到这个公式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(f(t)\right)}{\mathrm{d}\left(g(t)\right)}=\frac{f\prime(t)\mathrm{d}t}{g\prime(t)\mathrm{d}t}=\frac{f\prime(t)}{g\prime(t)},$$

这与课本上的给出形式如出一辙，并且没有用到反函数求导的方法。

5. 柯西中值定理的几何意义：

类似于上一个例子，柯西中值定理方程中的x可以视作参数t，所以有这个方程组

$$\begin{cases}x=g(t)\\y=f(t)\end{cases}$$

所以柯西定理可以这样叙述：闭区间连续、开区间可导的一个用两个参数方程表达的函数，满足拉格朗日中值定理。

即对于闭区间连续、开区间可导参数方程函数

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$

对于一个区间$[a,b]$, 存在一个点$\big(g(\xi), f(\xi)\big)$在这段图像中, 使得

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{\mathrm{d}\big(f(\xi)\big)}{\mathrm{d}\big(g(\xi)\big)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

这也是参数方程几何意义的一个应用。

综合以上五个实例，我们来归纳一下几何直观方法的应用原理。

1\. 由不等式得来的限制：

这个的意思就是说可以用几何图形来进行“圈点”，以构造一个封闭的空间，从而表达一系列概念。比如以下应用：

（1） 邻域：分析上为了说清楚“在$x = x_0$附近”这一情况，引入了一段数轴上的几何直线段，并且令$x = x_0$为这个线段的中点坐标，从而进行限制区间；这是属于单变量限制。**一维限制可以限制单变量取值区间。**

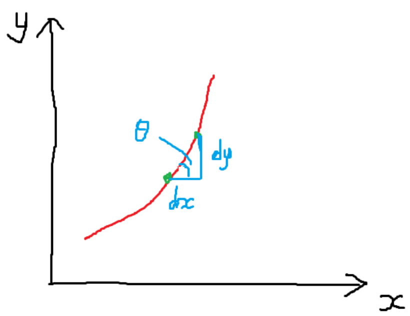
用不等式表示：$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

（2） 一致连续性:我们为了说明这一情况,即“**自变量的两个数值接近到一定程度，就可使对应的函数值达到所指定的接近程度**”，我们引入一个矩形，二维限制就是对两个变量同时限制，所以可以在确定自变量之差为一有限值后，得到因变量之差也为有限值。**二维限制可以同时限制两个相关变量的取值。**

用不等式组表达：$\begin{cases} x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \\ y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon \end{cases}$

2\. 由函数概念到几何思维的转变：很长时间我们一直把平面直角坐标系中的y看作x的函数，即y是经过x经过一定操作得来的。这很自然，也很符合人性，但是遗憾的是这限制了我们的思维。归根到底，这些字母代表的数字只是数轴上的点，所谓的函数图像也只是在一种“点与点之间的对应关系下的构图”。如下例子：

（1）微分：



如上图（左下为 1 点，右上为 2 点，θ为这个绿色直角三角形底边相邻的锐角），由极限可知：

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{x_1-x_2\to 0}\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\tan\theta=f'(x),$$

所以$\mathrm{d}y=\ f'(x)dx.$

这是微分的朴素定义。

3.斜率变化：函数的增减性以及连续可导函数的凹凸性可以从图像上点的切线斜率的变化得出最直观的感受。在此不多作解释。

其实，上述例 3 也可以归结到总结 2 中，因为这不仅仅是斜率的数值关系，而且也是一种微分比例。

再次总结来看，我们发现，极限初论以及微分概念都可以给出几何直观理解，所以有可能从几何直观上，用**限制、微线段、比例**，加上分析上极限的概念，构建出整个微积分的基础。

然而遗憾的是，几何直观往往只有在概念理解上起帮助作用，当大踏步前进之时，它的弊端一览无余，既不能进行计算，也不能开拓。所以这半篇论文在建设性上没有什么结果，不过是为了理解基本概念以为以后应用这些分析学概念进行一些指导。

要想走得更远，只有借助算数方法。

模式化语言的使用

美国数学家齐斯·德福林在《数学的语言》一书中写道，**"在最近大约三十年间，一个为大部分数学家所同意的有关数学的定义，才终于出现了：数学是研究模式的科学（Science of patterns）。数学家的所作所为，就是去检视抽象的模式。"**

数学在应用上必须是机械的，尽管它在探索上需要巧妙和刻苦。

或许断章取义地看，学习数学分析也无非是这样。

举例来说。魏尔斯特拉斯语言这样描述数列极限：

设$\{x_n\}$是一个数列，a是实数.如果对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在一个正整数N，当$n>N$时，都有$|x_n-a|<\varepsilon$，我们就称a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛，且收敛于a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

