Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт вычислительной математики и информационных технологий

Кафедра прикладной математики и искусственного интеллекта

Направление: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Профиль: Прикладная математика и информатика

КУРСОВАЯ РАБОТА

Релаксационные колебания: осциллятор Ван-Дер-Поля

Выполнил:
Студент 2 курса
группы 09-012 ________________ Т.С. Росихин
«____» _________________2024г.

Руководитель курсовой работы:
«____» _________________2024г.
________________ Г.О. Трифонова

Казань – 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим модификацию последовательной LCR цепи, показанную на рисунке 1. Предположим, что ≪черный ящик≫ B является элементом цепи (или объединением нескольких элементов цепи) с вольт-амперной характеристикой, изображенной на рисунке справа. Такой черный ящик называется нелинейным резистором с кубической вольт-амперной характеристикой: $V_B = f(J_B) = J_B(J_B^2/3 - 1)$.

Пусть V_L, V_C и V_B — разности потенциалов на элементах цепи в направлении тока J. Динамические уравнения цепи имеют вид

$$L\frac{dJ}{dt} = V_C - f(J),$$

$$C\frac{dJ}{dt} = -J.$$

Здесь был использован закон Кирхгофа для напряжений, и было исключено V_L. Сделаем замену $t/L \rightarrow t$, $y1 = J$, $y2 = V_C$, $L/C = \eta$, и получим искомую систему уравнений:

$$\frac{dy1}{dt} = y_2 - f(y_1), \quad \frac{dy2}{dt} = -\eta y1. \qquad (1)$$

Она дополняется начальными условиями

$$y_1(0) = j_0, y_2(0) = V_0. \qquad (2)$$

Уравнения (1) зависят от единственного параметра η.

1.ЗАДАНИЕ

1) Напишите программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y),\ \ y(0) = y_0,\ \ y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке [a, b], используя метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2\, k_1), \\ k_3 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2\, k_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + h\, k_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 2\, k_2 + 2\, k_3 + k_4)/6. \end{aligned} \tag{4}$$

2) Протестируйте программу на примере системы уравнений

$$y'_1 = -y_2 + t^2 + 6t + 1, \quad y'_2 = y_1 - 3t^2 + 3t + 1,$$

на отрезке [0, 3] с точным решением

$$y_1 = 3t^2 - t - 1 + \cos(t) + \sin(t),\ \ y_2 = t^2 + 2 - \cos(t) + \sin(t).$$

3) Для тестовой задачи постройте графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h4 от выбранного шага h. Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4) Найдите стационарные решения (особые точки) уравнения (1). Как они зависят от параметра η?

5) Решите систему уравнений (1), (2) при помощи разработанной программы. Приведите наиболее характерные графики траекторий в фазовом пространстве (y_1, y_2) и графики $y_1(t)$, $y_2(t)$ на интервале интегрирования при разных значениях η из отрезка [0.001, 0.2] для следующих начальных условий

$$j_0 = 2, V_0 = 2.$$

Какие метаморфозы претерпевают фазовые траектории при изменении параметра η? При каком его значении появляются (исчезают) автоколебания (предельный цикл)?

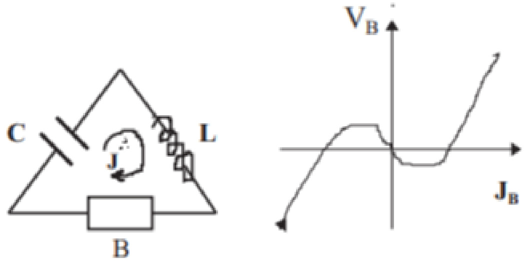


Рисунок 1. Схема цепи

2. МЕТОД РУНГЕ-КУТТЫ 4-ГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Общий вид q-стадийного уравнения Рунге-Кутты имеет следующий вид

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{l=1}^{q} b_l k_l,$$

где

$$k_1 = f(t_i, y_i),$$
$$k_2 = f(t_i + c_2, y_i + a_{21}hk_1),$$
$$\ldots$$
$$k_q = f(t_i + c_q h, y_i + a_{q1}hk_1 + a_{q2}hk_2 + \cdots + a_{q,q-1}hk_{q-1}).$$

Метод Рунге-Кутты q-го порядка точности определяется выбором b_j, c_j, a_{ij}. Для коэффициентов b выполняется равенство

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_q = 1,$$

В данной работе используется метод 4-го порядка, выпишем его общий вид

$$y_{i+1} = y_i + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4),$$

где

$$k_1 = f(t_i, y_i),$$
$$k_2 = f(t_i + c_2h, y_i + a_{21}hk_1),$$
$$k_3 = f(t_i + c_3h, y_i + a_{31}hk_1 + a_{32}hk_2),$$
$$k_4 = f(t_i + c_4h, y_i + a_{41}hk_1 + a_{42}hk_2 + a_{43}hk_3).$$

Система уравнений, описывающая связь между коэффициентами метода имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1,\\ &a_{21} = c_2,\\ &a_{31} + a_{32} = c_3,\\ &a_{41} + a_{42} + a_{43} = c_4,\\ &b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 = \frac{1}{2}, \end{aligned} \qquad (5)$$

