云南大学2016至2017上学期数学与统计学院2015级

《数学分析（3）》期末考试（闭卷）试卷（A）

参考答案

一、判断题（15分，每小题3分）判断下列各题，请在正确的题后括号内打“√”，错误的题后括号内打“X”。

（1）设 $(a_n, b_n) \supset (a_{n+1}, b_{n+1})$ $(n=1,2,3,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n)=0$，则存在唯一的 ς 满足 $a_n \le \varsigma \le b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$。（ √ ）

（2） 数列 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k+1}\}$ 都收敛是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件。（ X ）

（3）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，c 为常数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 也发散。（ X ）

（4）绝对收敛的无穷限反常积分必收敛。（ √ ）

（5） 若 $f(x,y)$ 在 $[a,b;-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。（ √ ）

二、填空题（15分，每小题3分）。

（1）设 $S=\left\{(-1)^n \dfrac{n}{2n+1}+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \,\middle|\, n=1,2,\cdots\right\}$，则 $\inf S = \underline{5/3}$。

（2）$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}=\underline{\pi}$。

（3）$\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{2\pi}$。

（4）幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}\left(x^2+x+1\right)^n$ 的收敛半径 $R=\underline{\ 1/2\ }$。

（5）$\displaystyle\lim_{y\to 0}\int_0^1\frac{e^{xy}}{1+x^2+\sin xy}dx=\underline{\frac{\pi}{4}}$。

三、计算题（42分，每小题7分）。

（1）判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^3+6n+1}$ 的敛散性（包括绝对收敛和条件收敛）。

解：对于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+6n+1}$。因为

$$\frac{1}{n^3+6n+1}\le\frac{1}{n^3},\qquad 4\text{ 分}$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$收敛，根据比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+6n+1}$收敛。所以原级数绝对收敛。 7 分

（2）判别$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\arctan x}\left(x^3+e^x\right)}\mathrm{d}x$的敛散性。

解：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\arctan x}\left(x^3+e^x\right)}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{\arctan x}\left(x^3+e^x\right)}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\arctan x}\left(x^3+e^x\right)}\mathrm{d}x=I_1+I_2$，

I_1。$x=0$是奇点。因为

$$\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\arctan x}\left(x^3+e^x\right)}=1,\quad p=\frac{1}{2}<1,$$

根据柯西判别法知I_1收敛。 4 分

I_2是无穷限积分。因为

$$\lim_{x\to+\infty}x^3\frac{1}{\sqrt{\arctan x}\left(x^3+e^x\right)}=0,\quad p=3>1,$$

根据柯西判别法知I_2收敛。综上知原积分收敛。 7 分

（3）判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{n^5x^2+4}$在$(-\infty,+\infty)$上的一致收敛性。

解：当$x\in(-\infty,+\infty)$时，对任意的n，有

$$\left|\frac{nx}{n^5x^2+4}\right|\le\left|\frac{nx}{4n^{\frac{5}{2}}x}\right|\le\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},\qquad 5\text{ 分}$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，根据 Weistrass 判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{n^5x^2+4}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。 7 分

（4）设$F(y)=\int_{e^y}^{y^2}x^2y^3\mathrm{d}x$，求$F'(y)$。

解：$F'(y)=\left(\int_{e^y}^{y^2}x^2y^3\mathrm{d}x\right)'$

$$=\int_{e^y}^{y^2} 3x^2y^2\mathrm{d}x+2y^8-y^3e^{3y}$$ 5 分

$$=3y^8-y^3e^{3y}-y^2e^{3y}$$ 。 7 分

（5）设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$，求 $f(x)$ 的傅里叶变换。

解： $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\,dx=\dfrac{2}{\omega}\sin\omega$，$\omega\neq 0$， 5 分

$\hat{f}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\,dx=2$。 7 分

（6）将 $f(x)=\sin^2 x$ 展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间。

$$f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$ 3 分

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4^n}{2(2n)!}x^{2n},\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$ 。 7 分

四、应用题（7 分）将 $f(x)=\begin{cases}\pi, & 0\leq x\leq\pi,\\ -\pi, & -\pi\leq x<0\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为傅里叶级数，并求级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ 的和。

解：$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0$，

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0$，$\quad(n=1,2,\cdots)$，

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi\sin nx\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{4}{n}, & n\text{是奇数},\\ 0, & n\text{是偶数}.\end{cases},\quad(n=1,2,\cdots),$$

所以

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n-1}\sin(2n-1)x$$ 。

根据收敛定理，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n-1}\sin(2n-1)x=\begin{cases}\pi, & 0<x<\pi,\\ -\pi, & -\pi<x<0,\\ 0, & x=0,-\pi,\pi\end{cases}$$ 4 分

取 $x=\frac{\pi}{2}$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n-1}(-1)^{n+1}=\pi\text{，}$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(-1)^{n+1}=\frac{\pi}{4}$。 7 分

五、证明题（21 分，每小题 7 分）。

(1) 利用数列的柯西收敛原理证明数列 $x_n=1+\frac{\cos 1}{3}+\frac{\cos 2^2}{3^2}+\frac{\cos 3^3}{3^3}+\cdots+\frac{\cos n^n}{3^n}$ 收敛。

证：对任意的自然数 p，有

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\left|\frac{\cos(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}}+\frac{\cos(n+2)^{n+2}}{3^{n+2}}+\cdots+\frac{\cos(n+p)^{n+p}}{3^{n+p}}\right|$$

$$\le\left|\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{3^{n+p}}\right|=\frac{\frac{1}{3^{n+1}}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^p\right)}{1-\frac{1}{3}}\le\frac{1}{2\cdot 3^n}<\frac{1}{3^n}\text{，}$$ 4 分

$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\log_3\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，对任意的自然数 p，有 $\left|x_{n+p}-x_n\right|<\varepsilon$。根据柯西收敛原理知数列 $\{x_n\}$ 收敛。 7 分

（2）设数列 $\{nu_n\}$ 有界，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛。

证明：设 $|nu_n|\le M$，则 $|u_n|\le\frac{M}{n}$，于是 $u_n^2\le M\frac{1}{n^2}$。 4 分

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，根据比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛。 7 分

（3）证明 $I(y)=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^y}\mathrm{d}x$ 在 $[3,+\infty)$ 上连续。

证：当 $x\in[1,+\infty)$ 时，对任意的 $y\in[3,+\infty)$，有

$$\left|\frac{\ln(1+x)}{x^y}\right| \le \frac{x}{x^y} = \frac{1}{x^{y-1}} \le \frac{1}{x^2},$$

而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛，根据 Weistrass 判别法知$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^y}\mathrm{d}x$在$[3,+\infty)$上一致收敛。 5 分

又$\frac{\ln(1+x)}{x^y}$在$1 \le x < +\infty, 3 \le y < +\infty$上连续。根据连续性定理知$I(y)=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^y}\mathrm{d}x$在$[3,+\infty)$上连续。 7 分