云南大学数学与统计学院实验教学中心
实验报告

课程名称： 数学建模实验	**学期：** 2016~2017 学年下学期	
指导教师： 李朝迁		
学生： 刘鹏 20151910042 信计	**学生：** 王泽坤 20151910011 应数	**学生：** 段奕臣 20151910002 应数
实验名称： MATLAB 微分方程求解		**成绩：**
实验编号： 三	**实验日期：** 2017 年 4 月 21 日	**实验学时：** 2
学院： 数学与统计学院	**专业：** 信息与计算科学	**年级：** 2015 级

一、实验目的

二、实验内容

【实验内容和步骤】

1 题

求微分方程解析解的 MATLAB 命令为 `dsolve`，请使用 `help` 命令学习。

Solution:

dsolve

Differential equations and systems solver

Syntax

```
S = dsolve(eqn)
S = dsolve(eqn,cond)
S = dsolve(eqn,cond,Name,Value)
[y1,…yN] = dsolve(__)
```

Description

`S = dsolve(eqn)` solves the differential equation eqn, where eqn is a symbolic equation. Use `diff` and == to represent differential equations. For example, `diff(y,x) == y` represents the equation `dy/dx = y`. Solve a system of differential equations by specifying eqn as a vector of those equations.

*S = dsolve(eqn) 能够求解符号形式的微分方程 eqn。通过 diff 命令与 == 可以构建一个微分方程。例如，diff(y,x) == y 就代表 dy/dx = y。通过将 eqn 指定为符号方程的向量形式，可以解决微分方程组。

`S = dsolve(eqn,cond)` solves eqn with the initial or boundary condition cond.

*S = dsolve(eqn,cond)可以解决带有初值条件或者边际条件的方程.

`S = dsolve(eqn,cond,Name,Value)` uses additional options specified by one or more `Name`, `Value` pair arguments.

*S = dsolve(eqn,cond,Name,Value)使用额外的一个或多个 Name, Value 双参数选项。

`[y1,…,yN] = dsolve(_)` assigns the solutions to the variables `y1,…,yN`.

*[y1,…,yN] = dsolve(_) 将解赋值到变量 y1,…,yN。

2 题

Page$_{85}$ 2 题：用欧拉方法和龙格-库塔方法求下列微分方程初值的数值解，画出解的图形，对结果进行分析比较。

（1）$\begin{cases} y' = y + 2x, \\ y(0) = 1 \end{cases}$，$(0 \leqslant x \leqslant 1)$，精确解 $y = 3e^{x} - 2x - 2$；

（2）$\begin{cases} y' = x^2 - y^2, \\ y(0) = 0\text{或}y(0) = 1 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2, y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{\pi} \end{cases}$ （贝塞尔方程，令$n = 0.5$），精确解$y = \sin x\sqrt{\dfrac{2\pi}{x}}$.

注释：

- 用欧拉方法进行编程；
- 对于龙格-库塔方法进行直接调用，ode23 或者 ode45。

Solution:

算法总分析：

这些微分方程都有初值，而所谓的初值，指的就是所求函数在定义区间起始点的真实取值或者观测值。

数值微分的核心思想就是将连续的区间片段化，然后根据初值，利用导数，算出第二个区间的起始值或者称为第一个区间的结束值。然后将这个值，作为第二个区间的初值，一路迭代下去，最终的到这些区间的端点值，这就是一个离散的但是很密集（因为区间取得很小）的数值解。可以应用在工程中。

欧拉方法的基本思想就是对于连续函数，在一个很小的区间$[x_n, x_{n+1}]$上用数值微分方法的前差公式（向右），代替方程$y'(x) = f(x,y)$中的左端的导数y'，而右端函数$f(x,y(x))$中的x取$[x_n, x_{n+1}]$中的某一点，于是得到

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x,y(x)), \quad x \in [x_n, x_{n+1}].$$

