云　南　大　学

数学分析习作课（3）读书报告

题　　目：不等关系与比较在数学分析中的应用

学　　院：数学与统计学院

专　　业：信息与计算科学

姓名、学号：刘鹏、20151910042

任课教师：黄辉

时　　间：2017-1-3

摘　要

数学分析本质上是建立在极限概念上的初等数学。数学分析或者由之往下的高等数学，皆是以极限为基础和工具，去叙述一些概念与现象，然后用极限给出定义。在接下来的分析中，无不是用这样的思维进行的。

数学是描述数量关系与空间位置关系的一种语言。而且后者，也可以化为数量关系。所以从一般意义上讲，数学关心的就是数量关系。既然是数量关系，那么必然存在着相等与不等。在实际操作中，我们将会发现，相等关系的出现往往是伴随着很重要的应用，而不等关系却更加普遍地存在着，并且，不等关系可以很好地刻画一些现象以及数学过程。

无论是在证明中，还是在给出定义中，不等关系是相当重要的，尤其是在以极限为基础的数学分析中。

如果不考虑几何意义，那么可以肯定地讲，不等关系的符号化，即不等式，是模式化语言中最为一般的存在。本文将从一些一般化情景下给出不等式的作用意义，然后总结归纳出几个不等式的适合描述场景，目的是从高观点下对数学分析中定理的共性进行举例分析，从而加深对它们的理解，在日后也将获得有益的启示。

关键词：不等关系　不等式

1 对符号化语言的反思

数学最重要的是思维和想象，而不是计算。定理需要被叙述，而且需要能够用符号化表示，但是很遗憾，现阶段的数学，很多都是很糟糕的语言，最初的发现者规定了应该用哪些东西表示什么意思，然后自己觉得这个符号体系很不错，然后就推而广之了。

诚然，符号化语言很能够推动数学的发展，但是，从另外一个角度讲，符号化语言对于数学的本质又是一种遮盖。举例来说，我曾经一度迷惑两个表达式：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

我对于d的概念在很长一段时间里一直停留在一个很狭隘的阶段，只是认为这是一个很小的分量，所以两个很小的量之比就是微商，即微小的分量做商就是微商。然而后来我才明白，d的含义里面，已经隐藏了一个极限在里面，它本来就不是一个常量，而是一个变量取变化量很小的一个过程。所以第二个商是导数。符号包含过程，是一个很普遍的存在，然而当初作为初学者的我并没有意识到这一点，所以，当时的我纠结在极限运算里面无法自拔，迷茫困顿于怎么求一个极限。

后来我回忆这个过程，我在想是什么给了我误导。如果说是因为自己的悟性不够高所致，定然是有道理。但是我同样觉得，是这一套符号系统给了我副作用。所谓极限的运算，始终是一种工具，对于工具的灵活运用，还有技能习得的最好的手段，从来都不是在新手教学赛里面获得的。没有编程大师是从“Hello World!”类型的程序里练出来的。

综上两个方面，我深深地觉得，对于一个天资一般的初学者，能够抛开高度定制化、符号化的语言[1]，先把核心的思想搞懂，是首要的任务，而能够大体给出思维上的定理的证明并且能做出有益的延伸，才是一个学习数学的人学得好的真正表现。如果能够把数学的定义、定理叙述，变得和程序语言一样，或许是一个更大的进步。后来我放下了很多东西，重新翻看了很多基本的东西，得到了一些基本的模型，在这里写出来，这是我这学期最大的收获。

[1] 其实数学符号语言是一种很糟糕的语言，对于大段定理的证明往往是很难让人读懂的，很多定义也都是作者随意而为，没有直观性

1.1 比较

关于比较这个心理动作，最初的人类就已经自然获得了，能够比较食物的大小、重量，然后做出最适合自己的选择。比较，恐怕是人类的本能之一。

数字的概念也很古老了，并且有人类学家考证，人类在数字概念上，最先领会的并不是基数，而是序数。也就是说，人类最先领会的是先后顺序，而不是最先有的大小概念。从这里面我们也可以看出，先后顺序也暗含着比较的意味。

下面从几个基本定义的叙述中，查看比较的广泛存在性与应用方式。

1.1.1 极限的定义暗含比较

数列极限的定义：设$\{x_n\}$是一个数列，a是一个实数. 如果对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在一个正整数N，当$n>N$时，都有$|x_n-a|<\varepsilon$，我们就称a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a.

