Unity Shader 数学基础

An Introduction to Math in Unity Shader

Little Rewriter

March 19th, 2021

概述

接下来我们会专门讲解 Shader。
Shader 可以说是美术的核心环节之一，不过本人能力有限，并没有完全掌握这部分知识。如有错误疏漏还请原谅。
强烈建议大家参考以下内容：

1. 《Unity Shader 入门精要》。Shader 部分主要内容都来自这本书，这也是想学 Unity Shader 的必读书。强烈建议人手一本。
2. 《Real Time Rendering - Fourth Edition.》实时渲染必读，据说中文版要来了。
3. Games101 现代图形学入门 - 闫令琪应该是质量最高的图形学网课了。
4. Games202 高质量实时渲染 - 闫令琪闫老师新作，撞了只是偶然
5. 庄懂的技术美术公开课

概述

我们在《线性代数》就已经接触过关于矩阵和变换的相关知识。但是这些内容比较脱离实际，所以这里讨论一些我们在图形学中会用到的数学基础知识。
默认大家掌握：

1. 基础的向量代数（高数下第一章）
2. 矩阵的运算（线性代数第二章）
3. 向量空间和过渡矩阵（线性代数第三章）

主要内容

向量代数的基本应用

举例 (向量夹角问题)

$$\cos\langle a, b\rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

因此可以用点积正负判断向量之间夹角是钝角、直角还是锐角。

向量代数的基本应用

举例 (向量夹角问题)

$$\cos\langle a, b\rangle = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

因此可以用点积正负判断向量之间夹角是钝角、直角还是锐角。

举例 (反射折射问题)

在空气和水的界面上，有一束光射到表面上。假设这束光的方向向量是 $(1, 2, 2)$，这点指向空气的法线是 $(-1, 0, 3)$，那么该点是从空气入射还是从水入射?

向量代数的基本应用

举例 (向量夹角问题)

$$\cos\langle a, b\rangle = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

因此可以用点积正负判断向量之间夹角是钝角、直角还是锐角。

举例 (反射折射问题)

在空气和水的界面上，有一束光射到表面上。假设这束光的方向向量是 $(1, 2, 2)$，这点指向空气的法线是 $(-1, 0, 3)$，那么该点是从空气入射还是从水入射?

由于 $(1, 2, 2)\cdot(-1, 0, 3) = 5 > 0$，夹角为锐角，所以是从水入射。

向量代数的基本应用

举例 (方向问题)

假设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是 xOy 平面上两个向量 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$，试给出方法判定 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 左侧还是右侧。

向量代数的基本应用

举例 (方向问题)

假设 $\vec{a},\vec{b}$ 是 xOy 平面上两个向量 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，试给出方法判定 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 左侧还是右侧。
补足成三维向量做叉积

$$(x_1,y_1,0)\times(x_2,y_2,0)=(0,0,x_1y_2-x_2y_1)$$

因此 $x_1y_2-x_2y_1>0$ 说明叉乘结果向量指向 $+z$ 方向，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 右侧。

向量代数的基本应用

举例 (三角形与点问题)

给出平面上三个顶点 A, B, C，判断 P 在三角形内还是三角形外。

向量代数的基本应用

举例 (三角形与点问题)

给出平面上三个顶点 A, B, C，判断 P 在三角形内还是三角形外。考虑 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CP}$ 的符号，如果三者相同，说明在三角形内。否则在三角形外。

举例 (共面问题)

给出三个点 A, B, C，判断 P 是否在三点张成的平面上。

向量代数的基本应用

举例 (三角形与点问题)

给出平面上三个顶点 A, B, C，判断 P 在三角形内还是三角形外。考虑 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CP}$ 的符号，如果三者相同，说明在三角形内。否则在三角形外。

举例 (共面问题)

给出三个点 A, B, C，判断 P 是否在三点张成的平面上。

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ 说明共平面。

其实就是混合积。

矩阵的几何定义

定义 (矩阵)

矩阵代表了一种变换。
矩阵与向量相乘，实质上是对向量实施某种变换。
矩阵与矩阵相乘，实质上是对变换的复合。
这是矩阵的几何意义。

我们仅考察平移变换、旋转变换、缩放变换和投影变换这四种常用变换。此外还有镜像变换、错切变换等，此处不进行展开。

引例：二维空间变换

举例 (缩放变换)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

相当于让 $x' = sx, y' = sy$

引例：二维空间变换

举例 (缩放变换)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

相当于让 $x' = sx, y' = sy$

举例 (旋转变换)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

首先从基向量来考虑。对于 $(1,0)$，变换之后变成了 $(\cos\theta, \sin\theta)$，$(0,1)$ 则变成了 $(-\sin\theta, \cos\theta)$，因此这一变换是逆时针旋转 θ，这个矩阵实际上就是基向量的过渡矩阵。

缩放变换

定义 (缩放变换)

对 x, y, z 分别放大 $s_x, s_y, s_z (s_x, s_y, s_z \neq 0)$ 倍的变换称为缩放变换。
当 $s_x = s_y = s_z = s$，称为统一缩放，否则称为非统一缩放。
一般的，我们记这种变换为 $S(s_x, s_y, s_z)$。

缩放变换

定义 (缩放变换)

对 x, y, z 分别放大 $s_x, s_y, s_z (s_x, s_y, s_z \neq 0)$ 倍的变换称为缩放变换。
当 $s_x = s_y = s_z = s$，称为统一缩放，否则称为非统一缩放。
一般的，我们记这种变换为 $S(s_x, s_y, s_z)$。

定理 (缩放矩阵)

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \\ s_z z \end{pmatrix}$$

缩放变换

定义 (缩放变换)

