解析几何视角下二次曲线的代数结构对称性

(以有心圆锥曲线为例)

孙军鹏

2023 年 12 月 19 日

摘要—**二次曲线中常见一些定值定点问题, 在射影几何中表现为对合变换及结合性不变原理. 解析几何的复杂运算隐去了这些深层性质, 这并不影响其中一些精巧代数结构. 我们将从解析几何中椭圆和双曲线的标准方程出发, 研究目标函数表达式中对称性的转化和应用, 进而归纳得到一种普适的一般性圆锥曲线代数结构问题的求解思路.**

I. 问题引入及对称性结构初探

A. 常规二次曲线与直线的轨迹方程联立

考虑中心在坐标原点的椭圆, 圆和双曲线. 在平面直角坐标系中, 其代数轨迹方程可表示为:

$$\mathit{\Gamma} : Ax^2 + By^2 = 1\,(A^2 + B^2 \neq 0) \tag{1.A.1}$$

其中 A, B 不全小于零. 引入直线 $l : y = kx + m$. 有

$$(A + Bk^2)x^2 + 2mkBx + m^2B - 1 = 0 \tag{1.A.2}$$

判别式 $\mathit{\Delta} = 4Bk^2 - 4ABm^2 + 4A$. 注意到其存在次数反称结构. 对交点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.由韦达定理, 有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2mkB}{A + Bk^2}, \quad x_1x_2 = \dfrac{m^2B - 1}{A + Bk^2}. \\ y_1 + y_2 = \dfrac{2mA}{A + Bk^2}, \qquad y_1y_2 = \dfrac{m^2A - k^2}{A + Bk^2}. \end{cases} \tag{1.A.3}$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\mathit{\Delta}}}{|A + Bk^2|} = \frac{2\sqrt{Bk^2 - ABm^2 + A}}{|A + Bk^2|} \tag{1.A.4}$$

上述各式为解决常规圆锥曲线问题的基础.

B. 对称关系的引入

在 2023 年高考数学新课标 II 卷解答题第 21 题[1][2]中, 存在下述问题(有删改):

已知双曲线 $C : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$. 记其左, 右焦点分别为 A_1, A_2. 过点 $(-4, 0)$ 的直线与 C 的左支交于 M, N 两点, M 在第二象限, 直线 MA_1 与 NA_2 交于点 P, 证明: 点 P 在定直线上.

济宁孔子高级中学, 山东. 272000. (参考 IEEE Trans 期刊格式排版).

我们知道, 此类题目可通过椭圆的周角定理(第三定义)与齐次化因式的方法解决. 但对于常规直曲联立可作如下处理(考试院提供的解法 2)[2]:

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 当直线 MN 的斜率存在时, 设其方程为 $MN : y = m(x + 4) \quad (|m| \neq 2)$. 由 $\begin{cases} y = m(x+4), \\ 4x^2 - y^2 - 16 = 0 \end{cases}$ 得 $(4 - m^2)x^2 - 8m^2x - (16m^2 + 16) = 0$. 所以 $x_1 + x_2 = \dfrac{8m^2}{4 - m^2}, x_1x_2 = \dfrac{16(m^2+1)}{m^2 - 4}$. $MA_1 : y = \dfrac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), NA_2 : y = \dfrac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$, 联立方程解得

$$x = \frac{2\left(y_1x_2 + y_2x_1 - 2y_1 + 2y_2\right)}{-y_1x_2 + y_2x_1 + 2y_1 + 2y_2} \tag{1.B.1}$$

因为

$$\begin{aligned} &2\left(y_1x_2 + y_2x_1 - 2y_1 + 2y_2\right) + \left(-y_1x_2 + y_2x_1 + 2y_1 + 2y_2\right) \\ &= 2m(2x_1x_2 + 5x_1 + 5x_2 + 8) \\ &= 2m\left(\frac{-8m^2 + 32}{m^2 - 4} + 8\right) = 0 \end{aligned} \tag{1.B.2}$$

当 MN 的斜率不存在时, 直线$MN : x = -4$, $M(-4, 4\sqrt{3}), N(-4, -4\sqrt{3})$.

$MA_1 : y = -2\sqrt{3}\,(x + 2)\,, NA_2 : y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,(x - 2)$, 联立方程解得 $P(-1, -2\sqrt{3})$. 故点 P 在定直线 $x = -1$ 上.

在上述解法中 (1.B.1) 式以传统观点来看显然是一个**非对称结构**的表达式. 因为它可化为下式 $m \neq 0$:

$$x = \frac{2\left(x_1x_2 + x_1 + 3x_2\right)}{3x_1 - x_2 + 16} \tag{1.B.3}$$

其中 x_1, x_2 不可相互替换. 但我们注意到解答中的特殊处理方法,即**分子分母相加**, 并证明相加后的式子的值恒为 0, 此时就有原式恒等于 -1. 至于这样做的原因, 我们发现引起结构非对称的项主要是 x_1, x_2. 对应系数分别有 $x_1 : +2, +3$. $x_2 : +6, -1$. 分别求和得到全系数分别为 $+5, +5$. 系数的结构使得它神奇地呈现出对称性. 于是, 传统的整式对称性就被推广到了**分式对称性**. 可以想象对乘除不一的表达式我们也可通过使其求积或作商达到**“对称化”**的目的. 这与先前的观点是不同的.

