云南大学数学与统计学院实验教学中心

实验报告

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **课程名称**：数学建模实验 | **学期：**2016~2017学年下学期 | |
| **指导教师**：李朝迁 | | |
| **学生：**刘鹏 20151910042 信计 | **学生：**王泽坤 20151910011 应数 | **学生：**段奕臣 20151910002 应数 |
| **实验名称**：**常微分方程数值解** & MATLAB命令学习 | | **成绩**： |
| **实验编号**：三 | **实验日期**：2017年4月21日 | **实验学时**：2 |
| **学院：**数学与统计学院 | **专业：**信息与计算科学 | **年级**：2015级 |

# 一、实验目的

1. 深刻理解数值微分的实现思路，并且能够由此写出常微分方程的迭代形式；

2. 掌握MATLAB相关命令。

# 二、实验内容

1. 调用MATLAB的文档进行命令学习；

2. 编写程序进行思想

# 三、实验平台

Windows10 Enterprise 1703中文版操作系统；

MATLAB R2017a 中文版。

# 四、实验记录与实验结果分析

1题

求微分方程解析解的MATLAB命令为dsolve，请使用help命令学习。

**Solution**:

**dsolve**

Differential equations and systems solver

**Syntax**

S = dsolve(eqn)

S = dsolve(eqn,cond)

S = dsolve(eqn,cond,Name,Value)

[y1,…yN] = dsolve(**\_\_\_**)

**Description**

S = dsolve(eqn) solves the differential equation eqn, where eqn is a symbolic equation. Use diff and == to represent differential equations. For example, diff(y,x) == y represents the equation dy/dx = y. Solve a system of differential equations by specifying eqn as a vector of those equations.

**＊**S = dsolve(eqn) 能够求解符号形式的微分方程eqn。通过diff 命令与 == 可以构建一个微分方程。例如，diff(y,x) == y就代表dy/dx = y。通过将eqn指定为符号方程的向量形式，可以解决微分方程组。

S = dsolve(eqn,cond) solves eqn with the initial or boundary condition cond.

**＊**S = dsolve(eqn,cond)可以解决带有初值条件或者边际条件的方程.

S = dsolve(eqn,cond,Name,Value) uses additional options specified by one or more Name, Value pair arguments.

**＊**S = dsolve(eqn,cond,Name,Value)使用额外的一个或多个Name, Value双参数选项。

[y1,…,yN] = dsolve(\_) assigns the solutions to the variables y1,…,yN.

**＊**[y1,…,yN] = dsolve(\_) 将解赋值到变量y1,…,yN

2题

Page85 2题：

用欧拉方法和龙格-库塔方法求下列微分方程初值的数值解，画出解的图形，对结果进行分析比较。

（1），，精确解；

（2）

（3）（贝塞尔方程，令），精确解.

注释：

* 用欧拉方法进行编程；
* 对于龙格-库塔方法进行直接调用，ode23或者ode45。

**Solution:**

（1）

程序代码：

|  |  |
| --- | --- |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27  28 | % filename: Euler\_Forward\_1  step **=** 0.1**;**  %% The real graph  x **=** **[**0 **:** step **:** 1**];**  y **=** 3 **\*** exp**(**x**)** **-** 2 **\*** x **-** 2**;**  plot**(**x**,**y**,**'ro'**);**  hold on**;**  %% Euler Method  y\_cal **=** **[**1**];**  y\_0 **=** 1**;**  **for** i **=** 0.1 **:** step **:** 1  tmp **=** y\_0 **+** **(**y\_0 **+** 2 **\*** i**)** **\*** step**;**  y\_cal **=** **[**y\_cal**,**tmp**];**  y\_0 **=** tmp**;**  **end**  plot**(**x**,**y\_cal**,**'b-.'**);**  %% Runge-Kutta methods  tspan **=** **[**0 1**];**  y0 **=** 1**;**  **[**t**,**y**]** **=** ode23**(@(**t**,**y**)** 2 **\*** t **+** y**,** tspan**,** y0**);**  plot**(**t**,**y**,**'-.k'**);**  grid on  xlabel**(**'X'**);**  ylabel**(**'Y'**);**  legend**(**'\fontsize{16}y - Real'**,**'\fontsize{16}y - Euler'**,**...  '\fontsize{16}y - Runge Kutta**);** |

