SIRS

1. Кинетическая схема

$I_i + S_j \xrightarrow{k_1} I_i + I_j$ - инфицирование

$I_i \xrightarrow{k_2} R_i$ - выздоровление

$R_i \xrightarrow{k_3} S_i$ - потеря иммунитета

2. Константы скоростей

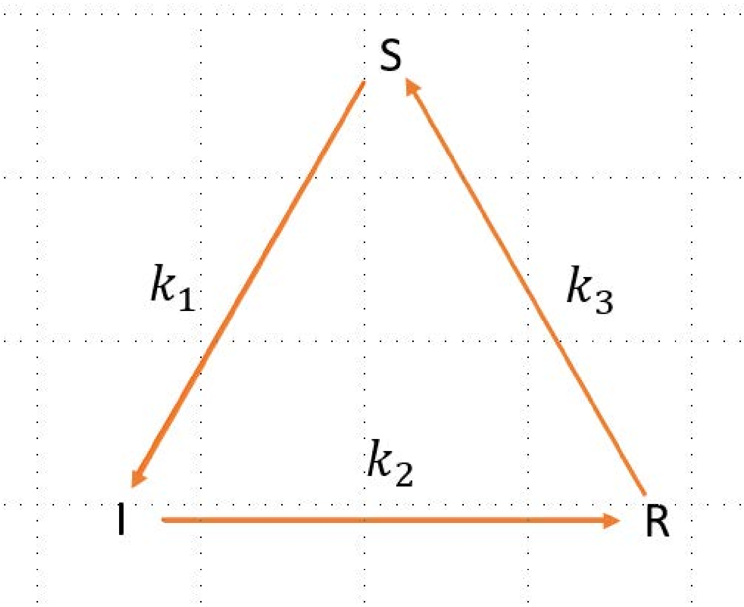
$$k_1 = 1;\ \ k_2 = 1;\ \ k_3 = 0.005$$

3. Новые переменные

$$x = \theta_I,\ \ y = \theta_R,\ \ z = \theta_S$$

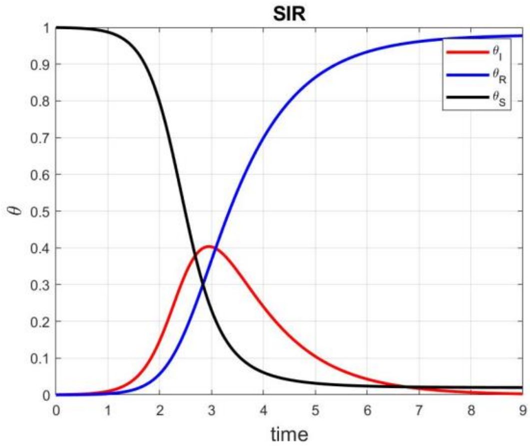
4. Автономная система ОДУ (нет явной зависимости от *t*)

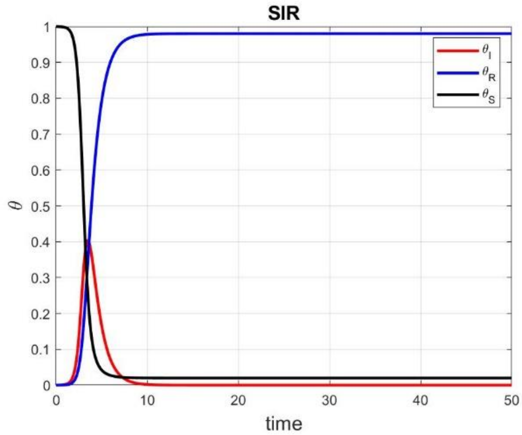
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4k_1xz - k_2x, \\ \frac{dy}{dt} = k_2x - k_3y, \\ \frac{dz}{dt} = -4k_1xz + k_3y, \\ x + y + z = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4k_1x(1 - x - y) - k_2x, \\ \frac{dy}{dt} = k_2x - k_3y, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