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 + b_4 c_4^2 = \frac{1}{3},$$

$$b_2 c_2^3 + b_3 c_3^3 + b_4 c_4^3 = \frac{1}{4},$$

$$(b_3 a_{32} + b_4 a_{42}) c_2 + b_4 a_{43} c_3 = \frac{1}{6},$$

$$(b_3 a_{32} + b_4 a_{42}) c_2^2 + b_4 a_{43} c_3^2 = \frac{1}{12},$$

$$b_3 a_{32} c_2 c_3 + b_4 a_{42} c_2 c_4 + b_4 a_{43} c_3 c_4 = \frac{1}{8},$$

$$b_4 a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{24}.$$

Подставив коэффициенты из системы (4) в (5), получим равенство. Это означает, что данный метод принадлежит к семейству методов Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

3.ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Реализуем программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y),\ \ y(0) = y_0,\ \ y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке [a, b], используя метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$
$$k_2 = f(t_n + h/2, y_n + h/2\, k_1),$$
$$k_3 = f(t_n + h/2, y_n + h/2\, k_2),$$
$$k_4 = f(t_n + h, y_n + h\, k_3),$$
$$y_{n+1} = y_n + h(k_1 + 2\, k_2 + 2\, k_3 + k_4)/6.$$

Проверим данную программу на тестовой задаче

$$y'_1 = -y_2 + t^2 + 6t + 1,\quad y'_2 = y_1 - 3t^2 + 3t + 1,$$

на отрезке [0, 3] с точным решением

$$y_1 = 3t^2 - t - 1 + \cos(t) + \sin(t),\ \ y_2 = t^2 + 2 - \cos(t) + \sin(t).$$

Ниже приведены графики зависимости максимальной погрешности e от шага h и зависимости e/h^4 от h, а также график зависимости e от h^4.