对 x, y, z 分别放大 $s_x, s_y, s_z (s_x, s_y, s_z \neq 0)$ 倍的变换称为缩放变换。
当 $s_x = s_y = s_z = s$，称为统一缩放，否则称为非统一缩放。
一般的，我们记这种变换为 $S(s_x, s_y, s_z)$。

定理 (缩放矩阵)

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \\ s_z z \end{pmatrix}$$

推论 (缩放逆变换)

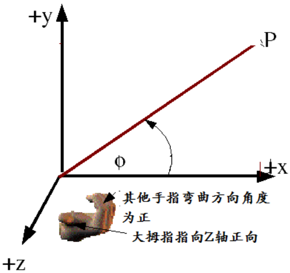
$$S^{-1}(s_x, s_y, s_z) = S(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z})$$

旋转变换

定义 (旋转变换)

将物体绕 x 轴（或 y 轴、z 轴）旋转 $\theta°$，称为旋转变换，记作 $R_x(\theta)$（或 $R_y(\theta)$、$R_z(\theta)$）

在右手系中，旋转的方向根据右手定则确定。



旋转变换

定义 (旋转矩阵)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (\mathrm{R_x}(\alpha))$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (\mathrm{R_y}(\alpha))$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{R_z}(\alpha))$$

也可以从基向量的角度进行考虑。

旋转变换

推论 (旋转逆变换)

$$
\begin{aligned}
R_x^{-1}(\alpha) &= R_x(-\alpha) \\
R_y^{-1}(\alpha) &= R_y(-\alpha) \\
R_z^{-1}(\alpha) &= R_z(-\alpha)
\end{aligned}
$$

如果旋转轴不过原点，可以先进行平移，之后再进行旋转操作，完毕后平移回去。
这里的旋转只给出了坐标轴旋转。对任意轴的旋转由罗德里格斯旋转公式给出，有兴趣可以自行了解。
在欧拉角和四元数部分，我们会进一步对旋转进行讨论。

平移变换

定义 (平移变换)

对 x, y, z 分别平移 t_x, t_y, t_z 的变换称为平移变换。
一般的，我们记这种变换为 $T(t_x, t_y, t_z)$。

平移变换

定义 (平移变换)

对 x, y, z 分别平移 t_x, t_y, t_z 的变换称为平移变换。
一般的，我们记这种变换为 $T(t_x, t_y, t_z)$。

定理 (缩放矩阵)

诶我矩阵呢?
矩阵咋写啊?
仅仅使用 3×3 矩阵无法表示平移变换!

为此，我们需要引入齐次坐标（Homogeneous coordinates）。

Questions?

主要内容

引例：二维平行变换

举例 (二维平行变换)

如果我们将二维坐标拓展到三维，如何理解下面的变换?

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

引例：二维平行变换

举例 (二维平行变换)

如果我们将二维坐标拓展到三维，如何理解下面的变换？

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

这相当于将 (x, y) 平移到 $(x + t_x, x + t_y)$

可以发现，当我们新引入一维的时候，平移变换可以用矩阵的形式进行表示。

齐次坐标

定义

对于坐标 (x, y, z)，定义齐次坐标 (x, y, z, w) 为

- $(x, y, z, 0)^T$，该坐标为向量的坐标
- $(x, y, z, 1)^T$，该坐标为点的坐标

并且在 $w \neq 0$ 的时候，规定

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \\ 1 \end{pmatrix}$$

为什么这样定义 w 分量的取值?

齐次坐标的加减法

假设 $P(x_1, y_1, z_1, w_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2, w_2)$，分别考虑下面几种情况：

1. $w_1 = 1, w_2 = 1$，此时 $P - Q = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, 0)$，对应于向量。点与点做减法得到向量，很河里。

齐次坐标的加减法

假设 $P(x_1, y_1, z_1, w_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2, w_2)$，分别考虑下面几种情况：

1. $w_1 = 1, w_2 = 1$，此时 $P - Q = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, 0)$，对应于向量。点与点做减法得到向量，很河里。
2. $w_1 = 1, w_2 = 0$，此时 $P \pm Q = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3, 1)$，对应于点。点和向量做加减法得到点，很河里。

齐次坐标的加减法

假设 $P(x_1, y_1, z_1, w_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2, w_2)$，分别考虑下面几种情况:

1. $w_1 = 1, w_2 = 1$，此时 $P - Q = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, 0)$，对应于向量。点与点做减法得到向量，很河里。
2. $w_1 = 1, w_2 = 0$，此时 $P \pm Q = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3, 1)$，对应于点。点和向量做加减法得到点，很河里。
3. $w_1 = 0, w_2 = 0$，此时 $P \pm Q = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3, 0)$，对应于向量。向量与向量做加减法得到向量，很河里。

齐次坐标的加减法

假设 $P(x_1, y_1, z_1, w_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2, w_2)$，分别考虑下面几种情况:

1. $w_1 = 1, w_2 = 1$，此时 $P - Q = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, 0)$，对应于向量。点与点做减法得到向量，很河里。
2. $w_1 = 1, w_2 = 0$，此时 $P \pm Q = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3, 1)$，对应于点。点和向量做加减法得到点，很河里。
3. $w_1 = 0, w_2 = 0$，此时 $P \pm Q = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3, 0)$，对应于向量。向量与向量做加减法得到向量，很河里。
4. $w_1 = 1, w_2 = 1$，此时 $P + Q = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, 2)$，这是啥?