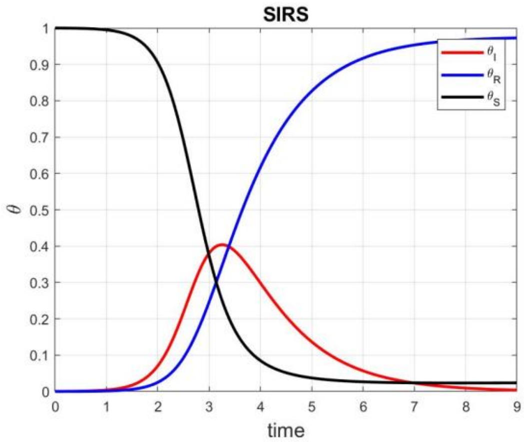


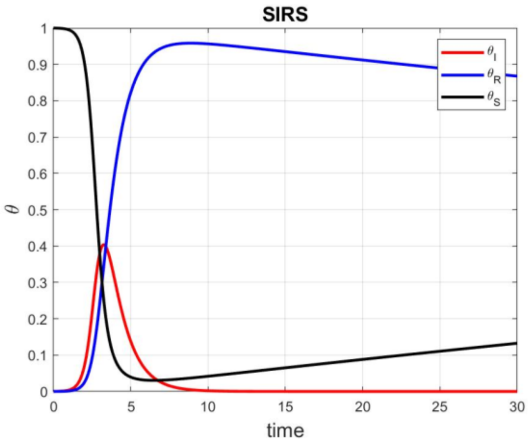
5. Траектории

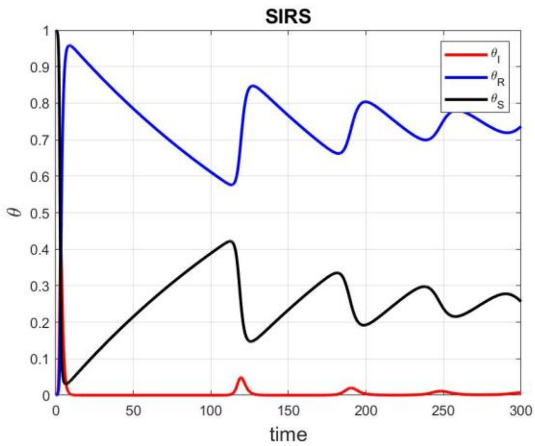
$$x(0) = 10^{-4},\ \ y(0) = 0$$

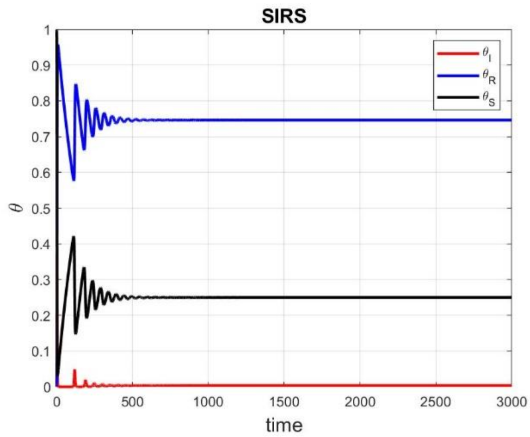












6. Фазовые диаграммы

Нульклины первого уравнения:

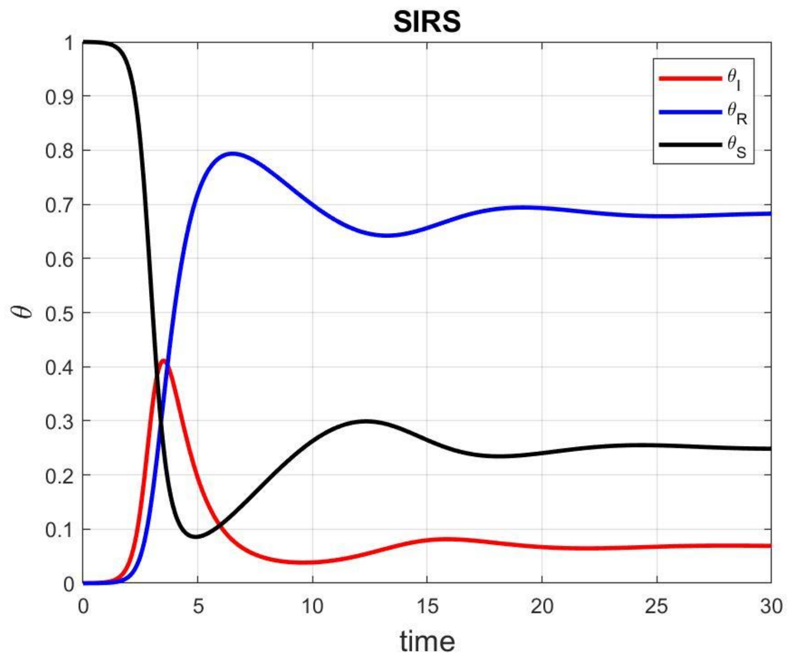
$$4k_1x(1-x-y)-k_2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y+z=1, \\ x=1-y-\dfrac{k_2}{4k_1} \Rightarrow z=\dfrac{k_2}{4k_1}. \end{array}\right.$$