这个公式毫无疑问是精确的。因为，这符合差分的定义，而且根据拉格朗日中值理，肯定存在一个位于$[x_n, x_{n+1}]$中的x使得上面的公式成立。但是这样还是写不出程序，因为我们无法解决存在性数值确定解的选取问题，所以必须给定一个能拿得出手的x。

由于区间很小，所以连续函数在这个区间上的变化范围定然不会太剧烈，即接近一个直线段，故不妨取左端点数值x_n，这样就可以给出一个近似：

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y(x_n)).$$

当然也可以给出一个靠右的近似。$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$。这就是所谓的向前与向后欧拉公式。因为向后欧拉公式涉及到对于自身的调用，而且其精度没有理由会更好，所以我们把向前欧拉公式写成程序。

（1）

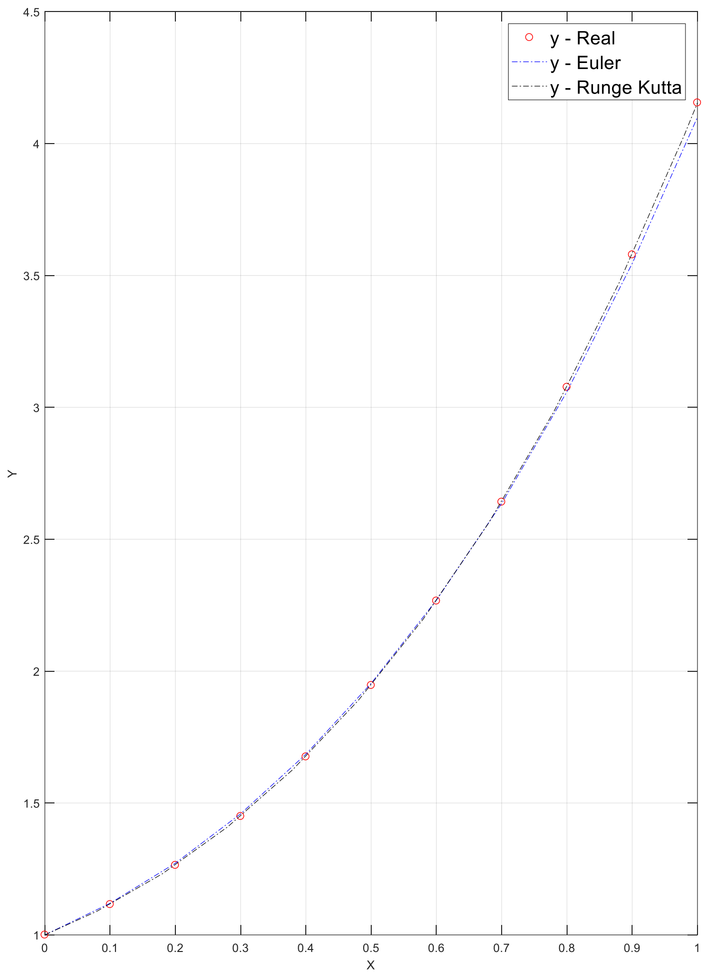
程序代码：

```
%  filename: Euler_Forward_1
step = 0.1;
%% The real graph
x = [0 : step : 1];
y = 3 * exp(x) - 2 * x - 2;
plot(x,y,'ro');
hold on;

%% Euler Method
y_cal = [1];
y_0 = 1;
for i = 0.1 : step : 1
```

```
    tmp = y_0 + (y_0 + 2 * i) * step;
    y_cal = [y_cal,tmp];
    y_0 = tmp;
end
plot(x,y_cal,'b-.');

%% Runge-Kutta methods
tspan = [0 1];
y0 = 1;
[t,y] = ode23(@(t,y) 2 * t + y, tspan, y0);
plot(t,y,'-.k');
grid on
xlabel('X');
ylabel('Y');
legend('\fontsize{16}y - Real','\fontsize{16}y - Euler',...
    '\fontsize{16}y - Runge Kutta);
```