齐次坐标的加减法

假设 $P(x_1, y_1, z_1, w_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2, w_2)$，分别考虑下面几种情况:

1. $w_1 = 1, w_2 = 1$，此时 $P - Q = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, 0)$，对应于向量。点与点做减法得到向量，很河里。
2. $w_1 = 1, w_2 = 0$，此时 $P \pm Q = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3, 1)$，对应于点。点和向量做加减法得到点，很河里。
3. $w_1 = 0, w_2 = 0$，此时 $P \pm Q = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3, 0)$，对应于向量。向量与向量做加减法得到向量，很河里。
4. $w_1 = 1, w_2 = 1$，此时 $P + Q = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, 2)$，这是啥？考虑分量除以 w，得到恰好是中点。也不是不河里。

平行变换

基于齐次坐标，我们给出平行变换的定义：

定理 (平行变换矩阵)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

可以发现，这一定义同时保证了向量具有平移不变性。

平行变换

基于齐次坐标，我们给出平行变换的定义：

定理 (平行变换矩阵)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

可以发现，这一定义同时保证了向量具有平移不变性。

推论 (平行逆变换)

$$T(t_x, t_y, t_z)^{-1} = T(-t_x, -t_y, -t_z)$$

齐次坐标中的缩放变换与旋转变换

定理 (齐次坐标缩放变换)

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

齐次坐标中的缩放变换与旋转变换

定理 (齐次坐标缩放变换)

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定理 (齐次坐标旋转变换)

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_y(\alpha), R_z(\alpha)$ 有类似形式，这里不再展开。

仿射变换

将以上三种基本变换进行复合，得到仿射变换。为此，我们需要首先引入线性变换。

定义 (线性变换)

对于变换 f，如果满足 $f(ax+b) = af(x)+b$，则称为线性变换。

哪些变换是线性变换呢?

仿射变换

将以上三种基本变换进行复合，得到仿射变换。为此，我们需要首先引入线性变换。

定义 (线性变换)

对于变换 f，如果满足 $f(ax+b)=af(x)+b$，则称为线性变换。

哪些变换是线性变换呢?
旋转变换、缩放变换、错切变换、镜像变换都是线性变换，平移变换不是线性变换。

仿射变换

将以上三种基本变换进行复合，得到仿射变换。为此，我们需要首先引入线性变换。

定义 (线性变换)

对于变换 f，如果满足 $f(ax+b)=af(x)+b$，则称为线性变换。

哪些变换是线性变换呢?
旋转变换、缩放变换、错切变换、镜像变换都是线性变换，平移变换不是线性变换。

定义 (仿射变换)

仿射变换是向量空间之间线性变换后接上平移变换的复合变换。

复合变换

将一系列仿射变换复合起来，所得的还是仿射变换。反映在矩阵上，就是代表仿射变换具有某种类似的形式。

定理 (仿射变换矩阵的分块)

任意一个仿射变换矩阵一定能写成如下形式的分块矩阵

$$\begin{pmatrix} M_{3\times3} & t_{3\times1} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $M_{3\times3}$ 代表线性变换，$t_{3\times1}$ 代表平移变换。

复合变换的顺序

仿射变换是否可以交换呢？比如，先平移再旋转和先旋转再平移的结果是否相同的呢？

复合变换的顺序

仿射变换是否可以交换呢？比如，先平移再旋转和先旋转再平移的结果是否相同的呢？
一般，我们变换的顺序是先缩放，再旋转，最后平移。

复合变换的顺序

仿射变换是否可以交换呢？比如，先平移再旋转和先旋转再平移的结果是否相同的呢？
一般，我们变换的顺序是先缩放，再旋转，最后平移。

举例

假设 zgh 的鼻子坐标 $P(2,3,3)$。现在需要完成绕 x 轴旋转 $30°$、放大 2 倍，平移 $(1,1,4)$ 三个操作，试求变换后的结果。

复合变换的顺序

仿射变换是否可以交换呢？比如，先平移再旋转和先旋转再平移的结果是否相同的呢？
一般，我们变换的顺序是先缩放，再旋转，最后平移。

举例

假设 zgh 的鼻子坐标 $P(2,3,3)$。现在需要完成绕 x 轴旋转 $30°$、放大 2 倍，平移 $(1,1,4)$ 三个操作，试求变换后的结果。
注意矩阵的右结合性！

$$
\begin{aligned}
AX &= T(1,1,4)S(2,2,2)R_x(30^\circ)X \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3}-2 \\ 3\sqrt{3}+7 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Questions?

主要内容

UNITY 的坐标空间

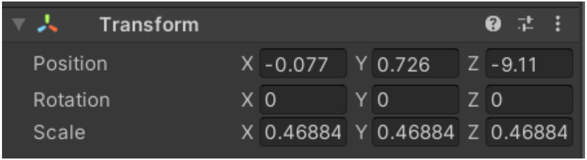
Unity 使用了下面的坐标空间。

1. 模型空间
2. 世界空间
3. 观察空间
4. 裁剪空间
5. 屏幕空间

下面我们分别对这些空间展开介绍，了解在渲染流水线中的变换过程。

模型空间到世界空间

模型空间是模型自身的空间。比如，在 ZoroGH 自己的空间中，假如肚脐的坐标是 $(0, 0, 0)$，ZoroGH 的鼻子坐标可能是 $(2, 4, 1)$。而在世界中，我们可能让 ZoroGH 移动在某个位置，并且和黑格尔的辩证法一样头脑倒置。这个时候，坐标就会发生改变。
这种变化在 Unity 中由物体的 Transform 属性体现。



假如我们已知这些信息，变换矩阵如何构造呢?

