经典力学有心引力场中的理想二体环绕运动轨迹表达

济宁孔子高级中学　孙军鹏

2023 年 10 月 8 日

摘要

通过建立适当的平面直角坐标系描述质点在有心引力场中的运动情况, 从经典力学万有引力及一般曲线运动的性质出发求解动力学微分方程得出轨迹的平面极坐标表达, 并选取特定的数学方法证明特殊二体引力系统中的角动量守恒定律, 引力势能的表达, 与开普勒行星运动定律.

1　运动轨迹的推导

设一质量为 m 的质点受 $M(m \ll M)$ 的引力作用, 容易看出 m 的运动轨迹确定一个平面. 在一已知平面中可通过两个线性无关的自由度参量唯一确定某一点的位置, 如直角坐标 $\{\hat{x}, \hat{y}\}$, 极坐标$\{\rho, \theta\}$ 等. 建立平面直角坐标系 Oxy. 设 $M(0,0)$[1], $m(r\cos\theta, r\sin\theta)$. 其中 r, θ 满足函数关系 $r = r(t)$; $\theta = \theta(t)$. M 指向 m 的径矢 (或位矢) 记作 $\boldsymbol{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ($|\boldsymbol{r}|$ 记作 r, 下同).
径矢 $\boldsymbol{r}$ 满足

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{1.0.1}$$

对时间 t 求导[2], 得线速度 $\boldsymbol{v}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \tag{1.0.2}$$

再次求导, 得加速度 $\boldsymbol{a}$:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta \end{cases} \tag{1.0.3}$$

经典力学万有引力的矢量表达为:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}} = -G\frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{|r|} \tag{1.0.4}$$

1.1　角动量守恒定律

定义质点 m 的角动量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$, 对应标量式 $L = m(x\dot{y} - \dot{x}y)$. 由函数求导法则 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ 得

$$L = m \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y}{x}\right) \cdot x^2 = mr^2 \cdot \dot{\theta} \tag{1.1.1}$$

角动量 $\boldsymbol{L}$ 关于时间的变化率为力矩 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, 在有心引力场中 $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$, 因此 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$, 即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{L}$ 为一守恒量. 这就是有心力场中的**角动量守恒定律 (Law of Conservation of Angular Momentum)**.

[1] 如无特殊说明, 研究对象以其质量表示并区分.

[2] 坐标函数关于时间 t 的变化率 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ 分别记作 $\dot{x}, \ddot{x}$.

1.2 轨迹方程的求解

在 x, y 两方向上, 有

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{MG}{r^2}\cos\theta \\ \\ \ddot{y} = -\dfrac{MG}{r^2}\sin\theta \end{cases} \tag{1.2.1}$$

故 $\dfrac{\ddot{x}}{\cos\theta} = \dfrac{\ddot{y}}{\sin\theta} = -\dfrac{MG}{r^2}$. 即 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\tan\theta = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cot\theta$

$$(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})(\tan\theta + \cot\theta) = 0 \tag{1.2.2}$$

其中 $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta \not\equiv 0$, 故 $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \equiv 0$. 于是

$$-\frac{MG}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{1.2.3}$$

记 $r' = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$. 由上式 $L = mr^2 \cdot \dot{\theta}$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right) = \dfrac{L}{mr^2} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{L}{m} \cdot \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right) = \dfrac{L^2}{m^2 r^2}\left[\dfrac{r''}{r^2} - \dfrac{2(r')^2}{r^3}\right]$. $r \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \dfrac{L^2}{m^2 r^3}$, 故

$$\frac{r''}{r^2} - \frac{2(r')^2}{r^3} - \frac{1}{r} = -\frac{MG}{L^2} \cdot m^2 = -P \quad (P\text{为常数.}) \tag{1.2.4}$$

$$r'' - \frac{2(r')^2}{r} + P \cdot r^2 - r = 0$$

取 $u = r^{-1}$ 以消去二次微分项, 则 $r' = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u} \cdot u'$. 上式可化为 $-\dfrac{u''}{u^2} + \dfrac{2(u')^2}{u^3} - 2u \cdot \dfrac{(u')^2}{u^4} + \dfrac{P}{u^2} - \dfrac{1}{u} = 0$.

$$u'' + u - P = 0 \quad \text{特征方程: } r_0^2 + 1 = 0. \tag{1.2.5}$$

容易得到一组特解 (初相位为 0): $u(\theta) = q\cos\theta + P$ (q 为待定系数). $r(\theta) = \dfrac{1}{u(\theta)} = \dfrac{1}{P + q\cos\theta}$.

$$r(\theta) = \frac{P^{-1}}{1 + \dfrac{q}{P}\cos\theta} = \frac{L^2}{MG \cdot m^2} \cdot \frac{1}{1 + e\cos\theta} \triangleq \frac{p}{1 + e\cos\theta}{}^{3} \tag{1.2.6}$$

此为圆锥曲线的平面极坐标方程.