程序代码 1

运行结果：



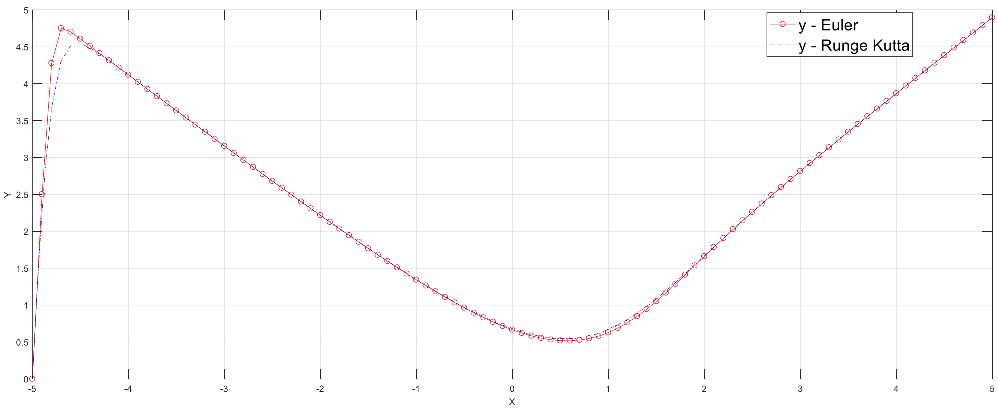
运行结果 1

（2）
程序代码：

```
%   filename: Euler Forward 2
%%  欧拉向前方法
step = 0.1;
y 0 = 0;
y 1 = [];
x = -5 : step :5;
for i = -5 : step : 5
    y 1 = [y 1,y 0];
    y 0 = y 0 + (i^2 - y 0^2) * step;
end
plot(x,y 1,'r-o')
hold on;

%%  Runge-Kutta methods
tspan = [-5 5];
y0 = 0;
[t,y] = ode23(@(t,y) t^2 - y^2, tspan, y0);
plot(t,y,'b-.');
tspan = [-5 5];
grid on
xlabel('X');
ylabel('Y');
legend('\fontsize{18}y - Euler','\fontsize{18}y - Runge Kutta');
```

程序代码 2

运行结果：



运行结果 2

（3）

二阶常微分方程的向前欧拉方法，需要给出两个初值，从而进行迭代。而对应的龙格·库塔方法，就需要一个常微分方程组，利用二维向量进行函数的定义。

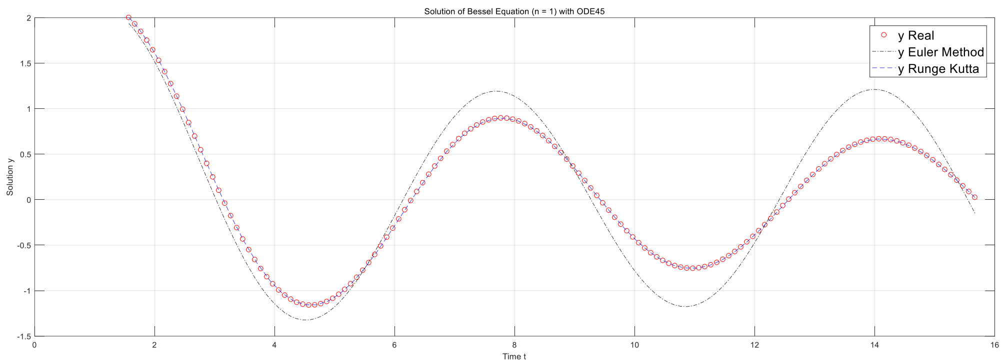
程序代码：

```
%   filename: Euler Forward 3
step = 0.1;
%%  The real graph
x = [pi / 2 : step : 5 * pi];
y = sin(x) .* sqrt(2 * pi ./ x);
plot(x,y,'ro');
hold on;

%%  Euler method
```

```
y_0 = 2;
dy_0 = - 2 / pi;
y_cal = [];
n = 0.5;
for i = pi / 2 : step : 5 * pi
    ddy_0 = ( - i * dy_0 - (i^2 - n^2) * y_0 ) / i^2;
    % get the value of the second derivative test
    y_0 = y_0 + step * dy_0;
    dy_0 = dy_0 + ddy_0 * step;
    % get the value of the first derivative test by the second
    y_cal = [y_cal,y_0];
end
plot(x,y_cal,'k-.');
grid on;
%%  Runge-Kutta method
tspan = [pi/2, 5 * pi];
[t,y] = ode45(@vdp1,tspan,[2;-2 / pi]);
plot(t,y(:,1),'b--');
title('Solution of Bessel Equation (n = 1) with ODE45');
xlabel('Time t');
ylabel('Solution y');
legend('\fontsize{16}y Real','\fontsize{16}y Euler Method',...
    '\fontsize{16}y Runge Kutta');
hold off;
```