模型空间到世界空间的变换

举例 (ZoroGH 的鼻子大冒险·1)

已知 ZoroGH 的 Transform 属性中，Scale 为 2,2,2，Rotation 为 0,150,0，Position 为 5,0,25。若 ZoroGH 的鼻子在模型空间中坐标是 $(0, 2, 4)$，试求她的鼻子在世界空间中的坐标。

模型空间到世界空间的变换

举例 (ZoroGH 的鼻子大冒险·1)

已知 ZoroGH 的 Transform 属性中，Scale 为 2,2,2，Rotation 为 0,150,0，Position 为 5,0,25。若 ZoroGH 的鼻子在模型空间中坐标是 $(0, 2, 4)$，试求她的鼻子在世界空间中的坐标。

对她的鼻子进行变换，相当于进行 $S(2,2,2), R_y(150°), T(5,0,25)$。所以可以直接求解其矩阵

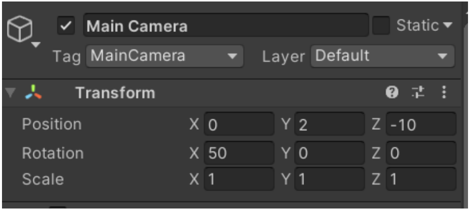
$$
\begin{aligned}
AX &= T(5,0,25)S(2,2,2)R_y(150°)X \\
&= \begin{pmatrix} -1.732 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1.732 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 25 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18.072 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

世界空间到观察空间

观察空间是相机所看到的世界，换言之就是相机的模型世界。由于屏幕的本质是由相机看到的世界的映射，我们有必要找到在相机的世界中物体在哪个位置。这恰恰印证了维特根斯坦那句名言

“世界的意义在于世界之外,因此世界中不存在价值。”

这里需要尤其注意的一点是，Unity 的观察空间使用**右手系**。因此在自己处理这一变换的时候需要特别小心。
观察空间的位置由相机的坐标决定。



世界空间到观察空间的变换

举例 (ZoroGH 的鼻子大冒险·2)

已知摄像机的 Transform 属性中，Scale 为 1,1,1，Rotation 为 30,0,0，Position 为 0,10,-10。若 ZoroGH 的鼻子在世界空间中坐标是 $(9, 4, 18.072)$，试求她的鼻子在世界空间中的坐标。

世界空间到观察空间的变换

举例 (ZoroGH 的鼻子大冒险·2)

已知摄像机的 Transform 属性中，Scale 为 1,1,1，Rotation 为 30,0,0，Position 为 0,10,-10。若 ZoroGH 的鼻子在世界空间中坐标是 $(9, 4, 18.072)$，试求她的鼻子在世界空间中的坐标。

直接解基向量比较复杂，考虑逆变换?

世界空间到观察空间的变换

举例 (ZoroGH 的鼻子大冒险·2)

已知摄像机的 Transform 属性中，Scale 为 1,1,1，Rotation 为 30,0,0，Position 为 0,10,-10。若 ZoroGH 的鼻子在世界空间中坐标是 $(9, 4, 18.072)$，试求她的鼻子在世界空间中的坐标。

直接解基向量比较复杂，考虑逆变换?

$A^{-1} = T(0, 10, -10)R_x(30) \Rightarrow A = R_x(-30)T(0, -10, 10)$

$$
\begin{aligned}
AX &= R_x(-30)T(0, -10, 10)X \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & -3.66 \\ 0 & -0.5 & 0.866 & 13.66 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18.072 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8.84 \\ -27.31 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

结束了?

世界空间到观察空间的变换

举例 (ZoroGH 的鼻子大冒险·2)

已知摄像机的 Transform 属性中，Scale 为 1,1,1，Rotation 为 30,0,0，Position 为 0,10,-10。若 ZoroGH 的鼻子在世界空间中坐标是 $(9, 4, 18.072)$，试求她的鼻子在世界空间中的坐标。

直接解基向量比较复杂，考虑逆变换?

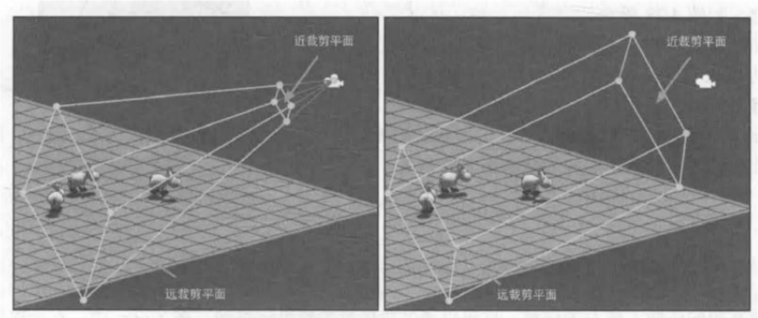
$A^{-1} = T(0, 10, -10)R_x(30) \Rightarrow A = R_x(-30)T(0, -10, 10)$

$$
\begin{aligned}
AX &= R_x(-30)T(0, -10, 10)X \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & -3.66 \\ 0 & -0.5 & 0.866 & 13.66 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18.072 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8.84 \\ -27.31 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