Нульклина второго уравнения:

$$k_2x=k_3y \Leftrightarrow x=\frac{k_3}{k_2}y,\ \ y=\frac{k_2(1-z)}{k_3+k_2}.$$

Нульклина третьего уравнения:

$$4k_1xz=k_3y \quad \Leftrightarrow x=\frac{k_3(1-z)}{k_3+4k_1z},\quad y=\frac{4k_1z(1-z)}{k_3+4k_1z}.$$

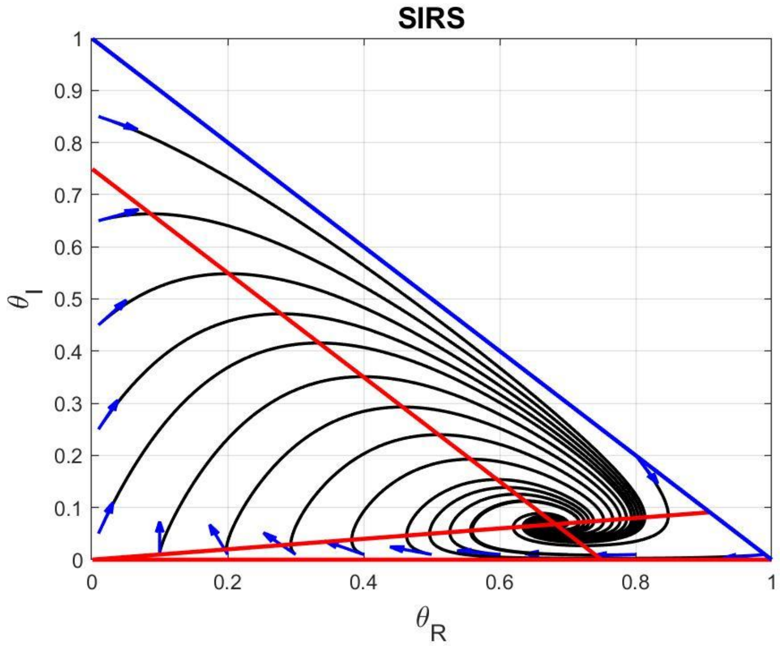


ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ 1 (y, x)

НУЛЬКЛИНЫ. 1 уравнение: $x = 0$ или $x = 1 - y - \frac{k_2}{4k_1}$. 2 уравнение: $x = \frac{k_3}{k_2} y$.

k1 = 1, k2 = 1, k3= 0.1

```
thetaI0 = [0.05 0.25 0.45 0.65 0.85 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.2];
thetaR0 = [0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.1  0.2  0.3  0.4  0.5  0.6  0.7  0.8  0.99 0.8];
```