程序代码 3

运行结果：



运行结果 3

之前如果做一个取值区间比较小的测试，就会发现向前欧拉公式得出的结果与实际结果几乎没有差异，然而，当我们把区间长度取到比较大的时候，就会发现，实际的结果与数值结果相差越来越大。这就是误差累积的结果。

3 题

Page$_{85\sim87}$ 3 题~7 题，9 题，任选一题。

两种群相互竞争模型如下：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_1 x\left(1 - \dfrac{x}{n_1} - s_1 \dfrac{y}{n_2}\right), \\ \dot{y}(t) = r_2 y\left(1 - s_2 \dfrac{x}{n_1} - \dfrac{y}{n_2}\right), \end{cases}$$

其中$x(t)$，$y(t)$分别为甲乙两种群的数量；r_1，r_2为他们的固有增长率；n_1，n_2为它们的最大容量。s_1的含义是，对于供养甲的资源而言，单位数量乙（相对n_2）的消耗为单位数量甲（相对n_1）消耗的s_1倍，对s_2可作相应的解释。

该模型无解析解，试用数值解法研究以下问题：

（1） 设$r_1=r_2=1$，$n_1=n_2=100$，$s_1=0.5$，$s_2=2$，初值$x_0=y_0=10$，计算$x(t)$，$y(t)$，画出它们的图形及相图(x,y)，说明相同时间t充分大以后$x(t)$，$y(t)$的变化趋势（人们今天看到的已经是自然界长期演变的结果）。

（2） 改变r_1，r_2，n_1，n_2，x_0，y_0，但s_1，s_2不变（或保持$s_1<1$，$s_2>1$），计算并分析所得结果；若$s_1=1.5(>1)$，$s_2=0.7(<1)$，再分析结果。由此你能得到什么结论，请用各参数生态学上的含义做出解释。

（3） 试验当$s_1=0.8(<1)$，$s_2=0.7(<1)$时会有什么结果；当$s_1=1.5(>1)$，$s_2=1.7(>1)$时又会有什么结果。能解释这些结果吗？

Solution:

（1）

程序代码：

```
%   filename: odefun
%   definition of the differential equation group
function dydt = odefun(t,y,r1,r2,n1,n2,s1,s2)
    dydt = zeros(2,1);
    dydt(1) = r1 * y(1) * (1 -  y(1) / n1 - s1 * y(2) / n2);
    dydt(2) = r2 * y(2) * (1 - s2 * y(1) / n1 - y(2) / n2);
end
```