结束了？由于从左手系变成右手系，还需要将 z 取反。

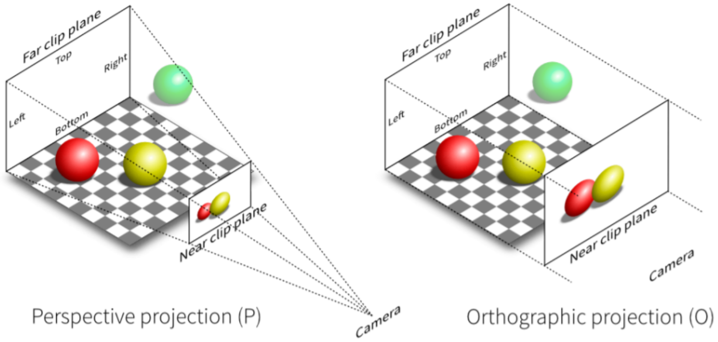
观察空间到裁剪空间

视野的范围是有极限的。对于一个相机而言，他所能看到的物体有一定限制。我们称摄像机看到的区域为视锥体。



上面两种是正交投影和透视投影的示意图。

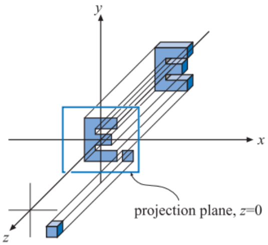
观察空间到裁剪空间

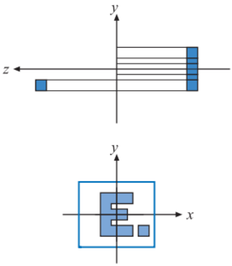

Far clip plane
Top
Right
Left
Bottom
Near clip plane
Camera
Perspective projection (P)
Far clip plane
Top
Right
Left
Bottom
Near clip plane
Camera
Orthographic projection (O)

正交投影

定义 (正交投影)

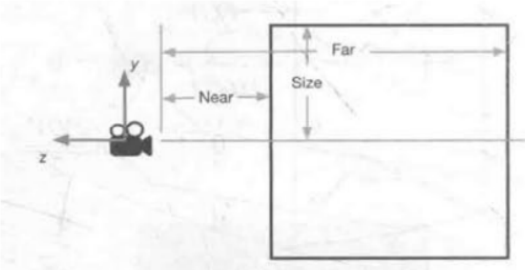
正交投影是具有长方体形状视锥的投影。
正如阳光平行的将物体的影子投射到大地上一样，摄像机平行的将物体映射到平面上。





正交投影变换

为了说明正交投影变换，我们先指定基本参数。



F 表示远平面距离，*S* 表示视锥半高度，*Ne* 表示近平面距离。除此之外，我们还可以知道摄像机宽高比 k。这样就可以得到近端和远端裁剪平面的大小 clipH=2S, clipW = 2k· S

正交投影变换

接下来就可以给出变换矩阵了。

定义 (正交投影变换)

定义正交投影变换矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{k\cdot S} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{F-N} & -\frac{F+N}{F-N} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{k\cdot S} \\ \frac{y}{S} \\ -\frac{2z}{F-N} - \frac{F+N}{F-N} \\ 1 \end{pmatrix}$$

吓到了？没事，一会更刺激
怎么推的？建议去看 Games101

正交投影变换

定理 (正交投影变换的性质)

- 经过正交投影变换之后，w 坐标必为 1
- 正交投影变换是线性变换
- 正交投影变换将右手系转换为左手系

正交投影变换

定理 (正交投影变换的性质)

- 经过正交投影变换之后，w 坐标必为 1
- 正交投影变换是线性变换
- 正交投影变换将右手系转换为左手系

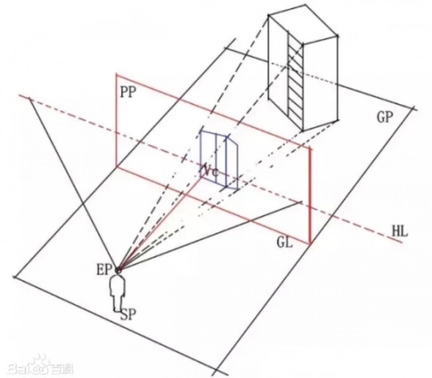
定理 (正交投影变换的裁剪)

若经过变换后，一个顶点在视锥体中，则 $x, y, z \in [-1, 1]$.

透视投影

定义 (透视投影)

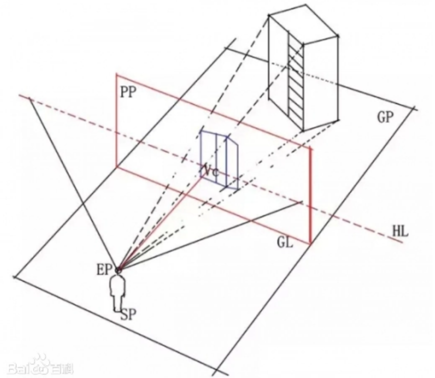
透视投影是从某个投射中心将物体投射到单一投影面上所得到的图形。



透视投影

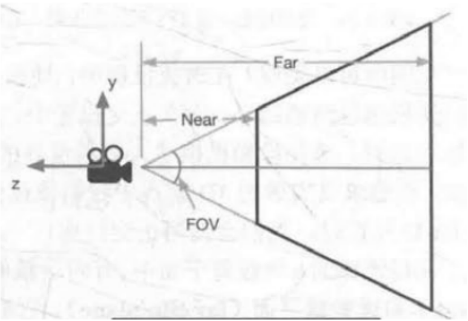
定义 (透视投影)

透视投影是从某个投射中心将物体投射到单一投影面上所得到的图形。



透视投影变换

类似的，我们给出透视投影变换。



F 表示远平面距离，S 表示视锥半高度，V 表示锥体张开角度，N 表示近平面距离。除此之外，我们还可以知道摄像机宽高比 k。这样就可以得到近端和远端裁剪平面的大小 nearH=2Ntan $\frac{V}{2}$，nearW = 2k·nearH。同理可以得到 farH 和 farW。

透视投影变换

接下来就可以给出变换矩阵了。

定义 (透视投影变换)