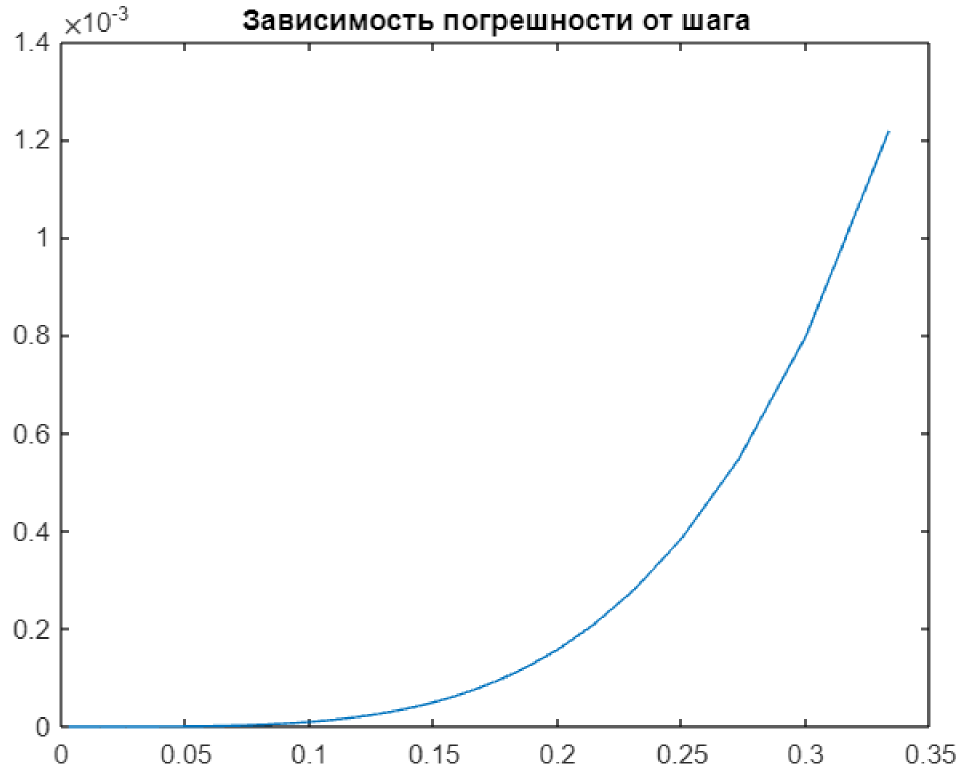


Рисунок 2. График зависимости максимальной погрешности e от шага h

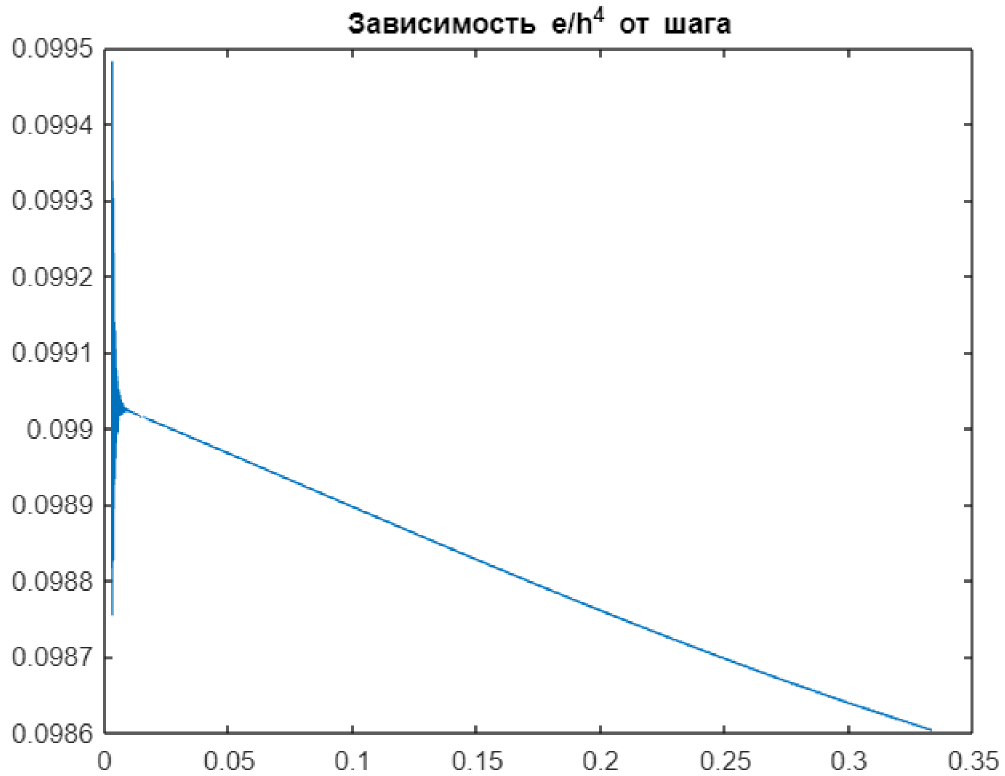


Рисунок 3. Зависимость e/h^4 от h

Из первого графика можно сделать вывод, что погрешность метода Рунге-Кутты 4-го порядка уменьшается при уменьшении шага.

Проверить, верна ли теоретическая оценка погрешности, можно при помощи отношения погрешности к шагу в 4-ой степени. Оценить степень погрешности можно, рассмотрев график зависимости log(e) от log(h).

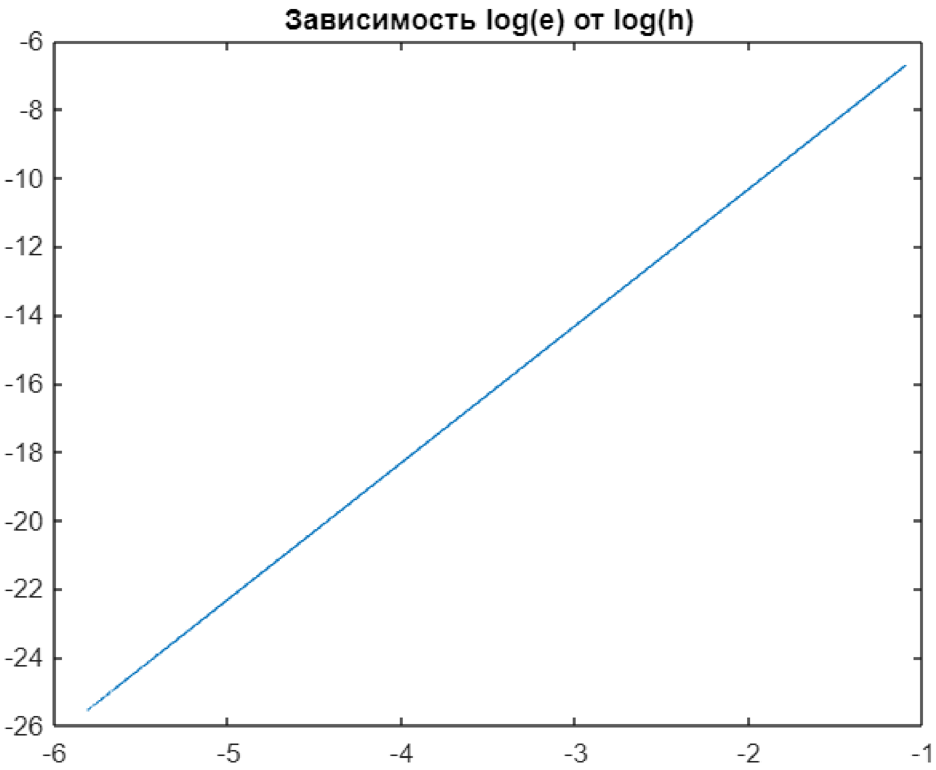


Рисунок 4. Зависимость log(e) от log(h)

Зависимость на этом графике линейная, рассмотрим таблицу, в которой при различных шагах сетки указаны погрешность, отношение погрешности к шагу в четвертой степени и тангенс наклона графика из рисунка 4.

Шаг	Погрешность	e/h^4	a
3,3333E-01	1,2173E-03	0,0986	3,9966
3,0000E-01	7,9898E-04	0,0986	3,9967
2,7273E-01	5,4589E-04	0,0987	3,9968
2,5000E-01	3,8554E-04	0,0987	3,9970
2,3077E-01	2,7998E-04	0,0987	3,9971
2,1429E-01	2,0820E-04	0,0987	3,9973
2,0000E-01	1,5802E-04	0,0988	3,9974
1,8750E-01	1,2208E-04	0,0988	3,9975
1,7647E-01	9,5810E-05	0,0988	3,9977
1,6667E-01	7,6239E-05	0,0988	3,9978
1,5789E-01	6,1419E-05	0,0988	3,9979