程序代码 4

（2）

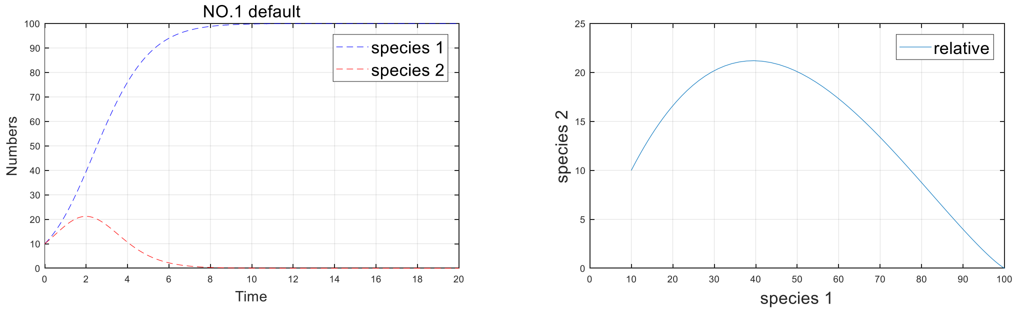
程序代码：

```
%   filename: predator prey
%   Testing the influence of the coefficients
%%  NO.1 default
tspan = [0 20];
opt=odeset('reltol',1e-6,'abstol',1e-9);
[t,y] = ode45(@odefun,tspan,[10,10],opt,1,1,100,100,0.5,2);
figure;
subplot(1,2,1);
plot(t,y(:,1),'b--',t,y(:,2),'r--');
grid on
xlabel('\fontsize{14}Time');
ylabel('\fontsize{14}Numbers');
legend('\fontsize{16}species 1','\fontsize{16}species 2');
title('\fontsize{16}NO.1 default')
subplot(1,2,2);
plot(y(:,1),y(:,2));
grid on;
xlabel('\fontsize{16}species 1');
ylabel('\fontsize{16}species 2');
legend('\fontsize{16}relative');

%%  NO.2 [r1, r2] --> [0.3, 0.3]
tspan = [0 20];
opt=odeset('reltol',1e-6,'abstol',1e-9);
[t,y] = ode45(@odefun,tspan,[10,10],opt,0.3,0.3,100,100,0.5,2);
figure;
subplot(1,2,1);
plot(t,y(:,1),'b--',t,y(:,2),'r--');
grid on
xlabel('\fontsize{14}Time');
```