定义透视投影变换矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\cot\frac{V}{2}}{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cot\frac{V}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F+N}{F-N} & -\frac{2FN}{F-N} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x\cot\frac{V}{2}}{k} \\ y\cot\frac{V}{2} \\ -z\frac{F+N}{F-N} - \frac{2FN}{F-N} \\ -z \end{pmatrix}$$

怎么推的？建议去看 Games101

透视投影变换

定理 (透视投影变换的性质)

- 经过透视投影变换之后，w 坐标必为 $-z_0$。此处的 $-z_0$ 是变换前的坐标。
- 透视投影变换从右手系变换到左手系。

透视投影变换

定理 (透视投影变换的性质)

- 经过透视投影变换之后，w 坐标必为 $-z_0$。此处的 $-z_0$ 是变换前的坐标。
- 透视投影变换从右手系变换到左手系。

定理 (透视投影变换的裁剪)

若经过变换后，一个顶点在视锥体中，则 $x, y, z \in [-w, w]$.

透视投影变换

定理 (透视投影变换的性质)

- 经过透视投影变换之后，w 坐标必为 $-z_0$。此处的 $-z_0$ 是变换前的坐标。
- 透视投影变换从右手系变换到左手系。

定理 (透视投影变换的裁剪)

若经过变换后，一个顶点在视锥体中，则 $x, y, z \in [-w, w]$.

由于正交投影变换的 w 分量是 1，所以这一定理可以延拓为：无论哪种投影变换，顶点在视锥体中的充要条件是 $x, y, z \in [-w, w]$.

观察空间到裁剪空间

举例 (ZoroGH 的鼻子大冒险·3)

已知摄像机的 FOV 为 60°，N=5，F=40，$k = \frac{4}{3}$，在观察空间中坐标为 $(9, 8.84, -27.31, 1)$，判断透视投影后鼻子是否在视锥内。

观察空间到裁剪空间

举例 (ZoroGH 的鼻子大冒险·3)

已知摄像机的 FOV 为 60°，N=5，F=40，$k=\frac{4}{3}$，在观察空间中坐标为 $(9, 8.84, -27.31, 1)$，判断透视投影后鼻子是否在视锥内。
直接套矩阵一顿莽.jpg

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4/3} & 0 & 0 & \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{45}{35} & -\frac{400}{35} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8.84 \\ -27.31 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.691 \\ 15.311 \\ 23.692 \\ 27.31 \end{pmatrix}$$

观察空间到裁剪空间

举例 (ZoroGH 的鼻子大冒险·3)

已知摄像机的 FOV 为 60°，N=5，F=40，$k=\frac{4}{3}$，在观察空间中坐标为 $(9, 8.84, -27.31, 1)$，判断透视投影后鼻子是否在视锥内。
直接套矩阵一顿莽.jpg

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4/3} & 0 & 0 & \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{45}{35} & -\frac{400}{35} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8.84 \\ -27.31 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.691 \\ 15.311 \\ 23.692 \\ 27.31 \end{pmatrix}$$

由于 $x, y, z \in [-27.31, 27.31]$，所以位于视锥体内。

裁剪空间到屏幕空间

在上一步操作之后我们得到的仍然是三维的，其实是一个中间步骤。
想要得到最后的映射结果，我们首先要通过归一化，除以 w 分量，变成真正的坐标。这一步得到的也叫 NDC。

裁剪空间到屏幕空间

在上一步操作之后我们得到的仍然是三维的，其实是一个中间步骤。
想要得到最后的映射结果，我们首先要通过归一化，除以 w 分量，变成真正的坐标。这一步得到的也叫 NDC。接下来，我们需要把 $[-1, 1]$ 的屏幕坐标转换到屏幕空间。对于 Unity，左下角坐标是 $(0, 0)$，右上角坐标是 (pW, pH)，那么 (a, b) 就会变换到 $(\frac{pW}{2}(1+a), \frac{pH}{2}(1+b))$。

裁剪空间到屏幕空间

定理

如果变换前齐次坐标是 (c_x, c_y, c_z, c_w)，屏幕空间是 $[0, pW] \times [0, pH]$，变换后坐标 (s_x, s_y)，则变换可以表示为

$$s_x = \frac{c_x \cdot pW}{2c_w} + \frac{pW}{2}, s_y = \frac{c_y \cdot pW}{2c_w} + \frac{pH}{2}$$

裁剪空间到屏幕空间

定理

如果变换前齐次坐标是 (c_x, c_y, c_z, c_w)，屏幕空间是 $[0, pW] \times [0, pH]$，变换后坐标 (s_x, s_y)，则变换可以表示为

$$s_x = \frac{c_x \cdot pW}{2c_w} + \frac{pW}{2}, s_y = \frac{c_y \cdot pW}{2c_w} + \frac{pH}{2}$$

举例 (ZoroGH 的鼻子大冒险·終)

已知屏幕像素 400×300，裁剪空间中鼻子坐标 $(11.691, 15.311, 23.692, 27.31)$，求最后 ZoroGH 鼻子在屏幕上的位置。

裁剪空间到屏幕空间

定理

如果变换前齐次坐标是 (c_x, c_y, c_z, c_w)，屏幕空间是 $[0, pW] \times [0, pH]$，变换后坐标 (s_x, s_y)，则变换可以表示为

$$s_x = \frac{c_x \cdot pW}{2c_w} + \frac{pW}{2}, s_y = \frac{c_y \cdot pW}{2c_w} + \frac{pH}{2}$$

举例 (ZoroGH 的鼻子大冒险·終)