设 $\theta = 0$ 时 $r = R$; $L = mv_0 R$. 则解得 $q = \dfrac{v_0^2 R - MG}{v_0^2 R^2}$, $e = \dfrac{v_0^2 R}{MG} - 1$. 存在以下情况:

1) $v_0 = \sqrt{\dfrac{MG}{R}}$ 时, 离心率 $e = 0$, 轨迹为正圆 (**第一宇宙速度**);

2) $v_0 \in (\sqrt{\dfrac{MG}{R}}, \sqrt{\dfrac{2MG}{R}})$ 时, 离心率 $e \in (0, 1)$, 轨迹为长轴在 x 轴上的椭圆 (**开普勒第一定律**);

3) $v_0 = \sqrt{\dfrac{2MG}{R}}$ 时, 离心率 $e = 1$, 轨迹为对称轴为 x 轴的抛物线 (**第二宇宙速度**);

4) $v_0 > \sqrt{\dfrac{2MG}{R}}$ 时, 离心率 $e \in (1, +\infty)$, 轨迹为实轴在 x 轴上的双曲线的一支 (左支).

---

[3] p, e 分别称作半通径 (离心率与焦准距的乘积) 和离心率 (偏心率).

2 引力势能的表达

设 m 在 M 的引力作用下由 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 处被移送到 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1$ 处, 引力 (保守力) 做功为

$$W=-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} G\frac{Mm}{r^3}\cdot\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=G\frac{Mm}{r}\Big|_{r_0}^{r_1}=G\frac{Mm}{r_1}-G\frac{Mm}{r_0} \tag{2.0.1}$$

定义位置函数**引力势能** E_p 使 $W=-\Delta E_\mathrm{p}$. 选取无穷远处为零势能点, 即 $\lim\limits_{r\to\infty}E_\mathrm{p}(r)=0$, 由上式得

$$E_\mathrm{p}(r)=-G\frac{Mm}{r} \tag{2.0.2}$$

特别地, 若 m 可脱离 M 的引力影响, 即 v_0 达到逃逸速度, 则由系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{Mm}{R}=0\Rightarrow v_0=\sqrt{\frac{2MG}{R}} \tag{2.0.3}$$

这与 1.2 中求得的第二宇宙速度一致.

3 开普勒行星运动定律的数学证明

开普勒第一定律 (Kepler's First Law) 的证明见 1.2 节.

3.1 开普勒第二定律

由角动量守恒定律 m 线速度在与 $\boldsymbol{r}$ 垂直方向上的分量 $v_\varphi=\dfrac{L}{mr}=\dfrac{v_0R}{r}$, 选取时间元 $t\to r+\mathrm{d}t$, 在 $\mathrm{d}t$ 时间内位移大小为 $\mathrm{d}l=v_\varphi\,\mathrm{d}t$, 径矢 $\boldsymbol{r}$ 扫过的面积 $\mathrm{d}S=\dfrac{1}{2}r\cdot\mathrm{d}l$. 故掠面速度 $u_S=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}v_0R$. 对固定的初值条件而言, 这是一个定值. 即**在一定的时间 Δt 内, 径矢扫过的面积 ΔS 相等 (开普勒第二定律,Kepler's Second Law)**. 通过

$$u_S=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta}{\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{r^2}{v_0R}\,\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{2}v_0R \tag{3.1.1}$$

也可得到相同的结论.

3.2 开普勒第三定律

$v_0\in(\sqrt{\dfrac{MG}{R}},\sqrt{\dfrac{2MG}{R}})$ 时, 运动轨迹为椭圆, 相应的平面直角坐标轨迹方程为

$$\frac{(x+c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0,a^2=b^2+c^2). \tag{3.2.1}$$

离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{v_0^2R}{MG}-1$, $a=R+c$, $b^2=a^2-c^2=R^2+2cR$. 据此或根据角动量守恒和机械能守恒联立得到的 $v_0=\sqrt{\dfrac{MG}{a}}\cdot\dfrac{a+c}{b}$ 可求得:

$$\begin{cases} a=R\cdot\dfrac{MG}{2MG-v_0^2R} \\[2ex] b=R\cdot\sqrt{\dfrac{v_0^2R}{2MG-v_0^2R}} \\[2ex] c=R\cdot\dfrac{v_0^2R-MG}{2MG-v_0^2R} \end{cases} \tag{3.2.2}$$

周期 $T=\dfrac{S}{u_S}=\dfrac{2\pi ab}{v_0R}$, $T^2=\dfrac{4\pi^2(MG)^2R^3}{(2MG-v_0^2R)^3}$, $a^3=R^3\cdot\dfrac{(MG)^3}{(2MG-v_0^2R)^3}$, 于是

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{MG}{4\pi^2} \tag{3.2.3}$$

对环绕同一天体运动的不同质点 (忽略彼此间引力和其它影响), 它们具有相同的 $\dfrac{a^3}{T^2}$. 这就是**开普勒第三定律 (Kepler's Third Law)**.

参考文献

[1] AMZG. 平面内的万有引力模型 [R/OL]. (2020-8-3)[2023-10-14]. https://zhuanlan.zhihu.com/p/166216476.

[2] SengWong. 二体问题 [R/OL]. (2020-8-24)[2023-10-14]. https://zhuanlan.zhihu.com/p/193107193.