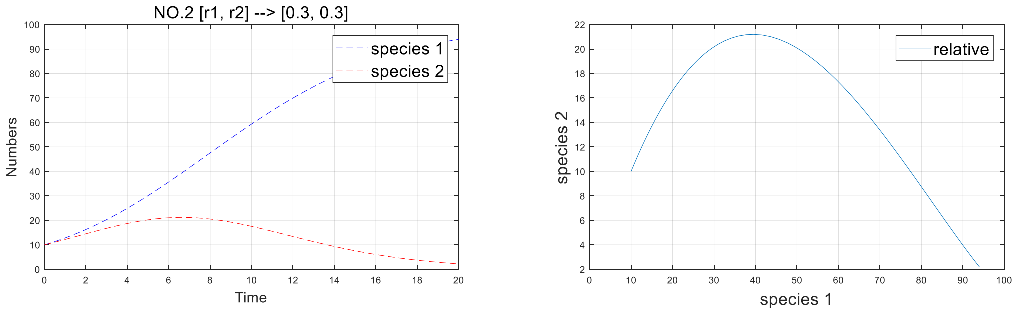
```
ylabel('\fontsize{14}Numbers');
legend('\fontsize{16}species 1','\fontsize{16}species 2');
title('\fontsize{16}NO.2 [r1, r2] --> [0.3, 0.3]');
subplot(1,2,2);
plot(y(:,1),y(:,2));
grid on;
xlabel('\fontsize{16}species 1');
ylabel('\fontsize{16}species 2');
legend('\fontsize{16}relative');

%%  NO.3 [n1, n2] --> [100, 6000]
tspan = [0 20];
opt=odeset('reltol',1e-6,'abstol',1e-9);
[t,y] = ode45(@odefun,tspan,[10,10],opt,1,1,100,6000,0.5,2);
figure;
subplot(1,2,1);
plot(t,y(:,1),'b--',t,y(:,2),'r--');
grid on
xlabel('\fontsize{14}Time');
ylabel('\fontsize{14}Numbers');
legend('\fontsize{16}species 1','\fontsize{16}species 2');
title('\fontsize{16}NO.3 [n1, n2] --> [100, 6000]');
subplot(1,2,2);
plot(y(:,1),y(:,2));
grid on;
xlabel('\fontsize{16}species 1');
ylabel('\fontsize{16}species 2');
legend('\fontsize{16}relative');

%%  NO.4 [x0, y0] --> [5, 500]
tspan = [0 20];
opt=odeset('reltol',1e-6,'abstol',1e-9);
[t,y] = ode45(@odefun,tspan,[5,500],opt,1,1,100,100,0.5,2);
figure;
subplot(1,2,1);
plot(t,y(:,1),'b--',t,y(:,2),'r--');
grid on
xlabel('\fontsize{14}Time');
ylabel('\fontsize{14}Numbers');
legend('\fontsize{16}species 1','\fontsize{16}species 2');
title('\fontsize{16}NO.4 [x0, y0] --> [5, 500]');
subplot(1,2,2);
plot(y(:,1),y(:,2));
grid on;
xlabel('\fontsize{16}species 1');
ylabel('\fontsize{16}species 2');
legend('\fontsize{16}relative');

%%  NO.5 [s1, s2] --> [0.8, 0.7]
tspan = [0 20];
opt=odeset('reltol',1e-6,'abstol',1e-9);
[t,y] = ode45(@odefun,tspan,[10,10],opt,1,1,100,100,0.8,7);
figure;
subplot(1,2,1);
plot(t,y(:,1),'b--',t,y(:,2),'r--');
grid on
xlabel('\fontsize{14}Time');
ylabel('\fontsize{14}Numbers');
```

```
legend('\fontsize{16}species 1','\fontsize{16}species 2');
title('\fontsize{16}NO.5 [s1, s2] --> [0.8, 0.7]')
subplot(1,2,2);
plot(y(:,1),y(:,2));
grid on;
xlabel('\fontsize{16}species 1');
ylabel('\fontsize{16}species 2');
legend('\fontsize{16}relative');

%% NO.6 [s1, s2] --> [1.5, 1.7]
tspan = [0 20];
opt=odeset('reltol',1e-6,'abstol',1e-9);
[t,y] = ode45(@odefun,tspan,[10,10],opt,1,1,100,100,1.5,1.7);
figure;
subplot(1,2,1);
plot(t,y(:,1),'b--',t,y(:,2),'r--');
grid on
xlabel('\fontsize{14}Time');
ylabel('\fontsize{14}Numbers');
legend('\fontsize{16}species 1','\fontsize{16}species 2');
title('\fontsize{16}NO.6 [s1, s2] --> [1.5, 1.7]')
subplot(1,2,2);
plot(y(:,1),y(:,2));
grid on;
xlabel('\fontsize{16}species 1');
ylabel('\fontsize{16}species 2');
legend('\fontsize{16}relative');

%% NO.7 [s1, s2] --> [1.9, 1.7]
tspan = [0 20];
opt=odeset('reltol',1e-6,'abstol',1e-9);
[t,y] = ode45(@odefun,tspan,[10,10],opt,1,1,100,100,1.9,1.7);
figure;
subplot(1,2,1);
plot(t,y(:,1),'b--',t,y(:,2),'r--');
grid on;
xlabel('\fontsize{14}Time');
ylabel('\fontsize{14}Numbers');
legend('\fontsize{16}species 1','\fontsize{16}species 2');
title('\fontsize{16}NO.7 [s1, s2] --> [1.9, 1.7]')
subplot(1,2,2);
plot(y(:,1),y(:,2));
grid on;
xlabel('\fontsize{16}species 1');
ylabel('\fontsize{16}species 2');
legend('\fontsize{16}relative');
```