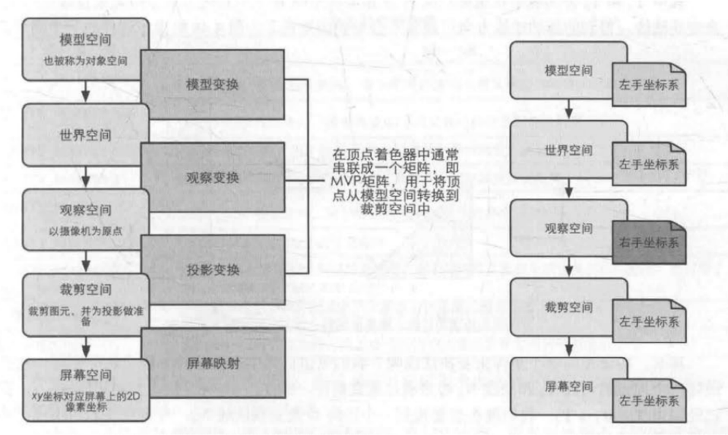
已知屏幕像素 400×300，裁剪空间中鼻子坐标 $(11.691, 15.311, 23.692, 27.31)$，求最后 ZoroGH 鼻子在屏幕上的位置。

$$s_x = \frac{11.691 \cdot 400}{2 \cdot 27.31} + 200 = 285.617, s_y = \frac{15.311 \cdot 300}{2 \cdot 27.31} + 150 = 234.096$$

我们顺利的找到了 ZoroGH 的鼻子在 $(285.617, 234.096)$！

总结·空间变换

用图来表示这一系列变换:



Questions?

主要内容

欧拉角

在前面的讨论中，我们忽略了一个问题：有多个旋转操作应该如何处理?

欧拉角

在前面的讨论中，我们忽略了一个问题：有多个旋转操作应该如何处理？围绕不同轴的旋转可以交换吗？

欧拉角

在前面的讨论中，我们忽略了一个问题：有多个旋转操作应该如何处理？围绕不同轴的旋转可以交换吗？为了更清晰的描述旋转操作，我们引入欧拉角的定义。

定义 (欧拉角)

绕坐标轴 E 下的 z 轴旋转 θ_z，x 轴旋转 θ_x，y 轴旋转 θ_y，形成的有序实数对 $(\theta_z, \theta_x, \theta_y)$ 记为欧拉角。
旋转方向符合左手定则。

欧拉角

在前面的讨论中，我们忽略了一个问题：有多个旋转操作应该如何处理？围绕不同轴的旋转可以交换吗？为了更清晰的描述旋转操作，我们引入欧拉角的定义。

定义 (欧拉角)

绕坐标轴 E 下的 z 轴旋转 θ_z，x 轴旋转 θ_x，y 轴旋转 θ_y，形成的有序实数对 $(\theta_z, \theta_x, \theta_y)$ 记为欧拉角。
旋转方向符合左手定则。

实际上，欧拉角的定义有很多种。另一种常见的定义是，旋转操作随着自身坐标系而定义。也就是，当我们绕 z 轴得到新的坐标系 R' 之后，绕 E' 中的 x 轴进行旋转得到 E''，再绕 E'' 中的 y 轴旋转。我们把这种自身坐标系定义的叫做动态欧拉角，而 Unity 中使用的叫做静态欧拉角。

欧拉角的旋转

定理 (旋转的复合)

若欧拉角为 $\theta_z, \theta_x, \theta_y$，则旋转变换矩阵是 $R(\theta_z) \cdot R(\theta_x) \cdot R(\theta_y)$。

欧拉角的旋转

定理 (旋转的复合)

若欧拉角为 $\theta_z, \theta_x, \theta_y$，则旋转变换矩阵是 $R(\theta_z) \cdot R(\theta_x) \cdot R(\theta_y)$。

这里看似是有悖于矩阵右结合的原则，但如果按照右结合，那么一系列的变换都需要自身坐标系也随之变换，也就是采取动态欧拉角。而我们实际上固定了转动的坐标轴，即采用静态欧拉角。可以证明，基于静态欧拉角的结果与动态欧拉角使用的变换 $R(\theta_y) \cdot R(\theta_x) \cdot R(\theta_z)$ 相同。

欧拉角虽然简单直观，适合人类使用，但是有不唯一性，所以我们需要对角度范围进行限制。同时，如果用欧拉角插值，还可能出现严重的抖动。为此，我们引入了四元数。

引例：复数

举例 (复数做变换)

假设有复数 $p = x + yi$， $q = \cos\theta + i\sin\theta$， 那么

$$pq = x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

引例：复数

举例 (复数做变换)

假设有复数 $p = x + yi$，$q = \cos\theta + i\sin\theta$，那么

$$pq = x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

恰好相当于旋转变换！

能否将复数这种性质推广到三维空间去？

四元数

William Hamilton 致力于将复数拓展，但是他一直认为这种复数应该有一个实部和两个虚部。1843 年他突然意识到应该有三个虚部，于是他把这些等式刻印在 Broome 桥上，四元数就这样诞生了。

定义

四元数 $[w \quad (x, y, z)]$ 确定复数 $w + xi + yj + zk$，其中 i, j, k 是三个虚部，并且满足:

1. $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
2. $ij = k, ji = -k$
3. $jk = i, kj = -i$
4. $ki = j, ik = -j$

也可以记为 $[w \quad \boldsymbol{v}]$，其中 $\boldsymbol{v} = xi + yj + zk$

四元数的基本定义

定义 (单位元)

$[1\ \ (0,0,0)]$ 称为单位四元数。

四元数的基本定义

定义 (单位元)

$[1 \ \ (0,0,0)]$ 称为单位四元数。

定义 (模)

