

## B. 雪

定义  $n = x + y$ 。

### 算法一

考虑 01 序列的前缀和数组，发现其是优美的当且仅当前缀和数组的极差  $\leq k$ ，然后进行 dp，令  $f_{i,j,k,l}$  代表  $i$  个 0， $j$  个 1 构成的最大值  $= k$ ，最小值  $= l$  的序列个数，可以做到  $O(n^4)$ ，期望得分 20 分。

### 算法二

考虑令  $f(l, r)$  代表前缀和数组的最小值  $\geq l$ ，最大值  $\leq r$  的 01 序列个数。

考虑枚举这个序列的最小值，设其为  $i$ ，那么其最大值必须要  $\leq i + k$ ，但是我们又强制了最小值，所以要减去最小值比  $i$  大的情况，也就是  $f(i, i + k) - f(i + 1, i + k)$ 。

所以答案就是  $\sum_i f(i, i + k) - \sum_i f(i, i + k - 1)$ 。

考虑计算  $f(i, j)$ ，若令 0 代表向右走一步，1 代表向下走一步，那么 01 序列就是从  $(0, 0)$  走到  $(x, y)$  的过程。而过程中前缀和数组在  $[i, j]$  里，就相当于有一些坐标点不能走，那么直接使用一个  $O(n^2)$  的 dp 计算，总复杂度就是  $O(n^2k)$  的，期望得分 40 分。

### 算法三

注意到上述 dp 过程，只有  $O(nk)$  个点没有被禁掉，所以只需要对它们做就好了，复杂度  $O(nk^2)$ ，期望得分 60 分。

### 算法四

考虑更快的计算  $f(l, r)$ ，考虑反射容斥，也就是将目标点  $(x, y)$  沿着两条限制的线不断翻转，容斥系数就是翻转次数。由于翻转两次相当于坐标加上  $\pm k$ ，所以每次只需要计算不超过  $2n/k$  项，每一项是一个形如  $\binom{n}{x}$  的值，先预处理一行的组合数，总复杂度就是  $O(k \times n/k) = O(n)$ ，期望得分 100 分。