**Метод решения сеточных уравнений**

**(Чистяков Александр Евгеньевич)**

**1 Модельная задача: уравнение Пуассона**

Уравнение Пуассона – эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных, которое описывает поле давления (или поле потенциала скорости в гидродинамике) и имеет вид (1):

 (1)

где  – оператор Лапласа, или лапласиан, а  – известная вещественная функция.

В трехмерной декартовой системе координат уравнение (1) имеет вид (2):

 (2)

Введем равномерную расчетную сетку.



,

где  – шаг по времени, ,   – шаги по пространству,  – количество временных слоев,  – верхняя граница по времени, ,   – количество узлов по пространству, ,   – границы по пространству.

Заменим частные производные второго порядка по трем координатам их конечными разностями, введем новое слагаемое для регуляризации  и получим систему линейных алгебраических уравнений, состоящую из уравнений вида (3):

 (3)

Вычисление поля давлений сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида (3).

**2 Пример решения СЛАУ**

Рассмотрим СЛАУ, состоящую из двух уравнений (4):

 (4)

Для каждой итерации  система (4) примет вид:

 (5)

Выполним преобразования системы (5):



В результате получим (6):

 (6)

где  – диагональная часть матрицы ;

 – вектор решения;

 – вектор правой части;

 – матрица коэффициентов.

**3 Метод решения сеточных уравнений (МРСУ)**

Матричную форму СЛАУ запишем в виде (7):

 (7)

где  – линейный, положительно определенный оператор .

*Линейный оператор .*

*Пусть  и  – линейные пространства над полем . Отображение  называется линейным оператором, если :*

*1)* **

*2)* **

*Положительно определенный оператор .*

*Это эрмитова (или самосопряженная) матрица, элементами которой, в нашем случае, являются вещественные числа. Для данной матрицы выполняется равенство: *

Представим матрицу ** следующим образом (8):

 (8)

где  – диагональная квадратная матрица,  – некоторый коэффициент;

 – квадратная матрица;

 – блочно-диагональная (квазидиагональная) квадратная матрица (все блоки, кроме расположенных на главной диагонали, являются нулевыми);

 – блочно-диагональная (квазидиагональная) квадратная матрица;

 – квадратная трехдиагональная матрица, содержащая коэффициенты сеточных уравнений для слагаемых, описывающих конечные разности для частных производных второго порядка по всем осям;

 – вид матрицы для граничных условий 1-го рода;

 – вид матрицы для граничных условий 2-го и 3-го рода;

.

 – символ, обозначающий произведение Кронекера.  
(<https://ru.wikipedia.org/wiki/Произведение_Кронекера> ).

Для нахождения решения задачи (7) будем использовать неявный итерационный процесс:

 (9)

(Для метода Якоби ).

В уравнении (9)  – номер итерации,  – итерационный параметр,  – предобуславливатель, обращение которого в (9) должно быть существенно проще, чем непосредственное обращение исходного оператора  в (7).

Выполним некоторые преобразования:











На каждой итерации полученное решение  будет отличаться от точного решения  на величину погрешности 







Т.к. , то



Введем замену переменных , в результате получим:



Умножим обе части последнего выражения на :





Введем замену переменных , в результате получим (10):

 (10)

???Условие сходимости процесса:

 (11)

где  – показатель сходимости итерационного метода.

Выполним некоторые преобразования:











Обозначим . Тогда



Следовательно,







, если , то .

Возьмем

 (12)

Учитывая, что , , , сочетательное свойство скалярного произведения, оценим



Согласно выражениям (8), (12):



Знаменатель  неизвестен.

Оценим



т.к.  имеет большие значения (Почему???).

**4 Расчет параметра**  **методом скорейшего спуска**

Найдем экстремум функции (минимум) методом скорейшего спуска:



Учитывая, что ,  – невязка, свойства дистрибутивности и коммутативности скалярного произведения, получим:



В результате преобразований получен квадратный трехчлен , у которого коэффициент, стоящий при старшей степени положительный. Следовательно, т.к. график указанной квадратичной функции – парабола с ветками, направленными вверх, то минимальное значение достигается в вершине параболы. Значит

 (13)

Учитывая (13), получим:



Введем замену  – поправка, тогда:



???



**4 Неравенство Канторовича (для оценки метода сходимости наискорейшего спуска?)???**





Учитывая, что , получим:





**5 Алгоритм расчета**



 – диагональное преобладание.

Алгоритм для решения сеточных уравнений вида :

1. Вычисляем вектор невязки .
2. Вычисляем поправку : , где  находится из СЛАУ .

.

1. Вычисляем 
2. Переход на следующую итерацию:.

Видео-2

количеству итераций для сходимости



1. Уравнение Пуассона 

Zn+1

Zn

1. Распишем уравнение Пуассона через коэффициенты частичной заполненности:

,

где  для матриц размерностью .

1. ,  – положительно-определенный оператор

,

,

,



Нужно знать спектр ? Что это значит?

Рассмотрим 3 случая граничных условий:

1. Граничные условия 1-го рода, матрица  имеет вид:



г. у. 1-го рода

Граничные условия расширены на 1 слой

1. Граничные условия 2-го рода, матрица  имеет вид:



г. у. 2-го рода

Поверхность и заданные условия совпадают с расчётной областью.

1. Граничные условия 3-го рода, матрица  имеет вид:



г. у. 3-го рода

потоки

Есть еще потоки (движение) на границе?

1. ,

где  – собственный вектор,  – собственное число матрицы ???

1. , если ,  – собственные вектора, то можно использовать свойство:

, т.е. .

1. Рассмотрим 1 случай – граничные условия 1-го рода. Тогда собственный вектор

.

Возьмем вторую строку матрицы ??? и умножим на её коэффициенты собственный вектор , получим:





Чем больше , тем больше собственное число .



Значит ???

, если  - большое

1. 2 случай – граничные условия второго рода



 - собственный вектор



1. 3 случай – граничные условия третьего рода



1. 
2. 
3. 

Найдем : 



При - граничные условия второго рода.

При - граничные условия первого рода.

Свяжем с :





Собственные числа 

Для каждой частоты  свое.

Чем больше , тем меньше ,  - убывающая функция.