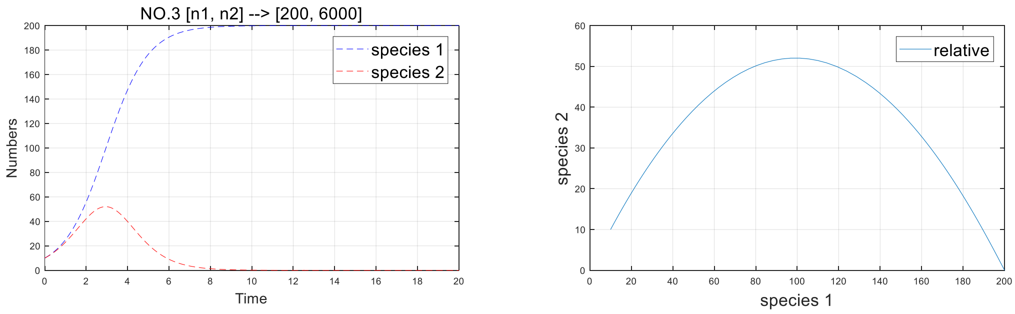
程序代码 5



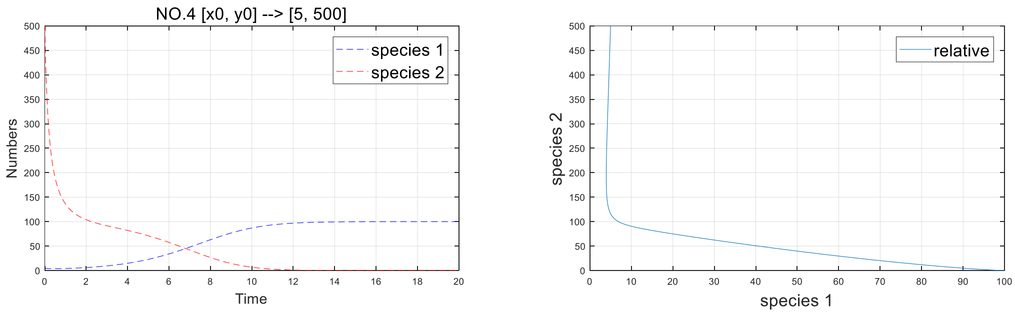
运行结果 4



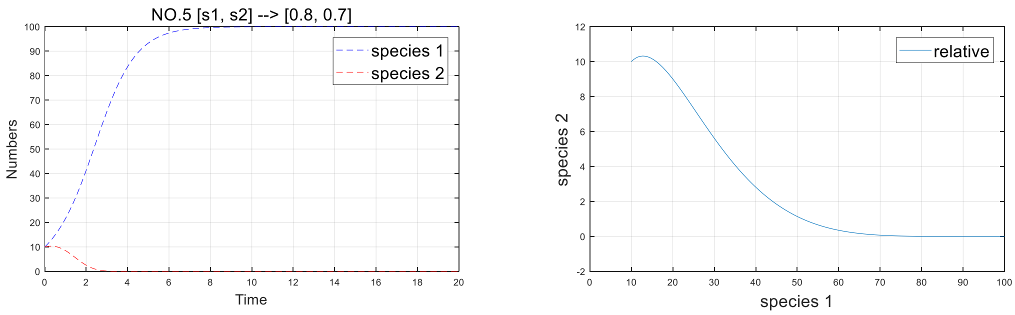
运行结果 5



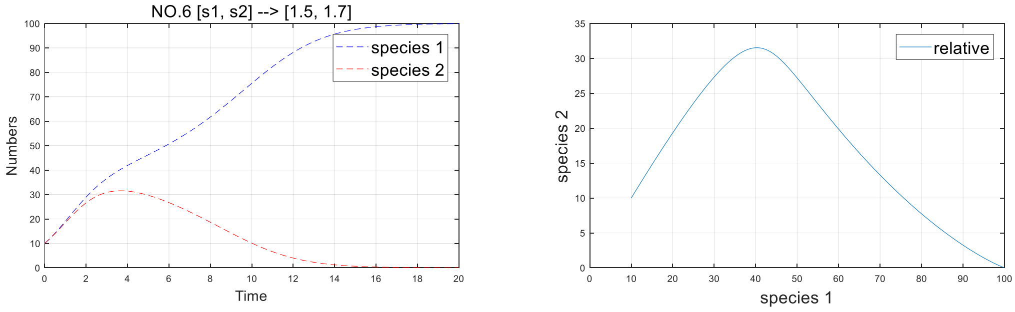
运行结果 6



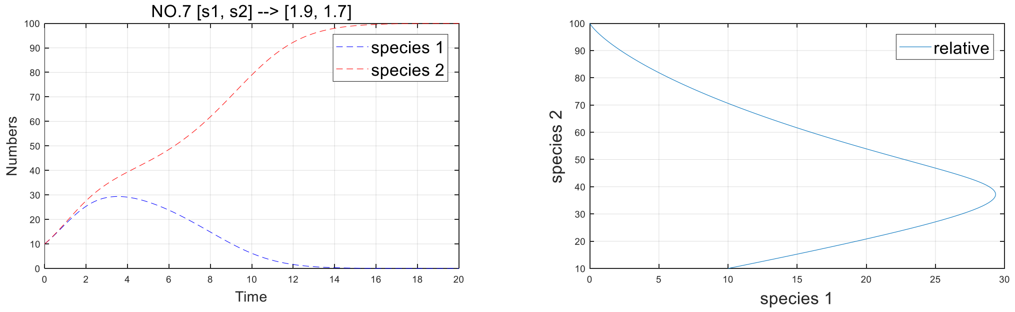
运行结果 7



运行结果 8



运行结果 9



运行结果 10

注意：以上图片都保留了相对比例。

可以看出，（2（3）问中的调节参数问题，在图形中得到了很好的诠释：

- 决定最终走向的是 s 参数，s 参数可以视为是竞争力参数，s 相对高的那一个物种将最终存活下去。
- 从运行结果 5 来看，r 参数，即固有增长率，决定了演化的速度，这个参数指的就是该物种的繁殖能力；
- 从运行结果 6 来看，n 参数，即最大容量，决定了胜出一方的繁殖上线，这个参数指的就是环境对于该物种的承载能力；
- 从运行结果 7 来看，初始值参数并不能代表一段时间以后的最终走向，而仅仅是代表了最开始一段时间的种群数量相对大小，而如果种群数量较大的那一个 s 值小，那么必然会有一天，该种群的种群数量变小，最终消亡。