如上所示，极限实质上叙述了一个早就已经被观察到的现象，那就是可以任意接近，单纯从语言叙述上是很难描述这种情形的，因为任意地小下去也是一个不可描述的过程。这个时候用不等式就可以恰到好处地表示出这个内涵，那就是任意给定的定值，都将被这个变量“超越”。这正是极限的内涵。有了这一个纯数字比较的模型，我们就可以毫不含糊地给出一个定义、一种现象、一种运算、一种基础。而正是有了以不定关系为核心的极限的存在，我们才真正进入了微积分的大门。

从这里看出，不等式具有限制的作用。可以将变量的范围进行局限，从而进行研究。

1.1.2 不等关系可以化繁为简

从最简单的不等式放缩，再到一些性质根据不等式进行拓广，其实不等关系的核心，就是集合的性质，即集合的包含关系。不考虑其他复杂的属性，但就数字的大小来说，这种比较也是有着很大的意义的。比如这学期所学的级数收敛的判别法。

最基本的判别法就是比较判别法。在此基础上，柯西通过开方运算，将一般的级数与几何级数进行比较，得出一般性结论；达朗贝尔通过递推的求商，也将一般的级数与几何级数进行了比较。所谓不等关系可以化繁为简，指的就是可以在我们熟悉的简单领域进行划分，如果一些我们直接解决还解决不了的领域，可以被比较容易地判断为一个简单领域的子集，那么，这个我们还不了解的领域，就必然有着我们一些已经知道的性质。获得这些性质，也是重要的。

数项级数的比较判别法：若两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$之间成立着关系：存在常数$c>0$，使

$$u_n\leqslant cv_n\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

或者存在N，当$n>N$时，以上关系恒成立，那么$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，必有$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，后者发散，前者

也发散。这个结论是重要的，但是它的证明确是显然的。因为两个式子的大小关系依然确定，所以和的大小关系也是确定的，所以根据以比较原理为基础的集合原理，我们就能得出这个结论。

这个也同样适用于放缩不等式，在很多时候我们没有办法对两个代数式进行直接比较，但是引入一个中间大小的新的式子，使得它与左右两边的式子都是可以比较的，那么在这种情形下，两边的大小关系也是可以确定的。

本学期的反常积分收敛性的判断，无不是这样的应用。这里由于论述的是普遍的不等关系，就不展开叙述了。

1.1.3 不等关系得出存在性

很多时候，我们可以从数学思维上看出一个命题成立为真，或者往具体讲，我们能确定一个等式是成立的、一个量是存在的。而这确定的基础，就是不等关系的存在。

积分第一中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，且在 $[a,b]$ 上可积，则在 $[a,b]$ 中存在一个数 ξ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

在此之前，我们要阐释一下 $\int$ 的意义。

这个符号和 d 一样，也是一个具有极限内涵的符号，只是把它的一般运算性质写出来之后，我们就会逐渐对它变得熟悉，在这种情况下，如果练习做得足够多，那么很有可能就会忘记它最初的意义，而把它与加减等初等运算混为一谈，因为初等运算与这种高洁运算符的内涵差别很大而运算形式差别几乎没有，从而让人忽略了极限的内涵。所以能时常回顾最原始的定义，从繁复的推导中总结出核心内涵，是很有益的。积分号实质上是一种带有极限意味的和式，但是与无穷级数不同的是无穷级数是无穷多项相加，但是对于项之间并没有要求它们相关，而对于积分运算而言，虽然也是无穷多项相加，但是要求它们随着项数增多，每一项的数值也是减少的。

回到这个定理。很显然，$f(x)$ 在定义闭区间上连续，那么必然有最大值与最小值，如果说这个无穷彼此相关联的和式，即积分而言，选中其中一个 $f(x_i), x_i \in [x_{I-1}, x_I]$，闭区间是积分小区间。如果使这个 x_i 处的 f 的数值，成为 f 在整个定义域上的数值，那么这些乘积加起来，必然在 f 的上下界取值之间（这就是比较！），即所得的结果与积分值有差距。由于 f 是连续的，那么便可以找到一个 x，使得两者没有差距。这就从上下界的限制，即一种由不等关系确定的限制中，知道了一个特殊点的存在。虽然我们很有可能无法求得它，但是知道这个点的存在已经是很有用的了，因为在数值计算中，知道了存在性，我们就可以通过收缩算法，得到这个点的数值解，从而在工程领域得到广泛的应用。

