微积分 A(1) 期中复习—杂题选讲

曹立

2024 年 11 月 3 日

极限

Problem 1

$a > 1$, $k > 0$, 求

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n}.$$

极限

Problem 1

$a > 1$, $k > 0$, 求

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n}.$$

解 1: $k = 1$ 时,

$$0 < \frac{n}{a^n} = \frac{n}{(1+a-1)^n} < \frac{n}{\binom{n}{2}(a-1)^2} = \frac{2}{(n-1)(a-1)^2} \to 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}\right)^k = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}\right)^k = 0.$$

解 2: 可以取足够大的 n 使

$$\frac{n^k/a^n}{(n+1)^k/a^{n+1}} = a\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k > 1.$$

于是此后递减, 同时有下界, 因此收敛.

极限

对

$$\frac{n^k}{a^n} = a\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}$$

两侧同时取极限得 $L = aL \Rightarrow L = 0$.

解 3:

$$原 = \exp\left(\lim_{n\to\infty}(k\ln n - n\ln a)\right).$$

而根据 e 相关的极限, $\ln n = 2\ln\sqrt{n} < 2\sqrt{n}$, 故

$$k\ln n - n\ln a = \sqrt{n}(2k - \sqrt{n}\ln a) \to -\infty.$$

解 4 (仅 $k \in \mathbb{N}$): Stolz + 归纳.

$$原 = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}n^i}{(a-1)a^n} = \frac{1}{a-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\lim_{n\to\infty}\frac{n^i}{a^n}.$$

解 5: Heine + 洛!

> 证明 Stolz 定理:
>
> 1. $\{b_n\}$ 严增，$\lim b_n = +\infty$，$\lim \Delta a_n/\Delta b_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$，则 $\lim a_n/b_n = \lim \Delta a_n/\Delta b_n$。
> 2. $\{b_n\}$ 严降，$\lim b_n = \lim a_n = 0$，$\lim \Delta a_n/\Delta b_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$，则 $\lim a_n/b_n = \lim \Delta a_n/\Delta b_n$。

1. 设 $\lim \Delta a_n/\Delta b_n = L$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$\forall n > N$，

$$(L-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < (L+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)$$

于是

$$(L-\varepsilon)(b_{n+1}-b_{N+1}) < a_{n+1}-a_{N+1} < (L+\varepsilon)(b_{n+1}-b_{N+1})$$

即（容易取到 b 为正）

$$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_{N+1}}{b_{n+1}} - L + L\frac{b_{N+1}}{b_{n+1}}\right| < \left(1-\frac{b_{N+1}}{b_{n+1}}\right)\varepsilon < \varepsilon$$

取足够大的 n，即可

$$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - L\right| \le \left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_{N+1}}{b_{n+1}} - L + L\frac{b_{N+1}}{b_{n+1}}\right| + \left|\frac{a_{N+1}}{b_{n+1}} - L\frac{b_{N+1}}{b_{n+1}}\right| < 2\varepsilon$$

2. 设 $\lim \Delta a_n/\Delta b_n = L$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$\forall n > N$，

$$(L-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < (L+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)$$

于是 $\forall n' > n$，

$$(L-\varepsilon)(b_{n'+1}-b_n) < a_{n'+1}-a_n < (L+\varepsilon)(b_{n'+1}-b_n)$$

即

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n'+1}}{b_n} - L + L\frac{b_{n'+1}}{b_n}\right| < \left(1-\frac{b_{n'+1}}{b_n}\right)\varepsilon < \varepsilon$$

取足够大的 n'，即可

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| \le \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n'+1}}{b_n} - L + L\frac{b_{n'+1}}{b_n}\right| + \left|\frac{a_{n'+1}}{b_n} - L\frac{b_{n'+1}}{b_n}\right| < 2\varepsilon$$

极限

Problem 2

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right).$$

Problem 2

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right).$$

解 1:

$$\frac{k}{2n^2+n}\le\frac{k}{(\sqrt{1+1/n}+1)n^2}\le\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1=\frac{k/n^2}{\sqrt{1+k/n^2}+1}\le\frac{k}{2n^2},$$

故

$$\frac{n+1}{4n+2}\le\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)\le\frac{n+1}{4n}.$$

夹逼即可.