1,5000E-01	5,0032E-05	0,0988	3,9980
1,4286E-01	4,1165E-05	0,0988	3,9981
1,3636E-01	3,4179E-05	0,0988	3,9981
1,3043E-01	2,8614E-05	0,0989	3,9982
1,2500E-01	2,4136E-05	0,0989	3,9983
1,2000E-01	2,0502E-05	0,0989	3,9983
1,1538E-01	1,7526E-05	0,0989	3,9984
1,1111E-01	1,5071E-05	0,0989	3,9985
1,0714E-01	1,3031E-05	0,0989	3,9985
1,0345E-01	1,1325E-05	0,0989	3,9986
1,0000E-01	9,8897E-06	0,0989	3,9986
9,6774E-02	8,6745E-06	0,0989	3,9986
9,3750E-02	7,6403E-06	0,0989	3,9987
9,0909E-02	6,7557E-06	0,0989	3,9987
8,8235E-02	5,9955E-06	0,0989	3,9988
8,5714E-02	5,3393E-06	0,0989	3,9988
8,3333E-02	4,7705E-06	0,0989	3,9988
8,1081E-02	4,2754E-06	0,0989	3,9989
7,8947E-02	3,8429E-06	0,0989	3,9989
7,6923E-02	3,4638E-06	0,0989	3,9989
7,5000E-02	3,1303E-06	0,0989	3,9989
7,3171E-02	2,8360E-06	0,0989	3,9990
7,1429E-02	2,5754E-06	0,0989	3,9990
6,9767E-02	2,3441E-06	0,0989	3,9990
6,8182E-02	2,1382E-06	0,0989	3,9990
6,6667E-02	1,9545E-06	0,0989	3,9991
6,5217E-02	1,7900E-06	0,0989	3,9991
6,3830E-02	1,6425E-06	0,0989	3,9991
6,2500E-02	1,5099E-06	0,0989	3,9991
6,1224E-02	1,3903E-06	0,0990	3,9991
6,0000E-02	1,2824E-06	0,0990	3,9992
5,8824E-02	1,1848E-06	0,0990	3,9992
5,7692E-02	1,0963E-06	0,0990	3,9992