程序代码 1

运行结果：



运行结果 1

代码分析：

比较三种方法的好坏。

（2）

程序代码：

|  |  |
| --- | --- |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23 | % filename: Euler\_Forward\_2  %% 欧拉向前方法  step **=** 0.1**;**  y\_0 **=** 0**;**  y\_1 **=** **[];**  x **=** **-**5 **:** step **:**5**;**  **for** i **=** **-**5 **:** step **:** 5  y\_1 **=** **[**y\_1**,**y\_0**];**  y\_0 **=** y\_0 **+** **(**i**^**2 **-** y\_0**^**2**)** **\*** step**;**  **end**  plot**(**x**,**y\_1**,**'r-o'**)**  hold on**;**  %% Runge-Kutta methods  tspan **=** **[-**5 5**];**  y0 **=** 0**;**  **[**t**,**y**]** **=** ode23**(@(**t**,**y**)** t**^**2 **-** y**^**2**,** tspan**,** y0**);**  plot**(**t**,**y**,**'b-.'**);**  tspan **=** **[-**5 5**];**  grid on  xlabel**(**'X'**);**  ylabel**(**'Y'**);**  legend**(**'\fontsize{18}y - Euler'**,**'\fontsize{18}y - Runge Kutta'**);** |

程序代码 2

运行结果：



运行结果 2

代码分析：

比较三种方法的好坏。

（3）

二阶常微分方程的向前欧拉方法，需要给出两个初值，从而进行迭代。而对应的龙格·库塔方法，就需要一个常微分方程组，利用二维向量进行函数的定义。

程序代码：

|  |  |
| --- | --- |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27  28  29  30  31  32  33 | % filename: Euler\_Forward\_3  step **=** 0.1**;**  %% The real graph  x **=** **[**pi **/** 2 **:** step **:** 5 **\*** pi**];**  y **=** sin**(**x**)** **.\*** sqrt**(**2 **\*** pi **./** x**);**  plot**(**x**,**y**,**'ro'**);**  hold on**;**  %% Euler method  y\_0 **=** 2**;**  dy\_0 **=** **-** 2 **/** pi**;**  y\_cal **=** **[];**  n **=** 0.5**;**  **for** i **=** pi **/** 2 **:** step **:** 5 **\*** pi  ddy\_0 **=** **(** **-** i **\*** dy\_0 **-** **(**i**^**2 **-** n**^**2**)** **\*** y\_0 **)** **/** i**^**2**;**  % get the value of the second derivative test  y\_0 **=** y\_0 **+** step **\*** dy\_0**;**  dy\_0 **=** dy\_0 **+** ddy\_0 **\*** step**;**  % get the value of the first derivative test by the second  y\_cal **=** **[**y\_cal**,**y\_0**];**  **end**  plot**(**x**,**y\_cal**,**'k-.'**);**  grid on**;**  %% Runge-Kutta method  tspan **=** **[**pi**/**2**,** 5 **\*** pi**];**  **[**t**,**y**]** **=** ode45**(@**vdp1**,**tspan**,[**2**;-**2 **/** pi**]);**  plot**(**t**,**y**(:,**1**),**'b--'**);**  title**(**'Solution of Bessel Equation (n = 1) with ODE45'**);**  xlabel**(**'Time t'**);**  ylabel**(**'Solution y'**);**  legend**(**'\fontsize{16}y Real'**,**'\fontsize{16}y Euler Method'**,**...  '\fontsize{16}y Runge Kutta'**);**  hold off**;** |

程序代码 3

运行结果：



运行结果 3

之前如果做一个取值区间比较小的测试，就会发现向前欧拉公式得出的结果与实际结果几乎没有差异，然而，当我们把区间长度取到比较大的时候，就会发现，实际的结果与数值结果相差越来越大。这就是误差累积的结果。

代码分析：

这些微分方程都有初值，而所谓的初值，指的就是所求函数在定义区间起始点的真实取值或者观测值。

数值微分的核心思想就是将连续的区间片段化，然后根据初值，利用导数，算出第二个区间的起始值或者称为第一个区间的结束值。然后将这个值，作为第二个区间的初值，一路迭代下去，最终的到这些区间的端点值，这就是一个离散的但是很密集（因为区间取得很小）的数值解。可以应用在工程中。

欧拉方法的基本思想就是对于连续函数，在一个很小的区间上用数值微分方法的前差公式（向右），代替方程中的左端的导数，而右端函数中的取中的某一点，于是得到

，.