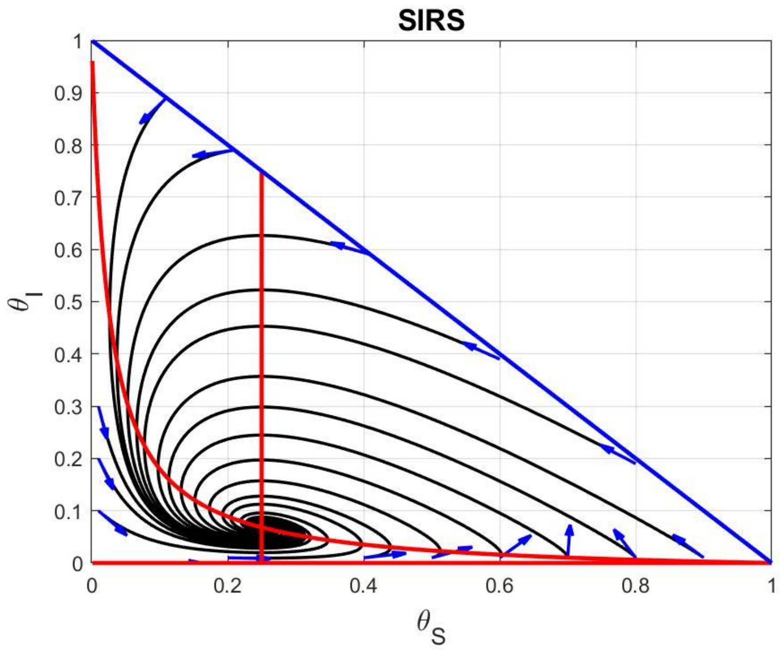


ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ 2 (z, x)

НУЛЬКЛИНЫ. 1 уравнение: $x = 0$ или $z = \frac{k_2}{4k_1}$. 3 уравнение: $x = \frac{k_3(1-z)}{k_3+4k_1 z}$.

k1 = 1, k2 = 1, k3= 0.1

```
thetaS0 = [0.5  0.6  0.7  0.8  0.9  0.8  0.6  0.41 0.21 0.11 0.01 0.01 0.01 0.4 0.2  0.10];
thetaI0 = [0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.19 0.39 0.59 0.79 0.89 0.1  0.2  0.3  0.01 0.01 0.00];
```

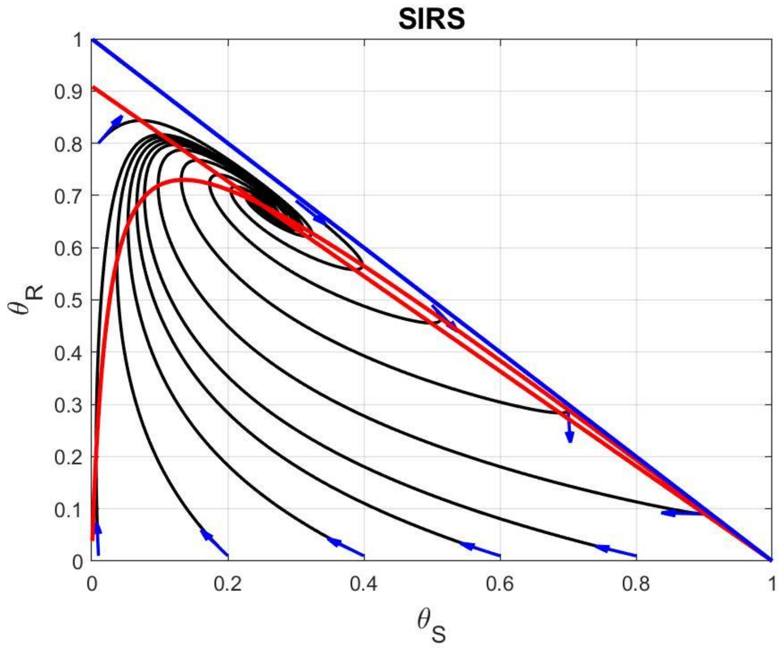


ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ 3 (z, y)

НУЛЬКЛИНЫ. 2 уравнение: $y = \frac{k_2(1-z)}{k_3+k_2}$, 3 уравнение: $y = \frac{4k_1 z(1-z)}{k_3+4k_1 z}$.

k1 = 1, k2 = 1, k3 = 0.1

```
thetaS0 = [0.2  0.4  0.6  0.8  0.9  0.7  0.5  0.3  0.01 0.01];
thetaR0 = [0.01 0.01 0.01 0.01 0.09 0.29 0.49 0.69 0.01 0.80];
```