解 2:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16(1+\theta x)^{5/2}},$$

因此 $1 + x/2 - x^2/8 \le \sqrt{1+x} \le 1 + x/2$.

解 3:

$$\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} \le \sqrt{1+\frac{k}{n^2}+\frac{k^2}{4n^4}} = 1 + \frac{k}{2n^2};$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} &= \sqrt{1+\frac{k}{n(n+1)}+\frac{k}{n^2(n+1)}} \\ &\ge \sqrt{1+\frac{k}{n(n+1)}+\frac{k}{n^2(n+1)}\cdot\frac{k}{4(n+1)}} \\ &= 1 + \frac{k}{2n(n+1)}.\end{aligned}$$

极限

Problem 3

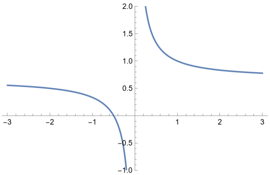
$0 < \lambda < 1$, 数列 $y_{n+1} = (1-\lambda)/y_n + \lambda$, y_0 任意. 证明 $\lim_{n\to\infty} y_n$ 存在, 并求它的值.

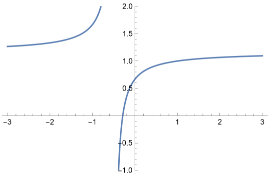
极限

Problem 3

$0<\lambda<1$, 数列 $y_{n+1}=(1-\lambda)/y_n+\lambda$, y_0 任意. 证明 $\lim_{n\to\infty} y_n$ 存在, 并求它的值.

令 $f(x)=(1-\lambda)/x+\lambda$, 有不动点 $1, \lambda-1$. 发现直接考虑单次迭代难以分析, 但是似乎迭代两次会 “跳回来”. 于是考虑 $f(f(x))$.





$f(x)$ $\qquad$ $\lambda=2/3$ $\qquad$ $f^2(x)$

如果 $\lambda-1<y_0<1$ 或 $y_0>1$, 可以利用单调性; 如果 $y_0<\lambda-1$, 一次迭代即可使它 $>\lambda-1$. 因此 $\{y_n\}$ 的奇数项或偶数项趋近于 1, 另一半随后易证.

极限

Problem 4

数列 $y_n = 2y_{n-1}^2 - 1$, 分析 $\{y_n\}$ 的敛散性.

Problem 4

数列 $y_n = 2y_{n-1}^2 - 1$, 分析 $\{y_n\}$ 的敛散性.

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1, \cosh 2\theta = 2\cosh^2\theta - 1.$$

$$y_n = \begin{cases} \cos\left(2^n \arccos y_0\right), & |y_0| \le 1 \\ \cosh\left(2^n \operatorname{arccosh}|y_0|\right), & |y_0| > 1 \end{cases}.$$

当 $|y_0| > 1$ 时不收敛. $|y_0| \le 1$ 时, 仅可能收敛到 1 或 $-1/2$. 考虑到在这两处附近,

$$|2x_1^2 - 2x_2^2| = 2|x_1 - x_2||x_1 + x_2| > |x_1 - x_2|,$$

看起来, 除非精确地跳到这两点, 否则无法收敛. 考虑证明.

如果 $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$ 但 $y_n \ne 1$, 那么 $\exists N, \forall n \ge N, 1 - y_n < 1/2$. 设 $d_n = 1 - y_n$, 有 $d_n = 2(1 + y_{n-1})d_{n-1}$. 那么当 $n > N$ 时, $d_n > 3d_{n-1} > \cdots > 3^{n-N}d_N$. 取 $n = N - \lceil \log_3 d_N \rceil$, 则 $d_n > 1/2$, 矛盾.