Таблица 1. Таблица погрешностей

Как видно из таблицы, при достаточно малых шагах, отношение погрешности к шагу в 4-й степени равно примерно одной и той же константе. Тангенс угла наклона прямой log(e) от log(h) примерно равен 4. Это подтверждает теоретическую оценку погрешности на тестовой задаче.

При помощи разработанной программы решим систему уравнений (1) и (2) со следующими значениями параметров

$$j_0 = 2, V_0 = 2.$$

Есть одна стационарная точка (0,0), устойчивость которой зависит от параметра η. Рассмотрим траектории в фазовом пространстве (y_1, y_2) при различных значений параметра η.

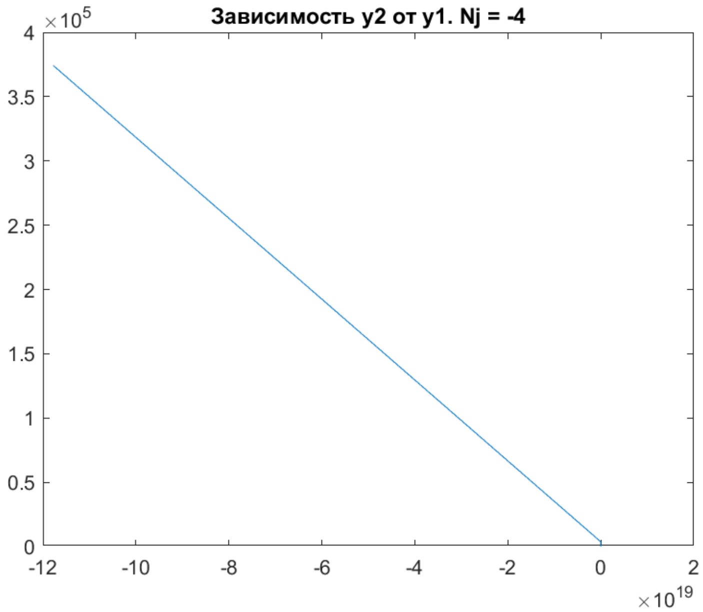


Рисунок 5. Графики зависимости (y_1, y_2) при η = -4 (η < 0)

