NOIP2021模拟赛59 题解

A. 漂亮大厨 (cook)

很显然这是一道复合题。

Sub1

维护区间加法，查询区间 $\le k$ 个数。

考虑分块，每个块维护一个加法标记，每次修改对于块进行排序。

容易通过二分来查询排序后每个块 $\le k$ 的个数，但是这样做是 $O(n\sqrt{n}\log n)$ 的，理论上来说无法通过（实际比较难卡）。

~~出题人严厉抵制在代码里开编译选项的行为。~~

1. 容易发现修改之后，一定是一部分数增加 k，一部分数不变，将这两部分归并即可完成线性排序。
2. 查询 $\le k$ 的个数，可以通过离线，排序询问，就能将二分的过程转化为维护一个指针。

   值域只有 10^7 是为了方便选手进行询问的排序。

Sub2

求 $S(n,m)=\sum\limits_{i=0}^{m}\mathrm{C}_n^i$

由 $S(n,m)=S(n,m-1)+\mathrm{C}_n^m, S(n+1,m)=2S(n,m)-\mathrm{C}_n^m$，可以用简单莫队维护。

参考。

ps: 实际上这个 sub 还有更快的方法，可以看 EI_Captain 的博客。

综上，总复杂度为 $O(n\sqrt{n})$。

B. 吃树 (eat)

结论：一个块大小 k 是合法的，当且仅当树上有 $\frac{n}{k}$ 个节点的 $size$ 是 k 的倍数。

证明如下:

定义 sz 为一个点的子树大小

我们把一个连通块深度最小的点记录为这个连通块的根，我们把所有连通块的根都拉出来建成虚树，对于虚树上的每一个点，当它的儿子 sz 的都是 k 的倍数时，因为它自己连通块的大小也是 k，所以它的 sz 也一定是 k 的倍数。而虚树的叶子 sz 的都是 k，所以可以归纳证明虚树上的每一个点的 sz 都是 k 的倍数。此时我们再把 sz 为 k 的倍数的节点拉出来建一个虚树，对于一个根节点，它 sz 的一定大于它的儿子 sz 的和，此时相对应的至少有 $k-1$ 个点不在虚树上。所以我们可以得到这个最多只有 $\frac{n}{k}$ 个节点的 sz 是 k 的倍数，而对于一个块大小为 k 的方案，需要选出 $\frac{n}{k}$ 连通块,所以最多存在一种合法方案,而且仅当树上有 $\frac{n}{k}$ 个节点的 $size$ 是 k 的倍数。

C.飞翔的胖鸟 (fly)

简洁题意：求 $f(\theta)=\frac{ah}{\sin\theta}+b\theta$ 在 $\theta\in D=(0,\frac{\pi}{2}]$ 内的最小值

这个函数看起来很特别，很求个导。

$f'(\theta) = b - \frac{ah\cos\theta}{\sin^2\theta}$

由于 $\cos\theta$ 在 D 上递减，$\sin\theta$ 在 D 上递增，容易发现 $f'(\theta)$ 在 D 上单调递增。

由此得到 $f(\theta)$ 有唯一最小值，可以三分极值点，得到 65pts。

设 $x = \cos\theta$，则极值点 $f'(\theta) = b - \frac{ahx}{1-x^2} = 0$

$b(1-x^2) = ahx \to bx^2 + ahx - b = 0$

解这个方程得到 $\cos\theta$，然后得到 θ，可以 $O(1)$ 回答询问。

出题人不会写spj，可能有人被卡精度了。

D. 漂亮轰炸 (bomb)

容易发现答案一定包含直径的某一个端点，枚举是哪一个端点，以这个端点为根，建一棵树，然后对这棵树进行长链剖分。

此时，答案一定是选择了根到达一个叶子的路径，以及 $k-1$ 对叶子，也就可以看成是选了 $2k-1$ 个叶子。

此时，我们贪心地来选择叶子，一个叶子的贡献为它与它所在链顶端的点的距离。

此时我们只需要选出贡献最大的 $2k-1$ 个叶子，容易证明一定存在使得这种贪心合法的方案。

接下来考虑必须经过首都的限制，将叶子按照贡献的从大到小排序，令 h_x 为 x 子树内叶子排名的最小值。

此时对于一个点 x，若 $h(x) \le 2k-1$，此时直接贪心的方案合法。

否则我们要把一个叶子换成 x 子树内的叶子。

假设换掉了叶子 y，

- 若 y 的顶端不是 x 的祖先，那么我们换掉它的代价就是 y 的贡献。
- 否则换掉它的代价就是 y 到 $\text{LCA}(x,y)$ 的距离。

对于第一种情况直接换掉贡献最小的叶子，对于第二种情况可以用倍增解决。