极限

如果 $\lim_{n\to\infty} y_n = -1/2$ 但 $y_n \neq -1/2$, 那么 $\exists N$, $\forall n \geq N$, $|y_n + 1/2| < 1/4$. 设 $c_n = |y_n + 1/2|$, 有 $c_n = 2|y_n - 1/2|c_{n-1}$. 那么当 $n > N$ 时, $c_n > (3/2)c_{n-1} > \cdots > (3/2)^{n-N}c_N$. 取 $n = N - \lceil \log_{3/2} c_N \rceil$, 则 $c_n > 1/4$, 矛盾. 综上所述,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} 1, & y_0 = \arccos \dfrac{q}{2^k}\ (q, k \in \mathbb{N}) \\ -\dfrac{1}{2}, & y_0 = \arccos \dfrac{q}{3 \cdot 2^k}\ (q, k \in \mathbb{N}, 3 \nmid q) \\ \text{DNE}, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Problem 5

$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可微, 且 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=0$, $f(2)=1$. 证明: $\exists\xi\in(1,2)$, $\xi f''(\xi)-2f'(\xi)=0$.

微分中值定理

Problem 5

$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可微, 且 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=0$, $f(2)=1$. 证明: $\exists\xi\in(1,2)$, $\xi f''(\xi)-2f'(\xi)=0$.

已知 $f(1)=f(2)=1$, $f'(1)=0$, 于是 $\exists\zeta\in(1,2)$, $f'(\zeta)=0$.

现在考虑 $g(x)=f'(x)/x^2$, $g(1)=g(\zeta)=0$, 于是 $\exists\xi\in(1,\zeta)$, $g'(\xi)=(\xi^2 f''(\xi)-2\xi f'(\xi))/\xi^4=0$, 即 $\xi f''(\xi)-2f'(\xi)=0$.

构造函数:

- $\lambda f(\xi)+\xi f'(\xi)=0 \longrightarrow g(x)=x^\lambda f(x)$
- $\lambda f(\xi)+f'(\xi)=0 \longrightarrow g(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}f(x)$
- $\lambda\xi f(\xi)+f'(\xi)=0 \longrightarrow g(x)=\mathrm{e}^{\lambda x^2/2}f(x)$
- $c(\xi)f(\xi)+f'(\xi)=0 \longrightarrow g(x)=\mathrm{e}^{\int c(x)\mathrm{d}x}f(x)$
- $\lambda f(\xi)+f'(\xi)=\kappa \longrightarrow g(x)=x^\lambda(f(x)-\kappa)$
- $\lambda f(\xi)+f'(\xi)=\kappa\xi \longrightarrow g(x)=x^\lambda(f(x)-\kappa x/\lambda+\kappa/\lambda^2)$
- $d(\xi)+c(\xi)f(\xi)+f'(\xi)=0 \longrightarrow g(x)=\mathrm{e}^{\int c(x)\mathrm{d}x}f(x)+\int d(x)\mathrm{e}^{\int c(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$

微分中值定理

Problem 6

f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, $\exists c \in (a,b)$, $f'(c)=0$. 证明: $\exists \xi \in (a,b)$, $f'(\xi)-f(\xi)+f(a)=0$.

Problem 6

f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, $\exists c \in (a,b)$, $f'(c)=0$. 证明: $\exists \xi \in (a,b)$, $f'(\xi)-f(\xi)+f(a)=0$.

令 $g(x)=\mathrm{e}^{-x}(f(x)-f(a))$, 只知 $g(a)=0$, $g'(c)=\mathrm{e}^{-c}(f(a)-f(c))$, 无法直接应用中值定理.

如果 $g'(x)\neq 0$, 由 Darboux 定理, $g'(x)$ 不变号. 不妨考虑 $g'(x)$ 恒为正, 即 $g(x)$ 严增. 那么 $g(c)>g(a)=0$, 即 $f(c)>f(a)$, 故 $g'(c)<0$, 矛盾.