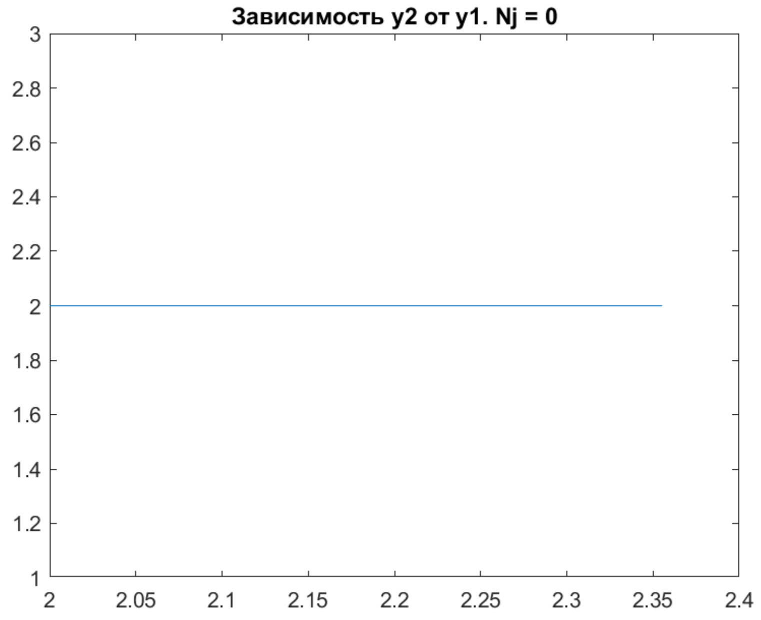


Рисунок 6. Графики зависимости (y_1, y_2) при $\eta = 0$

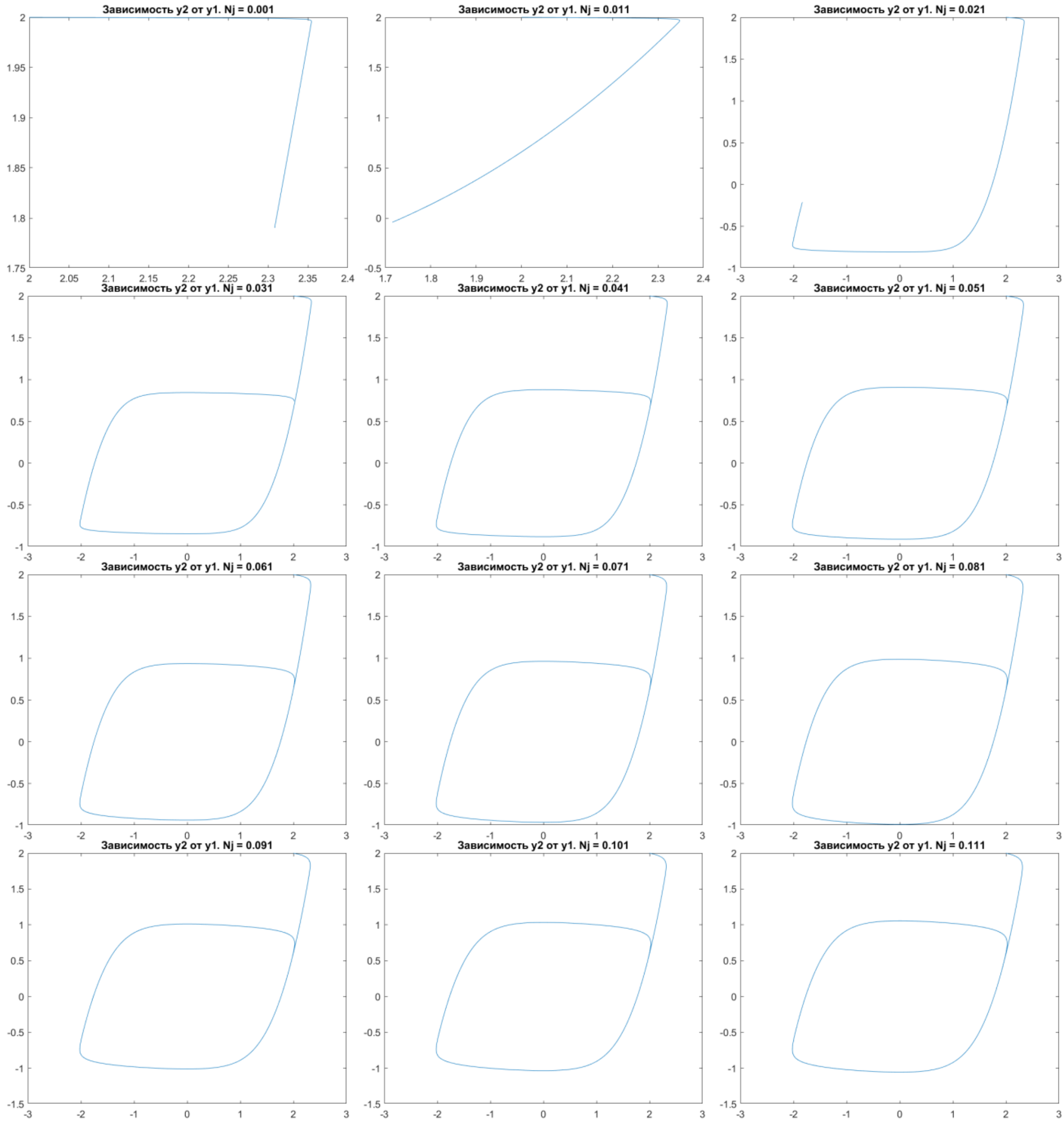
Рисунок 7. Графики зависимости (y_1, y_2) при $\eta = 4$ ($\eta > 0$)

При $\eta < 0$ стационарная точка стабильна, что означает, что любое возмущение будет уменьшаться до точки равновесия. Это подтверждает график на рисунке 5.

На рисунке 7 видно, что при $\eta > 0$ стационарная точка нестабильна, и осциллятор Ван-Дер-Поля совершает колебания с предельным циклом.

Стабильность точки равновесия изменяется при η = 0, где происходит бифуркация. Эта бифуркация знаменует переход от стабильной фиксированной точки к стабильному предельному циклу.

Рассмотрим графики зависимости (y_1, y_2), $y_1(t)$ и $y_2(t)$ для различных значений параметра η.