定义四元数 $\boldsymbol{q}$ 的模长 $||q||$ 为

$$||q|| = ||[w \ \ \boldsymbol{v}]|| = \sqrt{w^2 + ||v||^2}$$

当 $||q|| = 1$，称为标准四元数。

四元数的基本定义

定义 (单位元)

$[1 \quad (0,0,0)]$ 称为单位四元数。

定义 (模)

定义四元数 $\boldsymbol{q}$ 的模长 $||q||$ 为

$$||q|| = ||[w \quad \boldsymbol{v}]|| = \sqrt{w^2 + ||v||^2}$$

当 $||q|| = 1$，称为标准四元数。

定义 (共轭)

定义 $\boldsymbol{q} = [w \quad \boldsymbol{v}]$ 的共轭 $\boldsymbol{q}* = [w \quad -\boldsymbol{v}]$

四元数的基本性质

定理 (四元数和轴-角数对的对应关系)

四元数可以以如下方式解释

$$\boldsymbol{q} = [\cos\frac{\theta}{2} \quad \sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}]$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是旋转轴。
容易发现，当 $||\boldsymbol{n}|| = 1$ 时，$||\boldsymbol{q}|| = 1$。

四元数的基本性质

定理 (四元数和轴-角数对的对应关系)

四元数可以以如下方式解释

$$\boldsymbol{q} = [\cos\frac{\theta}{2} \quad \sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}]$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是旋转轴。
容易发现，当 $||\boldsymbol{n}|| = 1$ 时，$||\boldsymbol{q}|| = 1$。

定理 (四元数的逆)

对于四元数的逆，有如下性质

$$\boldsymbol{q}^{-1} = \frac{\boldsymbol{q}^*}{||q||}$$

特别的，对标准四元数，$\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^*$

四元数的叉乘

定理 (四元数的叉乘)

定义四元数的叉乘

$$\mathbf{q_1} \times \mathbf{q_2} = [w_1 w_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} \quad w_1 \mathbf{v_2} + w_2 \mathbf{v_1} + v_1 \times v_2]$$

一般简记为 $\mathbf{q_1 q_2}$

证明过程可以自行推导，这里略去。

四元数的叉乘

定理 (四元数的叉乘)

定义四元数的叉乘

$$\boldsymbol{q_1} \times \boldsymbol{q_2} = \left[w_1 w_2 - \boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} \quad w_1 \boldsymbol{v_2} + w_2 \boldsymbol{v_1} + v_1 \times v_2\right]$$

一般简记为 $\boldsymbol{q_1 q_2}$

证明过程可以自行推导，这里略去。

推论 (叉乘的性质)

1. $||\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2|| = ||\boldsymbol{q}_1||||\boldsymbol{q}_2||$
2. $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_3)$
3. $(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)^{-1} = \boldsymbol{q}_2^{-1}\boldsymbol{q}_2^{-1}$

叉乘与旋转的关系

类似复数，我们可以给出对坐标的旋转变换。

定理 (旋转变换)

若 $P(x,y,z)$，定义 $\boldsymbol{p} = [0 \quad (xyz)]$。那么对 P 绕轴 $\boldsymbol{n}$ 旋转 θ 由下面的变换给出：

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1}$$

其中 $\boldsymbol{q} = [\cos\frac{\theta}{2} \quad \sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}]$。
这就是为什么我们要引入四元数与轴角数对。

叉乘与旋转的关系

类似复数，我们可以给出对坐标的旋转变换。

定理 (旋转变换)

若 $P(x, y, z)$，定义 $\boldsymbol{p} = [0 \quad (xyz)]$。那么对 P 绕轴 $\boldsymbol{n}$ 旋转 θ 由下面的变换给出：

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1}$$

其中 $\boldsymbol{q} = [\cos\frac{\theta}{2} \quad \sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}]$。
这就是为什么我们要引入四元数与轴角数对。

推论 (变换复合)

如果对 $\boldsymbol{p}$ 分别施以变换 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，那么

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}\boldsymbol{a}^{-1})\boldsymbol{b}^{-1} = (\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})^{-1}$$

小结

我们简单的介绍了欧拉角、四元数和旋转矩阵的性质。在 Shader 编写中，一般只需要考虑最后一种，但掌握前两者是大有裨益的。

小结

我们简单的介绍了欧拉角、四元数和旋转矩阵的性质。在 Shader 编写中，一般只需要考虑最后一种，但掌握前两者是大有裨益的。欧拉角非常直观，但是变换复杂度高，会出现万向锁问题，插值很抖动，所以一般需要转换为其它形式。

小结

我们简单的介绍了欧拉角、四元数和旋转矩阵的性质。在 Shader 编写中，一般只需要考虑最后一种，但掌握前两者是大有裨益的。欧拉角非常直观，但是变换复杂度高，会出现万向锁问题，插值很抖动，所以一般需要转换为其它形式。
四元数虽然不直观，但是可以实现球面平滑插值，可以快速转换为矩阵，并且节省存储空间，得到了广泛采用。

小结

我们简单的介绍了欧拉角、四元数和旋转矩阵的性质。在 Shader 编写中，一般只需要考虑最后一种，但掌握前两者是大有裨益的。

欧拉角非常直观，但是变换复杂度高，会出现万向锁问题，插值很抖动，所以一般需要转换为其它形式。

四元数虽然不直观，但是可以实现球面平滑插值，可以快速转换为矩阵，并且节省存储空间，得到了广泛采用。

矩阵不直观，但是在对于向量的变换有天生的优势，因此用旋转矩阵描述变换是非常方便的。

Questions?

Thanks