Problem 7

$f \in \mathcal{C}^3[0,1]$, $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'(1/2)=0$. 证明 $\exists \xi \in (0,1)$, $|f'''(\xi)| \geq 24$.

Problem 7

$f \in \mathcal{C}^3[0,1]$, $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'(1/2)=0$. 证明 $\exists \xi \in (0,1)$, $|f'''(\xi)| \geq 24$.

在 $x=1/2$ 处 Taylor 展开, 代入 $x=0,1$:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) + f''\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{8} - f'''\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cdot\frac{1}{48} = f(0) = 1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) + f''\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{8} + f'''\left(\frac{1+\theta_2}{2}\right)\cdot\frac{1}{48} = f(1) = 2 \end{cases}$$

两式相减, 我们得到两个点的三阶导数差 48, 至少其一绝对值 ≥ 24.

微分中值定理

Problem 8

$f \in \mathcal{C}^2[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $|f''(x)| \le 1$, 证明 $|f(x)| \le 1/8$.
进一步地, 若 $f'_+(0) = f'_-(1) = 0$, 证明 $|f(x)| \le 1/16$.

微分中值定理

Problem 8

$f \in \mathcal{C}^2[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, $|f''(x)| \le 1$, 证明 $|f(x)| \le 1/8$.
进一步地, 若 $f'_+(0)=f'_-(1)=0$, 证明 $|f(x)| \le 1/16$.

考虑驻点 x_0, 在此处展开. 如果 $x_0 \le 1/2$, 则

$$0=f(0)=f(x_0)+\frac{f''(\theta x_0)x_0^2}{2} \Longrightarrow |f(x_0)| \le \left|\frac{f''(\theta x_0)}{8}\right| \le \frac{1}{8}.$$

$f'_+(0)=0$ 时, $f(1/4)=f(0)+f'_+(0)/4+f''(\theta/4)/32 \Rightarrow |f(1/4)| \le 1/32$.

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=f(x_0)+\frac{f''\left(x_0+\theta\left(\frac{1}{4}-x_0\right)\right)\left(\frac{1}{4}-x_0\right)^2}{2} \Longrightarrow |f(x_0)| \le \frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{16}.$$

$x_0>1/2$ 同理.

Cheat:

$$|f(x_0)|=\left|\int_0^{x_0} f'(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_0^{x_0/2} x|f''(\xi_x)|\mathrm{d}x+\int_{x_0/2}^{x_0}(x_0-x)|f''(\xi_x)|\mathrm{d}x \le \frac{x_0^2}{4}$$

泰勒展开

$\arcsin x$: 法 1, 二项式展开 $(1-t)^{-1/2}$ 后代入 $t=x^2$. 法 2, 构造等式 $(1-x^2)y''-xy'=0$, 求导得到递推式

$$(1-x^2)y^{(n+2)}=(2n+1)xy^{(n+1)}+n^2y^{(n)},$$

$$\arcsin x=\sum_{n\geq 0}\frac{(2n-1)!!^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{n\geq 0}\frac{(2n-1)!!}{2^n(2n+1)n!}x^{2n+1}.$$

$(\arcsin x)^2$: $(1-x^2)y''=xy'+2$.

$e^x\sin x$: $(e^x\sin x)'=e^x(\sin x+\sin(x+\pi/2))=\sqrt{2}e^x\sin(x+\pi/4)$.

Problem 9

求 $\left(e^{x^2}\right)^{(n)}$.