这个公式毫无疑问是精确的。因为，这符合差分的定义，而且根据拉格朗日中值理，肯定存在一个位于中的使得上面的公式成立。但是这样还是写不出程序，因为我们无法解决存在性数值确定解的选取问题，所以必须给定一个能拿得出手的。

由于区间很小，所以连续函数在这个区间上的变化范围定然不会太剧烈，即接近一个直线段，故不妨取左端点数值，这样就可以给出一个近似：

.

当然也可以给出一个靠右的近似。。这就是所谓的向前与向后欧拉公式。因为向后欧拉公式涉及到对于自身的调用，而且其精度没有理由会更好，所以我们把向前欧拉公式写成程序。

3题

Page85 ~87 3题~7题，9题，任选一题。

两种群相互竞争模型如下：



其中，分别为甲乙两种群的数量；，为他们的固有增长率；，为它们的最大容量。的含义是，对于供养甲的资源而言，单位数量乙（相对）的消耗为单位数量甲（相对）消耗的倍，对可作相应的解释。

该模型无解析解，试用数值解法研究以下问题：

1. 设，，，，初值，计算，，画出它们的图形及相图，说明相同时间充分大以后，的变化趋势（人们今天看到的已经是自然界长期演变的结果）。
2. 改变，，，，，，但，不变（或保持，），计算并分析所得结果；若，，再分析结果。由此你能得到什么结论，请用各参数生态学上的含义做出解释。
3. 试验当，时会有什么结果；当，时又会有什么结果。能解释这些结果吗？

**Solution:**

（1）

程序代码：

|  |  |
| --- | --- |
| 1  2  3  4  5  6  7 | % filename: odefun  % definition of the differential equation group  **function** dydt **=** odefun**(**t**,**y**,**r1**,**r2**,**n1**,**n2**,**s1**,**s2**)**  dydt **=** zeros**(**2**,**1**);**  dydt**(**1**)** **=** r1 **\*** y**(**1**)** **\*** **(**1 **-** y**(**1**)** **/** n1 **-** s1 **\*** y**(**2**)** **/** n2**);**  dydt**(**2**)** **=** r2 **\*** y**(**2**)** **\*** **(**1 **-** s2 **\*** y**(**1**)** **/** n1 **-** y**(**2**)** **/** n2**);**  **end** |