C. 系数配凑

以下题为例.

已知 F_1,F_2 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左, 右焦点. A,B 为左, 右顶点, 过点 F_2 作直线 l 与椭圆交于 P,Q 两点(不与点 A,B 重合), 记 AP,BQ 的斜率分别为 k_1,k_2, 证明: $\dfrac{k_1}{k_2}$ 为定值.

这道题目同前面提到的题目如出一辙, 本质上都是斜率比为定值的极点极线问题. 我们按上述的**"对称化"**思想求解:

$A(-2,0),B(2,0)$. 设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$.
则 $k_1=\dfrac{y_1}{x_1+2},k_2=\dfrac{y_2}{x_2-2}.\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}$. 设 $PQ:x=my+1$. 于是

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2} \tag{1.C.1}$$

上下并不满足对称性要求. 考虑作如下配凑:

$$-\frac{3k_1}{k_2}=\frac{-3my_1y_2+3y_1}{my_1y_2+3y_2}\triangleq\frac{p}{q} \tag{1.C.2}$$

这使得 (1.C.2) 式具有了**系数和相等**的特点. 上下相加, 得 $p+q=-2my_1y_2+3(y_1+y_2)$. 而 P,Q 两点满足 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$. 其中 $3(y_1+y_2)=-\dfrac{18m}{3m^2+4},-2my_1y_2=\dfrac{18m}{3m^2+4}$. 即 $p+q=0\Rightarrow\dfrac{p}{q}=-1.\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{1}{3}$ 是定值. 证讫.

由 (1.C.1) 式观察可作下述优化: 设 $PQ:x=my+1.k_1=\dfrac{y_1}{x_1+2},k_2=\dfrac{y_2}{x_2-2}$.

$$\begin{aligned}3k_1-k_2&=\frac{3x_2y_1-x_1y_2-6y_1-2y}{x_1x_2+2(x_2-x_1)-4}\\&=\frac{2my_1y_2-3(y_1+y_2)}{x_1x_2+2(x_2-x_1)-4}\end{aligned} \tag{1.C.3}$$

分子神奇地出现了对称性. 代入 y_1y_2,y_1+y_2 解得 $3k_1-k_2=\dfrac{0}{(x_1+2)(x_2-2)}=0$. 于是自然地, $\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{1}{3}$.

特定的值总是伴随着对称性出现. 为了说明这种方法的普适性, 继续来看下一问题:

已知 $C:x^2-y^2=1$. 点 A 是 C 上一定点, 过点 $B(0,1)$ 的动直线与双曲线 C 交于 P,Q 两点, 若 $k_{AP}+k_{AQ}$ 为定值 λ, 求: 点 A 的坐标及实数 λ 的值.

下面提供两种思路:

1) 设动直线的方程为 $l:y=kx+1$. (斜率存在). $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),A(x_0,y_0)$. P,Q 满足 $(k^2-1)x^2+2kx+2=0.\Delta=8-4k^2$.

$$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{2k}{1-k^2}, & x_1x_2=\dfrac{2}{k^2-1}\\ k_{AP}=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0} & k_{AQ}=\dfrac{y_2-y_0}{x_2-x_0}\end{cases} \tag{1.C.4}$$

$$k_{AP}+k_{AQ}=\frac{x_1y_2+x_2y_1-x_0(y_1+y_2)-y_0(x_1+x_2)+2x_0y_0}{x_1x_2-x_0(x_1+x_2)+x_0^2} \tag{1.C.5}$$

$$y_1+y_2=\frac{2k}{1-k^2},y_1y_2=1,x_1y_2+x_2y_1=\frac{2k}{k^2-1} \tag{1.C.6}$$

故 $\lambda=\dfrac{2k(y_0+1)+2x_0y_0(k^2-1)+2x_0}{2kx_0+x_0^2(k^2-1)+2}$. **为了消去其中一个较复杂的项**, 作如下变换: $-\dfrac{x_0\cdot\lambda}{y_0+1}=$

$$\frac{2kx_0(y_0+1)+2x_0^2y_0(k^2-1)+2x_0^2}{-2kx_0(y_0+1)-x_0^2(y_0+1)(k^2-1)-2(y_0+1)}$$

$\triangleq\dfrac{p}{q},p+q=x_0^2(k^2-1)(y_0-1)+2(x_0^2-y_0-1)$. 其中 $x_0^2-1=y_0^2$. $p+q=[x_0^2(k^2-1)+2y_0](y_0-1)$. 当 $y_0=1$ 时. $p+q\equiv0$. 此时 $-\dfrac{x_0\lambda}{y_0+1}=-1$. $\lambda=\dfrac{y_0+1}{x_0}.A(\pm\sqrt{2},1).\lambda=\pm\sqrt{2}$.