泰勒展开

递推方法: $y^{(n+1)} = 2xy^{(n)} + 2ny^{(n-1)}$. 考虑求 $\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)^{(n)}\Big|_{x=t}$, 在 $x = t^2$ 处展开 e^x:

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{t^2} \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-t^2)^i}{i!} + o((x-t^2)^{n+1}).$$

代入 x^2:

$$\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{t^2} \sum_{i=0}^{n} \frac{(x^2-t^2)^i}{i!} + o((x-t)^{n+1}).$$

展开并求 n 次导:

$$\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)^{(n)} = \mathrm{e}^{t^2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=\lceil n/2 \rceil}^{i} \frac{1}{j!(i-j)!} \left(x^{2j}\right)^{(n)} \left(-t^2\right)^{i-j}$$
$$= \mathrm{e}^{t^2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=\lceil n/2 \rceil}^{i} \frac{(2j)!}{j!(i-j)!(2j-n)!} x^{2j-n} \left(-t^2\right)^{i-j}.$$

代入 $x = t$:

泰勒展开

$$\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)^{(n)}\Big|_{x=t} = \mathrm{e}^{t^2}\sum_{i=\lceil n/2\rceil}^{n}\sum_{j=\lceil n/2\rceil}^{i}\frac{(2j)!(-1)^{i-j}}{j!(i-j)!(2j-n)!}t^{2i-n}$$

$$\xlongequal{i\mapsto n-i,j\mapsto n-j} \mathrm{e}^{t^2}\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}t^{n-2i}\sum_{j=i}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(2(n-j))!(-1)^{j-i}}{(n-j)!(j-i)!(n-2j)!}$$

$$= \mathrm{e}^{t^2}\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n!}{(n-i)!}t^{n-2i}\sum_{j=i}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{2(n-j)}{n}\binom{n-i}{n-j}(-1)^{i-j}$$

$$= \mathrm{e}^{t^2}\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n!}{i!(n-2i)!}(2t)^{n-2i}.$$

组合恒等式:

$$\sum_{j=i}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{2(n-j)}{n}\binom{n-i}{n-j}(-1)^{i-j} = \binom{n-i}{i}2^{n-2i},$$

组合意义: $2\times(n-i)$ 的 01 矩阵, n 个 1, 每列至少一个 1. LHS 在容斥.

更通用的方法: 计算复合函数 n 阶导的 Faà di Bruno 公式.

泰勒展开

Problem 10

求 $\tan x$ 在 $x = 0$ 处的 Taylor 展开.

Problem 10

求 $\tan x$ 在 $x = 0$ 处的 Taylor 展开.

Bernoulli 数:

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{i \geq 0} \frac{B_i}{i!} x^i.$$

递推关系:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = [n = 0].$$

$$B = \left[1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, \cdots\right]$$

泰勒展开

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}=-\frac{1}{2}+\sum_{n\geq 0}\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}$$

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}\\
&= -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+1}\\
&= \mathrm{i}\left(2\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1}{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}-1}-1\right)\\
&= \mathrm{i}\left(\frac{2}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1}-\frac{4}{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}-1}-1\right)\\
&= \mathrm{i}\sum_{n\geq 0}\frac{B_{2n}}{(2n)!}\left[2(2\mathrm{i}x)^{2n-1}-4(4\mathrm{i}x)^{2n-1}\right]\\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(-1)^{n+1}(4^{2n}-2^{2n})x^{2n-1}.
\end{aligned}$$

$\cot, \sec, \csc$ 的思路是一样的.

参考资料

- W × F 的讲义.
- 历年的一些作业与考试题.
- https://math.stackexchange.com/questions/532404/find-the-limit-of-sum-limits-k-1n-left-sqrt1-frackn2-1-right
- https://www.bilibili.com/video/BV1Ni4y1M7HU/
- https://www.bilibili.com/video/BV1Am421G7SZ/
- https://math.stackexchange.com/questions/2911501/prove-that-fx-leqslant-dfracmb-a216
- https://www.zhihu.com/question/303558540/answer/2656044455
- https://math.stackexchange.com/questions/193702/find-an-expression-for-the-n-th-derivative-of-fx-ex2
- https://www.zhihu.com/question/304948467/answer/845954053

祝大家考试顺利!