程序代码 4

（2）

程序代码：

|  |  |
| --- | --- |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27  28  29  30  31  32  33  34  35  36  37  38  39  40  41  42  43  44  45  46  47  48  49  50  51  52  53  54  55  56  57  58  59  60  61  62  63  64  65  66  67  68  69  70  71  72  73  74  75  76  77  78  79  80  81  82  83  84  85  86  87  88  89  90  91  92  93  94  95  96  97  98  99  100  101  102  103  104  105  106  107  108  109  110  111  112  113  114  115  116  117  118  119  120  121  122  123  124  125  126  127  128  129  130  131  132  133  134 | % filename: predator\_prey  % Testing the influence of the coefficients  %% NO.1 default  tspan **=** **[**0 20**];**  opt**=**odeset**(**'reltol'**,**1e-6**,**'abstol'**,**1e-9**);**  **[**t**,**y**]** **=** ode45**(@**odefun**,**tspan**,[**10**,**10**],**opt**,**1**,**1**,**100**,**100**,**0.5**,**2**);**  figure**;**  subplot**(**1**,**2**,**1**);**  plot**(**t**,**y**(:,**1**),**'b--'**,**t**,**y**(:,**2**),**'r--'**);**  grid on  xlabel**(**'\fontsize{14}Time'**);**  ylabel**(**'\fontsize{14}Numbers'**);**  legend**(**'\fontsize{16}species 1'**,**'\fontsize{16}species 2'**);**  title**(**'\fontsize{16}NO.1 default'**)**  subplot**(**1**,**2**,**2**);**  plot**(**y**(:,**1**),**y**(:,**2**));**  grid on**;**  xlabel**(**'\fontsize{16}species 1'**);**  ylabel**(**'\fontsize{16}species 2'**);**  legend**(**'\fontsize{16}relative'**);**  %% NO.2 [r1, r2] --> [0.3, 0.3]  tspan **=** **[**0 20**];**  opt**=**odeset**(**'reltol'**,**1e-6**,**'abstol'**,**1e-9**);**  **[**t**,**y**]** **=** ode45**(@**odefun**,**tspan**,[**10**,**10**],**opt**,**0.3**,**0.3**,**100**,**100**,**0.5**,**2**);**  figure**;**  subplot**(**1**,**2**,**1**);**  plot**(**t**,**y**(:,**1**),**'b--'**,**t**,**y**(:,**2**),**'r--'**);**  grid on  xlabel**(**'\fontsize{14}Time'**);**  ylabel**(**'\fontsize{14}Numbers'**);**  legend**(**'\fontsize{16}species 1'**,**'\fontsize{16}species 2'**);**  title**(**'\fontsize{16}NO.2 [r1, r2] --> [0.3, 0.3]'**);**  subplot**(**1**,**2**,**2**);**  plot**(**y**(:,**1**),**y**(:,**2**));**  grid on**;**  xlabel**(**'\fontsize{16}species 1'**);**  ylabel**(**'\fontsize{16}species 2'**);**  legend**(**'\fontsize{16}relative'**);**  %% NO.3 [n1, n2] --> [100, 6000]  tspan **=** **[**0 20**];**  opt**=**odeset**(**'reltol'**,**1e-6**,**'abstol'**,**1e-9**);**  **[**t**,**y**]** **=** ode45**(@**odefun**,**tspan**,[**10**,**10**],**opt**,**1**,**1**,**100**,**6000**,**0.5**,**2**);**  figure**;**  subplot**(**1**,**2**,**1**);**  plot**(**t**,**y**(:,**1**),**'b--'**,**t**,**y**(:,**2**),**'r--'**);**  grid on  xlabel**(**'\fontsize{14}Time'**);**  ylabel**(**'\fontsize{14}Numbers'**);**  legend**(**'\fontsize{16}species 1'**,**'\fontsize{16}species 2'**);**  title**(**'\fontsize{16}NO.3 [n1, n2] --> [100, 6000]'**);**  subplot**(**1**,**2**,**2**);**  plot**(**y**(:,**1**),**y**(:,**2**));**  grid on**;**  xlabel**(**'\fontsize{16}species 1'**);**  ylabel**(**'\fontsize{16}species 2'**);**  legend**(**'\fontsize{16}relative'**);**  %% NO.4 [x0, y0] --> [5, 500]  tspan **=** **[**0 20**];**  opt**=**odeset**(**'reltol'**,**1e-6**,**'abstol'**,**1e-9**);**  **[**t**,**y**]** **=** ode45**(@**odefun**,**tspan**,[**5**,**500**],**opt**,**1**,**1**,**100**,**100**,**0.5**,**2**);**  figure**;**  subplot**(**1**,**2**,**1**);**  plot**(**t**,**y**(:,**1**),**'b--'**,**t**,**y**(:,**2**),**'r--'**);**  grid on  xlabel**(**'\fontsize{14}Time'**);**  ylabel**(**'\fontsize{14}Numbers'**);**  legend**(**'\fontsize{16}species 1'**,**'\fontsize{16}species 2'**);**  title**(**'\fontsize{16}NO.4 [x0, y0] --> [5, 500]'**);**  subplot**(**1**,**2**,**2**);**  plot**(**y**(:,**1**),**y**(:,**2**));**  grid on**;**  xlabel**(**'\fontsize{16}species 1'**);**  ylabel**(**'\fontsize{16}species 2'**);**  legend**(**'\fontsize{16}relative'**);**  %% NO.5 [s1, s2] --> [0.8, 0.7]  tspan **=** **[**0 20**];**  opt**=**odeset**(**'reltol'**,**1e-6**,**'abstol'**,**1e-9**);**  **[**t**,**y**]** **=** ode45**(@**odefun**,**tspan**,[**10**,**10**],**opt**,**1**,**1**,**100**,**100**,**0.8**,**7**);**  figure**;**  subplot**(**1**,**2**,**1**);**  plot**(**t**,**y**(:,**1**),**'b--'**,**t**,**y**(:,**2**),**'r--'**);**  grid on  xlabel**(**'\fontsize{14}Time'**);**  ylabel**(**'\fontsize{14}Numbers'**);**  legend**(**'\fontsize{16}species 1'**,**'\fontsize{16}species 2'**);**  title**(**'\fontsize{16}NO.5 [s1, s2] --> [0.8, 0.7]'**)**  subplot**(**1**,**2**,**2**);**  plot**(**y**(:,**1**),**y**(:,**2**));**  grid on**;**  xlabel**(**'\fontsize{16}species 1'**);**  ylabel**(**'\fontsize{16}species 2'**);**  legend**(**'\fontsize{16}relative'**);**  %% NO.6 [s1, s2] --> [1.5, 1.7]  tspan **=** **[**0 20**];**  opt**=**odeset**(**'reltol'**,**1e-6**,**'abstol'**,**1e-9**);**  **[**t**,**y**]** **=** ode45**(@**odefun**,**tspan**,[**10**,**10**],**opt**,**1**,**1**,**100**,**100**,**1.5**,**1.7**);**  figure**;**  subplot**(**1**,**2**,**1**);**  plot**(**t**,**y**(:,**1**),**'b--'**,**t**,**y**(:,**2**),**'r--'**);**  grid on  xlabel**(**'\fontsize{14}Time'**);**  ylabel**(**'\fontsize{14}Numbers'**);**  legend**(**'\fontsize{16}species 1'**,**'\fontsize{16}species 2'**);**  title**(**'\fontsize{16}NO.6 [s1, s2] --> [1.5, 1.7]'**)**  subplot**(**1**,**2**,**2**);**  plot**(**y**(:,**1**),**y**(:,**2**));**  grid on**;**  xlabel**(**'\fontsize{16}species 1'**);**  ylabel**(**'\fontsize{16}species 2'**);**  legend**(**'\fontsize{16}relative'**);**  %% NO.7 [s1, s2] --> [1.9, 1.7]  tspan **=** **[**0 20**];**  opt**=**odeset**(**'reltol'**,**1e-6**,**'abstol'**,**1e-9**);**  **[**t**,**y**]** **=** ode45**(@**odefun**,**tspan**,[**10**,**10**],**opt**,**1**,**1**,**100**,**100**,**1.9**,**1.7**);**  figure**;**  subplot**(**1**,**2**,**1**);**  plot**(**t**,**y**(:,**1**),**'b--'**,**t**,**y**(:,**2**),**'r--'**);**  grid on**;**  xlabel**(**'\fontsize{14}Time'**);**  ylabel**(**'\fontsize{14}Numbers'**);**  legend**(**'\fontsize{16}species 1'**,**'\fontsize{16}species 2'**);**  title**(**'\fontsize{16}NO.7 [s1, s2] --> [1.9, 1.7]'**)**  subplot**(**1**,**2**,**2**);**  plot**(**y**(:,**1**),**y**(:,**2**));**  grid on**;**  xlabel**(**'\fontsize{16}species 1'**);**  ylabel**(**'\fontsize{16}species 2'**);**  legend**(**'\fontsize{16}relative'**);** |