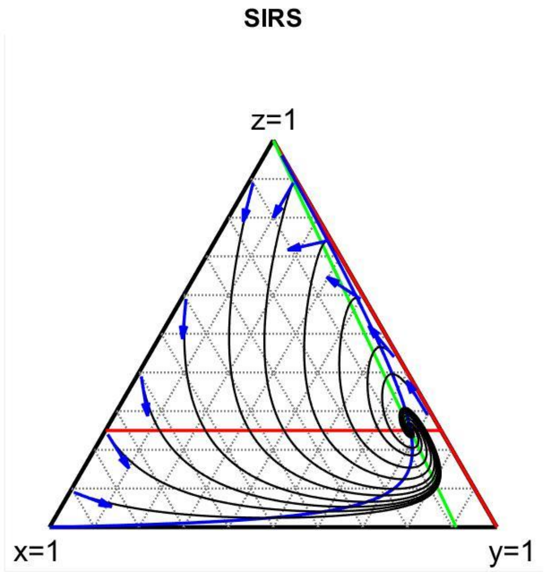


ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ НА СИМПЛЕКСЕ

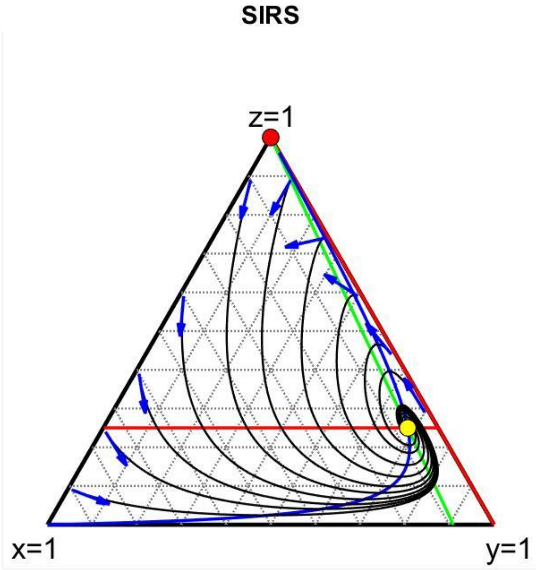
$$0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1, \qquad 0 \le z \le 1, \qquad x + y + z = 1$$

k1 = 1, k2 = 1, k3 = 0.1

```
thetaI0 = [0.1  0.4  0.6  0.75 0.9  0.01 0.01 0.01 0.01 0.01];
thetaR0 = [0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.1  0.25 0.4  0.55 0.7 ];
```



7. Точки покоя. 1) $(0{,}0)$; 2) $\left(\frac{4k_1-k_2}{4k_1}\frac{k_3}{k_2+k_3};\frac{4k_1-k_2}{4k_1}\frac{k_2}{k_2+k_3}\right)$.



8. Исследование точек покоя на устойчивость по первому приближению (первый метод Ляпунова).

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4k_1x(1-x-y)-k_2x,\\ \dfrac{dy}{dt}=k_2x-k_3y.\end{cases}$$

1) Матрица Якоби: $A=\begin{pmatrix}4k_1(1-2x^*-y^*)-k_2 & -4k_1x^*\\ k_2 & -k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4k_1-k_2 & 0\\ k_2 & -k_3\end{pmatrix}$.

Определитель: $|A|=-(4k_1-k_2)k_3$.

Собственные числа (показатели Ляпунова): $\lambda_1=4k_1-k_2$, $\lambda_2=-k_3$.

А) $\begin{cases}\lambda_2<0,\\ \lambda_1<0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_3>0,\\ 4k_1-k_2<0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_3>0,\\ \frac{k_2}{k_1}>4;\end{cases}$ устойчивый узел.

Б) $\begin{cases}\lambda_2<0,\\ \lambda_1=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_3>0,\\ 4k_1-k_2=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_3>0,\\ \frac{k_2}{k_1}=4;\end{cases}$ дополнительное исследование (седлоузловая бифуркация).

В) $\begin{cases}\lambda_2<0,\\ \lambda_1>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_3>0,\\ 4k_1-k_2>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_3>0,\\ \frac{k_2}{k_1}<4;\end{cases}$ седло.