2) **(齐次化因式)**设动直线 $l:A(x-x_0)+B(y-y_0)=1$. 双曲线方程化为 $C:(2By_0+1)(y-y_0)^2+(2Ay_0-2Bx_0)(x-x_0)(y-y_0)+(-2Ax_0-1)(x-x_0)^2=0$. 同除 $(x-x_0)^2$, 得

$$(2By_0+1)k^2+(2Ay_0-2Bx_0)k+(-2Ax_0-1)=0 \tag{1.C.7}$$

$\lambda=\dfrac{2Bx_0-2Ay_0}{2By_0+1}$. 将 $(0,1)$ 代入 l. $A=\dfrac{B-By_0-1}{x_0}$.

于是 $\lambda=\dfrac{2B(x_0^2+y_0^2-y_0)+2y_0}{2Bx_0y_0+x_0}$. 配凑式为 $-\dfrac{x_0y_0}{x_0^2+y_0^2-y_0}$. $-\dfrac{x_0y_0}{x_0^2+y_0^2-y_0}\cdot\lambda=$

$$\frac{2Bx_0y_0(x_0^2+y_0^2-y_0)+2x_0y_0^2}{-2Bx_0y_0(x_0^2+y_0^2-y_0)-x_0(x_0^2+y_0^2-y_0)}\triangleq\frac{p}{q} \tag{1.C.8}$$

$p+q=x_0(y^2-x_0^2+y_0)=x_0(y_0-1)$. $y_0=1$ 时, $p+q=0$. $\lambda=\dfrac{x_0^2+y_0^2-y_0}{x_0y_0}=x_0$. 此时 $A(\pm\sqrt{2},1)$. $\lambda=\pm\sqrt{2}$.

在上面的两种解法中, 对于难以直接处理的式子我们做了两个工作: **消除复杂项，解除未知量的约束**(特见于方法 2).

II. 对称化思想与定值的存在性

A. 规律探寻

在前面的运算中可归纳出一个结论, 即**存在定值必能出现对称式为定值**. 关于对称式是否能得出定值, 参见下例(摘自 2020 年新高考 I 卷)[3]:

已知 $E:\dfrac{x^2}{9}+y^2=1, P$ 为直线 $x=6$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C, PB 与 E 的另一交点为 D. 证明: 直线 CD 过定点.

显然这是让我们证明 $k_{BP}=3k_{AP}$, 只是没有固定(显性)定点. 设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2).k_{AP}=\dfrac{y_1}{x_1+3},k_{BP}=\dfrac{y_2}{x_2-3}.CD:x=my+t$.

$$\begin{aligned}k_{BP}-3k_{AP}&=\frac{x_1y_2-3x_2y_1+9y_1+3y_2}{(x_1+3)(x_2-3)}\\&=\frac{-2my_1y_2+(9-3t)y_1+(t+3)y_2}{(x_1+3)(x_2-3)}\end{aligned}$$

不妨猜测 $9-3t=t+3$. 此时 $t=\dfrac{3}{2}$. 原式 $=\dfrac{9(y_1+y_2)-4my_1y_2}{2(x_1+3)(x_2-3)}$. C,D 满足 $(m^2+9)y^2+2mty+(t^2-9)=0$. 解得 $9(y_1+y_2)=-\dfrac{18mt}{m^2+9}=-\dfrac{27m}{m^2+9}$. $-4my_1y_2=\dfrac{-4mt^2+36}{m^2+9}=\dfrac{27m}{m^2+9}$. $k_{BP}-3k_{AP}=0$ 成立. 故 $t=\dfrac{3}{2}$ 假设成立.

在这一例中对称性推出定值可行. 我们猜测这其中含有某一隐含规律[1].

B. 存在定值对表达式结构的要求

在前面的所有例子中我们都**对表达式整体或构造出的单个分子进行处理, 并使得处理后得到的对称式值恒为** 0. 对一般情况讨论.

任意一个隐含定值的圆锥曲线问题都可通过适当的变形化为如下形式:

$$r=\mu x_1x_2+\nu x_1+\tau x_2+\sigma|x_1-x_2| \tag{2.B.1}$$

我们不讨论含项 $|x_1-x_2|$ 的情况, 结合 1.A 节内容, 上式可化为

$$r=\frac{1}{A+Bk^2}\left[\mu(m^2B-1)+\nu\left(-mkB+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)+\tau\left(-mkB-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)\right] \tag{2.B.2}$$

考虑根式下的代数式非齐次, 且要使 $r=0$, 我们的猜想显然成立.

[1]这和射影几何有关, 由于笔者水平有限, 这里不作展开.

参考文献

[1] 教育部教育考试院. 2023 年普通高等学校招生全国统一考试(新课标 II 卷). 数学[Z]. (2023-6-7)[2023-12-19].

[2] 教育部教育考试院. 高考试题分析: 2024 年版. 数学[M]. 北京: 语文出版社, 2023.8. 225-227.

[3] 教育部教育考试院. 2020 年普通高等学校招生全国统一考试(新高考 I 卷). 数学[Z]. (2020-6-7)[2023-12-19].