程序代码 5

运行结果：



运行结果 4



运行结果 5



运行结果 6



运行结果 7



运行结果 8



运行结果 9



运行结果 10

代码分析：

注意：以上图片都保留了相对比例。

可以看出，（2（3）问中的调节参数问题，在图形中得到了很好的诠释：

* 决定最终走向的是s参数，s参数可以视为是竞争力参数，s相对高的那一个物种将最终存活下去。
* 从运行结果 5来看，r参数，即固有增长率，决定了演化的速度，这个参数指的就是该物种的繁殖能力；
* 从运行结果 6来看，n参数，即最大容量，决定了胜出一方的繁殖上线，这个参数指的就是环境对于该物种的承载能力；
* 从运行结果 7来看，初始值参数并不能代表一段时间以后的最终走向，而仅仅是代表了最开始一段时间的种群数量相对大小，而如果种群数量较大的那一个s值小，那么必然会有一天，该种群的种群数量变小，最终消亡。
* 从运行结果 8、运行结果 9、运行结果 10来看，s的相对大小都决定了最终的演化走向，在两者的s值的方差较小而初始值很接近的情况下，两者的走向是前段发展时间较为接近，后一段时间完全两极分化，一个繁荣一个灭亡。若s的方差很大，而初始值很接近，那么两者的走向是立即分化，一个锐减，一个猛增。

# 五、实验体会

这一章涉及范围比较广，数学分析、概率统计、常微分方程，都有涉及，而且包含了数学实现，复杂度相对较高。好在基础还可以，有些问题结合一下当时的原理能很快领会，也可以较快明白MATLAB代码的写法。

在题3中，详细进行了一个模型的数学分解，虽然没有进行建模，而是直接使用了书上的模型，不过应该算是这门课程的第一次模型接触。通过对数据的直观感受，分析出数据中参数的意义，然后产生相关猜测，最后用MATLAB进行试验，验证与细化猜测，最终分析完整个模型。这是数学建模的第二步（第一步当然是建模与抽象）。

# 六、参考文献

[1] 大学数学实验/姜启源，谢金星，邢文训，张立平，北京：清华大学出版社，2010.12

[2] MATLAB教程/张志涌，杨祖樱，北京：北京航空航天大学出版社，2015.1

# 七、教师评语