- 从运行结果 8、运行结果 9、运行结果 10 来看，s 的相对大小都决定了最终的演化走向，在两者的 s 值的方差较小而初始值很接近的情况下，两者的走向是前段发展时间较为接近，后一段时间完全两极分化，一个繁荣一个灭亡。若 s 的方差很大，而初始值很接近，那么两者的走向是立即分化，一个锐减，一个猛增。

三、实验环境

Windows10 Enterprise 1703 中文版操作系统；
MATLAB R2017a 中文版。

四、实验过程

设计算法，编写程序并调试。

五、实验总结

这一章涉及范围比较广，数学分析、概率统计、常微分方程，都有涉及，而且包含了数学实现，复杂度相对较高。好在基础还可以，有些问题结合一下当时的原理能很快领会，也可以较快明白 MATLAB 代码的写法。

在题 3 中，详细进行了一个模型的数学分解，虽然没有进行建模，而是直接使用了书上的模型，不过应该算是这门课程的第一次模型接触。通过对数据的直观感受，分析出数据中参数的意义，然后产生相关猜测，最后用 MATLAB 进行试验，验证与细化猜测，最终分析完整个模型。这是数学建模的第二步（第一步当然是建模与抽象）。

六、参考文献

[1] 大学数学实验/姜启源，谢金星，邢文训，张立平，北京：清华大学出版社，2010.12
[2] MATLAB 教程/张志涌，杨祖樱，北京：北京航空航天大学出版社，2015.1

七、教师评语