或

$$x_n\to a\qquad(n\to\infty),$$

这时也称数列$\{x_n\}$极限存在。

这话对于极限的定义大概是：**一个变量与一个常值的差的绝对值要多小就有多小。**翻译成数学语言或者机械化模板就是上面的"$\varepsilon-N$"语言。这个语言或者说行文模式就是极限的标

准化语言，以后**证明极限的步骤就是作变量与定值的差的绝对值，研究这个新的变量是不是无穷小量（这就是对于无穷小量的分析）**。

再比如说，数论中常用的归纳法。假设命题对于一个开始值成立，那么从这个开始的值出发，可以导出紧随该值之后的一个值也对该命题成立。这时候，如果将第二个值设置为初始值，同样可以得到其后的一个值成立。如此循环往复，直至无穷无尽；或者从高维开始定义，直至最低维度照样成立，从而可以把我们不熟悉的问题或者无从下手的问题解决。

比如说代数学中的行列式计算方法：

定义行列式的值为

$$D = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

其中，A_{1j}也是一个行列式，$n \geq 2$，且A_{1j}是划去元素a_{1j}的代数余子式。以此类推，总可以将行列式化为很多二阶行列式的组合。进而可以按照机械的方法运算任意阶的行列式。

可以概括一下这种机械化语言：**递推式方法，即运用一种嵌套式的概念，进行机械化变形与运算，最终将问题化为可解的。**

这种嵌套式语言还可以应用在复合函数上，不过这次的定义是从简单走向复杂。

首先我们知道，对于简单函数或者说基本函数，都是从x到y的一个映射，这时的变化可以视x呈线性变化，y的变化由对应法则确定。当加入一个中间变量u，使得现在的映射分步，先是$x \to u$，再是$u \to y$，每一个箭头前的变量相对于后一个变量来说，都是线性均匀变化的，所以求解的机械化方法就是分层来求。

从里一个角度讲，求不定积分中的凑微分法也是一种形式化归。我们本身已经拥有很多初等函数的不定积分表达式，对于陌生的函数求积分时，通过简单的化归，终究要落到一些不能再化的形式，这时通过凑形式，把一部分变量的函数看作整体，进行变量替换，最终将问题化为可解。

这种类似的模式有很多，这里通过归纳的方法进行总结。

1. **递推有限重复模式：很多数学概念都是可以独立存在的，正如很多模式，我们可以利用它完成一步操作得到一个结果后再次对这个结果运用这种模式，直到将结果化成比较简单的形式。**比如说先前提到过的行列式按行展开进行降级。

   还有洛必达法则的有限次应用，积的n阶导数的有限次利用，分部积分的有限次应用等。

2. **由特殊到普遍过度的探究模式：**自古以来数学的研究都不是直就从最普遍的情况入手的，一般而言，数学家们都是从一些比较有美感的特殊情况进行猜测，进而发现一些有用的结论。

   比如说证明拉格朗日中值定理，我们先对罗尔定理进行证明，之后运用构造法将一般情况转化成普遍情况，进而得到证明。相似的还有行列式的六大性质的证明，先是从最基本、最简单的性质入手，然后从两个已知性质上取交集，得到一个新的性质。

3. “Save/Load 模式”：这种模式更多的是为我们的数学学习与研究提供一种方法论。我时常相信，学习数学必须要时刻记得自己的基础是什么，否则是不能真正领悟数学的。说是确实这样。只有从最最基本的层面了解了数学的精神，我们才能体会到数学概念真的是自然的，没有某个概念是冗杂的。

   我相信这始终是学习数学的精神。如果有一天我沉迷于背公式中无法自拔，那么情况就危险了。这也是我写这篇基础概念理解类读书报告的初衷。

   所谓 save，就是储存，对于大脑来说，真正的 save 是理解，load 是加载，对于大脑来讲，load 是学习。

数学中有很多东西是相似的，就像是多姿多彩的物理世界，当你用还原论的视角去看待一切时，终归会发现，所有的东西都可以归结为一样东西，那就是物体的运动，运动便会产生运动方程，这也是微积分数学分析思想的起源之一。无论如何复杂，最终都是一个简单东西的变体，无论我们曾经面对它是时，有多么困惑。

一切终将获得最完美的解答。

参考书目

1.《数学的语言：化无行为可见》【美】齐斯·德福林，广西师范大学出版社
2.《古今数学思想》【美】莫里斯·克莱因，上海科学技术出版社
3.《高等数学》第六版上册，高等教育出版社（同济版）
4.《高等代数——大学高等代数课程创新教材》丘维声，清华大学出版社
5.《有用的数学》吕炳仁，北京工业大学出版社
6.《复杂》【美】梅拉妮·米歇尔，湖南科学技术出版社