快速傅里叶变换说明文档

姚洋 1801213719

原理说明

离散傅里叶变换(DFT)及其反变换(IDFT)的核心公式如下：

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

由于二维傅里叶变换具有可分性，可以通过先后计算行和列的一维变换来分解，因此只讨论一维快速傅里叶变换的情况。

根据教材和课件，可以将某一点的傅里叶变换值分解为如下公式：

$$F(u)=F_{even}(u)+F_{odd}(u)W_{2K}^{u}$$

$$F(u+K)=F_{even}(u)-F_{odd}(u)W_{2K}^{u}$$

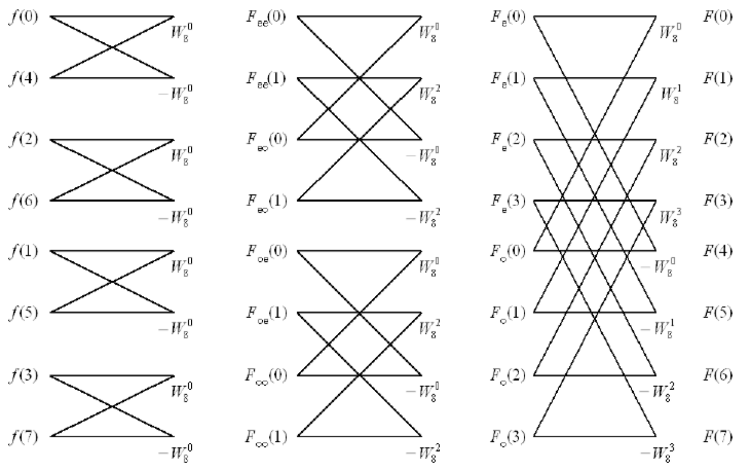
其中：

$$F_{even}(u)=\sum_{x=0}^{K-1}f(2x)W_{K}^{ux}$$

$$F_{odd}(u)=\sum_{x=0}^{K-1}f(2x+1)W_{K}^{ux}$$

$$W_M=e^{-j2\pi/M}$$

因此，可以通过计算两个单点的 DFT，来计算两个点的 DFT；通过计算两个双点的 DFT，来计算四个点的 DFT。以 8 个点的 DFT 为例，FFT 的过程可以展开为一个“蝶型算法”：



“蝶型算法”的输入顺序可以通过“码位倒序”的方法来确定，即将输入位置 0,1,2…N-1 的二进制码反转，再输出成整数，能得到正确的输入顺序。

IFFT 的过程与 FFT 类似，只是计算的 W 需要做修改。

结果分析

实验中，除了作业要求的 fft.tfi 图片外，另外选择了 20 张包括灰度和彩色的图片。使用作业实现的 fft 与 ifft 算法对灰度图和彩色图片的每个通道进行处理，得到输入图片的傅里叶变换结果和傅里叶反变换结果，下面选择几张图片展示并分析，完整的实验结果可以查看作业目录下的 data 目录。

从左至右分别表示：输入图片、傅里叶变换结果、傅里叶反变换结果。彩色图片的傅里叶变换结果为每个通道的变换结果的叠加。

图 1

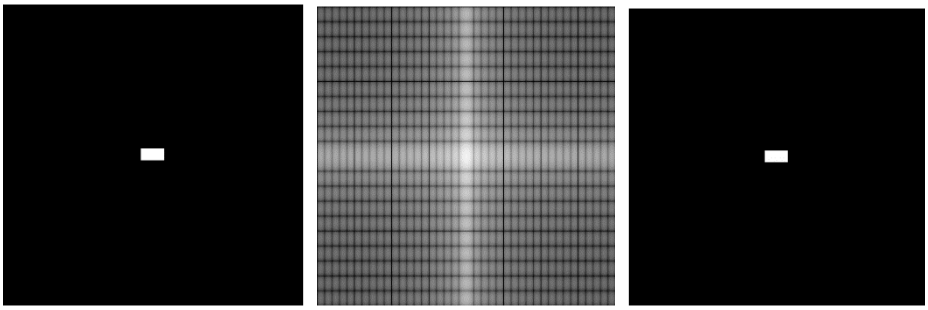


图 2

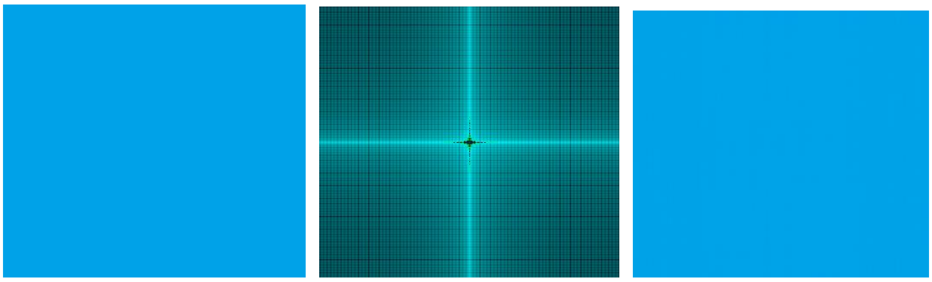


图 3

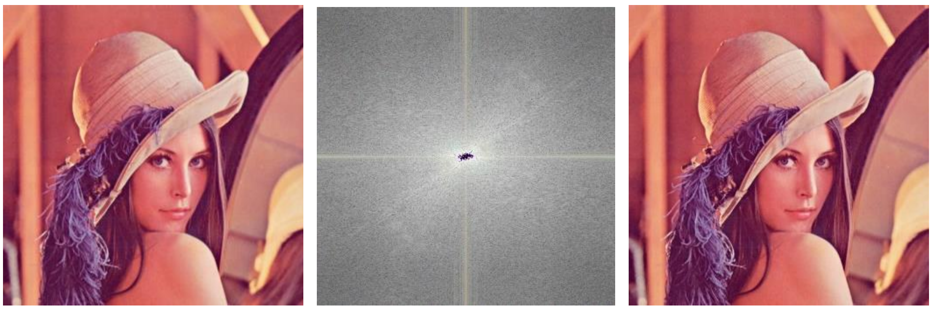
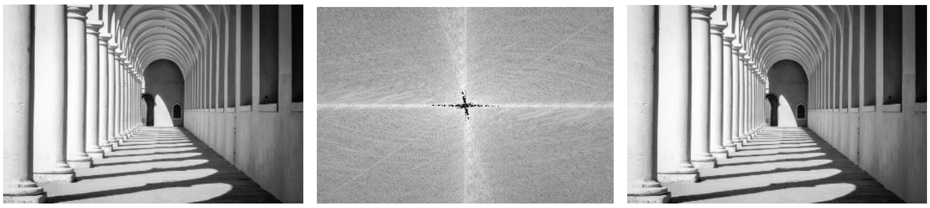


图 4



从实验结果来看，作业实现的 fft 和 ifft 能够正确的计算出输入图片的傅里叶变换结果，也能对傅里叶变换的结果进行反变换，得到和输入图片一致的图片。

可以看到平移后的傅里叶变换的图片是中心对称的。

对于图 1 和图 2，可以看到由于图像整体颜色比较一致，所以 fft 结果的高频分量能量不大，低频的能量比较大。对于图 3 和图 4 而言，由于图片中色彩变换大，边缘较多，导致 fft 结果的高频能量分布较图 1 和图 2 而言多了一些，这也符合 fft 的频率意义。

对于图 1 和图 4，可以看到 fft 结果数值的变化方向和原图的色彩变换方向是有一定关联的。