2) Матрица Якоби: $A=\begin{pmatrix}4k_1(1-2x^*-y^*)-k_2 & -4k_1x^*\\ k_2 & -k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{k_3(k_2-4k_1)}{k_2+k_3} & \frac{k_3(k_2-4k_1)}{k_2+k_3}\\ k_2 & -k_3\end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение:

SIRS

$$\lambda^2(k_2+k_3)+\lambda(4k_1+k_3)k_3+k_3(4k_1-k_2)(k_2+k_3)=0;$$
$$D=(4k_1+k_3)^2{k_3}^2-4(k_2+k_3)^2k_3(4k_1-k_2)=$$
$$=k_3\big((4k_1+k_3)^2k_3-4(k_2+k_3)^2(4k_1-k_2)\big)\ldots$$

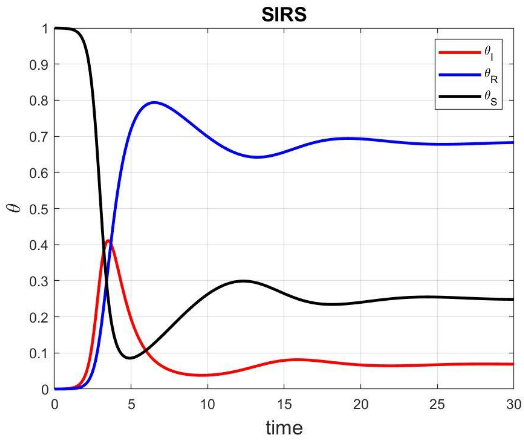
При k1 = 1, k2 = 1, k3 = 0.1 дискриминант отрицательный $\Rightarrow$ корни характеристического уравнения комплексные $\Rightarrow$ точка покоя есть фокус.

Численно находим комплексные корни:
-1.863636363636362e-01 + 5.150423235437283e-01i
-1.863636363636362e-01 - 5.150423235437283e-01i

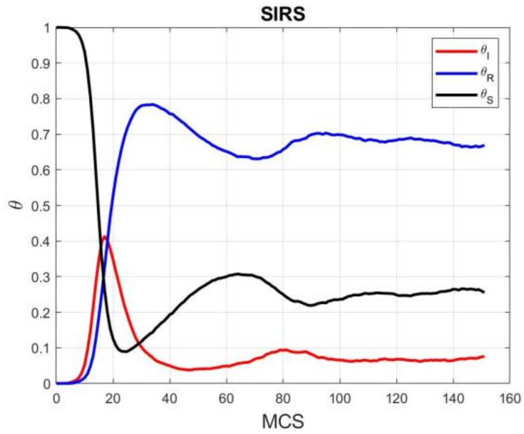
Действительная часть отрицательная (это следует и из формулы для корней квадратного трёхчлена). Значит, фокус устойчивый.

SIRS

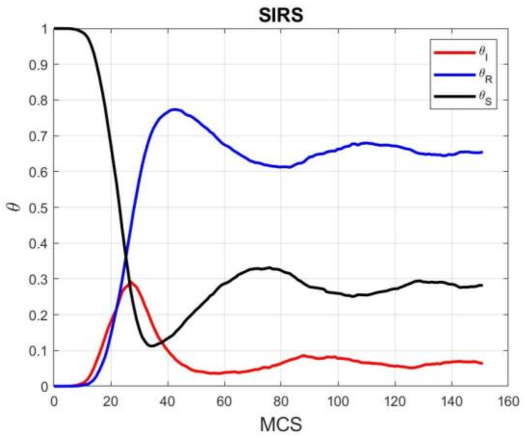
ОДУ



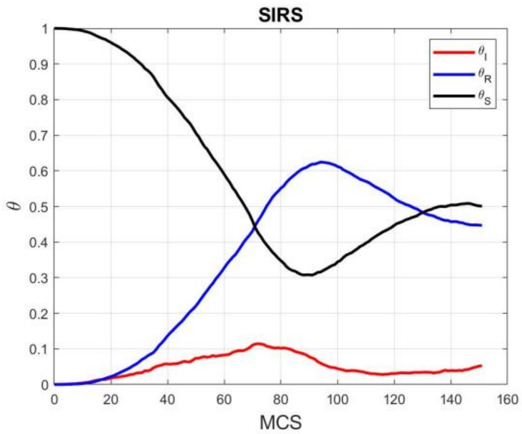
MC 100x100 diff=1000



MC 100x100 diff=100



MC 100x100 diff=10



MC 100x100 diff=1