与此类似，所谓的牛顿法求方程的数值解也无非是这样一种情况。根据连续性和不等关系，得到一个存在性，然后通过循环与判断，不断精确地得到数值解。而十分重要的微分学基本定理，也都是建立在这样一个基础之上，即有盈有亏，中间必有圆满，即必有等式成立解存在。

1.1.4 不等关系得出确定值

在绝大多数情况下，确定数值都是根据解方程得到的，当然这里排除了数值计算方法求数值解的情况，因为从严格的数学角度看，数值解永远不是解，只是一个近似成度在人们的需要范围内可以接受的近似值。若从另一个角度看，抛开大小观念，我们能体会到，数值解是完全错误的解。

所谓确定的解，即使通过符号运算得出的。很简单但是很显然的例子就是极限运算中的逼近定理，即两边夹法则。这种情况与之前的数值方法不一样，数值计算是可以通过算法进行考量，取无限的一部分，而这里的确定值，虽然也是算不出来的情况，但是我们却可以确定，这就是这个极限的“终点”。

这里我想举一个函数项级数的例子。

根据克莱因的讲解，他在《高观点下的初等数学》第一卷的分析部分里，提议将三角函数的定义，由最初的单位圆引入，更换为直接的泰勒级数。

即直接把原始定义就写作：

$$\sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \cdots$$

事实上，泰勒级数的发明，也是基于对于不等关系的思考。对于在定义域上有n阶导数的函数，我们可以根据它在某一点的导数值，估计它在附近的（这里是真正的附近，即人直觉上感觉可能可靠的接近程度上）函数值，期待算出来的东西在工程应用中与实际数值带来的效用差不多。为了得到更加好的数值解，人们开始在一阶导数上往前考虑。在这里我们不去揣测是先有的余项概念还是先有的这个级数的形式的概念，因为很有可能这个定理是被猜出来的，然后发现它确实使得精确程度提高了，然后再用构造辅助函数的方式，严格证明了它。对于超越函数，级数几乎是唯一的解决方案。因为在取得前几项多项式之后，虽然知道已经比较接近（或者说在某些区间上很接近了），但是在这个时候，仍然是不等的。这个时候，如果把这个过程无限进行下去，我们可以猜测，这个过程会使得结果越来越精确，误差越来越小。而事实确实是这样。或许是从猜测角度出发，进行的不等的弥补，导致了一种新型的具有革命性的级数展开的发现。

对于不等关系的弥补，使之差距逐渐缩小，是数学研究的一项近乎是本能的做法，而在这个过程中，我们发现了超越函数的新的表达方式。因为超越函数本身就无法精确表示，所谓超越类的解析式，很多都是包含约定的超越符号的，比如自然对数的底e，人为取拉丁文缩写$\sin$，这与无穷级数没有本质差别，共性就是都写不完。

1.2 有关各种形式的定义

我们不理会定义是怎么给出的，定义有很多种，可能是从物理世界抽象出来，可能是一种纯粹构造性的定义，用来说明一种情况（比如黎曼函数）。

哈代曾经说过，真正的数学家，比如欧拉、高斯、黎曼，他们都是伟大的 Former，即构造家，他们可以构造出函数或者级数，来说明一些重要的问题。

很多时候，构造可以是直观的，比如说，拉格朗日中值定理的证明，就是通过构造，用罗尔定理证明，而罗尔定理又可以从费马定理推出，费马定理又是不等关系推倒确定关系的一种应用。

数学本身就是构造性的，这里泛泛而谈了很多不等关系的应用，以及它们的地位，无非是想说明一种证明的思路和一种阐述的方式。不等关系作为数学中最普遍的存在，是有用的，也是重要的，能利用好不等关系，进行一些关系的相互限制，得出有用结论，是值得的。

2　参考文献

[1] 数学和编程，王垠，http://blog.jobbole.com/95766/
[2] 莫里斯·克莱因，古今数学思想，上海科技出版社
[3] 克莱因 ，高观点下的初等数学
[4] 数学分析，欧阳光中，朱学炎，金福林，陈传璋，高等教育出版社
[5] 有用的数学，吕炳仁，北京工业大学出版社
[6] 托马斯微积分，高等教育出版社