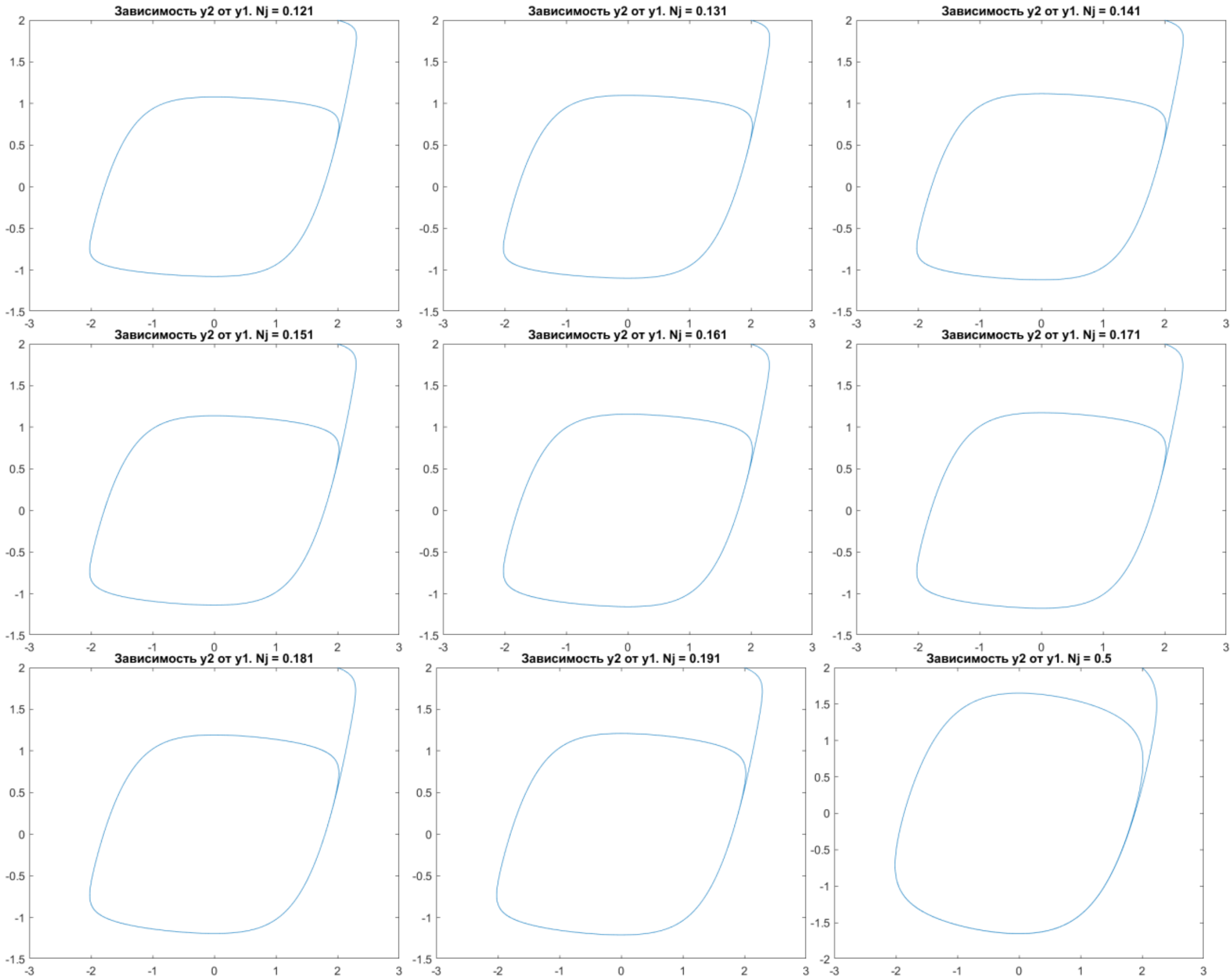


Рисунок 8. Графики зависимости (y_1, y_2) при различных значений η

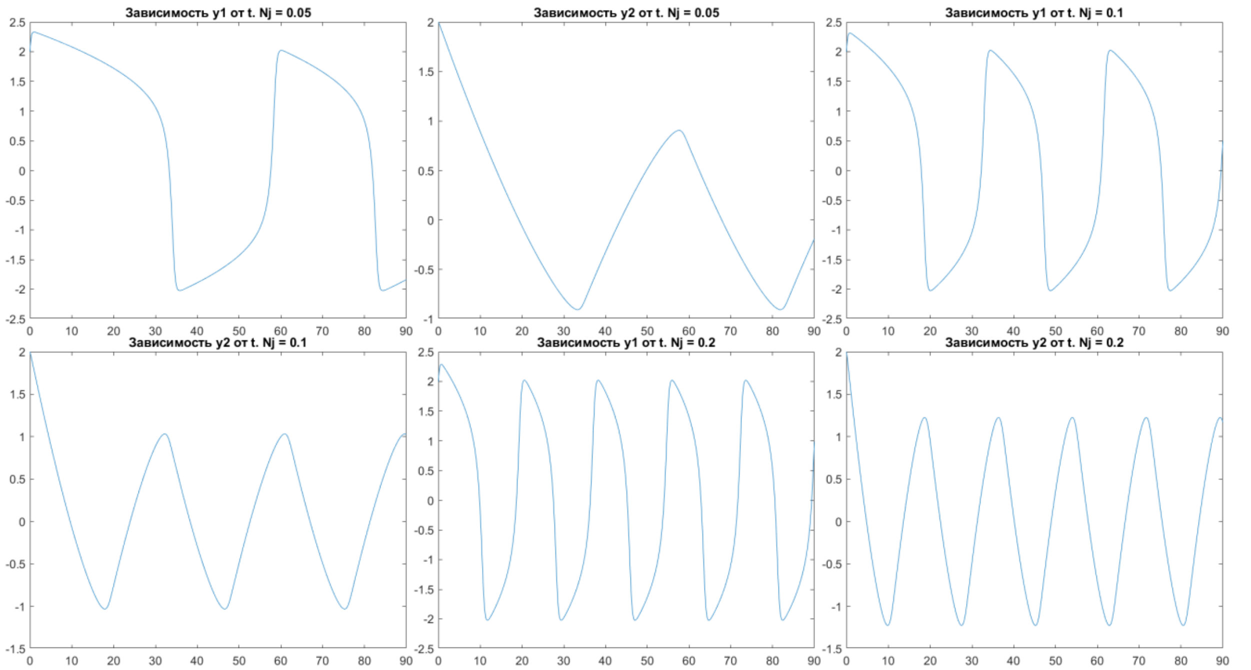


Рисунок 9. Графики зависимости $y_1(t)$ и $y_2(t)$ при различных значений η

При увеличении параметра η изменяется форма предельного цикла и частота автоколебаний. Предельный цикл появляется при параметре η = 0.041. Рассмотрим графики зависимости y_1 и y_2 от t при этом значении.

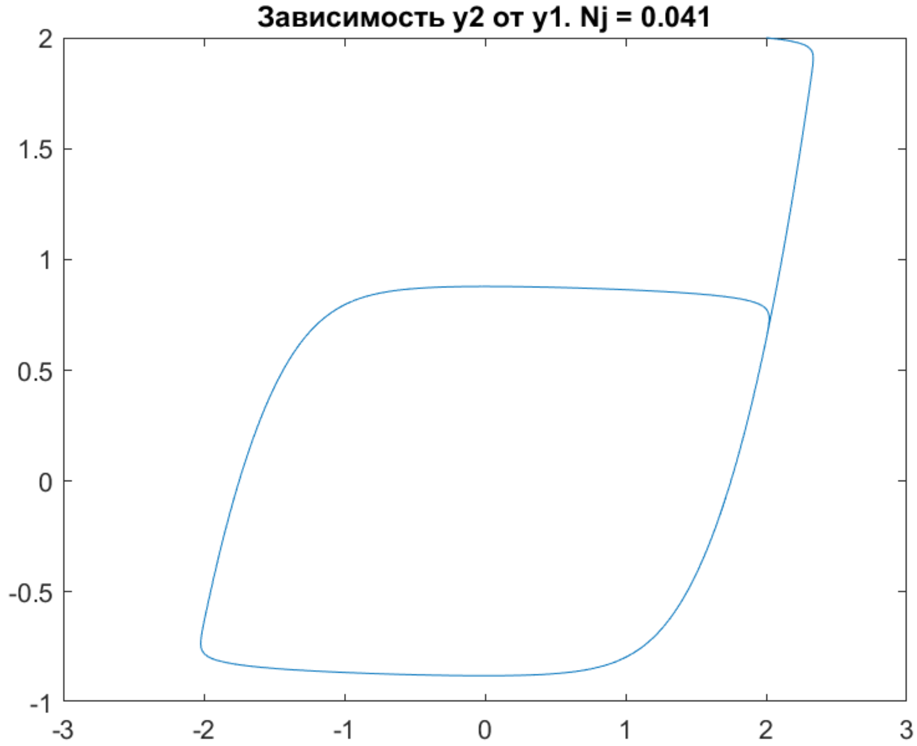


Рисунок 10. График зависимости (y_1, y_2) при η = 0.051

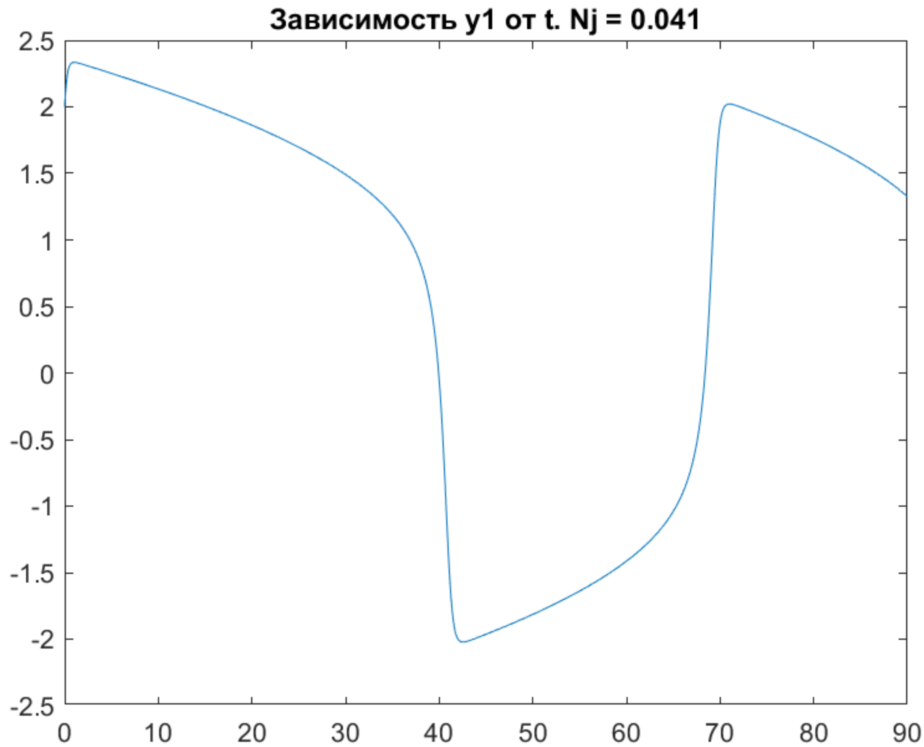


Рисунок 11. График зависимости y_1(t) при η = 0.051

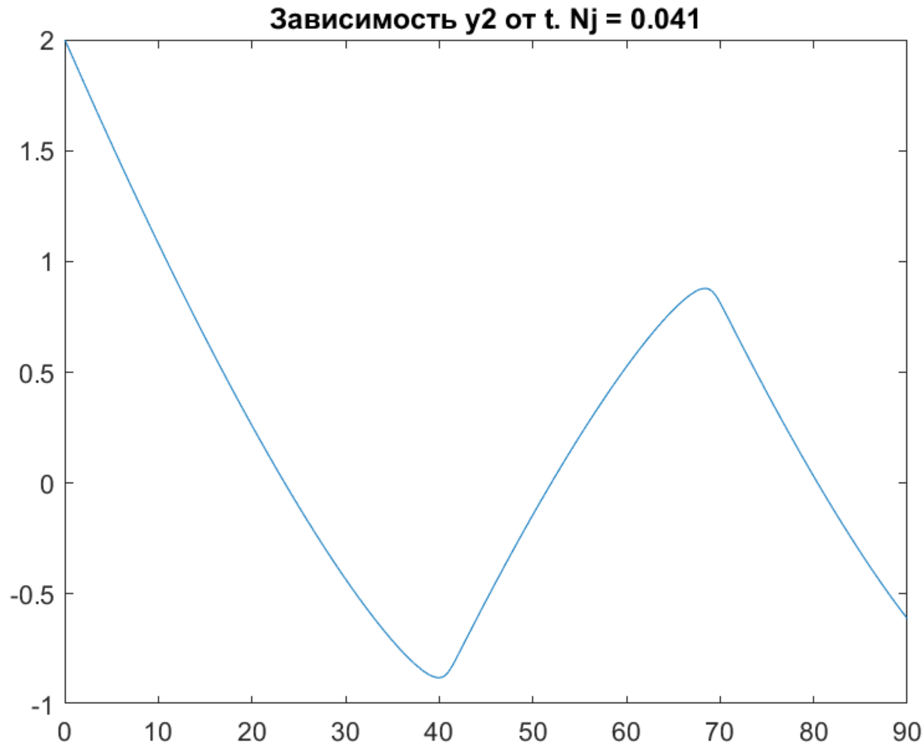


Рисунок 12. График зависимости $y_2(t)$ при $\eta = 0.051$

Из графиков можно сделать вывод, что при появлении предельного цикла в фазовой плоскости в графиках $y_1(t)$ и $y_2(t)$ появляются автоколебания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во время данной работы мы исследовали метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Оценили его погрешность на примере тестовой системы уравнений и решили систему уравнений, которая описывает соотношение между силой тока и напряжения в замкнутом LCR контуре. Численная оценка была проведена как с использование теоретического порядка точности, так и без нее. Обе оценки подтвердили, что порядок точности метода действительно $O(h^4)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. З. Даутов. Практикум по курсу численные методы. решение задачи коши для системы ОДУ.
2. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. — М.: Мир, 1991.
3. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифферен□циальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Функция f(t, y) для тестовой задачи.

```
function [dy] = f(t,y)
    y1 = -y(2) + t*t + 6*t + 1;
    y2 = y(1) - 3*t*t + 3*t + 1;
    dy = [y1,y2]';
end
```

Функция метода Рунге-Кутты 4-го порядка для тестовой задачи.

```
function [y,t,h] = rungecut(a,b,n,ys,f)
t = linspace(a,b,n);
y = ys;
h = t(2) - t(1);
for i=1:numel(t)-1
    y0 = y(:,i);
    k1 = f(t(i),y0);
    k2 = f(t(i)+h/2,y0+(h/2)*k1);
    k3 = f(t(i)+h/2,y0+(h/2)*k2);
    k4 = f(t(i)+h,y0+h*k3);
    y = [y, y0 + h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6];
end
end
```

Функция для вывода графиков для тестовой задачи.

```
close all;
clear all;
clc;
n = 10:1:1000;
h = n;
err = n;
for i=1:numel(n)
    [y,t,h(i)] = rungecut(0,3,n(i),[0,1]',@f);
    y1 = 3*t.^2 - t - 1 + cos(t) + sin(t);
    y2 = t.^2 + 2 - cos(t) + sin(t);
    yt = [y1',y2']';
    err(i) =  max(max(abs(y'-yt')));
end
disp(h(end))
o = err./(h.^4);
k = numel(err);
a = log(err(2:k)./err(1:k-1))./log(h(2:k)./h(1:k-1));
a = [a,a(k-1)];
tab = table(h',err',o',a','VariableNames',{'h','err','err/h^4','a'});
figure;
plot(h,err);
title("Зависимость погрешности от шага")
figure;
plot(h,o);
title("Зависимость e/h^4 от шага")
disp(tab);
figure;
plot(log(h),log(err));
title("Зависимость log(e) от log(h)");
```

Функция f(t, y) для задачи про реактор.

```
function [dy] = f2(t,y,nj)
y1 = y(2) - y(1)*((y(1).^2)/3-1);
```

```
y2 = -nj*y(1);
dy=[y1,y2]';
end
```

Функция метода Рунге-Кутты 4-го порядка для задачи про реактор.

```
function [y] = rungecut2(t,ys,nj)
y = ys;
h = t(2) - t(1);
for i=1:numel(t)-1
    y0 = y(:,i);
    k1 = f2(t(i),y0,nj);
    k2 = f2(t(i)+h/2,y0+(h/2)*k1,nj);
    k3 = f2(t(i)+h/2,y0+(h/2)*k2,nj);
    k4 = f2(t(i)+h,y0+h*k3,nj);
    y = [y, y0 + h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6];
end
end
```

Функция для вывода графиков для задачи про реактор.

```
clear all;
clc;
close all;
nj = 0.041;
n=10000;
ys = [2,2]';
t = linspace(0,90,n);
for i= 1:numel(nj)
    y = rungecut2(t,ys,nj(i));
    y1 = y(1,:);
    y2 = y(2,:);
    figure
    plot(t,y1);
    title(['Зависимость y1 от t. Nj = ' num2str(nj(i))])
    figure
    plot(t,y2);
    title(['Зависимость y2 от t. Nj = ' num2str(nj(i))])
    figure
    plot(y1,y2);
    title(['Зависимость y2 от y1. Nj = ' num2str(nj(i))])
end
```